

Izsák Gyula

MECHANIKA III. MOZGÓ TESTEK MECHANIKÁJA 1–2.

ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ – FELADATOK

Anyagi pont mechanikája
A merev test kinematikája
A merev test kinetikája
Összetett szerkezetek vizsgálata
Forgattyús hajtómű kinematikája

Ütközések

Rezgések dinamikája

Egyszabadságfokú szabad csillapítatlan rezgés

Egyszabadságfokú szabad csillapított rezgés

Több szabadságfokú lengő rendszerek



Dunakavics
D · U · F · P · R · E · S · S

M
Ű
S
Z
A
K
I

K
Ö

N

Y

V

E

K

3.

Izsák Gyula

MECHANIKA III.

MOZGÓ TESTEK MECHANIKÁJA I.

© Dr. Izsák Gyula 2016

DUNAÚJVÁROSI EGYETEM

www.uniduna.hu

D=U=E PRESS

Kiadóvezető Németh István

Felelős kiadó Dr. habil András István

Felelős szerkesztő Nemeskéry Artúr

Tördelés Duma Attila

Készült a HTSART nyomdában

Felelős vezető Halász Iván

ISBN 978-963-9915-69-5

Izsák Gyula

MECHANIKA III. MOZGÓ TESTEK MECHANIKÁJA 1–2.

ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ – FELADATOK

Anyagi pont mechanikája
A merev test kinematikája
A merev test kinetikája
Összetett szerkezetek vizsgálata
Forgattyús hajtómű kinematikája

Ütközések

Rezgések dinamikája

Egyszabadságfokú szabad csillapítatlan rezgés

Egyszabadságfokú szabad csillapított rezgés

Több szabadságfokú lengő rendszerek



Dunakavics

D U E PRESS

Dunaújváros, 2016

M
Ű
S
Z
A
K
I

K
Ö
N
Y
V
E
K

3.

TARTALOM

<u>Előszó</u>	<u>7</u>
---------------------	----------

I. Fejezet

<u>Anyagi pont mechanikája.....</u>	<u>9</u>
<u>Példák anyagi pontra.....</u>	<u>11</u>
<u>A merev test kinematikája.....</u>	<u>15</u>
<u>Példák sík mozgást végző merev testre.....</u>	<u>17</u>
<u>A merev test kinetikája.....</u>	<u>22</u>
<u>Példák merev test tengely körüli forgó mozgására.....</u>	<u>24</u>
<u>Összetett szerkezetek vizsgálata.....</u>	<u>31</u>

II. Fejezet

<u>Ütközések.....</u>	<u>42</u>
<u>Példák ütközésekre.....</u>	<u>45</u>
<u>Rezgések dinamikája.....</u>	<u>52</u>
<u>Egy szabadságfokú szabad csillapítatlan rezgés.....</u>	<u>52</u>
<u>Egy szabadságfokú szabad csillapított rezgés.....</u>	<u>57</u>
<u>Gerjesztett rezgés.....</u>	<u>59</u>
<u>Több szabadságfokú lengő rendszerek.....</u>	<u>63</u>

ELŐSZÓ

A BsC bevezetése óta a *Mechanika III.* című tárgy tematikája jelentősen változott.

A tárgy óraszám csökkent, a korábbi példatárak, jegyzetek megjelenése akadozott. Jelentős hallgatói igény fogalmazódott meg egy rövidebb, tömörebb oktatási segédanyagra, jegyzetre.

Jelen jegyzetben minden fejezetet megelőz, egy rövid elméleti összefoglaló, majd kidolgozott és kidolgozásra váró feladatok következnek. Hasonló feladatokkal találkozhatnak a hallgatók az évközi zárthelyiken és a félévet lezáró vizsgán is.

Az elméleti összefoglalókban figyelembe vettük azt a tényt, hogy a középiskolában és a *Mérnöki fizika* című tantárgyban ezekkel már találkoztak. A Gépész és Műszaki tanár hallgatóknak az egyik fontos alapozó tárgyuk a *Mechanika*, amely nélkülözhetetlen a jó szakemberré váláshoz.

A jegyzetben található feladatok zöme kettő, három fajta módon is megoldható. Ezek felismerése és megvalósítása nagy örömet jelenthet a hallgatók számára.

Dunaújváros, 2015. november

Dr. Izsák Gyula

ANYAGI PONT MECHANIKÁJA

A mozgás pályája az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ függvénykapcsolattal jellemzett térgörbe. Ez egy vektor-skalár függvény.

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (\cdot = \frac{d}{dt} \text{ az idő szerinti deriváltat jelenti})$$

Ha a gyorsulás vektor ismert $\vec{a} = \vec{a}(t)$ akkor

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt + \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt + \vec{r}_0$$

Az egyenletesen gyorsuló egyenesvonalú mozgás összefüggései:

$a = \text{állandó}$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Az R sugarú körpályán állandó szöggyorsulással mozgó tömegpont összefüggései:

$\varepsilon = \text{állandó}$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^2$$

$\omega = \text{szögsebesség}$

$\varphi = \text{szögelfordulás}$

$$v = R \cdot \omega$$

$$s = R \cdot \varphi$$

$$a_e = R \cdot \varepsilon$$

$$a_n = v^2/R = R \cdot \omega^2$$

Ha a tömegpont számára előírjuk a pályát – kényszerpályán mozog, akkor

$$\vec{a} = a_e \cdot \vec{e} + a_n \cdot \vec{n}$$

a_e = érintő irányú gyorsulás

a_n = normális irányú gyorsulás (ez mindig a görbületi középpont felé mutat!)

$$a_e = \dot{v}$$

$$a_n = v^2/\rho \quad \rho = \text{pálya görbületi sugara}$$

Alaptételek

IMPULZUSTÉTEL

Differenciális alak

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F} \quad (m \cdot \vec{a} = \vec{F})$$

Integrális alak

$$\vec{I}_1 - \vec{I}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$$

PERDÜLETTÉTEL

Differenciális alak

$$\dot{\vec{\pi}}_A = \vec{M}_A \quad (\text{pontra})$$

$$\dot{\pi}_n = M_n \quad (\text{tengelyre})$$

Integrális alak

$$\vec{\pi}_{A1} - \vec{\pi}_{A0} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_A dt \quad (\text{pontra})$$

$$\pi_{n1} - \pi_{n0} = \int_{t_0}^{t_1} M_n dt \quad (\text{tengelyre})$$

MUNKATÉTEL

Differenciális alak

$$\dot{E} = P$$

Az anyagi pont mozgási energiájának időszerinti első deriváltja megegyezik az anyagi pontra ható összes erő teljesítményével.

Integrális alak

$$E_1 - E_0 = W_{01}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = F \cdot \Delta r_{01} \quad (\text{leggyakrabban})$$

A tételekben szereplő fontosabb mennyiségek kiszámítása

$$\vec{l} = m \cdot \vec{v} \quad E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\vec{\pi} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int P \cdot dt$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Példák anyagi pontra

1. Adott hengeres csavarvonal vektoregyenlete

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos t \cdot \vec{i} + R \cdot \sin t \cdot \vec{j} + m t \cdot \vec{k}$$

$R > 0$, $m < 0$, tehát jobbmenetű csavarról van szó.

Határozzuk meg

- a sebesség időfüggvényét,
- a gyorsulás időfüggvényét és a
- a csavarvonal ívhosszát!

$$t \in [0, 2\pi]$$

Megoldás:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -R \cdot \sin t \cdot \vec{i} + R \cos t \cdot \vec{j} + m \vec{k}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -R \cdot \cos t \cdot \vec{i} - R \sin t \cdot \vec{j}$$

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \cdot \sin t)^2 + (R \cdot \cos t)^2} \cdot dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + m^2} \cdot dt = 2\pi \cdot \sqrt{R^2 + m^2}$$

2. Egy síkmozgást végző tömegpont helyvektor – időfüggvénye adott.

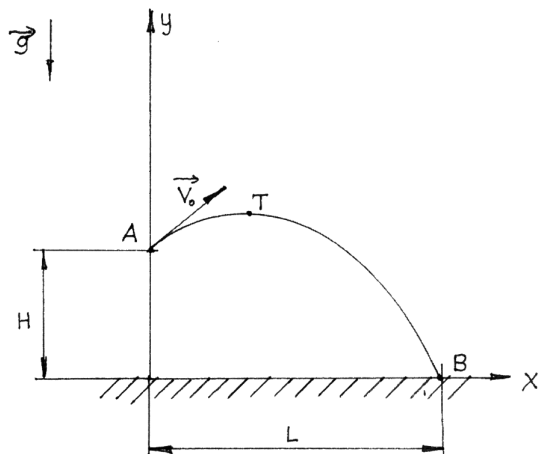
$$\vec{r}(t) = 6 \cdot \cos 2t \vec{i} + 3 \cdot \sin 2t \vec{j}$$

Adjuk meg a tömegpont sebességét és gyorsulását a $t = \pi/4$ időpillanatban!

Írjuk fel a pályagörbe egyenletét! (Kanonikus alakban.) Vázzuk a pályát.

3.

1. ábra



Az „A” pontból $\vec{v}_0$ kezdősebességgel ferdén elhajítunk egy tömegpontot. A közegellenállást és a föld forgásából adódó járulékos hatásokat is elhanyagoljuk.

Adatok:

$$H = 60 \text{ m}$$

$$\vec{v}_0 = 10 \vec{i} + 5 \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Számítsuk ki, hogy mennyi idő múlva és mekkora sebességgel érkezik a „B” pontba!

Hol és milyen szög alatt csapódik a talajra?

Adja meg a tetőpont koordinátáit!

Határozza meg a pálya görbületi sugarát a „B”-ben!

A ferde hajítást úgy fogjuk fel, mintha két egyenesvonalú mozgás szuperpozíciója lenne „x” irányban:

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_{0x} = 10$$

$$S_x = v_{0x} t = 10 t$$

„y” irányban

$$a_z = -g = -10$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = 5 - 10 t$$

$$S_y = H + v_{0y} t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = 60 + 5t - 5t^2$$

„B” pontban

$$s_{y0} = 0$$

$$60 + 5t - 5t^2 = 0 \quad /:-5$$

$$t^2 - 6 - 12 = 0$$

$$t_1 = 4 \text{ [s]}$$

$$t_2 = -3 \text{ [s]}$$

Fizikailag természetesen csak a $t = 4[s]$ lehetséges.

$$V_{Bx} = 10$$

$$V_{By} = 5 - 10 \cdot 4 = -35$$

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{10^2 + (-35)^2} = 36,4 \frac{m}{s}$$

$$tg\varphi_B = \left| \frac{v_{By}}{v_{Bx}} \right| = \left| \frac{-35}{10} \right| = 3,5$$

$$\phi_B = 74,05^\circ$$

A tetőpontban a függőleges irányú sebesség = 0 lesz.

$$0 = 5 - 10t \rightarrow t = 0,5 [s]$$

$$x_T = 10 \cdot 0,5 = 5 [m]$$

$$y_T = 60 + 5 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,5^2 = 61,25 [m]$$

Tehát a tetőpont koordinátái (5; 61,25) [m]

$a_{nB} = g \cdot \cos\phi_B = 2,7472 \text{ m/s}^2$, mivel a normál irányú gyorsulás a „B” pontban a gravitációs gyorsulásának a sebességre merőleges összetevője lesz.

A definíció alapján

$$a_{nB} = \frac{v_B^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{v_B^2}{a_{nB}} = \frac{1325}{2,7472} = 482,2 [m]$$

Természetesen tisztán matematikai úton is meghatározhatjuk a pálya görbületi sugarát.

A pálya másodfokú parabola, amelynek paraméteres egyenletrendszerét már felírtuk.

$$x=10t \quad \dot{x}=10 \quad \ddot{x}=0$$

$$y=60+5t-5t^2 \quad \dot{y}=5-10t \quad \ddot{y}=-10$$

Paraméteresen adott síkgörbe esetén

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{a „B”-nek a } t = 4 \text{ felel meg.}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|10 \cdot (-10) - 0|}{(10^2 + 35^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \rho = \frac{1325}{100} = 482,3 [m]$$

4. Bizonyítsuk be, hogy egy lövedék háromszor olyan magasra emelkedik, ha az emelkedési szög 60 fok, mintha 30 fok! (Azonos kezdősebesség esetén!) Igazoljuk, hogy a hajítás távolsága viszont nem változik! (Vízszintes síkon vagyunk.)

5. $v_0 = 20 \frac{m}{s}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítunk egy tömegpontot, milyen magasra emelkedik, mennyi idő múlva és milyen sebességgel érkezik vissza a talajra? $g = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

6. Egy anyagi pont mozgástörvénye ismert az időfüggvényében.

$$x(t) = e^t$$

$$y(t) = \ln(1 + t) \quad t \geq 0$$

$$z(t) = -5 t^2$$

Írja fel a helyvektor-időfüggvényt!

A $t_0 = 0$ időpillanatban adja meg a tömegpont helyét, sebességét és gyorsulását!

7. Ismert egy anyagi pont gyorsulás-időfüggvénye.

$$\vec{a} = 6 t \vec{i} - \frac{1}{(1+t)^2} \vec{j} - 10 \vec{k}$$

Adja meg a sebesség-időfüggvényt, valamint írja fel a mozgástörvényt!

Ismeretes, hogy a $t_0 = 0$ időpillanatban a tömegpont sebessége $\vec{v}_0 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, és az anyagi pont az origóban van.

8. Egy α hajlásszögű érdes lejtő „A” pontjából a lejtővel párhuzamosan v_0 kezdősebességgel elindítunk egy testet.

Mikor és mekkora sebességgel érkezik a test a lejtő alján lévő „B” pontba?

A „B” pont „s” távolságra van az „A” ponttól.

Adatok:

$$v_0 = 1 \text{ [m/s]}$$

$$g = 10 \text{ [m/s}^2 \text{]}$$

$$s = 2 \text{ [m]}$$

$$m = 5 \text{ [kg]}$$

$$\alpha = 40^\circ$$

$$\mu = 0,15$$

Készítsen vázlatot!

9. Az „m” tömegű anyagi pont a súlytalannak és tökéletesen hajlékonynak tekinthető fonálhoz kötött. A tömegpontot az „A” helyzetből v_A kezdősebességgel indítjuk. (2. ábra)

Adatok:

$$L = 1 \text{ [m]}$$

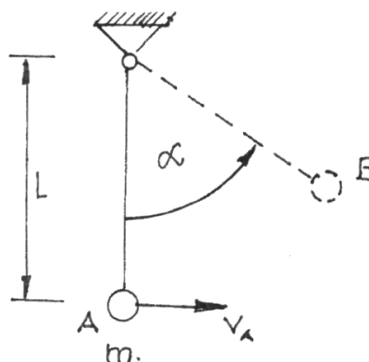
$$m = 2 \text{ [kg]}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$v_A = 5 \text{ [m/s]}$$

$$g = 10 \text{ [m/s}^2 \text{]}$$

2. ábra



Határozza meg, hogy mekkora sebességgel érik a tömegpont a „B” pontba!
Számítsa ki a „B” pontban a gyorsulást és a fonálerőt!

10. „H” magasságban „A”-ból vízszintesen elhajítunk vo kezdősebességgel egy tömegpontot. A tömegpont becsapódik az „L” távolságban lévő „B” pontba.

Adatok:

$$H = 45 \text{ [m]}$$

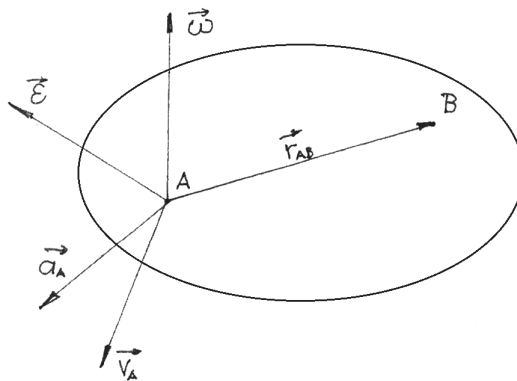
$$L = 60 \text{ [m]}$$

$$g = 10 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Határozza meg a V_0 kezdősebességet és az „A” pontban a pálya görbületi sugarát!
Készítsen vázlatot!

A merev test kinematikája

3. ábra



Merev testnek nevezzük az olyan testet, amelynek tetszőleges két pontjának a távolsága a mozgás folyamán állandó.

$$|\vec{r}_{AB}| = \text{állandó}$$

A merev test két pontjának sebessége közötti összefüggés;

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

A merev test sebességállapotát egyértelműen meghatározza egy vektorkettős, amely például lehet „A” pontjának $\vec{v}_A$ sebessége és a merev test pillanatnyi $\vec{\omega}$ szögsebessége. (3. ábra)
Mivel $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, ezért, ha a sebességek közötti összefüggést időszerint deriváljuk megkapjuk a gyorsulások közötti összefüggést.

$$\dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{AB}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$$

$$\dot{\vec{r}}_{AB} = \vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

A fentiek figyelembevételével megkapjuk a merev test két pontjának gyorsulása közötti összefüggést.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$$

A gyorsulásállapotot egyértelműen egy vektorhármassal határoz meg, például $(\vec{a}_A; \vec{\omega}; \vec{\varepsilon})$.
(3. ábra)

SÍKMOZGÁS ESETE

A műszaki gyakorlatban nagy jelentősége van az úgynevezett síkmozgásnak, amikor a merev test minden pontjának a sebessége egy síkkal párhuzamos. (Például álló tengely körüli pillanatnyi forgó mozgás.)

Síkmozgás esetén elegendő csak a merev testnek egy síkmetszetét vizsgálni.

Ez a sík legyen az „xy” sík.

Ilyenkor $\vec{\omega} \parallel \vec{\varepsilon} \parallel \vec{k}$

$$\vec{v}_A = v_{Ax} \cdot \vec{i} + v_{Ay} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a}_A = a_{Ax} \cdot \vec{i} + a_{Ay} \cdot \vec{j}$$

Gyorsulások közötti összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \varepsilon \cdot \vec{k} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB}$$

$$\text{mivel } \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AB}) - \vec{r}_{AB} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \cdot \vec{r}_{AB},$$

$$\text{mert } \vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AB} = 0$$

Itt előjöhethetnek a szerkesztő eljárások, bár napjainkban elavultnak számít (a számítástechnika fejlettsége miatt), de a megértéshez elengedhetetlenül szükséges.

SEBESSÉGÁBRA FOGALMA

Ha egy pontból felmérjük a síkmetszet összes pontjának sebességvektorát, akkor a sebességvektorok végpontjai által meghatározott síkidom lesz a sebességábra, amely hasonló az eredeti idomhoz (síkmetszethez), de $\vec{\omega}$ irányába elfordul 90° -kal.

A GYORSULÁSÁBRA FOGALMA

Ha egy pontból felmérjük a síkmetszet összes pontjának gyorsulásvektorát, akkor a gyorsulásvektorok végpontjai által meghatározott síkidom lesz a gyorsulásábra, amely hasonló az eredeti idomhoz, csak $\vec{\varepsilon}$ irányába elfordul $(\pi - \phi)$ szöggel.

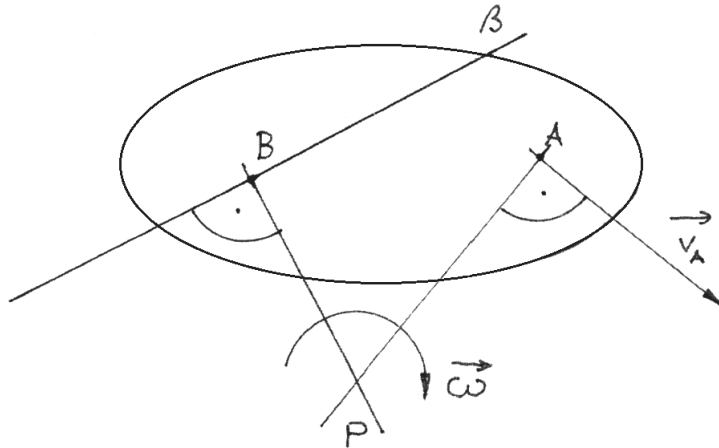
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

sebességpólus (P) az alapsík és a pillanatnyi forgástengely metszéspontja

$$\vec{v}_P = \vec{0}$$

A vektoriális szorzat tulajdonsága alapján a sebességpólus nagyon egyszerűen megszerkesztethető, ha ismerjük egy pont sebességét, és egy másik pont sebességének a hatásvonalát. (4. ábra)

4. ábra



Gyorsuláspólus (Q) az a pont, amelynek a pillanatnyi gyorsulása zérus. $\vec{a}_Q = \vec{0}$

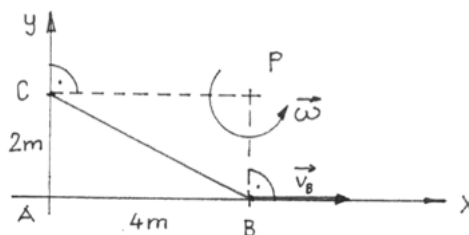
Példák sík mozgást végző merev testre

11. Egy merev test sík mozgást végez, háromszög alakú síkmetszetének csúcspontjai rendre $A(0:0)$ m, $B(4:0)$ $C(0:2)$ m. Adott $\vec{v}_B = 3 \vec{l} \left[\frac{m}{s} \right]$, és a „C” pont pillanatnyi sebességének a hatásvonalára megegyezik a y tengellyel.

- Készítsen léptékhelyes vázlatot!
- Adja meg a pillanatnyi sebességpólus koordinátáit!
- Határozza meg a merev test pillanatnyi szögsebesség vektorát!
- Számítsa ki az „A” és „C” pontok sebességét!
- Rajzolja meg a sebességábrát!
- Olvassa le a sebességábrából a háromszög súlypontjának a sebességét!

Megoldás:

Lépték: 1 m = 1 cm



A 4. ábra alapján könnyen megszerkesztettük a sebességpólust $\rightarrow P$ (4.2).

A pillanatnyi forgástengely „P”-én átmenő síkra merőleges tengely, ezért

$$|\vec{v}_B| = \omega |\vec{r}_{PB}| \rightarrow \omega = \frac{3}{2}$$

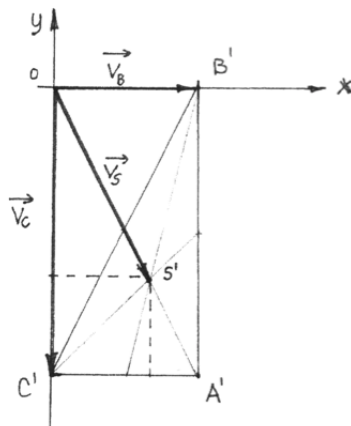
$$\vec{\omega} = 2,5\vec{k} \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} = 3\vec{i} + 1,5\vec{k} \times (-4\vec{i}) = 3\vec{i} - 6\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PC} = \vec{0} + 1,5\vec{k} \times (-4\vec{i}) = -6\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

A sebességábra jellege helyesen a következő lesz:

Lépték: 1 [m/s] = 1 cm



$$\vec{v}_s = 2\vec{i} - 4\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

Ellenőrizzük a súlypont sebességét számítással!

A súlypont koordinátái $s \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3} \right)$

$$\vec{v}_s = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{As} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 1,5\vec{k} \times \left(\frac{4}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} \right) = 2\vec{i} - 4\vec{j} \frac{m}{s}$$

12. Egy síkmozgást végző merev test síkmetszete egy háromszög.

Csúcspontjai rendre A(0,2; 0)m, B(-0,2; 0)m, C(0; 0,3)m

Adott:

$$\vec{a}_A = 2\vec{i} - 3\vec{j} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{a}_B = 3,6\vec{i} - \vec{j} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Határozzuk meg az ω szögsebességet és az ε szöggyorsulást!

Számítsa ki a „C” pont gyorsulását!

Megoldás:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = -0,4\vec{i}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \varepsilon \vec{k} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \cdot \vec{r}_{AB}$$

$$3,6\vec{i} + \vec{j} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \varepsilon \cdot \vec{k} \times (-0,4\vec{i}) - \omega^2(-0,4\vec{i})$$

$$3,6\vec{i} + \vec{j} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 0,4 \cdot \varepsilon \vec{j} + 0,4 \cdot \omega^2 \vec{i}$$

Mivel síkbeli esetben egy vektoregyenlet egyenértékű 2 db skaláris egyenlettel, ezért a következőket kapjuk:

$$3,6 = 2 + 0,4\omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \omega = 2 \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$1 = -3 - 0,4\varepsilon \quad \rightarrow \quad \varepsilon = -10 \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

$$\vec{\omega} = 2\vec{k} \left[\frac{1}{s} \right] \quad \vec{\varepsilon} = -10\vec{k} \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AC} - \omega^2 \vec{r}_{AC}$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 10\vec{k} \times (-0,2\vec{i} + 0,3\vec{j}) - 4(-0,2\vec{i} + 0,3\vec{j})$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{j} + 3\vec{i} + 0,8\vec{i} - 1,2\vec{j}$$

$$\vec{a}_C = 5,8\vec{i} - 2,2\vec{j} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Megjegyzés:

$\omega^2 = 4 \rightarrow \omega = \pm 2$ mi $\omega = 2$ választottuk, de $\omega = -2$ -vel is ugyanaz lenne a „C” pont gyorsulása.

Ellenőrizzük le a „C” pont gyorsulását a „B” pont gyorsulásának ismeretében!

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BC} - \omega^2 \vec{r}_{BC}$$

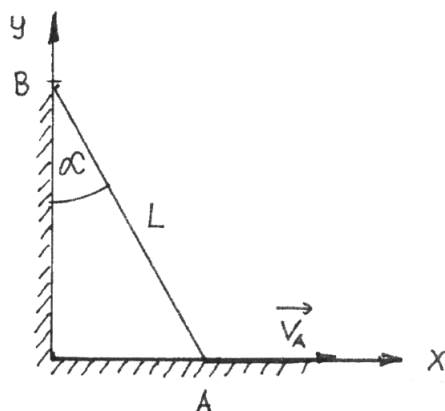
$$\vec{a}_C = 3,6\vec{i} + \vec{j} - 10\vec{k} \times (0,2\vec{i} + 0,3\vec{j}) - 4 (0,2\vec{i} + 0,3\vec{j})$$

$$\vec{a}_C = 3,6\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{j} + 3\vec{i} - 0,8\vec{i} - 1,2\vec{j}$$

$$\vec{a}_C = 5,8\vec{i} - 2,2\vec{j} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

13. Az 5. ábrán vázolt rúd alakú merev test mozgása közben „A” pontja állandóan az x tengelyen, „B” pontja pedig az y tengelyen van. A rúd „A” pontját v_A = állandó sebességgel kimozdítjuk.

5. ábra



$$L = 2 \text{ m}$$

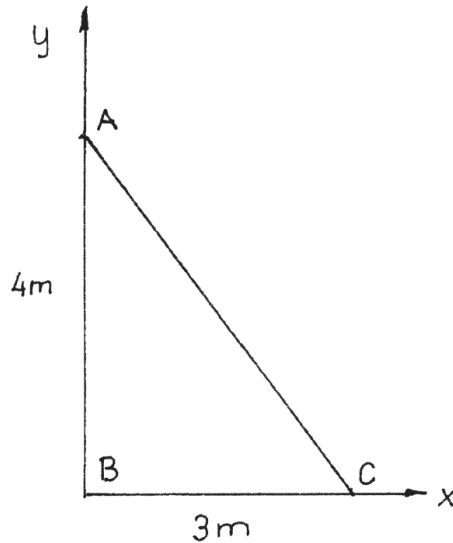
$$\alpha = 30^\circ$$

$$\vec{v}_A = 4\vec{i} \left[\frac{m}{s} \right]$$

- Határozza meg a pillanatnyi sebességpólust!
- Határozza meg a rúd pillanatnyi szögsebességét!
- Számítsa ki a „B” pont sebességét!
- Rajzolja meg a sebességábrát!
- Határozza meg a gyorsuláspólust!
- Határozza meg a rúd pillanatnyi szöggyorsulását és a „B” pont gyorsulását!
- Rajzolja meg a gyorsulásábrát!
- A gyorsulására alapján határozza meg a rúd felezőpontjának a gyorsulását!
- Mekkora lesz a „B” pont sebessége $t = 0,1$ [s] múlva?

14.

6. ábra



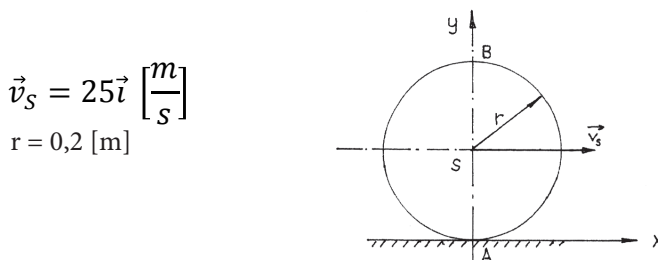
A 6. ábrán ábrázoltuk egy merev test háromszög alakú síkmetszetét.

Adott $\vec{v}_A = -6\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$ $\vec{v}_C = 8\vec{i} \left[\frac{m}{s} \right]$

- Szerkessze meg a sebességábrát!
- Olvassa le a „B” pont sebességét!
- Határozza meg a pillanatnyi szögsebességet!
- Számítsa ki a „B” pont gyorsulását, ha $\vec{\epsilon} = -3\vec{k} \left[\frac{1}{s^2} \right]$ és $\vec{a}_A = 2\vec{i} \left[\frac{m}{s^2} \right]$
- Szerkessze meg a gyorsulásábrát!
- A gyorsulásábrából olvassa le a „C” pont gyorsulását!

15.

7. ábra



$\vec{v}_S = 25\vec{i} \left[\frac{m}{s} \right]$
 $r = 0,2 \text{ [m]}$

A 7. ábrán vázolt henger a vízszintes síkon tiszta gördüléssel mozog. A súlypont sebessége a mozgás folyamán állandó. [1]

- Határozza meg a henger pillanatnyi szögsebességét és a „B” pont sebességét!
- Határozza meg az „A” és „B” pontok gyorsulását!
- Rajzolja meg a sebességábrát és a gyorsulásábrát!

[1] Csizmadia Béla
 (1993): *Mechanika III/B. Mozgó testek mechanikája.*
 Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

- Mi lesz az „A” pont pályagörbéje?
- Írja fel a pályagörbe egyenletét paraméteresen!

Útmutatás

A henger „A” pontja és a talaj között nem lehet sebességkülönbség, $\vec{v}_A = \vec{0}$, $A = P$

Az $\vec{a}_S = \vec{0}$, $\rightarrow S = Q$

A merev test kinetikája

A jelenlegi tanulmányaink során csak olyan testekkel foglalkozunk, amelyek homogének (sűrűségük állandó, $\rho = \text{állandó}$), a kettős szimmetria fennáll (forgástestek), a pillanatnyi szögsebességvektor ($\vec{\omega}$) a súlyponti tehetetlenségi főtengellyel egybeesik vagy vele párhuzamos.

Ha a testnek van szimmetriatengelye az már egyben tehetetlenségi főtengely is.

ALAPFOGALMAK

Impulzus $\vec{I} = m \cdot \vec{V}_S$

A merev test súlyponti perdülete $\vec{\pi}_S = \theta_S \cdot \vec{\omega}$

$$\theta_S = \int r^2 dm$$

$$\theta_S = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \quad (\text{korong, henger, társa})$$

$$\theta_S = \frac{m \cdot l^2}{12} \quad (\text{karcsú prizmatikus rúd})$$

$$\theta_S = \frac{2}{5} m \cdot r^2 \quad (\text{gömb})$$

Steiner tétel $\theta_a = \theta_S + t^2 \cdot m$

Valamely súlyponti tengellyel párhuzamos idegen tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték egyenlő, a súlyponti tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték, plusz a két tengely távolságának a négyzete, szorozva a merev test tömegével.

A merev test mozgási energiája

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v_S^2 + \frac{1}{2} \theta_S \cdot \omega^2 \quad \text{a súlyponti jellemzőkkel}$$

$$E = \frac{1}{2} \theta_a \cdot \omega^2 \quad \text{ha az „a” a pillanatnyi forgástengely}$$

Teljesítmény

$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (erő szorozva a merev test azon pontjának a sebességével, ahol az erő támad)

$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$ (nyomaték teljesítménye)

Munka

$$W = \int P dt = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int \vec{F} d\vec{r}$$

$$W = \int P dt = \int \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt = \int \vec{M} d\vec{\varphi}$$

Egyszerű esetekben

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} + \vec{M} \cdot \Delta \vec{\varphi}$$

Statikus kiegyensúlyozás

Célja: hogy a forgástengelyt súlyponti tengellyé tegyük.

Dinamikus kiegyensúlyozás

Célja: hogy a forgó rész forgástengelyét tehetetlenségi főtengellyé kell tenni.

IMPULZUSTÉTEL

$$\vec{I} = \vec{F} \quad (m \cdot \vec{a}_s = \vec{F})$$

(Newton II. törvénye!)

A merev test mozgásmennyiségének időszerinti első deriváltja egyenlő a merev testre ható összes külső erő összegvektorával.

Integrális alak

$$\vec{I}_1 - \vec{I}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$$

A merev test mozgásmennyiségének megváltozása a $(t_0; t_1)$ időintervallumban egyenlő a merev testre ható összes külső erő impulzusával.

PERDÜLETTÉTEL

Differenciális alak

$$\pi_n = M_n \quad (\theta_n \cdot \varepsilon = M_n)$$

A merev test tengelyre számított perdületének idő szerinti első deriváltja egyenlő, a merev testet terhelő külső erőrendszer ugyanarra a tengelyre számított nyomatékával.

Integrális alak

$$\pi_{n1} - \pi_{n0} = \int_{t_0}^{t_1} M_n dt$$

A merev test valamely „n” tengelyre számított perdületének ($t_0; t_1$) időintervallumbeli megváltozása egyenlő, a merev testet terhelő külső erőrendszer „n” tengelyre számított nyomatékának időszerinti integráljával.

MUNKATÉTEL

Differenciális alak

$$\dot{E} = P$$

A merev test kinetikai energiájának idő szerinti első deriváltja egyenlő, a testre ható összes külső erő teljesítményével.

Integrális alak

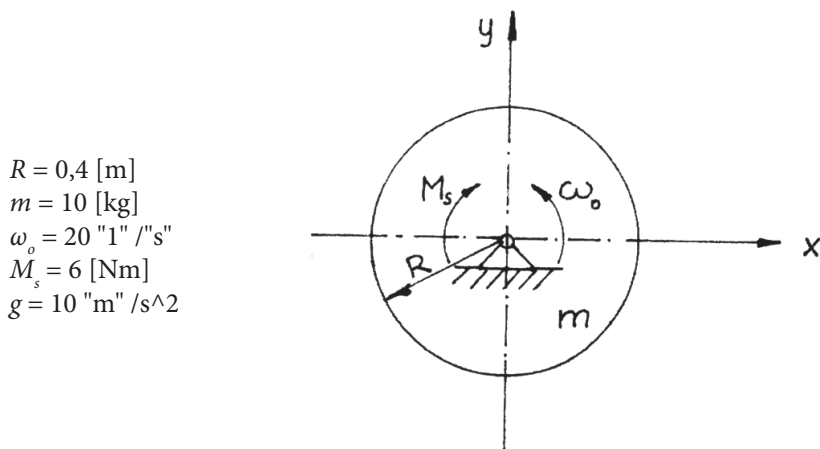
$$E_B - E_A = W_{AB}$$

A merev test kinetikai energiájának A, B pontok közötti megváltozása egyenlő a testre ható összes külső erő A, B pontok között végzett munkájával.

Példák merev test tengely körüli forgó mozgására

16.

8. ábra



A 8. ábrán az m tömegű, R sugarú homogén körhenger a súlypontján átmenő Z tengely körül forgómozgást végez. Mennyi idő múlva és mekkora szögelfordulás megtétele után áll meg a test az M_s csapágysúrlódási nyomaték hatására?

Megoldás

Az idő meghatározásához célszerű olyan alaptételt felírni, amelyben szerepel. Írjunk fel perdülettétel integrális alakját a forgástengelyre.

$$\pi_{Z1} = \pi_{Zo} = \int M_Z dt$$

$$\theta_Z \omega_1 - \theta_Z \omega_o = -M_s t$$

$\omega_1=0$, mert megáll a korong

$$\theta_Z = \frac{1}{2} m \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,4^2 = 0,8 [kg \cdot m^2]$$

$$t = 2,67 [s]$$

A szögelfordulás meghatározásához célszerű felírni a munkatétel integrális alakját

$$E_1 - E_o = W_{ol}$$

$$\frac{1}{2} \theta_Z \omega_1^2 - \frac{1}{2} \theta_Z \omega_o^2 = -M_s \varphi$$

$$-\frac{1}{2} 0,8 \cdot 20^2 = -6\varphi$$

$$-160 = -6\varphi$$

$$\varphi = 26,67 [\text{rad}]$$

Természetesen más úton is megoldható a feladat. Ha a merev test álló tengely körül pillanatnyi forgómozgást végez, akkor célszerű felírni perdülettétel differenciális alakját a forgástengelyre.

$$\dot{\pi}_Z = M_Z$$

$$\theta_Z \varepsilon = M_s$$

$$\vec{\varepsilon} \parallel \vec{M}_s \parallel -\vec{k}$$

$$\varepsilon = \frac{6}{0,8} = 7,5 \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

A körhenger egyenletesen lassuló körmozgást végez

$$\varepsilon = -7,5$$

$$\omega = \omega_o - \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_o t - \varepsilon/2 t^2$$

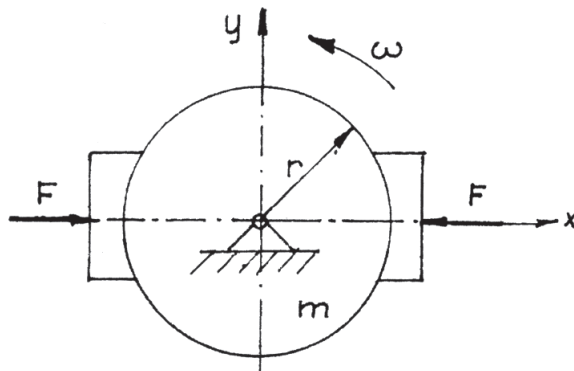
$$0 = 20 - 7,5t \rightarrow t = 2,67 [s]$$

$$\varphi = 20t - 7,5 \cdot 1/2 \cdot t^2 = 20 \cdot 2,67 - 1/2 \cdot 7,5 \cdot 2,67^2 = 26,67 [\text{rad}]$$

17.

9. ábra

$$\begin{aligned} r &= 500 \text{ [mm]} \\ m &= 20 \text{ [kg]} \\ F &= 100 \text{ [N]} \\ \omega &= 10 \text{ [1/s]} \\ \mu &= 0,1 \end{aligned}$$



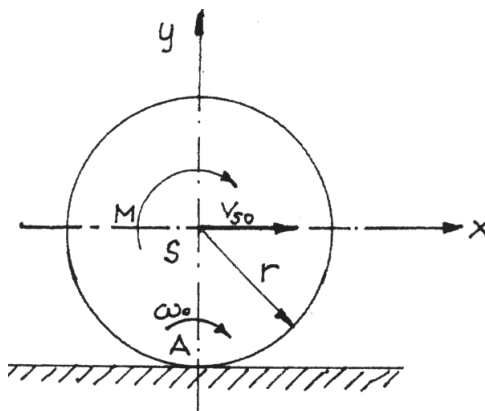
Egy kétpofás fék vázlatos rajza látható a 9. ábrán. A r sugarú, m tömegű, homogén tömegeloszlású merev korong a középpontján átmenő z tengely körül forog ω szögsebességgel. A merev fékpofát F erővel szorítjuk a korong kerületéhez.

- A fékezés megkezdésétől számítva mennyi idő múlva áll meg a korong?
- Mekkora szögelfordulás megtétele után áll meg?
- Hányat fordul megállásig?

18. A vázolt henger a vízszintes síkon tiszta görbüléssel mozog. (10. ábra)

10. ábra

$$\begin{aligned} r &= 0,4 \text{ [m]} \\ m &= 20 \text{ [kg]} \\ v_{so} &= 1,6 \text{ [m/s]} \\ M &= 9,6 \text{ [Nm]} \\ g &= 10 \text{ [m/s}^2] \end{aligned}$$



Határozza meg:

- A henger pillanatnyi szögsebességét (ω_o).
- A test szöggyorsulását (ϵ).
- A támasztóerő-rendszert (F_{ax} , F_{Ay}).
- A gördüléshez szükséges minimális nyugvásbeli súrlódási tényező értékét (μ_{omin}).
- Mennyi lesz a súlypont sebessége (v_{sl}) $s = 2 \text{ m}$ út megtétele után?

Megoldás

A tiszta görbülés miatt $A = P$, $v_A = 0$, ezért az „A” ponton átmenő síkra merőleges „a” tengely lesz a pillanatnyi forgástengely.

$$v_{so} = r \cdot \omega_o \quad \omega_o = \frac{v_{so}}{r} = \frac{1,6}{0,4} = 4 \left[\frac{1}{s} \right]$$

Az ε meghatározásához perdülettétel differenciális alakját írunk fel a forgástengelyre:

$$\theta_a \cdot \varepsilon = M$$

$$\theta_a = \theta_s + r^2 \cdot m = \frac{1}{2} m \cdot r^2 + m \cdot r^2 = \frac{3}{2} m \cdot r^2 = 4,8 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$\varepsilon = \frac{M}{\theta_a} = \frac{9,6}{4,8} = 2 \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

Mivel a súlypont egyenes pályán mozog, ezért csak érintő irányú gyorsulása lesz.

$$a_s = r \varepsilon = 0,4 \cdot 2 = 0,8 \text{ [m/s}^2]$$

Az impulzustétel differenciális alakjából

$$m \cdot a_s = F_{Ax} \rightarrow F_{Ax} = 20 \cdot 0,8 = 16 \text{ [N]}$$

$$0 = F_{Ay} - G \rightarrow F_{Ay} = G = m \cdot g = 20 \cdot 10 = 200 \text{ [N]}$$

$$\mu_{omin} \geq \left| \frac{F_{Ax}}{F_{Ay}} \right| = \frac{16}{200} = 0,08$$

Ha az egyik helyzetben ismerjük a mozgásjellemzőt és keressük egy másik helyzetben, akkor munkatétel integrális alakját célszerű felírni:

$$E_1 - E_o = W_{ol}$$

$$\frac{1}{2} \theta_a \omega_1^2 - \frac{1}{2} \theta_a \omega_o^2 = M \varphi \quad \varphi = \frac{s}{r} = \frac{2}{0,4} = 5$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 4^2 = 9,6 \cdot 5$$

$$2,4 \omega_1^2 - 38,4 = 48$$

$$v_{s1} = r \cdot \omega_1 = 0,4 \cdot 6 = 2,4 \text{ [m/s]}$$

Mivel a súlypont végig egyenes pályán mozog állandó gyorsulással, ezért egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez.

$$a = 0,8 \text{ [m/s}^2]$$

$$v_1 = v_o + at$$

$$s = v_o t + [a/2] t^2$$

$$2 = 1,6t + 0,4 \cdot t^2$$

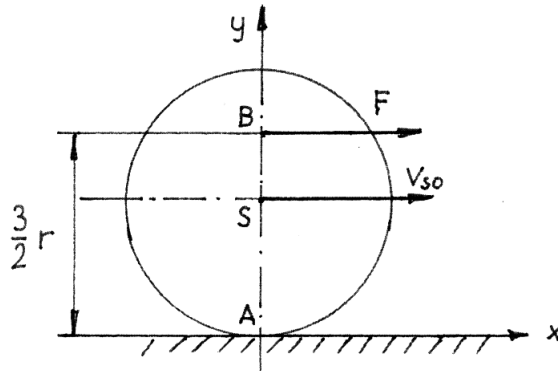
$$t^2 + 4t - 5 = 0 \rightarrow t = 1 \text{ [s]}$$

$$v_{s1} = v_{so} + a \cdot t = 1,6 + 0,8 \cdot 1 = 2,4 \text{ [m/s]}$$

19. A 11. ábrán vázolt henger a vízszintes síkon tiszta gördüléssel mozog.

11. ábra

$$\begin{aligned} r &= 0,4 \text{ [m]} \\ m &= 20 \text{ [kg]} \\ v_{so} &= 1,2 \text{ [m/s]} \\ F &= 120 \text{ [N]} \\ g &= 10 \text{ [m/s}^2\text{]} \end{aligned}$$



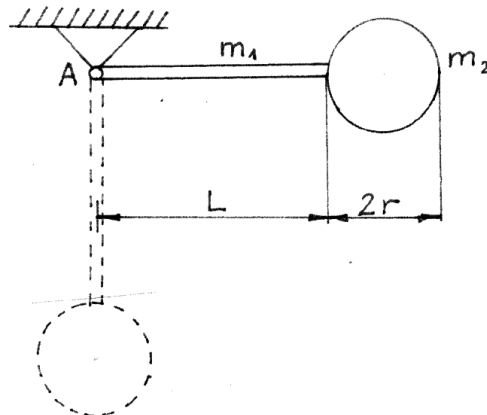
Határozza meg:

- A pillanatnyi szögsebességet (ω_o)!
- A test szöggyorsulását (ϵ)!
- A súlypont gyorsulását!
- A kényszererőt!
- A gördüléshez szükséges minimális nyugvásbeli súrlódási tényező értékét!

20. A 12. ábrán súrlódásmentesen csapágyazott fizikai ingát vázoltunk. Az inga m_1 tömegű rúdtól és m_2 tömegű tárcsából áll.

12. ábra

$$\begin{aligned} L &= 0,8 \text{ [m]} \\ m_1 &= 6 \text{ [kg]} \\ r &= 0,2 \text{ [m]} \\ m_2 &= 3 \text{ [kg]} \\ g &= 10 \text{ [m/s}^2\text{]} \end{aligned}$$

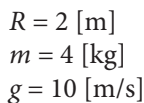


Határozza meg:

- A súlypont helyét!
- A vízszintes helyzetében magára hagyott fizikai inga szögsebességét a függőleges helyzetében!
- A függőleges helyzetbeli kinetikus energiát!
- A reakcióerőt a függőleges helyzetben!
- A inga perdületét az „A” ponton átmenő síkra merőleges „a” tengelyre függőleges helyzetben!

21. A 13. ábrán látható m tömegű R sugarú korong „ A ” ponton átmenő síkra merőlegesen „ a ” tengely körül forog.

13. ábra



A függőleges helyzetben $-\omega_1$ ismeretében – számítsa ki a korong

- 22.

14. ábra



A 14. ábrán egy tárcsa alakú forgó részt láthatunk. A súlypontja nincs rajta a forgástengelyen, ezért a forgó rész statikailag nem kiegyensúlyozott.

$$r = 100 \text{ [mm]} \quad b = 40 \text{ [mm]} \quad m = 10 \text{ [kg]} \quad e = 0,1 \text{ [mm]}$$

A „ e ” miatt fellép „ F ” tehetetlenségi erő.

$$F = m \cdot e \cdot \omega^2 \quad (\omega = 2\pi \cdot n)$$

Mint látható a tehetetlenségi erő a szögsebesség négyzetével arányos.

$$\begin{aligned} \text{Az } F &= 2,74 \text{ [N]} && \rightarrow && \text{ha } n = 500 \text{ [1/min]} \\ F &= 274,16 \text{ [N]} && \rightarrow && \text{ha } n = 5000 \text{ [1/min]} \end{aligned}$$

A statikai kiegyensúlyozatlanságot – például – úgy tudjuk megszüntetni, hogy a tárcsa palástjára a súlyponttal ellentétes oldalon m_o tömeget szerelünk fel. Ha $m_o \cdot r = m \cdot e$ teljesül, akkor a súlypont a forgástengelyre kerül.

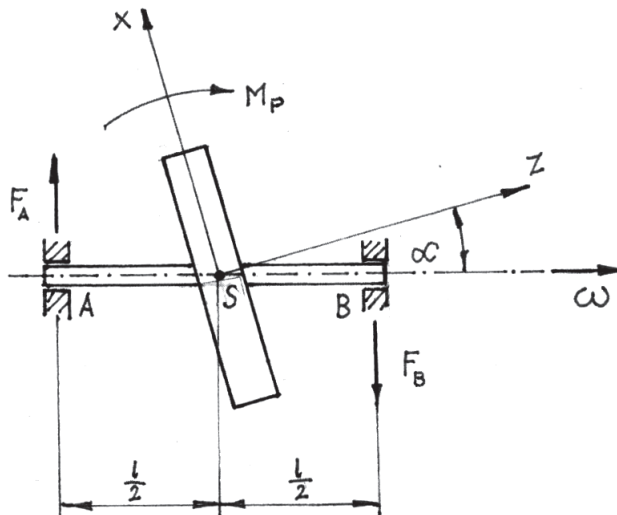
$$m_o = m \cdot \frac{e}{r} = 10 \cdot \frac{0,1}{100} = 0,01 \text{ [kg]}$$

Az m_o felszerelése után minden fordulaton kiegyensúlyozott a forgó rész.

23.

15. ábra

$$\begin{aligned} l &= 0,5 \text{ [m]} \\ \alpha &= 5^\circ \\ n &= 3000 \text{ [1/min]} \end{aligned}$$



A 15. ábrán egy tárcsa alakú forgórészt láthatunk, amelynek súlypontja rajta van a forgástengelyen, de a forgástengely nem esik egybe a tehetetlenségi főtengellyel (dinamikus kiegyensúlyozatlanság).

Ebben az esetben a tehetetlenségi erők eredője egy erőpár, amelynek a nyomatéka merőleges lesz a rajz síkjára (M_p). Ez a nyomaték ω szögsebességgel forog a forgástengely körül. Jelen esetben:

$$M_p = \frac{1}{2} (\theta_z - \theta_x) \omega^2 \sin 2\alpha$$

Az egyszerűség kedvéért a 15. ábrán látható tárcsa adatai megegyeznek a 14. ábrán láthatóval.

$$\theta_z = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,1^2 = 0,05 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$\theta_x = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (3r^2 + b^2) = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot (3 \cdot 0,1^2 + 0,04^2) = 0,0263 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 3000}{60} = 314,16 \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$M_p = \frac{1}{2} (0,05 - 0,0263) \cdot 314,16^2 \cdot \sin 10^\circ = 203,09 \text{ [Nm]}$$

Az M_p ismeretében a csapágyakban ébredő erők már könnyen kiszámíthatók.

$$F_A = F_B = \frac{M_p}{l} = \frac{203,09}{0,5} = 406,18 \text{ [N]}$$

Ezek az erők jelentős többlet igénybevételt jelentenek a csapágysakra és az egész szerkezetre. Itt az M_p nyomatékot úgy tudjuk megszüntetni, hogy a forgórészt dinamikus kiegyensúlyozzuk.

A bemutatott 22. és 23. számú példán felhívtuk a figyelmet a kiegyensúlyozatlanság fontosságára. Ezek a hatások harmonikusan változó gerjesztő erőrendszert jelentenek, ami oka lehet káros rezgések keletkezésének. [2]

Az alaptárgyunknak nem feladata a kiegyensúlyozási módszerek és kiegyensúlyozó gépek ismertetése. Ezekkel, valamint a rezgéscsökkentés módszereivel a *Rezgésvizsgálatok* című tárgy keretén belül még részletesen foglalkozni fognak.

Összetett szerkezetek vizsgálata

Ebben a fejezetben egy szabadságfokú összetett szerkezetek kinematikáját és kinetikáját egyszerre fogjuk bemutatni.

Ezen szerkezetek egyes tagjai a szerkezettel összhangban síkmozgást végeznek. Ilyen szerkezetek például az egyszerű emelőszerkezetek, fogaskerék-hajtások stb. A szerkezet tagjai általában jól elkülöníthető elemi haladómozgást és pillanatnyi forgómozgást végző merev testekből állnak. Sokszor szerepel összekapcsoló elemként az úgynevezett ideális kötél.

Ideális kötél:

- súlytalan,
- nyújthatatlan,
- tökéletesen hajlékony,
- csak húzóerőt képes felvenni.

[2] Hegedüs Attila (2009): *A műszaki rezgésstan alapjai*. Gödöllő: Szent István Egyetem Kiadó.

SZERKEZETEK VIZSGÁLATA KLASSZIKUS MÓDSZERREL

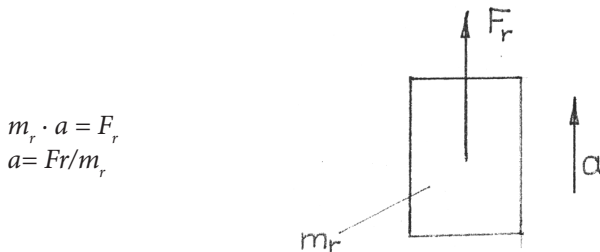
A módszert akkor célszerű használni, ha az összes elem mozgásjellemzőit keressük és az elemek között fellépő erőhatásokra is kíváncsiak vagyunk. A feladatmegoldás során szétszedjük a szerkezetet (alkalmas helyeken) elemi haladómozgást és pillanatnyi forgómozgást végző részekre. Majd az impulzustétel differenciális alakját írunk fel a haladómozgást végző elemekre és perdülettétel differenciális alakját írunk fel a forgómozgást végző elemeknél (a forgástengelyre). Ezek után még felírunk elegendő számú kinematikai kapcsolódási egyenletet. Így többismeretlenes inhomogén algebrai egyenletrendszerhez jutunk.

A többismeretlenes algebrai egyenletrendszer megoldásához sokféle megbízható matematikai eljárás áll rendelkezésünkre (algoritmusok, programok).

SZERKEZETEK VIZSGÁLATA REDUKCIÓVAL

Az eljárást akkor célszerű alkalmazni, ha csak az egyes elem mozgásjellemzőjére vagyunk kíváncsiak. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy haladómozgást végző elem pillanatnyi gyorsulását (a), vagy forgómozgást végző elem pillanatnyi szöggyorsulását (ε) keressük.

16. ábra

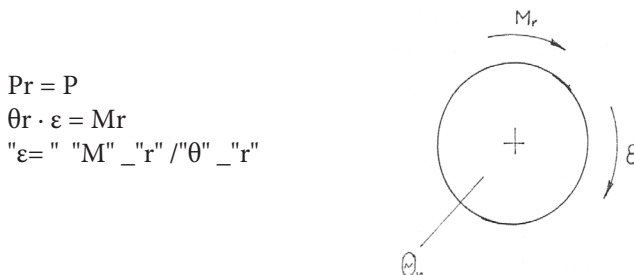


A 16. ábrán bejelölt $m_r - t$ (redukált tömeg) abból a feltételből kapjuk meg, hogy a redukált rendszer mozgási energiája megegyezik az egész szerkezet mozgási energiájával.

$$E_r = E$$

Az F_r (redukált erő) kiszámítható abból a feltételből, hogy a redukált rendszerre ható erő pillanatnyi teljesítménye megegyezik az egész szerkezetre ható külső erőrendszer pillanatnyi teljesítményével.

17. ábra



A 17. ábrán látható θ_r (redukált tehetetlenségi nyomaték) kiszámítható abból a feltételből, hogy $E_r = E$

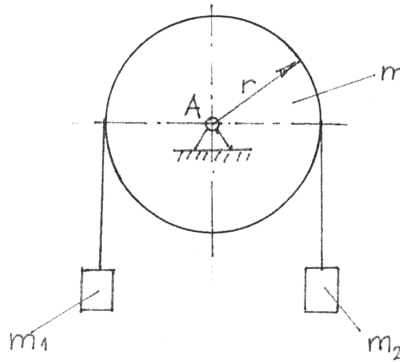
Az M_r (redukált nyomaték) pedig abból a feltételből, hogy $P_r = P$

Valójában a redukciós módszer alapja a munkatétel differenciális alakjának az alkalmazása $\dot{E} = P$

24.

18. ábra

$$\begin{aligned} m &= 120 \text{ [kg]} \\ m_1 &= 60 \text{ [kg]} \\ m_2 &= 80 \text{ [kg]} \\ r &= 0,4 \text{ [m]} \\ g &= 10 \text{ [m/s}^2\text{]} \end{aligned}$$



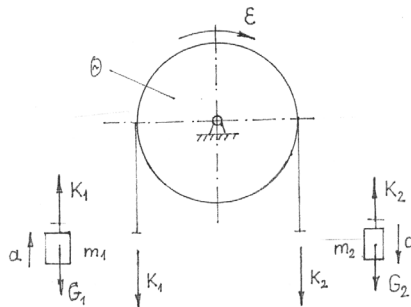
A 18. ábrán vázolt szerkezet pillanatnyilag nyugalomban van. A henger az „A” ponton átmenő síkra merőleges „a” tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A kötélt ideális, a dobbon nem csúszik meg és a végein m_1 és m_2 tömegek vannak.

Határozza meg:

- A kötélen függő tömegek gyorsulását.
- A tárcsa szöggyorsulását.
- A kötélerőket.
- Azt az időt, amíg az m_2 tömeg elérte a $V = 3 \text{ [m/s]}$ sebességet.

Először a feladatot klasszikus módszerrel oldjuk meg, ezért szétszedtük a szerkezetet megfelelő részekre, majd bejelöltük az ébredő erőket és a szükséges mozgáselemzőket a hatás-ellenhatás törvényének figyelembe vételével. (Lásd 19. ábra)

19. ábra



Az egyenleteket felírva a következőket kapjuk:

$$m_1 a = K_1 - G_1$$

$$\begin{aligned}
 m_2 a &= G_2 - K_2 \\
 \theta \cdot \varepsilon &= r K_2 - r K_1 \\
 \alpha &= r \varepsilon \\
 G_1 &= m_1 \cdot g = 600 \text{ N} \\
 G_2 &= m_2 \cdot g = 800 \text{ N} \\
 \theta &= 1/2 m \cdot r^2 = 9,6 \text{ kgm}^2 \\
 \varepsilon &= a/r = a/0,4
 \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve az első három egyenletbe, a harmadik egyenletet osztva „r”-el kapjuk

$$\begin{aligned}
 60a &= K_1 - 600 \\
 80a &= 800 - K_2 \\
 60a &= K_2 - K_1
 \end{aligned}$$

A három egyenletet összeadva kapjuk

$$\begin{aligned}
 200a &= 200 \\
 a &= 1 \text{ [m/s}^2\text{]} \\
 \varepsilon &= a/0,4 = 2,5 \text{ [1/s}^2\text{]} \\
 K_1 &= 660 \text{ [N]} \\
 K_2 &= 720 \text{ [N]}
 \end{aligned}$$

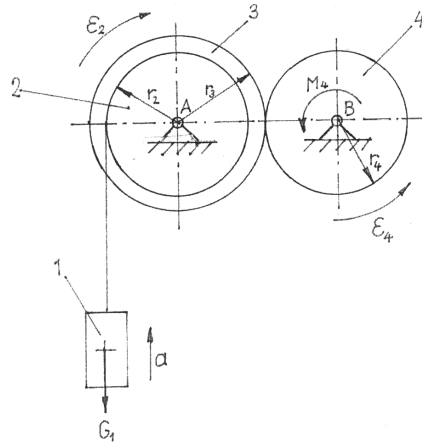
Redukciós módszerrel ellenőrizzük az ε -t.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= Mr/\theta r \\
 E_r &= E \\
 \frac{1}{2} \theta_r \cdot \omega^2 &= \frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \theta \cdot \omega^2 & v &= r \cdot \omega \\
 \theta_r &= m_1 \cdot r_2 + m_1 \cdot r_2 + \theta \\
 \theta_r &= 60 \cdot 0,42 + 80 \cdot 0,42 + 9,6 = 32 \text{ [kgm}^2\text{]} \\
 P_r &= P \\
 M_r \cdot \omega &= G_2 \cdot v - G_1 \cdot V \\
 M_r &= 800 \cdot 0,4 - 600 \cdot 0,4 = 80 \text{ [Nm]} \\
 \varepsilon &= M_r/\theta_r = 80/32 = 2,5 \text{ [1/s}^2\text{]} \\
 V &= a \cdot t & t &= V/a = 3/1 = 3 \text{ [s]}
 \end{aligned}$$

Tehát m_2 tömeg 3 [s] múlva éri el a 3 [m/s] sebességet.

25.

20. ábra



A 20. ábrán egy emelőszerkezet látható vázlatosan. Az emelést M_4 hajtónyomaték biztosítja. A (3) és (4) fogaskerekek szabadon elfordulhatnak az „a” és „b” tengelyek körül és egymáson csúszás mentesen gördülnek. Az (1) jelű teher a (2) jelű kötéldobhoz ideális kötéllel csatlakozik. [3]

Adatok:

$m_1 = 1000$ [kg]	$M_4 = 2480$ [Nm]
$m_2 = 500$ [kg]	$r_2 = r_4 = 0,4$ [m]
$m_3 = 1000$ [kg]	$r_3 = 0,8$ [m]
$m_4 = 375$ [kg]	$g = 10$ [1/s ²]

Határozza meg:

- a teher gyorsulását (a),
- a kötélen ébredő kötelerőt (K),
- a kötéldob szöggyorsulását (ϵ_2)

Megoldás:

$$\theta_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot r_2^2 = \frac{1}{2} = 500 \cdot 0,4^2 = 40 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot r_2^2 = \frac{1}{2} = 500 \cdot 0,4^2$$

$$\theta_4 = \frac{1}{2} m_4 \cdot r_4^2 = \frac{1}{2} = 375 \cdot 0,4^2 = 30 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$G_1 = m_1 \cdot g = 1000 \cdot 10 = 10000 \text{ [N]}$$

A kapcsolódások miatt

$$v = r_2 \cdot \omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = v/0,4 \quad (v = \text{teher sebessége})$$

[3] Égert
J.-Nagy
Z. (2009):
Mechanika-
mozgástan.
Győr:
Universitas.

$$\omega_3 = \omega_2$$

$$\omega_3 \cdot r_3 = \omega_4 \cdot r_4 \quad \rightarrow \quad \omega_4 = 5v$$

A gyorsulást most célszerű redukciós módszerrel meghatározni, mégpedig úgy, hogy a haladó mozgást végző teherhez redukálunk.

$$(m_r \cdot a = F_r)$$

A bevezetőben említettek alapján

$$E_r = E$$

$$\frac{1}{2} = m_r \cdot v^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 + \frac{1}{2} (\theta_2 + \theta_3) \omega_2^2 + \frac{1}{2} \theta_4 \omega_4^2$$

Beírva az értékeket az egyenletet osztva v_2 -tel és szorozva 2-vel kapjuk:

$$m_2 = 1000 + \frac{360}{0,16} + 30 \cdot 25$$

$$m_r = 4000 \text{ [kg]}$$

$$P_r = P$$

$$F_r \cdot v = M_4 \cdot \omega_4 - G_1 \cdot v$$

$$Fr \cdot v = 2480 \cdot 5v - 10000 \cdot v$$

$$Fr = 2400 \text{ [N]}$$

$$a = \frac{F_r}{M_r} = \frac{2400}{4000} = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A kötélrőt (1) jelű tagra felírt impulzusétel differenciális alakjából kaphatjuk meg.

$$m_1 \cdot a = K - G_1$$

$$K = m_1 \cdot a + G_1 = 1000 \cdot 0,6 + 10000 = 10600 \text{ [N]}$$

$$a = r_2 \cdot \varepsilon_2 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{r_2} = \frac{0,6}{0,4} = 1,5 \left[\frac{1}{\text{s}^2} \right]$$

26.

21. ábra

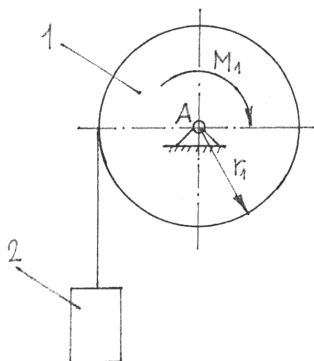
$$m_1 = 10 \text{ [kg]}$$

$$m_2 = 5 \text{ [kg]}$$

$$r_1 = 1 \text{ [m]}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$M_1 = 40 \text{ [Nm]}$$



A 21. ábrán egy egyszerű emelőszerkezetet vázoltunk.

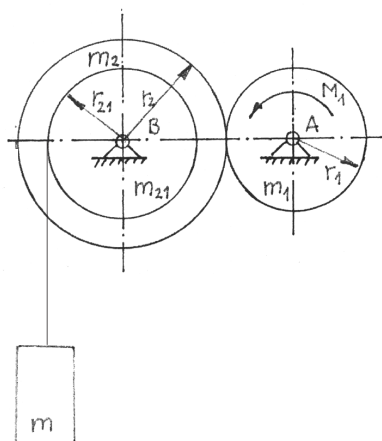
Határozza meg:

- a teher gyorsulását,
- a kötelerőt,
- a támasztó erőrendszert! [3]

27.

22. ábra

$$\begin{aligned} m &= 600 \text{ [kg]} \\ m_1 &= 20 \text{ [kg]} \\ m_{21} &= 30 \text{ [kg]} \\ m_2 &= 50 \text{ [kg]} \\ r_1 &= 0,2 \text{ [m]} \\ r_{21} &= 0,3 \text{ [m]} \\ r_2 &= 0,5 \text{ [m]} \\ M_1 &= 800 \text{ [Nm]} \\ g &= 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \end{aligned}$$



A 22. ábrán vázolt emelőszerkezet „a” jelű tengelyét M_2 nyomaték hajtja meg.

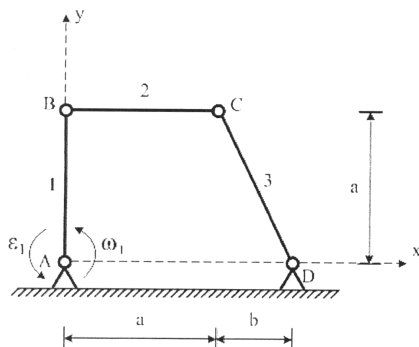
Határozza meg:

- a teher gyorsulását,
- a kötelerőt,
- a kerek szöggyorsulását,
- a fogaskerek között fellépő kapcsolóerő tangenciális összetevőjét!

28. Adott a 23. ábrán vázolt egyszerű mechanizmus geometriája és 1 jelű rúdjának szögsebessége és szöggyorsulása.

23. ábra

$$\begin{aligned} a &= 1,0 \text{ [m]} \\ b &= 0,5 \text{ [m]} \\ \omega_2 &= 5 \text{ [1/s]} \\ \varepsilon_2 &= 2 \text{ [1/s}^2\text{]} \end{aligned}$$



Határozza meg:

- a „B” pont sebességét,
- a „B” pont gyorsulását, a 2-es és 3-as jelű rudak szögsebességét,
- a „C” pont sebességét,
- a 2-es és 3-as jelű rudak szöggyorsulását,
- a „C” pont gyorsulását!

Megoldás:

Peremfeltételek:

$$\bar{v}_A = \bar{0}$$

$$\bar{v}_D = \bar{0}$$

$$\bar{a}_A = \bar{0}$$

$$\bar{a}_D = \bar{0}$$

Mivel az „A” és „D” rögzített pontok:

$$\bar{r}_{AB} = 0\bar{i} + 1\bar{j}$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{AB} = \bar{v}_A + \omega \cdot \bar{k} \times \bar{r}_{AB}$$

$$\bar{v}_B = \bar{0} + 5 \cdot \bar{k} \times \bar{j} = -5\bar{i}$$

$$\bar{v}_B = -5\bar{i} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{AB} - \bar{\omega}_1^2 \cdot \bar{r}_{AB}$$

$$\bar{a}_B = \bar{0} + \bar{\varepsilon} \times 2\bar{k} \times 1\bar{j} - 5^2 \cdot 1\bar{j}$$

$$\bar{a}_B = -2\bar{i} - 25\bar{j} \frac{m}{s^2}$$

$$(2) \quad \bar{v}_{C2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{BC}$$

$$(3) \quad \bar{v}_{C3} = \bar{v}_D + \bar{\omega}_3 \times \bar{r}_{DC}$$

$$\bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \cdot \bar{k} \times 1\bar{i} = \bar{v}_D + \bar{\omega}_3 \cdot \bar{k} \times (-0,5\bar{i} + \bar{j})$$

$$-5\bar{i} + \omega_2 \bar{j} = \bar{0} - 0,5 \cdot \omega_3 \bar{j} - \omega_3 \bar{i}$$

$$i: -5 = -\omega_3$$

$$j: \omega_2 = 0,5\omega_3$$

Mivel egy síkbeli vektoregyenlet egyenértékű kettő darab skaláris egyenlettel. (Két síkbeli vektor akkor egyenlő, ha a jobb és bal oldalon az $\bar{i}$ melletti és a $\bar{j}$ melletti is megegyeznek.)

$$\omega_3 = 5 \text{ [1/s]}$$

$$\omega_2 = -0,5 \cdot 5$$

$$\omega_2 = -2,5 \text{ [1/s]}$$

$$\bar{v}_{C2} = \bar{v}_{C3}$$

$$-5\bar{i} - 2,5\bar{j} = -5\bar{i} - 2,5\bar{j}$$

$$\bar{v}_C = -5\bar{i} - 2,5\bar{j} \frac{m}{s}$$

$$\bar{a}_{C2} = \bar{a}_{C3}$$

$$(2) \quad \bar{a}_{C2} = \bar{a}_B + \bar{\varepsilon}_2 \times \bar{r}_{BC} - \bar{\omega}_2^2 \cdot \bar{r}_{BC} \quad \bar{r}_{BC} = 1,0\bar{i} + 0\bar{j}$$

$$(3) \quad \bar{a}_{C3} = \bar{a}_D + \bar{\varepsilon}_3 \times \bar{r}_{DC} - \bar{\omega}_3^2 \cdot \bar{r}_{DC} \quad \bar{r}_{DC} = 0,5\bar{i} + 1\bar{j}$$

$$\bar{a}_{C2} = -2\bar{i} - 25\bar{j} + \varepsilon_2 \cdot \bar{k} \times 1,0\bar{i} - (-2,5^2 \cdot 1,0\bar{i})$$

$$\bar{a}_{C2} = -2\bar{i} - 25\bar{j} + 1,0 \varepsilon_2 \bar{j} - 6,25\bar{i}$$

$$\bar{a}_{C2} = -8,25\bar{i} - 25\bar{j} + 1,0 \varepsilon_2 \bar{j}$$

$$\bar{a}_{C2} = \bar{a}_{C3}$$

$$-8,25\bar{i} - 25\bar{j} + 1,0\varepsilon_2\bar{j} = -0,5\varepsilon_3\bar{j} - \varepsilon_3\bar{i} + 12,5\bar{i} + 25\bar{j}$$

$$i: -8,25 = \varepsilon_3\bar{i}$$

$$j: -25\bar{j} + \varepsilon_3 = -0,5\varepsilon_3 - \varepsilon_3 - 25$$

$$\varepsilon_3 = 20,75 \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

$$-25 + \varepsilon_2 = (-0,5 \cdot 20,75) - 25$$

$$\varepsilon_2 = -10,375 \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

Ellenőrzés:

Igaz, ha teljesül: $\bar{a}_{C2} = \bar{a}_{C3}$

$$-8,25\bar{i} - 25\bar{j} = 10,375\bar{j} = -0,5 \cdot 20,75\bar{j} - 20,75\bar{i} + 12,5\bar{i} - 25\bar{j}$$

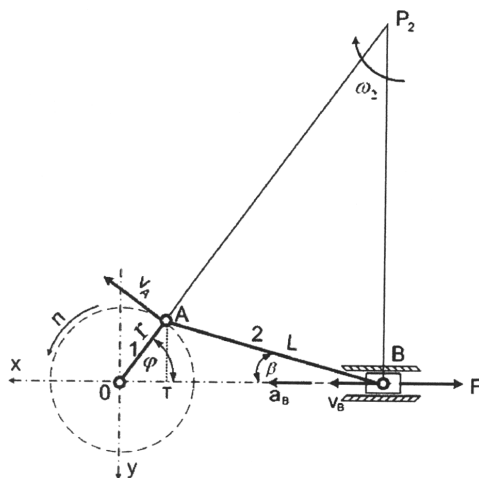
$$-8,25\bar{i} - 35,375\bar{j} = -10,375\bar{j} - 20,75\bar{i} + 12,5\bar{i}$$

$$-8,25\bar{i} - 35,375\bar{j} = -8,25\bar{i} + 35,375\bar{j}$$

29. A 24-es ábrán egy egyszerű egyenes elvezetésű forgattyús hajtómű vázlata látható.

24. ábra

$r = 0,05 \text{ [m]}$
 $n = 100 \text{ [1/s]}$
 $L = 0,2 \text{ [m]}$
 $\phi = 60^\circ$
 $T = \text{talppont}$
 $r/L = \lambda = 1/4$
 A fordulatszám állandó!



Határozza meg:

- az „A” pont sebességét,
- a hajtórúd (2) szögsebességét,
- a „B” pont sebességét,
- azt a szöget (ϕ) aminél a „B” pont sebessége maximális lesz,
- a „B” pont gyorsulását közelítő formula segítségével.

Megoldás:

$$\omega = 2 \cdot \pi n = 628 \text{ 1/s}$$

$$v_A = r \cdot \omega = 0,05 \cdot 628 = 31,4 \text{ m/s}$$

$$\overline{AT} = r \cdot \sin \phi = L \cdot \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{r}{L} \cdot \sin \phi$$

$$\beta = \arcsin(0,25 \cdot \sin 60^\circ) = 12,5^\circ$$

$$\overline{OB} = \overline{OT} + \overline{TB} = r \cdot \cos \phi + L \cdot \cos \beta = 0,05 \cdot \cos 60^\circ + 0,2 \cdot \cos 12,5^\circ = 0,22 \text{ [m]}$$

$$\overline{OP_2} = \frac{\overline{OB}}{\cos \phi} = \frac{0,02}{0,5} = 0,44 \text{ [m]}$$

$$\overline{AP_2} = \overline{OP_2} - r = 0,44 - 0,05 = 0,39 \text{ [m]}$$

A ω_2 meghatározása:

$$\omega_2 \cdot \overline{AP_2} = V_A \rightarrow \omega_2 = \frac{V_A}{\overline{AP_2}} = \frac{3,14}{0,39} = 80,52 \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$\overline{P_2B} = \overline{OB} \cdot \operatorname{tg} \varphi = 0,22 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 0,38105$$

$$v_B = \omega_2 \cdot \overline{P_2B} = 80,52 \cdot 0,38105 = 30,68 \left[\frac{m}{s} \right]$$

Ha az r/l viszony $1/5$ és $1/4$ közé esik, akkor jól használhatók az alábbi formulák.

$$v_B \cong r \cdot \omega_0 \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\varphi \right) \lambda v_B$$

$$\cong r \cdot \omega_0 \left(\sin \omega_0 t + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\omega_0 t \right)$$

$$a_B \cong r \cdot \omega_0^2 \cdot (\cos \varphi + \lambda \cdot \cos 2\varphi) \lambda a_B$$

$$= \dot{v}_B = r \cdot \omega_0^2 \cdot (\cos \omega t + \lambda \cdot \cos 2\omega t)$$

Lásd részletesebben [1], [4], [5].

Figyelem!

A közelítéssel számolt v_B mindössze $0,09$ [m/s] -al több mint a pontos érték.

A szemlélet alapján látszik, hogy a v_B akkor lesz maximális, ha a hajtókar és a hajtórúd egymásra merőleges.

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{L}{r} = \frac{0,2}{0,05} = 4 \rightarrow \varphi' = 75,96^\circ$$

$$v_{Bmax} = 5 \cdot \omega_0 \left(\sin \varphi' + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\varphi' \right)$$

A maximális értékeket ne számoljuk a közelítő formulák alapján, mert igen jelentős eltérések lehetnek!

$$a_B = 0,05 \cdot 628^2 (\cos 60^\circ + 0,25 \cdot \cos 120^\circ) = 7394,7 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Természetesen tisztán matematikai módszerekkel is meghatározhatók ezek az értékek.

Elmozdulás – Időfüggvény:

$$x_B = r \cdot \cos \varphi + L \cdot \cos \beta$$

$$x_B = r \cdot \cos \omega t + L \cdot \cos [\arcsin (\lambda \cdot \sin \omega t)]$$

$$v_B = \dot{x}_B$$

$$a_B = \dot{v}_B = \ddot{x}_B$$

Tekintettel arra, hogy a kitérés – időfüggvény is többszörösen összetett függvény, ezért ennek az idő szerinti első deriváltja is igen bonyolult lesz. Az idő szerinti második deriváltja szinte kezelhetetlenné válik. Erre még a *Mechanizmusok* című tantárgy keretén belül visszatérünk.

[1] Csizmadia Béla (1993): *Mechanika III/B. Mozgó testek mechanikája*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

[4] Bruno Assmann (1992): *Technische mechanik band 3: Kinematik und kinetik*. München–Wien: R. Oldenbourg Verlag.

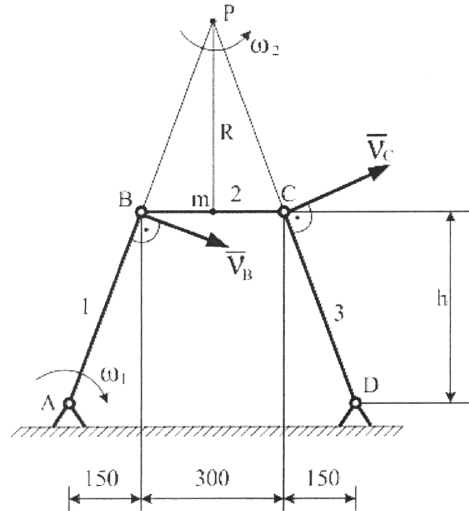
[5] Izsák Gyula (1997): *Forgattyús mechanizmus kinematikai vizsgálata*. Dunaújváros: ME DFK Közleményei XVIII.

[6] Sályi
István (1982):
Dinamika
I. Budapest:
Nemzeti Tan-
könyvkiadó.

30.

25. ábra

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 50 \text{ [1/s]} \\ h &= 400 \text{ [mm]} \\ m &= 8 \text{ [kg]}\end{aligned}$$



A 25. ábrán egy négytagú, négycsuklós, síkbeli, karos mechanizmus látható. A rudak súlytalanak tekinthetők.

A $\overline{BC}$ rúd (2) középpontjában m tömegű anyagi pontnak tekinthető test van felerősítve.

Az 1-es jelű rúd ($\overline{AB}$) az „A” ponton átmenő és az ábra síkjára merőleges „a” tengely körül ω_1 szögsebességű elemi forgómozgást végez.

Határozza meg a tömegpont mozgási energiáját a vázolt helyzetben! [6]

Ütközések

Ütközésről beszélünk, ha két test mozgásállapota egymásra hatás következtében – rugalmas, vagy részben rugalmas alakváltozás közben – rövid idő alatt megváltozik.

Feltételezzük, hogy az ütköző testek szilárd testek (alakváltozásra képesek). Az ilyen anyagú testeket rugalmas testeknek nevezzük.

Csak síkmozgást végző testek ütközésével foglalkozunk.

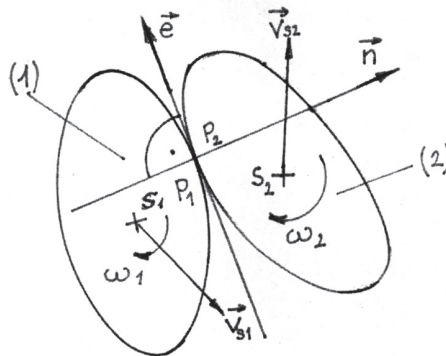
Feltevéseink:

- az ütköző testek rugalmasak,
- az ütközés igen rövid idő alatt történik,
- az érintkezés alatt a testek helyzetében nem következik be változás,
- az ütközés következtében fellépő erők mellett a többi erő elhanyagolható,
- az érintkező felületek, simák ($\mu = 0$).

Anyagtörvények:

- Tökéletesen rugalmas testek ütközése: a testek deformációjára fordított energiát teljes mértékben visszanyerjük.
- Tökéletesen képlékeny testek ütközése: a testek deformációjára fordított energia teljes egészében alakváltozási munkává alakul és nem nyerhető vissza.
- Rugalmas-képlékeny testek ütközése: a testek deformációjára fordított energia részben visszanyerhető.

26. ábra



P_1, P_2 – a testek érintkező pontjai

e – az érintkezési pontban a felületek érintő egységvektora

n – az ütközés normálisa (normálvektor, a felületekre merőleges egységvektor)

Jelölések az ábrán:

v_{s1}, v_{s2} – a testek súlyponti sebességei az ütközést megelőző pillanatban

u_{s1}, u_{s2} – a testek súlyponti sebességei az ütközés utáni pillanatban

ω_1, ω_2 – a testek szögsebességei

AZ ÜTKÖZÉSEK OSZTÁLYOZÁSA

Centrikus ütközés: az ütközési normális átmegy mindkét test súlypontján

Egyenes ütközés: a súlyponti sebességek az ütközési normálisba esnek.

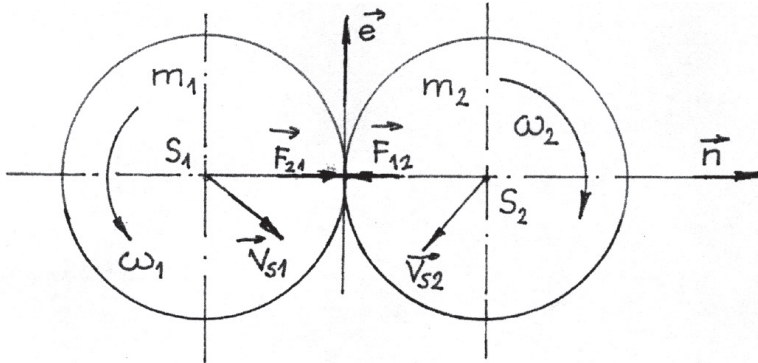
Ferde ütközés: A súlyponti sebességek nem esnek az ütközés normálisába.

Excentrikus ütközés: az ütközési normális nem megy át mindkét test súlypontján.

Mi a továbbiakban csak a *centrikus ütközésekkel* foglalkozunk.

A centrikus ütközés során a testek szögsebességei nem változnak meg. (A perdülettétel differenciális alakjából következik.)

27. ábra



A 27. ábrán vázoltuk m_1 és m_2 tömegű testek ütközését. Az impulzustétel differenciális alakját felírva az egész rendszerre kapjuk:

$$m_1 \cdot \vec{v}_{S1} + m_2 \cdot \vec{v}_{S2} = m_1 \cdot \vec{u}_{S1} + m_2 \cdot \vec{u}_{S2} = m \cdot \vec{v}_S,$$

ahol $m = m_1 + m_2$

$$\vec{v}_S = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_{S1} + m_2 \cdot \vec{v}_{S2}}{m_1 + m_2}$$

Bevezetve a k ütközési tényezőt

$$k = \frac{m_1 |u_{S1n} - v_{Sn}|}{m_1 |v_{S1n} - u_{Sn}|} = \frac{m_2 |u_{S2n} - v_{Sn}|}{m_2 |v_{S2n} - u_{Sn}|}$$

Az ütközési tényező: az eltávolodási szakaszban bekövetkező impulzus-változás és a közeledési szakaszban bekövetkező impulzus-változás hányadosa.

- Ha $k = 1$ – tökéletesen rugalmas ütközés,
 $k = 0$ – tökéletesen rugalmatlan ütközés (tökéletesen képlékeny),
 $0 < k < 1$ – rugalmas-képlékeny (valóságos) ütközés.

Könnyen belátható, hogy $u_{S1e} = v_{S1e}$; $u_{S2e} = v_{S2e}$

Az ütköző testeknek az ütközési normálisra merőleges (érintő irányú) sebességösszetevőik nem változnak.

Felírva az impulzustétel normálirányú alakját és a mozgásmennyiség visszaalakulását kifejező összefüggést – a megoldás részletezése nélkül – kapjuk:

$$u_{S1n} = v_{S1n} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1 + k) \cdot (v_{S1n} - v_{S2n})$$

$$u_{S2n} = v_{S2n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (1 + k) \cdot (v_{S1n} - v_{S2n})$$

A maradó alakváltozásra fordított mozgási energia:

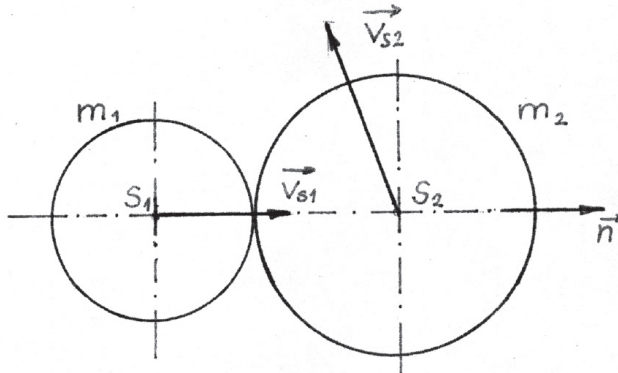
$$\Delta E = \frac{1}{2} (1 - k^2) \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (v_{s1n} - v_{s2n})^2. \quad [1]$$

Példák ütközésekre

1.

28. ábra

$$\begin{aligned} k &= 0,6 \\ m_1 &= 10 \text{ [kg]} \\ m_2 &= 20 \text{ [kg]} \\ v_{s1} &= 20\tau \left[\frac{m}{s} \right] \end{aligned}$$



A 28. ábrán m_1 és m_2 tömegű gömb alakú testek (golyók) centrikus ütközését vázoltuk.

Határozzuk meg a súlypontok ütközés utáni sebességét!

$$\vec{n} = \vec{i}, \quad \vec{e} = \vec{j},$$

Mivel centrikus ütközéskor az ütközési normálisra merőleges sebességösszetevők nem változnak meg, ezért

$$\begin{aligned} u_{s1y} &= v_{s1y} = 0 \\ u_{s2y} &= v_{s2y} = 30 \end{aligned}$$

A normális irányú (x irányú) ütközés utáni sebességösszetevőket az előző oldalon található képletekbe történő behelyettesítéssel egyszerűen számítható.

$$u_{s1x} = 20 - \frac{20}{10 + 20} \cdot (1 + 0,6) \cdot (20 - (-10)) = -12$$

$$u_{s2x} = -10 + \frac{10}{10 + 20} \cdot (1 + 0,6) \cdot (20 - (-10)) = 6$$

Tehát a súlypontok ütközés utáni sebessége lesz

$$\vec{u}_{s1} = -12\tau \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\vec{u}_{s2} = 6\tau + 30\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

[1] Csizmadia Béla (1993):
Mechanika III/B.
Mozgó testek mechanikája.
Budapest:
Nemzeti Tankönyvkiadó.

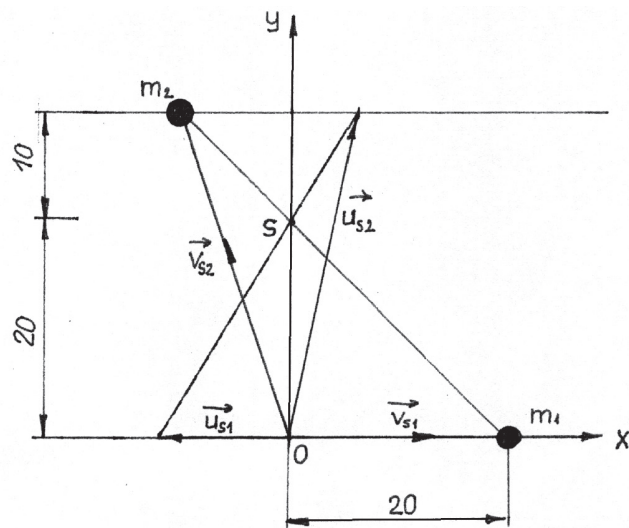
Oldjuk meg a feladatot Maxwell-féle szerkesztő eljárással is!

Először meghatározzuk m_1 és m_2 tömegek közös súlypontjának a sebességét:

$$\vec{v}_s = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_{s1} + m_2 \cdot \vec{v}_{s2}}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 20\vec{i} + 20 \cdot (-10\vec{i} + 30\vec{j})}{10 + 20} = 20\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

29. ábra

10 [m/s] = 2 [cm]



$$u_{s1n} = k \cdot (v_{sn} - v_{s1n}) = 0,6 \cdot (0 - 20) = -12$$

Szerkesztés menete a 29. ábrán a következő:

Először felmérjük az origóból az adott $\vec{v}_{s1}$ és $\vec{v}_{s2}$ sebességeket, majd bejelöljük a rendszer „s” súlypontját. A u_{s1n} -t kiszámítás után felmérjük az origóból, a végpontját összekötvé a súlyponttal, azt meghosszabbítva kimetszi az $\vec{u}_{s2}$ végpontját.

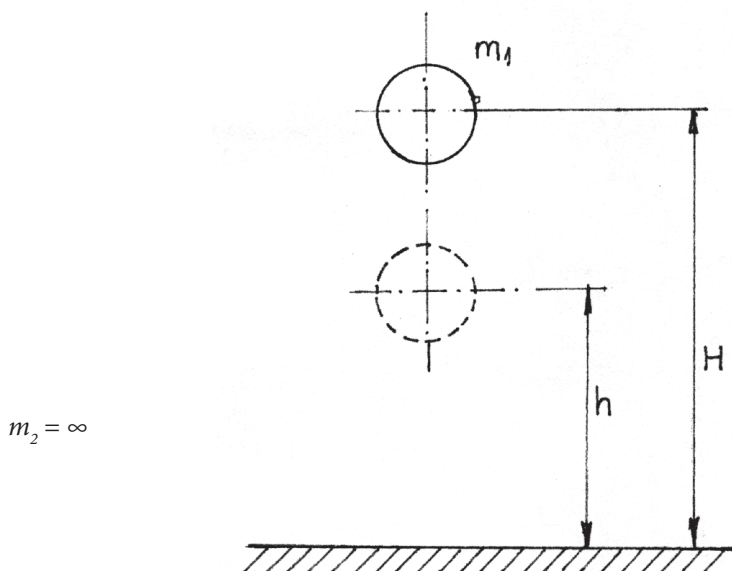
Az ábrából leolvasva

$$\vec{u}_{s1} = -12\vec{i} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\vec{u}_{s2} = 6\vec{i} + 30\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

2.

30. ábra



Az m_1 tömegű, gömb alakú testet H magasságból kezdősebesség nélkül a vízszintes sima síkra ejtjük. A test a vízszintes síkkal ütközve h magasságig emelkedik. (30. ábra)

Határozzuk meg az ütközési tényező értékét!

v_b = becsapódási sebesség

v_v = visszaindulási sebesség

Az energiamegmaradás törvényét felírva

$$m_1 \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_b^2$$

$$v_b = \sqrt{2gH}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_v^2 = m_1 \cdot g \cdot h$$

$$v_v = \sqrt{2gh}$$

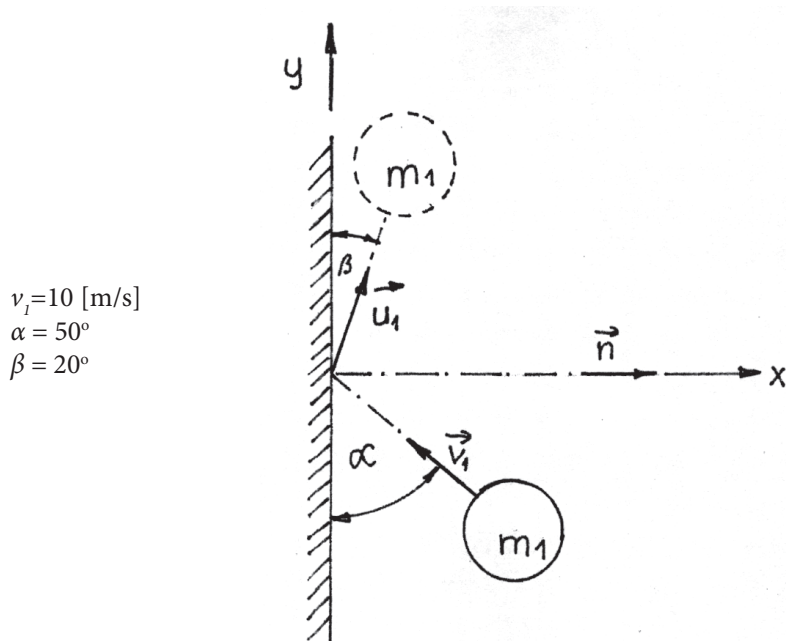
$$v_v = k \cdot v_b \quad (k = \text{ütközési tényező})$$

$$k = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}}$$

$$k = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H}}$$

Egy acélgolyót $H = 25[\text{cm}]$ magasságból, kezdősebesség nélkül, a vízszintes sima cél lapra leejtve, onnan $h = 16 [\text{cm}]$ magasságig emelkedik.
Határozza meg az ütközési tényező értékét!

31. ábra



Az m_1 tömegű gömb alakú test függőleges sima falnak ütközik v_1 sebességgel (31. ábra).
Határozza meg a test ütközés utáni u_1 sebességét, valamint a k ütközési tényező értékét!

Megoldás számítással:

$$u_{1y} = v_{1y} = v_1 \cdot \cos\alpha = 10 \cdot \cos 50^\circ = 6,43 [\text{m/s}]$$

$$u_1 = u_{1y} / \cos\beta = 6,84 [\text{m/s}]$$

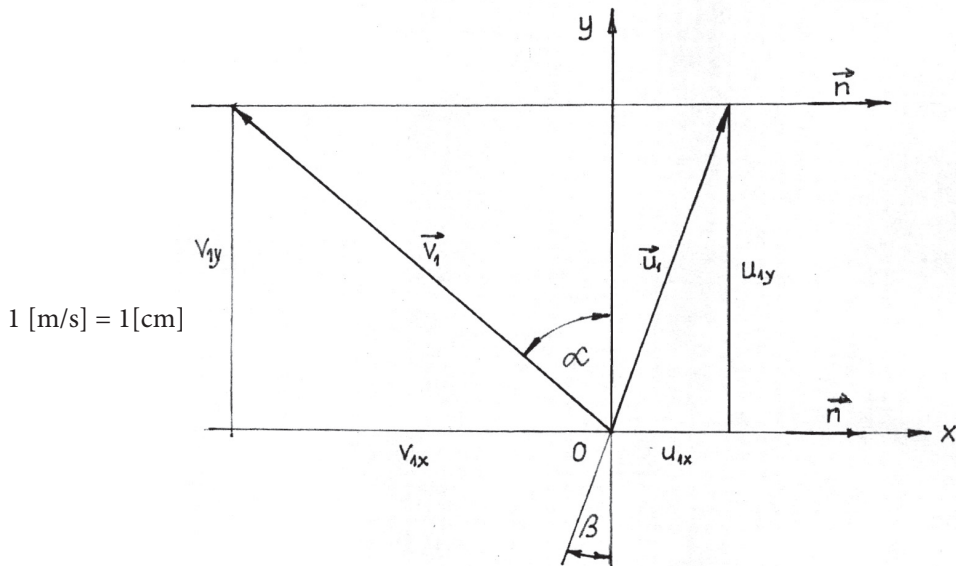
$$v_{1x} = v_1 \cdot \sin\alpha = 7,66 [\text{m/s}]$$

$$u_{1x} = u_1 \cdot \sin\beta = 2,34 [\text{m/s}]$$

$$k = u_{1x} / v_{1x} = 0,3$$

Oldjuk meg a feladatot szerkesztéssel is!

32. ábra



A 32. ábrán az ütközés utáni u_1 sebességet meghatároztuk szerkesztéssel.
Az ábrából $u_1 = 6,85$ [m/s]

A k ütközési tényezőt a szerkesztés alapján is meghatározhatjuk.

$$k = \frac{u_{1x}}{v_{1x}} = \frac{2,4}{7,6} = 0,31$$

5.

Az m_1 és m_2 tömegű testek centrikusan ütköznek (33. ábra).

33. ábra

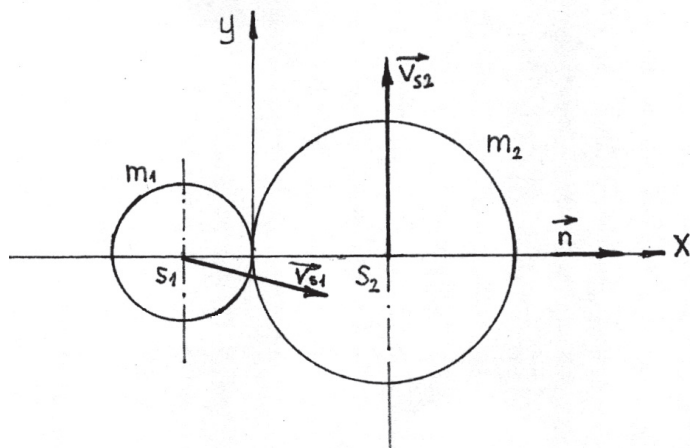
$$m_1 = 10 \text{ [kg]}$$

$$m_2 = 30 \text{ [kg]}$$

$$\vec{v}_{s1} = 40\vec{i} - 10\vec{j} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$\vec{v}_{s2} = 30\vec{j} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$k = 0,8$$



Határozzuk meg a súlypontok ütközés utáni sebességét!

A feladatot szerkesztéssel oldjuk meg.

A szerkesztéshez szükséges számítások

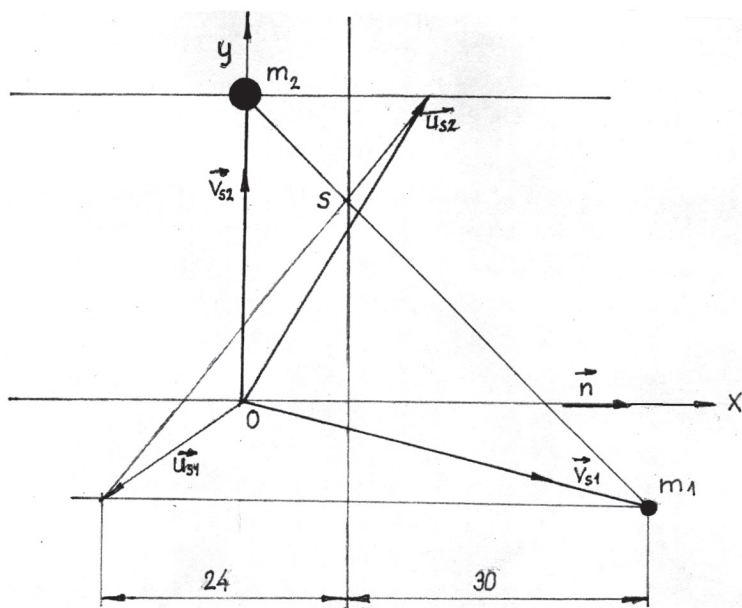
$$\vec{v}_s = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_{s1} + m_2 \cdot \vec{v}_{s2}}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot (40\vec{i} - 10\vec{j}) + 30 \cdot 30\vec{j}}{10 + 30} = 10\vec{i} + 20\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$v_{s1n} - v_{sn} = 40 - 10 = 30 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$k \cdot (v_{s1n} - v_{sn}) = 0,8 \cdot 30 = 24 \left[\frac{m}{s} \right]$$

34. ábra

10[m/s]=2 cm



Az ütközési diagramból (34. ábra) leolvasva az ütközés utáni sebességeket:

$$\vec{u}_{s1} = -14\vec{i} - 10\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\vec{u}_{s2} = -18\vec{i} + 30\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

Ellenőrzés:

$$\vec{v}_s = \frac{m_1 \cdot \vec{u}_{s1} + m_2 \cdot \vec{u}_{s2}}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot (-13\vec{i} - 10\vec{j}) + 30 \cdot (18\vec{i} + 30\vec{j})}{10 + 30}$$

$$\vec{v}_s = 10\vec{i} + 20\vec{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

Tehát a rendszer súlypontjának a sebessége ugyanaz lesz ütközés után, mint ütközés előtt.

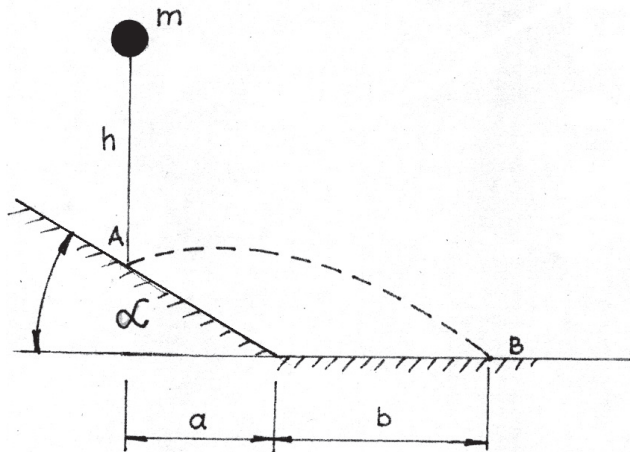
6. Oldjuk meg az 5. feladatot (34. ábra) számítással is!

Határozzuk meg a testek ütközés utáni súlyponti sebességeit $k = 0$, $k = 1$, $k = 0,8$ ütközési tényezők esetén!

7.

35. ábra

$m = 3 \text{ [kg]}$
 $h = 0,3 \text{ [m]}$
 $a = 0,2 \text{ [m]}$
 $\alpha = 30^\circ$
 $k = 0,6$



Az α hajlásszögű sima lejtőre ($\mu=0$), „ h ” magasságból, kezdősebesség nélkül, ráejtünk „ m ” tömegű gömb alakú testet (35. ábra)

Határozza meg a „ b ” távolságot!

Rezgések dinamikája

A műszaki rezgésstan (lengésstan) ismerete a gépészmérnök számára elengedhetetlenül szükséges.

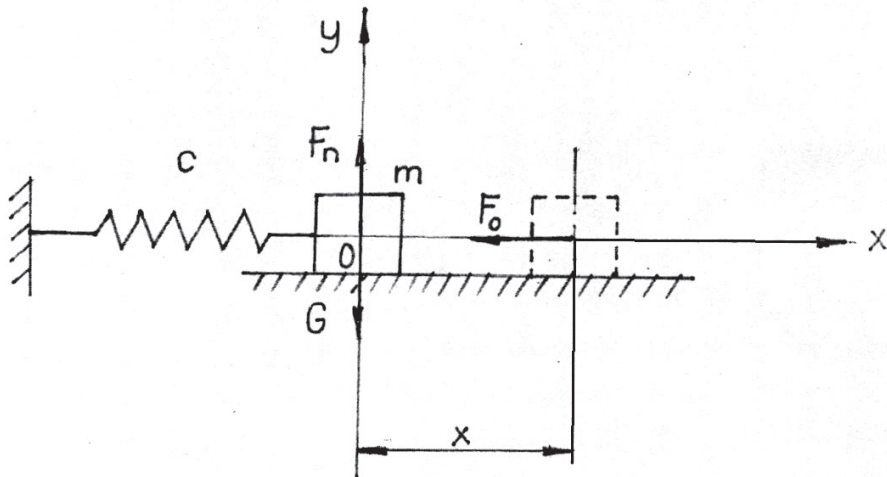
A hallgatók már megismerkedhettek a rezgésstan alapjaival előtanulmányaik során. (Harmónikus lengőmozgás, anyagi pont lengőmozgása.)

Ezeket a területeket már ismertnek vesszük, és nem térünk ki részletes ismertetésére.

A rezgések vagy lengések ekvivalens kifejezések. A rezgőmozgás kifejezést inkább gyorsabb és kisebb kitérésű, a lengőmozgás kifejezést inkább lassú és nagyobb kitérésű mozgásra alkalmazzák.

Egyszabadságfokú szabad csillapítatlan rezgés

36. ábra



Az alapmodell a 36. ábrán látható.

„ m ” tömegű merev test (pontoszerű tekinthető)

„ c ” a rugóállandó [m/N]

A c -vel jelölt rugó tömegtelen, de tökéletesen hajlékony.

A mozgó test és a vízszintes felület között a súrlódás elhanyagolható.

Az origót ott vettük fel, ahol a rugó erőmentes.

Keressük az $x = x(t)$ függvénykapcsolatot.

$$F_o = -\frac{1}{c} \cdot x \quad (\text{visszatérő erő})$$

Írjuk fel a rendszerre az impulzustétel differenciális alakját:

$$m \cdot \ddot{x} = -\frac{1}{c} \cdot x$$

$$m \cdot \ddot{x} + \frac{1}{c} \cdot x = 0 \quad / : m$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{m \cdot c} \cdot x = 0$$

$$\frac{1}{m \cdot c} = \alpha^2$$

$$\ddot{x} + \alpha^2 \cdot x = 0$$

ez a mozgásra jellemző homogén, lineáris differenciálegyenlet. Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása lesz

$$x = c_1 \cdot \cos \alpha t + c_2 \cdot \sin \alpha t = A \cdot \sin (\alpha t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \varphi = \arctg \frac{c_1}{c_2}$$

Tehát a mozgás a jól ismert harmonikus rezgőmozgás lesz.

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{m \cdot c}} \quad (\text{saját körfrekvencia})$$

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} \quad (\text{saját rezgésidő, vagy periódusidő})$$

$$\vartheta = \frac{1}{T} \quad (\text{saját frekvencia})$$

A c_1 és c_2 határozatlan konstansok a kezdeti feltételekből határozhatók meg.
A rugóállandót a *Mechanika II*-ben tanult módszerekkel lehet meghatározni.

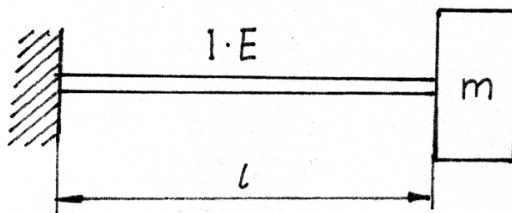
A különböző egyszerű igénybevételeknek megfelelően beszélhetünk

- csavaró (torziós) lengésekről,
- axiális (rúdirányú) rezgésekről,
- hajlító lengésekről.

8.

37. ábra

$$\begin{aligned} m &= 2 \text{ [kg]} \\ I \cdot E &= 9,45 \text{ [Nm}^2\text{]} \\ l &= 0,25 \text{ [m]} \end{aligned}$$



Az l hosszúságú acél tartó végén m tömegű test van. (37. ábra)

A rúdtartó tömegét elhanyagoljuk, a testet pontszerűnek tekintjük.

Határozzuk meg a rendszer sajátfrekvenciáját!

Megoldás:

$$c = \frac{l^3}{3I \cdot E} \text{ (a szilárdságtanban tanultak alapján)}$$

$$c = \frac{0,25^3}{3 \cdot 9,45} = 5,5115 \cdot 10^{-4} \left[\frac{m}{N} \right]$$

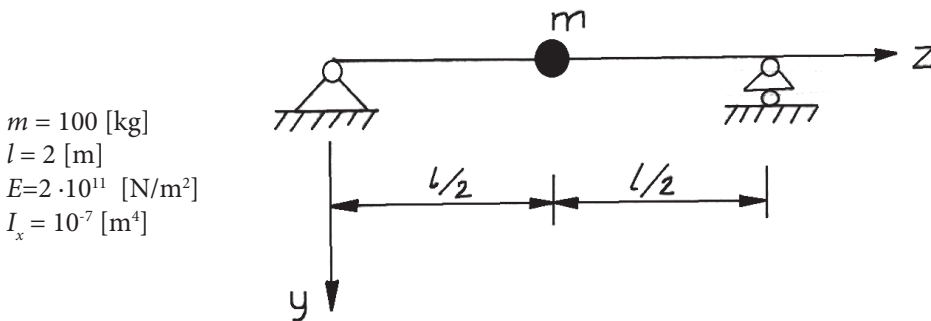
$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{m \cdot c}} = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 5,5115 \cdot 10^{-4}}} = 30,12 \left[\frac{1}{s} \right]$$

A sajátfrekvencia

$$\vartheta = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{30,12}{2\pi} = 4,9 \left[\frac{1}{s} \right]$$

9.

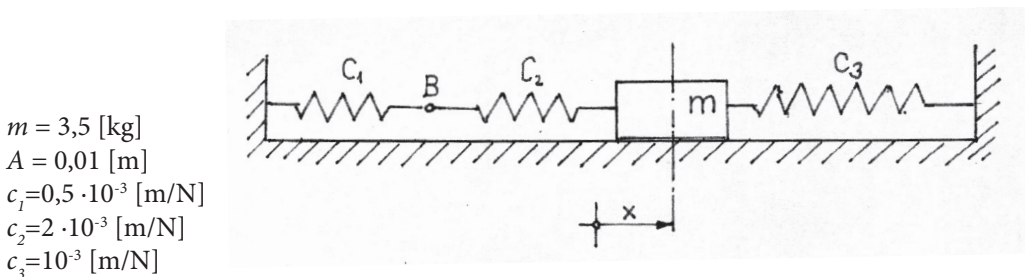
38. ábra



A 38. ábrán látható kéttámaszú tartó közepén egy m tömegű berendezés helyezkedik el. A tartó tömegét m tömegbe redukálva tekintjük. Határozza meg a rendszer sajátfrekvenciáját!

10. A 39. ábrán vázolt m tömegű testből, valamint c_1 , c_2 , c_3 rugóállandójú rugókból álló rezgőrendszer lengésének amplitúdója (A) ismert.

39. ábra



Határozzuk meg:

- a rezgőrendszer eredő rugóállandóját (c_e),
- a rendszer saját körfrekvenciáját (α)
- az egyes rugókat terhelő maximális erőt (F_1, F_2, F_3)
- a „B” pont mekkora amplitúdóval leng (A_B)!

Megoldás:

A c_1 és c_2 rugók sorba vannak kötve, ezért $c_{12} = c_1 + c_2$

A c_{12} és a c_3 már párhuzamosan van kapcsolva (végpontjaiknak az elmozdulása azonos), ezért

$$\frac{1}{c_e} = \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{c_3}$$

$$c_e = \frac{(c_1 + c_2) \cdot c_3}{c_1 + c_2 + c_3} = 0,714 \cdot 10^{-3} \left[\frac{m}{N} \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{m \cdot c_e}} = 20 \left[\frac{1}{s} \right]$$

Az 1-es és 2-es rugókban ugyanakkora erő ébred, mert sorba vannak kapcsolva.

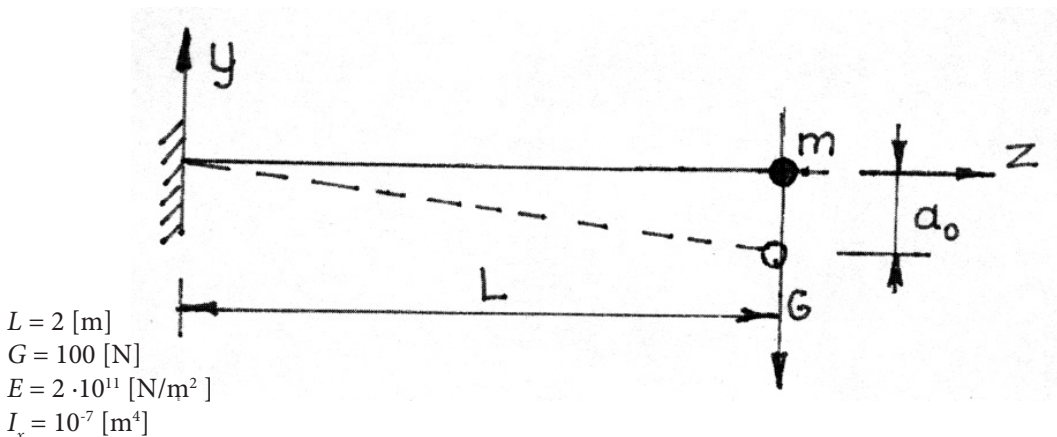
$$F_1 = F_2 = \frac{A}{c_1 + c_2} = 4 \text{ [N]}$$

$$F_3 = \frac{A}{c_3} = 10 \text{ [N]}$$

$$A_B = \frac{A \cdot c_1}{c_1 + c_2} = 0,002 \text{ [m]}$$

11.

40. ábra

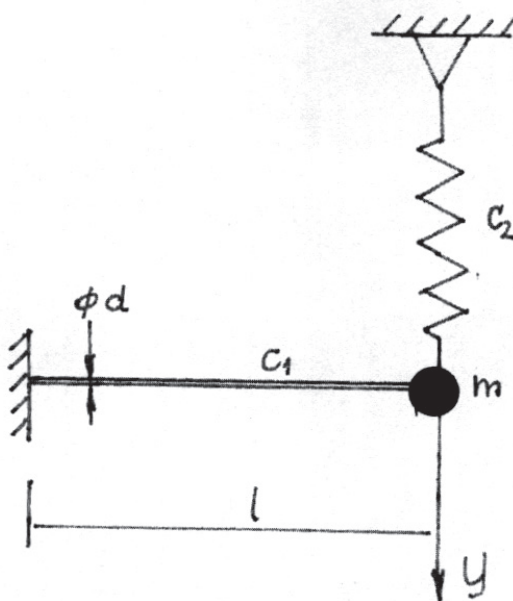


Határozzuk meg a rendszer saját körfrekvenciáját! (40. ábra)

12.

41. ábra

$$\begin{aligned}
 l &= 0,8 \text{ [m]} \\
 d &= 0,01 \text{ [m]} \\
 m &= 5 \text{ [kg]} \\
 c_2 &= 4 \cdot 10^{-4} \text{ [m/N]} \\
 E &= 2,15 \cdot 10^{11} \text{ [N/m}^2 \text{]}
 \end{aligned}$$



A 41. ábrán egyik végén befogott, állandó keresztmetszetű rudat ábrázoltunk. A rúd végére egy m tömegű, pontszerűnek vehető testet erősítettünk. A tömegponthoz c_2 rugóállandójú rugó kapcsolódik.

A c_2 rugó és a rúd tömege elhanyagolható.

Határozza meg:

- a rúd rugóállandóját (c_1)
- az eredő rugóállandót (c_e),
- a rendszer sajátkörfrekvenciáját (α) az y irányú hajlítólengésre!

Megoldás:

$$c_1 = \frac{l^3}{3I \cdot E}, \text{ ahol } I = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$$

$$c_1 = 1,6 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{m}}{\text{N}} \right]$$

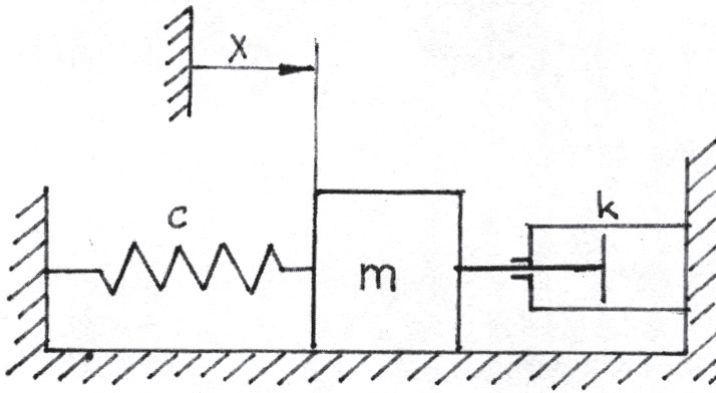
A c_1 és c_2 rugók párhuzamosan vannak kapcsolva, ezért

$$c_e = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = 3,2 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{m}}{\text{N}} \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{m \cdot c_e}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 3,2 \cdot 10^{-4}}} = 25 \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$$

Egy szabadságfokú szabad, csillapított rezgés

A 42. ábrán a jelenség alapmodellje látható.



Itt a lengő testre a visszatérítő erő mellett csillapító erő is hat.

Csillapítást okozhat:

- száraz csillapítás (Coulomb-súrlódás),
- nedves csillapítás (viszkózus),
- négyzetes (turbulens),
- speciális csillapítás (a sebesség n -edik hatványával arányos, $n > 2$)

A továbbiakban csak a *nedves csillapítással* foglalkozunk.

Ebben az esetben a csillapító erő (F_c) a sebességgel arányos.

$$F_c = -k \cdot v = -k \cdot \dot{x}$$

„ k ” a csillapítási tényező (Ns/m)

A mozgás differenciálegyenlete lesz:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + \frac{1}{c} x = 0 \quad / : m$$

Bevezetve $\frac{k}{m} = 2\beta \rightarrow \beta = \frac{k}{2m}$ (csillapítási állandó)
kapjuk

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \alpha^2 \cdot x = 0$$

$$x = C \cdot e^{-\beta t}$$

alakban keressük a megoldást.

Ahol C és λ állandók

$$\lambda^2 + 2\beta \lambda + \alpha^2 = 0$$

Ez a jelenség karakterisztikus egyenlete

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

Csak komplex megoldás esetén lesz csak rezgés

$$\beta < \alpha; \frac{k}{2m} < \alpha \rightarrow k < 2 \cdot m \cdot \alpha$$

A kritikus csillapítási tényező: $k_r = 2 \cdot m \cdot \alpha$

A rezgés kialakulásának feltétele $k < k_r$

Bevezetve a csillapítási viszonyszámot:

$$D = \frac{k}{k_r} \quad (\text{rezgőmozgáskor } D < 1!)$$

legyen

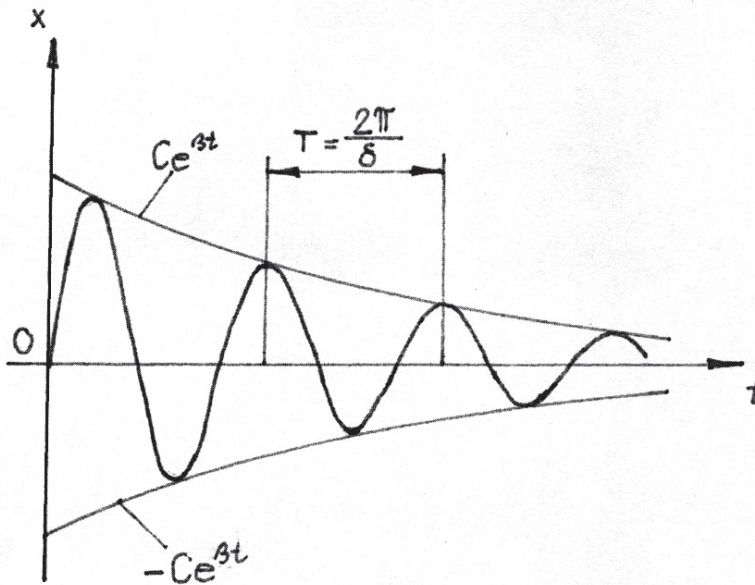
$$\delta = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha \sqrt{1 - D^2}$$

végül a differenciálegyenlet általános megoldás lesz

$$x = Ce^{-\beta t} \cdot \sin(\delta \cdot t + \psi)$$

C és a ψ határozatlan konstansok a kezdeti feltételekből határozhatók meg.

43. ábra



A 43. ábrán látszik, hogy a mozgás egy e-adós burkoló között lecsengő szinuszos lengés, ami nem harmonikus és nem is periodikus. Belátható, hogy a maximális kitérések egy „ T ” periódus idő után ismétlődnek (bár az értékük egyre kisebb lesz).

$$T = \frac{2\pi}{\alpha \sqrt{1 - D^2}}$$

Az egymást követő azonos irányú maximális kitérések hányadosa állandó.

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\beta t}$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\beta t}$$

Logaritmikus dekrementum:

$$\Lambda = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \beta t = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}$$

Gyenge csillapítás esetén (D_1);

$$\Lambda = 2\pi \cdot D$$

13. A 42. ábrán vázolt rezgőrendszer esetében $m = 0,2$ [kg]. Mérésekből ismert, hogy 10 „teljes rezgés” után az amplitúdó a felére csökken $t = 9$ [s] alatt.

Határozzuk meg a logaritmikus dekrementumot (Λ), a csillapítási tényezőt (k) és a rugóállandót (c)!

Megoldás:

$$x_0/x_1 = x_1/x_2 = \dots = x_{n-1}/x_n = e^{\Lambda}$$

A törteteket egymással összeszorozva kapjuk:

$$x_0/x_n = e^{n\Lambda} \rightarrow n\Lambda = \ln(x_0/x_n) \rightarrow \Lambda = 1/n \cdot \ln(x_0/x_n)$$

Behelyettesítve a példa adatait:

$$\Lambda = 1/10 \cdot \ln 2 = 0,06931$$

$$T = t/n = 9/10 = 0,9 \text{ [s]}$$

$$\Lambda = \beta \cdot T = k/(2 \cdot m) \cdot T \rightarrow k = (2 \cdot m \cdot \Lambda)/T = (2 \cdot 0,2 \cdot 0,06931)/0,9$$

$$k = 0,0308 \text{ [Ns/m]}$$

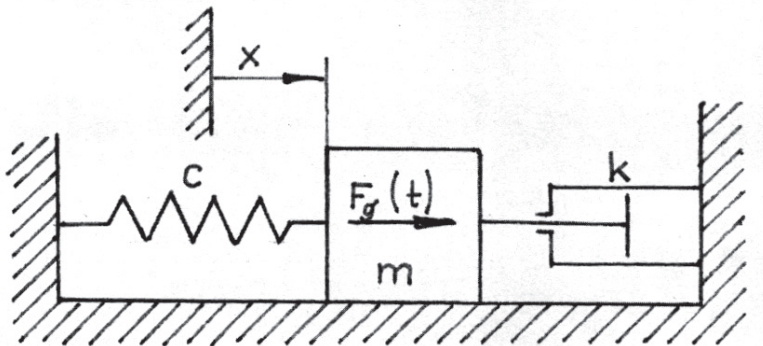
$$T = 2\pi/\delta = 2\pi/\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)} = 2\pi/\sqrt{(1/(m \cdot c) - (k/(2 \cdot m))^2)}$$

ebből

$$c = T^2/(m(\Lambda^2 + 4\pi^2)) = 0,9^2/(0,2 \cdot (0,06931^2 + 4\pi^2)) = 0,1026 \text{ [m/N]}$$

Gerjesztett rezgés

44. ábra



Az alapmodell a 44. ábrán látható. Az eddigiekhez képest van egy F_g gerjesztő erő is.

$$F_g(t) = F_0 \cdot \sin \omega \cdot t$$

A mozgás differenciálegyenlete lesz:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + \frac{1}{c} \cdot x = F_o \cdot \sin \omega t$$

Ez egy másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris inhomogén differenciálegyenlet. A differenciálegyenlet általános megoldása lesz:

$$x = x_h + x_p$$

A korábbiak alapján:

$$x_h = C \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\delta \cdot t + \Lambda)$$

A partikuláris megoldást pedig:

$$x_h = x_o \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

Az x_o -t és φ -t megkapjuk, ha a partikuláris megoldást behelyettesítjük az eredeti inhomogén differenciálegyenletbe.

Részletezés nélkül:

$$\tan \varphi = (2\beta \cdot \omega) / (\alpha^2 - \omega^2) = (2D \cdot \eta) / (1 - \eta^2) \quad (D = \beta/\alpha; \quad \eta = \omega/\alpha)$$

$$x_o = (x_{st} \cdot \alpha^2) / \sqrt{((\alpha^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2)} = x_{st} / \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}$$

$$x_{st} = F_o \cdot c \quad (\text{A rugó megnyúlása a maximális erő esetén.})$$

A rezonancia esete

Egy bizonyos ω_r gerjesztő körfrekvenciánál a relatív amplitúdónak (x_o/x_{st}) maximuma van.

Szélsőérték számítással igazolható, hogy

$$\omega_r = \alpha \cdot \sqrt{1 - 2D^2} \quad (\text{ha } D = 0, \text{ akkor } \omega_r = \alpha.)$$

Elhanyagolható csillapítás esetén

$$x_o/x_{st} = 1/(1 - \eta^2), \text{ ha } \eta > 1 \quad (\omega/\alpha > 1),$$

akkor értelem szerint:

$$x_o/x_{st} = 1/(\eta^2 - 1)$$

Ha $k = 0$ (nincs csillapítás, vagy a csillapítás elhanyagolható), akkor a kritikus gerjesztő körfrekvencia

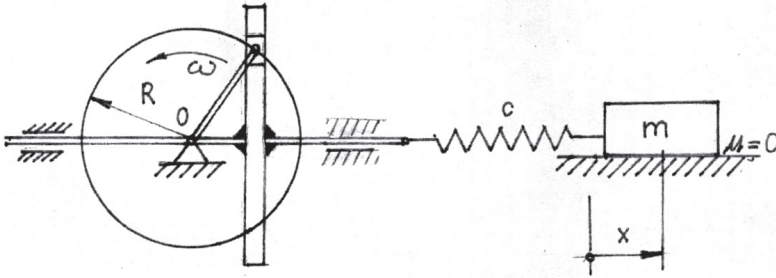
$$\omega_{kr} = \alpha = \sqrt{1/(m \cdot c)}$$

Létezik egy kritikusfrekvencia-sáv: $\omega_{kr} \pm \Delta\omega$

Ezt a sávot kerülni kell, vagy a rendszernek elegendően gyorsan kell átmennie ezen a tartományon.

14.

45. ábra



A 45. ábrán egy rezgetető berendezés modelljét ábrázoltuk. A periodikus gerjesztő erőt a kulisszás hajtómű szolgáltatja. A tömeg állandósult gerjesztett rezgéseinek az amplitúdóját ismerjük.

Határozzuk meg „R” sugarú tárcsa szögsebességét állandósult állapotban! [7]

Feltételezzük, hogy az

$$\omega/\alpha > 1.$$

$$m = 20 \text{ [kg]}$$

$$c = 10^{-4} \text{ [m/N]}$$

$$R = 0,1 \text{ [m]}$$

$$A = 0,02 \text{ [m]}$$

Először kiszámítjuk a sajátlengés a körfrekvenciáját.

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{m \cdot c}} = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{500} = 22,36 \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$x_o/x_{st} = 1/(\eta^2 - 1)$$

$$\eta^2 - 1 = x_{st}/x_o$$

$$\eta^2 = x_{st}/x_o + 1$$

$$x_{st} = R = 0,1 \text{ [m]}; \quad x_o = A = 0,02 \text{ [m]}$$

$$\eta^2 = 0,1/0,02 + 1 = 6 \rightarrow \eta = \sqrt{6}$$

$$\eta = \omega/\alpha \rightarrow \omega = \eta \cdot \alpha = 54,77 \text{ [1/s]}$$

15. A 45. ábrán vázolt szerkezet felfogható úgy is, mint egy vibrációs rázórosta modellje. [2]

$$m = 32 \text{ [kg]} \quad (\text{a rázórosta tömege})$$

$$c = 19,53 \cdot 10^{-5} \text{ [m/N]} \quad (\text{a rugó rugóállandója})$$

$$R = 0,025 \text{ [m]} \quad (\text{hajtókar hossza})$$

$$n = 80 \text{ [1/min]} \quad (\text{a hajtókar percenkénti fordulatszáma})$$

Határozzuk meg a rosta gerjesztett rezgéseinek az amplitúdóját, valamint a kritikus fordulatszámot!

[7] Sztopa Gyula (Szerk.) (1974): *Mechanika példatár II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

[2] Hegedűs Attila (2009): *A műszaki rezgés tan alapjai.* Gödöllő: Szent István Egyetem Kiadó.

Megoldás:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{m \cdot c}} = 12,65 \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$n = 80 \left[\frac{1}{min} \right] = \frac{4}{3} \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$\omega = 2\pi \cdot n = 8,378 \left[\frac{1}{s} \right]$$

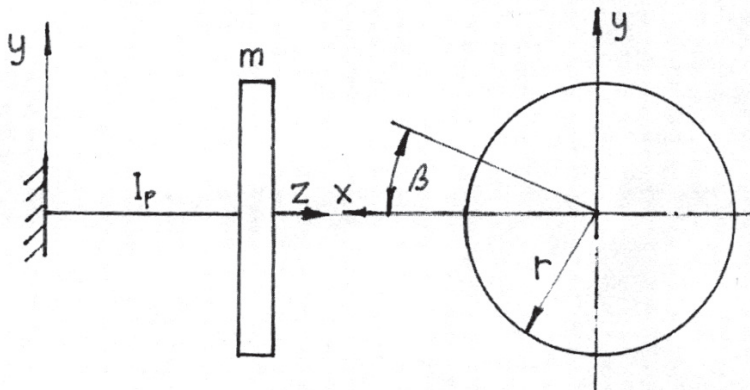
$$\eta = \frac{\omega}{\alpha} = 0,6623$$

$$x_o = \frac{R}{1 - \eta^2} = \frac{0,025}{1 - 0,6623^2} = 0,0445 [m] \quad (A)$$

$$\frac{n}{n_{kr}} = \eta \rightarrow n_{kr} = \frac{n}{\eta} = \frac{80}{0,6623} = 120,79 \left[\frac{1}{min} \right]$$

16. Példa torziós lengésre

46. ábra



A 46. ábrán lévő befalazott tengelyre rögzített tárcsát a „z” tengely körül elfordítottuk β szöggel és magára hagytuk.

$$l = 1,5 [m]$$

$$r = 0,4 [m]$$

$$m = 500 [kg]$$

$$I_p = 2,5 \cdot 10^{-6} [m^4]$$

$$G = 8 \cdot 10^{10} [N/m^2]$$

Határozzuk meg a sajátkörfrekvenciát és a kritikus fordulatszámot a torziós lengésre!

Megoldás:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\theta \cdot c}} \quad [1]$$

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0,4^2 = 40 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$c = \frac{1}{I_p \cdot G} = \frac{1,5}{2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{10}} = 7,5 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{Nm}} \right]$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{40 \cdot 7,5 \cdot 10^6}} = 57,735 \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$$

$$n_{kr} = \frac{60 \cdot \alpha}{2\pi} = 551,3 \left[\frac{1}{\text{min}} \right]$$

Több szabadságfokú lengő rendszerek

Ha a rendszer helyzetét meghatározó független paramétereknek a száma egynél több, akkor a rendszer már több szabadságfokú.

Egyetlen merev test, vagy anyagi pont is végezhet több szabadságfokú rezgéseket, ha legalább kettő irányú eltolódást, szögelfordulást végez egyszerre. Legalább kettő merev testet tartalmazó rendszer mindig több szabadságfokú.

Ha felírjuk a mozgásegyenleteket – az alaptételek segítségével – ezek mindig differenciálegyenlet-rendszerek lesznek. Nagyon elterjedt a rezgésstanban az úgynevezett másodfajú Lagrange-egyenletek használata. A Lagrange-egyenletek száma pontosan megegyezik a rendszer szabadságfokainak a számával. A differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálata és alkalmazása meghaladja a BsC oktatási forma kereteit. Így ezeknek a fejezeteknek az oktatása átkerült a mesterképzésbe.

A műszaki életben – kifejezetten a gépészetben – legtöbbször csak a legkisebb sajátkörfrekvencia ismerete szükséges. Az egyszerűségük miatt jól használhatók a legkisebb sajátkörfrekvencia alsó korlátját megadó közelítő módszerek.

A továbbiakban mi csak hajlítólengésekkel foglalkozunk.

A Dunkerley-formula hajlítólengésekre [2], [6], [8]

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{(1)}^2} + \frac{1}{\alpha_{(2)}^2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{(n)}^2}}$$

Az α_1 a modell legkisebb sajátkörfrekvenciája. A képletben szereplő $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$... $\alpha_{(n)}$ jelölések azon származtatott egyszabadságfokú rendszerek sajátkörfrekvenciáját jelentik, amelyeket úgy kapunk, hogy a rugalmas rúdon csak egy-egy tömeget hagyunk az eredeti helyén, az összes többi nullának vesszük. A képlet tulajdonképpen a legkisebb sajátkörfrekvencia alsó korlátját adja.

[1] Csizmadia Béla (1993): *Mechanika III/B. Mozgó testek mechanikája.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

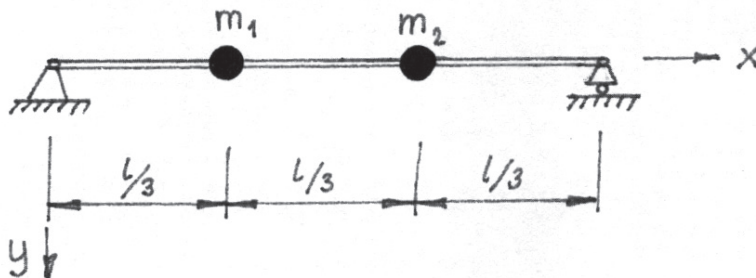
[2] Hegedűs Attila (2009): *A műszaki rezgésstan alapjai.* Gödöllő: Szent István Egyetem Kiadó.

[6] Sályi István (1973): *Lengésstan I-XII. fejezet.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

[8] Vértés György (1976): *Építmények dinamikája.* Budapest: Műszaki Könyvkiadó.

17.

47. ábra



Határozzuk meg a 47. ábrán látható két szabadságfokú lengőrendszer legkisebb sajátkörfrekvenciájának közelítő értékét a Dunkerley-képlettel.

A rúd hajlítási merevsége ismert és végig állandó.

$$E \cdot I = 107 \text{ [Nm}^2\text{]}$$

$$m_1 = m = 1000 \text{ [kg]}$$

$$m_2 = 2m$$

$$l = 3 \text{ [m]}$$

Megoldás:

Ha a rúdon csak az m_1 tömege van, akkor a sajátkörfrekvencia

$$\alpha_{(1)} = \sqrt{\frac{1}{m_1 \cdot c_{11}}}$$

Ha pedig csak az m_2 tömeg van, akkor

$$\alpha_{(2)} = \sqrt{\frac{1}{m_2 \cdot c_{22}}}$$

Szimmetria okok miatt

$$c_{11} = c_{22} = \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{L}{3}\right)^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot l} = 4,44 \cdot 10^{-8} \left[\frac{m}{N}\right]$$

$$\alpha_{(1)} = \sqrt{\frac{1}{10^3 \cdot \frac{4}{9} \cdot 10^{-7}}} = 150 \left[\frac{1}{s}\right]$$

$$\alpha_{(2)} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{9} \cdot 10^{-7}}} = 106,06 \left[\frac{1}{s}\right]$$

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{\frac{1}{150^2} + \frac{1}{106,06^2}} \rightarrow \alpha_1 = 86,6 \left[\frac{1}{s}\right]$$

A legkisebb sajátfrekvencia

$$\nu_1 = \frac{30 \cdot \alpha_1}{\pi} = 827 \left[\frac{1}{\text{min}} \right]$$

A Rayleigh-módszer a legkisebb sajátkörfrekvencia közelítő meghatározására [4], [2], [8].

A módszer alapelve, hogy a mozgási energia maximális értéke egyenlő a helyzeti energia maximális értékével:

$$E_{\max} = U_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot u_i^2 \cdot \alpha^2$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot g \cdot u_i$$

Az u_i az m_i tömeg lengéssamplitúdóját jelenti.

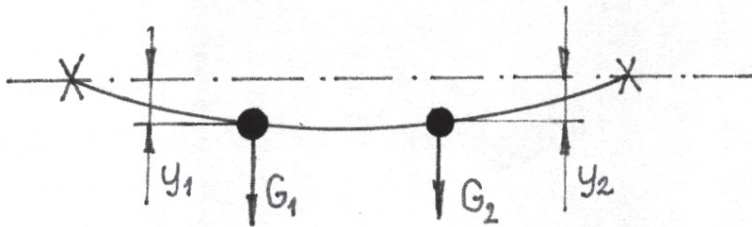
$y = u(x) \cdot \sin \alpha \cdot t$ ez a függvény nem ismert.

Gyakori jól bevált módszer, hogy u_i -ket a súlyerők okozta statikus lehajlásokkal szokás helyettesíteni.

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{g \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i^2}}$$

18. Oldjuk meg a 47. ábrán vázolt feladatot Rayleigh-módszerrel!

48. ábra



A 48. ábrán feltüntettük a megfelelő lehajlásokat. A *Mechanika II*-ben tanultak alapján,

$$y_1 = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$$

$$y_2 = 1,28 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{g \cdot (m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2)}{m_1 \cdot y_1^2 + m_2 \cdot y_2^2}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{9,81 \cdot (10^3 \cdot 1,22 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^3 \cdot 1,28 \cdot 10^{-3})}{10^3 \cdot (1,22 \cdot 10^{-3})^2 + 2 \cdot 10^3 \cdot (1,28 \cdot 10^{-3})^2}$$

[4] Bruno Assmann (1992): *Technische Mechanik Band 3: Kinematik und Kinetik*. München–Wien: R. Oldenbourg Verlag.

[2] Hegedűs Attila (2009): *A műszaki rezgésstan alapjai*. Gödöllő: Szent István Egyetem Kiadó.

[8] Vértess György (1976): *Építmények dinamikája*. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.

[1] Csizmadia Béla (1993):
Mechanika III/B.
Mozgó testek mechanikája.
Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

[2] Hegedűs Attila (2009):
A műszaki rezgés tan alapjai.
Gödöllő: Szent István Egyetem Kiadó.

$$\alpha l = 88 \text{ [1/s]}$$

$$v_1 = (30 \cdot \alpha) / \pi = 840 \text{ [1/min]}$$

19. Oldjuk meg a 48. ábrán látható modellt Rayleigh-módszerrel, oly módon, hogy

$$u(x) = A \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad [2]$$

Részletezés nélkül kapjuk,

$$\alpha_1^2 = \frac{27\pi^4 \cdot E \cdot I}{2l^3} \cdot \frac{1}{m_1 \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot x_1}{l} + m_2 \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot x_2}{l}}$$

$$x_1 = \frac{l}{3} = 1 \text{ [m]}$$

$$x_2 = \frac{2l}{3} = 2 \text{ [m]}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{27\pi^4 \cdot 10^7}{2 \cdot 27} \cdot \frac{1}{1000 \cdot \frac{3}{4} + 2000 \cdot \frac{3}{4}}$$

$$\alpha_1 = 89,5 \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$v_1 = 855 \left[\frac{1}{s} \right]$$

Megjegyzés:

A 48. ábrán vázolt két szabadságfokú modell legkisebb kritikus frekvenciája (fordulatszám) közelítőleg számítható az egy szabadságfokú lengéseknél használatos

$$v_1 = n_{kr} \approx \frac{300}{\sqrt{a_o \text{ [cm]}}} \left[\frac{1}{min} \right]$$

Most az $a_o = 0,125 \text{ [cm]}$ közelítőleg

$$\left(a_o = \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Látható, hogy most az egy szabadságfokú modellel kapott eredmény jó közelítéssel megegyezik a két szabadságfokúval. (Vigyázat, ez nem általános!)

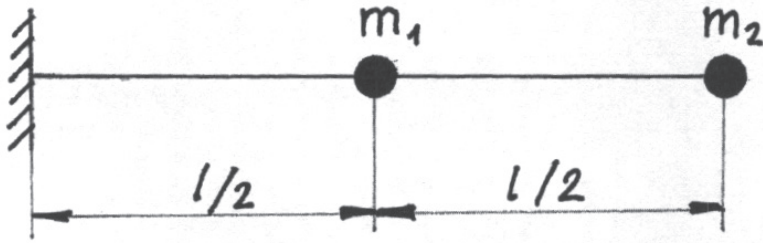
A pontos érték:

$$\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{27 E \cdot I}{m \cdot l^3}} = 89,5 \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$v_1 = 855 \left[\frac{1}{min} \right]. \quad [1], [6]$$

20.

49. ábra



Határozzuk meg a 49. ábrán látható két szabadságfokú lengőrendszer legkisebb saját körfrekvenciájának közelítő értékét!

A rúd tömege elhanyagolható és a hajlítási merevsége végig állandó.

$$m_1 = m_2 = 25 \text{ [kg]}$$

$$E \cdot I = 3 \cdot 10^6 \text{ [Nm}^2\text{]}$$

$$l = 2 \text{ [m]}$$

