

Vigh Sándor–Szlávik Béláné
–Izsák Gyula

MŰSZAKI MECHANIKA I. PÉLDATÁR I/2.

SZERKEZETEK STATIKÁJA

Merev test statikája
Merev rúdszerkezetek statikája
Labilis teherhordó szerkezetek
Súrlódásos kapcsolatok



Dunakavics
D·U·E PRESS

Vigh Sándor–Szlávik Béláné–Izsák Gyula

MŰSZAKI MECHANIKA I.

PÉLDATÁR I/2.

Dr. Vigh Sándor főiskolai docens	A.4.4.1-4.4 pontok, A.5 és A.6 pontok	
	Feladatok:	3.5-2 ... 3.-4 3.5-7 ... 3.5-9 3.6-1 ... 3.6-3 4.1-6 ... 4.1-8 4.3-1 ... 4.3-7 4.4-1 ... 4.4-6 6.2-1 ... 6.2-9
	Ellenőrző kérdések:	3.79-3.92 4.33-4.61 5.9-5.15 6.1-6.16
	Szlávik Béláné	
	ny. főiskolai adjunktus	
	A.4 bevezető	
	Feladatok:	3.5-1, 3.5-5, 3.5-6 4.2-1 ... 4.2-9 5.2-1 ... 5.2-4 6.1-1 ... 6.1-5
	Ellenőrző kérdések:	4.1-4.43
	Feladatok:	4.1-1 ... 4.1-5 5.1-1 ... 5.1-8
	Ellenőrző kérdések:	5.1-5.8
Dr. Izsák Gyula		
főiskolai docens		

Szaklektor:

Dr. Kegyes Csaba
főiskolai tanár

DUNAÚJVÁROSI EGYETEM
www.uniduna.hu
D=U=E PRESS

Kiadóvezető Németh István

Felelős kiadó Dr. habil András István
Felelős szerkesztő Nemeskéry Artúr
Tördelés Duma Attila
Készült a HTSART nyomdában
Felelős vezető Halász Iván

ISBN 978-963-9915-84-8

Vigh Sándor–Szlávik Béláné
–Izsák Gyula

MŰSZAKI MECHANIKA I. PÉLDATÁR I/2.

SZERKEZETEK STATIKÁJA

Merev test statikája
Merev rúdszerkezetek statikája
Labilis teherhordó szerkezetek
Súrlódásos kapcsolatok



Dunakavics
D U E P R E S S

Dunaújváros, 2017

M
Ű
S
Z
A
K
I

K
Ö
N
Y
V
E
K

5.

TARTALOM

Előszó	7
3. Merev test statikája (folytatás).....	9
3.5 Törtvonalú és íves tartók.....	9
B.3.5 Kidolgozott feladatok (3.5-1 ... 3.5-4).....	9
C.3.5 Gyakorló feladatok (3.5-5 ... 3.5-9).....	15
3.6 Hatásábrák.....	21
B.3.6 Kidolgozott feladatok (3.6-1 ... 3.6-3).....	21
4. Merev rúdszerkezetek statikája	25
A.4 Elméleti összefoglaló.....	25
4.1 Csuklós többtámaszú (Gerber-) tartó.....	30
B.4.1 Kidolgozott feladatok (4.1-1 ... 4.1-4).....	30
C.4.1 Gyakorló feladatok (4.1-5 ... 4.1-8).....	38
4.2 Háromcsuklós tartó.....	42
B.4.2 Kidolgozott feladatok (4.2-1 ... 4.2-5).....	42
C.4.2 Gyakorló feladatok (4.2-6 ... 4.2-9).....	52
4.3 Összetett szerkezetek.....	55
B.4.3 Kidolgozott feladatok (4.3-1 ... 4.3-4).....	55
C.4.3 Gyakorló feladatok (4.3-5 ... 4.3-7).....	64
4.4 Rácsos tartók.....	66
B.4.4 Kidolgozott feladatok (4.4-1 ... 4.4-4).....	66
C.4.4 Gyakorló feladatok (4.4-5 ... 4.4-6).....	73
5. Labilis teherhordó szerkezetek	74
A.5 Elméleti összefoglaló.....	74
5.1 Rúdláncok.....	74
B.5.1 Kidolgozott feladatok (5.1-1 ... 5.1-4).....	75
C.5.1 Gyakorló feladatok (5.1-5 ... 5.1-8).....	80
5.2 Kötélszerkezetek.....	82
B.5.2 Kidolgozott feladatok (5.2-1 ... 5.2-2).....	83
C.5.2 Gyakorló feladatok (5.2-3 ... 5.2-4).....	85
6. Súrlódásos kapcsolatok	86
A.6 Elméleti összefoglaló.....	86
6.1 Súrlódásos alapfeladatok.....	88
B.6.1 Kidolgozott feladatok (6.1-1 ... 6.1-3).....	88
C.6.1 Gyakorló feladatok (6.1-4 ... 6.1-5).....	92
6.2 A súrlódás műszaki alkalmazásai.....	93
B.6.2 Kidolgozott feladatok (6.2-1 ... 6.2-6)	93
C.6.2 Gyakorló feladatok (6.2-7 ... 6.2-9).....	100
Ellenőrző kérdések.....	102
Irodalom.....	105

ELŐSZÓ

A Műszaki mechanika I. Példatár 2. rész az azonos című példatár 1. részének folytatása. A jegyzet felépítése azonos az 1. részével, a fejezetek számozása folyamatos.

A példatár 1. része az elemi statikát dolgozta fel az alábbi témakörökben:

- erőrendszerek eredője, helyettesítése,
- keresztmetszeti terület súlypontja, statikai nyomatéka,
- merev test és egyszerű egyenesvonalú rúdtartó egyensúlya, támasztóerőrendszere, egyszerű egyenesvonalú rúdtartó igénybevételei.

A 2. rész témakörei:

- törtvonalú és íves tartó egyensúlya, igénybevételei,
- csuklós törtbtámaszú (Gerber-) tartó támasztóerői, belső erői és igénybevételei,
- háromcsuklós tartó és keret támasztóerői, belső erői és igénybevételei,
- összetett szerkezetek támasztóerői, belső erői és igénybevételei,
- rácsos tartók rúderői,
- labilis teherhordó szerkezetek: rúdláncok, kötél szerkezetek,
- súrlódásos feladatok.

A példatár felépítése:

- A, Elméleti összefoglaló
- B, Kidolgozott feladatok
- C, Gyakorló feladatok
- D, Ellenőrző kérdések

A szerkezetek erőjátékának átlátásához az elméleti tananyag tanulmányozása után át kell tekinteni a kidolgozott feladatok megoldási módszerét, majd önállóan megoldani a gyakorló feladatokat. A gyakorló feladatok eredményeit (köztük az igénybevételi ábrákat is) közzétük, de ezek csak az önálló megoldás utáni ellenőrzésre szolgálnak.

Külön köszönet illeti Dr. Kegyes Csaba főiskolai tanárt a gondos lektorálásért.

Kívánjuk, hogy a példatár használatával a szerkezetek erőjátékának elméleti tananyagát mind alaposabban sikerüljön elsajátítani és a jó példamegoldó készséget kialakítani.

A Szerzők

3. MEREV TEST STATIKÁJA

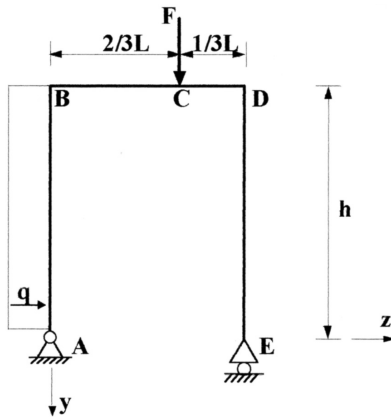
3.5 Törtvonalú és íves tartók

B. 3.5 KIDOLGOZOTT FELADATOK

3.5-1 Feladat

Ismertek a 3.5.1 ábrán látható statikailag határozott keret geometriai és terhelési adatai.

3.5.1 ábra



Adatok:

$$L = 0,6 \text{ m,}$$

$$h = 0,8 \text{ m,}$$

$$F = 300 \text{ N,}$$

$$q = 150 \text{ N/m.}$$

Feladat: Rajzoljuk meg a keretrúd igénybevételi ábráit!

Megoldás: Az igénybevételi ábrák megrajolásához szükség van a támasztóerőkre. Az E jelű görgős támasznál csak függőleges (y irányú) támasztóerő ébredhet, az A csuklóban fellépő reakcióerőnek viszont y és z irányú összetevője is lesz. Írjunk fel ennek megfelelően három egymástól független egyensúlyi egyenletet:

$$1. \sum M_{ai} = 0 = -q \cdot h \cdot h/2 - F \cdot 2/3 \cdot L + F_E \cdot L, \text{ ebből}$$

$$F_E = \frac{h^2 / 2 \cdot q + 2/3 \cdot L \cdot F}{L} = \frac{0,8^2 / 2 \cdot 150 + 2/3 \cdot 0,6 \cdot 300}{0,6} = 280 \text{ N}(\uparrow)$$

$$2. \sum M_{bi} = 0 = -1 \cdot F_{Ay} - h/2 \cdot h \cdot q + 1/3 \cdot L \cdot F - F_{Ay} \cdot L,$$

ebből meghatározható F_{Ay} .

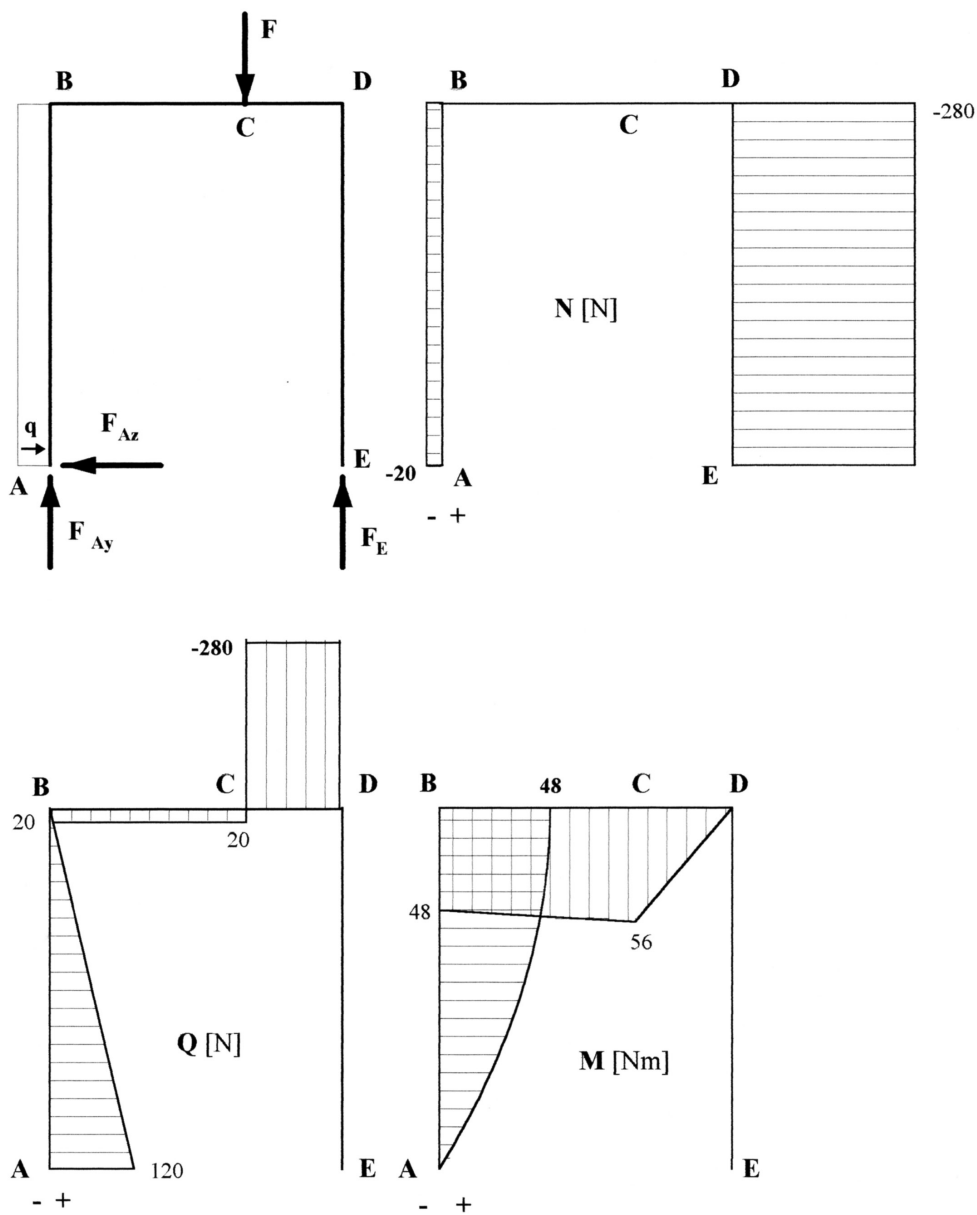
$$F_{Ay} = \frac{-h^2 / 2 \cdot q + 1/3 \cdot L \cdot F}{L} = \frac{-0,8^2 / 2 \cdot 150 + 1/3 \cdot 0,6 \cdot 300}{0,6} = 20 \text{ N}(\uparrow).$$

$$3. \sum F_{zi} = 0 = F_{Az} + q \cdot h$$

$$F_{Az} = -q \cdot h = -150 \cdot 0,8 = 120 \text{ N}(\leftarrow).$$

Az egyensúlyi külső erőrendszerrel terhelt keretrúd és igénybevételi ábrái a 3.5.2 ábrán láthatók.

3.5.2 ábra



3.5-2 Feladat

A 3.5-3 ábrán látható törtvonalú tartót külső M_1 nyomaték terheli.

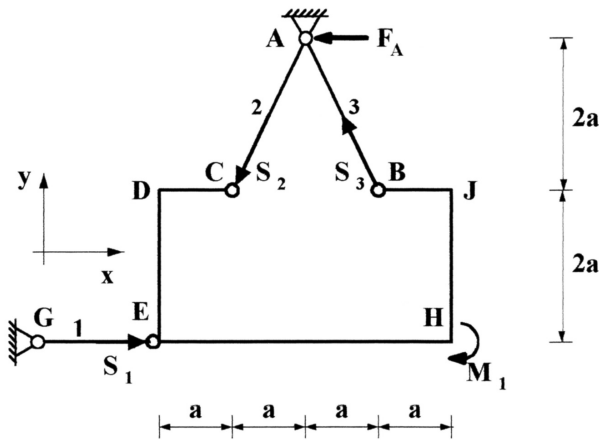
Adatok: $a = 2$ m,

$M_1 = 20$ kNm

Feladat: 1. Határozzuk meg a támasztóerőrendszert!

2. Rajzoljuk meg a törtvonalú tartórész igénybevételi ábráit!

3.5.3 ábra



$$\sum F_{xi} = 0 = S_1 - F_{Ax}$$

$$F_{Ax} = S_1 = 2,5 \text{ kN} (\leftarrow).$$

A $\sum F_{yi} = 0$ egyensúlyi egyenletből következik, hogy $F_{Ay} = 0$, illetve $F_A = F_{Ax}$. F_A erőt felbontva S_2 és S_3 összetevőjére kapjuk a keresett támasztó rúderőket.

Megoldás:

Írjunk fel nyomatéki egyensúlyi egyenletet az A ponton átmenő síkra merőleges tengelyre:

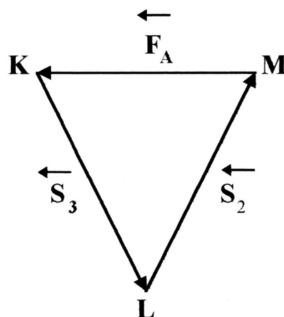
$$\sum M_{ai} = 0 = M_1 - S_1 \cdot 4 \cdot a$$

amiből az S_1 támaszerő

$$S_1 = \frac{M_1}{4 \cdot a} = \frac{20}{4 \cdot 2} = 2,5 \text{ kN} (\rightarrow),$$

azaz az (1) jelű rúd a feltételezettnek megfelelően nyomott. Az A pontban támasztó reakcióerő az S_2 és S_3 rúderők eredője.

3.5.4 ábra



Az ABC és KLM háromszögek hasonlósága alapján felírhatjuk:

$$\frac{F_A}{S_3} = \frac{2 \cdot a}{\sqrt{5} \cdot a}$$

ahonnan:

$$S_3 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot F_A = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2,5 = 2,8 \text{ kN} (+),$$

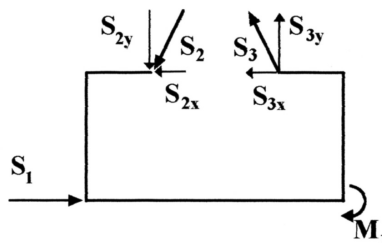
illetve

$$S_2 = 2,8 \text{ kN} (-).$$

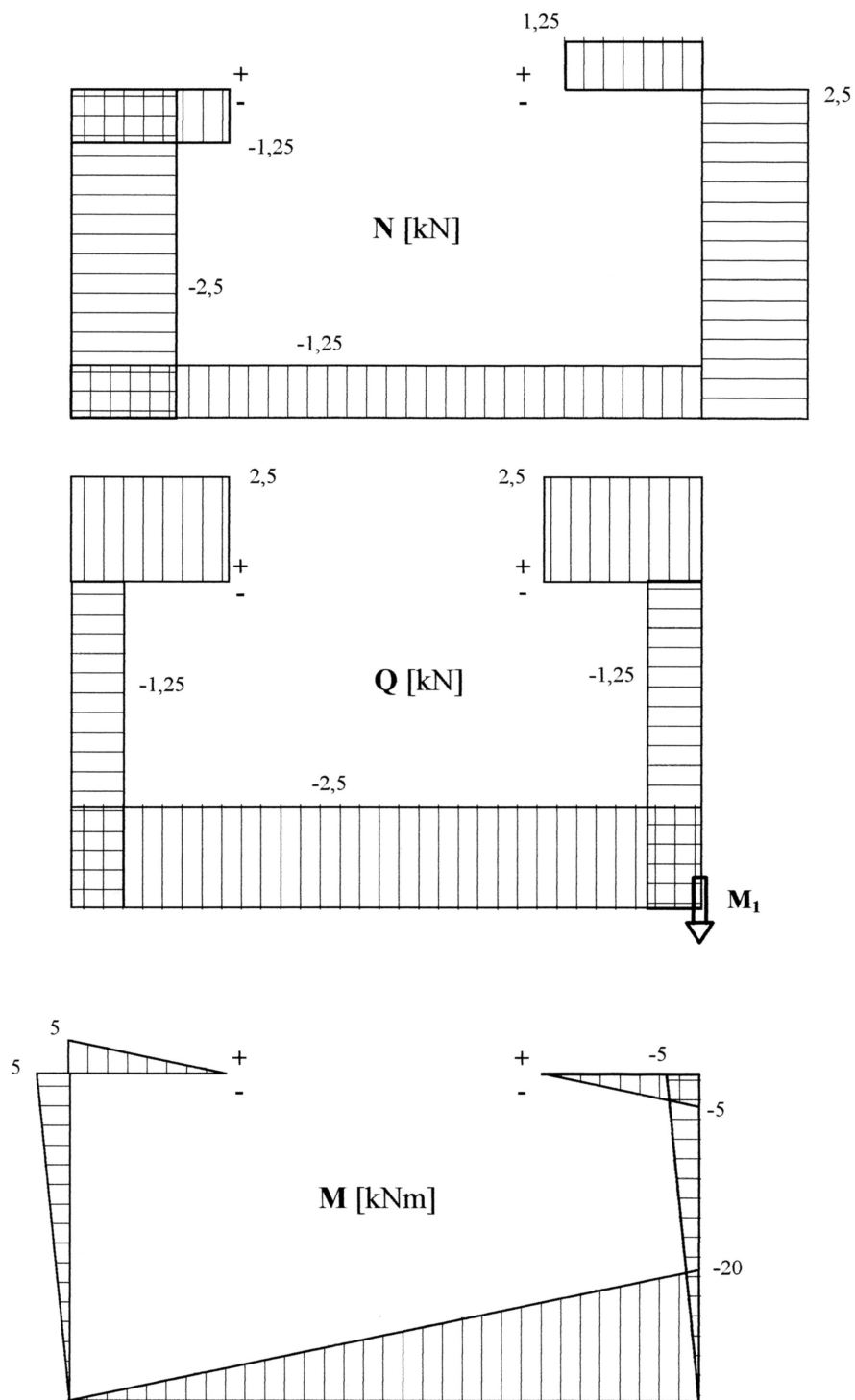
Az igénybevételi ábrák megrajzolásához először vázoljuk a törtvonalú tartóra ható erőrendszert amit a 3.5.5 ábrában tüntettünk fel.

Az igénybevételi ábrákat a 3.5.6 ábrán rajzoltuk meg.

3.5.5 ábra



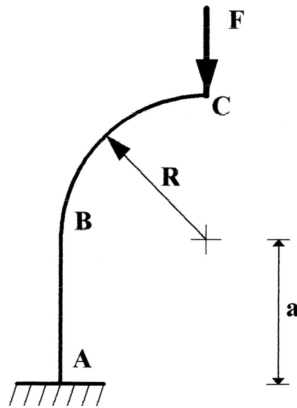
3.5.6 ábra



3.5-3 Feladat

A 3.5.7 ábrán egy egyenes és egy íves szakaszból álló síkbeli törtvonalú tartót ábrázoltunk.

3.5.7 ábra



Adatok:

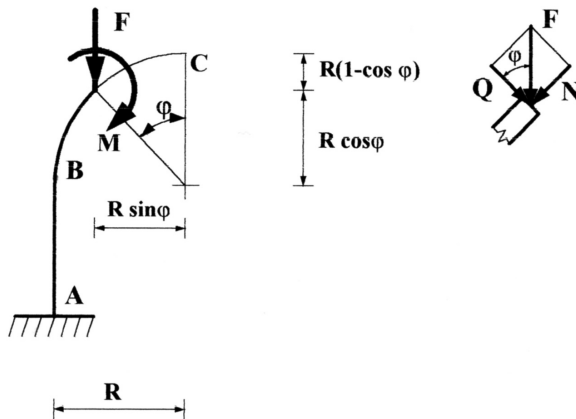
$R = 1 \text{ m}$,
 $a = 1 \text{ m}$,
 $F = 10 \text{ kN}$.

Feladat:

1. Határozzuk meg a tartó igénybevételi függvényeit!
2. Rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!

Megoldás: Válasszunk ki az íves szakaszon egy tetszőleges keresztmetszetet és redukáljuk oda az F erőt (3.5.8 ábra) !

3.5.8 ábra



Az igénybevételi függvények az íves szakaszra a 3.5.8 ábra alapján:

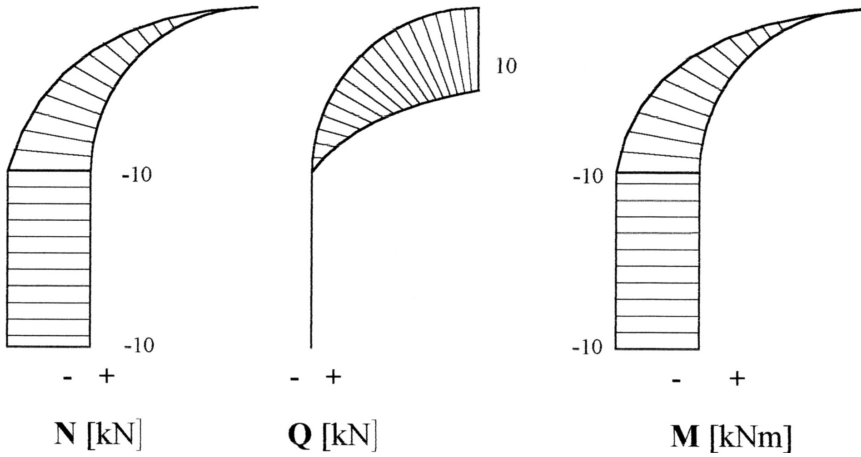
$$Q(\varphi) = F \cdot \cos \varphi,$$

$$N(\varphi) = -F \cdot \sin \varphi,$$

$$M(\varphi) = F \cdot R \cdot \sin \varphi.$$

A fenti függvényeket a 3.5.9 ábrán rajoltuk meg, kiegészítve az egyenes szakasz igénybevételi ábráival.

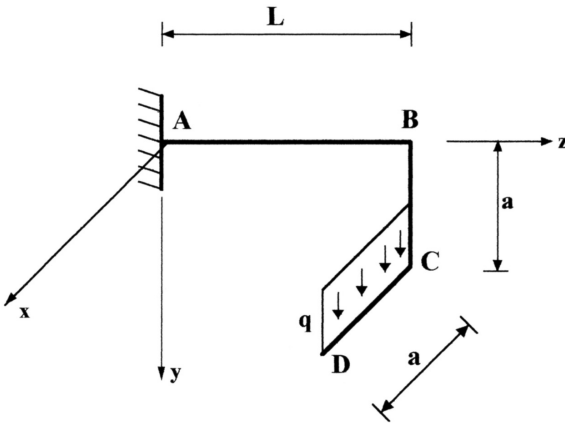
3.5.9 ábra



3.5-4 Feladat

A 3.5.10 ábrán vázolt térbeli törtvonalú tartót a CD szakaszon állandó intenzitású megoszló erő terheli.

3.5.10 ábra



Adatok:

$L = 3 \text{ m}$

$a = 1 \text{ m}$

$q = 2 \text{ kN/m}$

Feladat:

1. Az A pontbeli redukált vektorkettős segítségével határozzuk meg a támasztóerőrendszert!

2. Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!

Megoldás:

1. Az erőrendszer redukálása az A pontba:

$$\vec{F}_{Ar} = \vec{F}_q = q \cdot a \cdot \vec{j} = 2 \cdot 1 \cdot \vec{j} = 2\vec{j} \text{ [kN]},$$

$$\vec{M}_{Ar} = \vec{r}_{Aq} \times \vec{F}_q = \left(\frac{a}{2} \cdot \vec{i} + a \cdot \vec{j} + L \cdot \vec{k} \right) \times q \cdot a \cdot \vec{j},$$

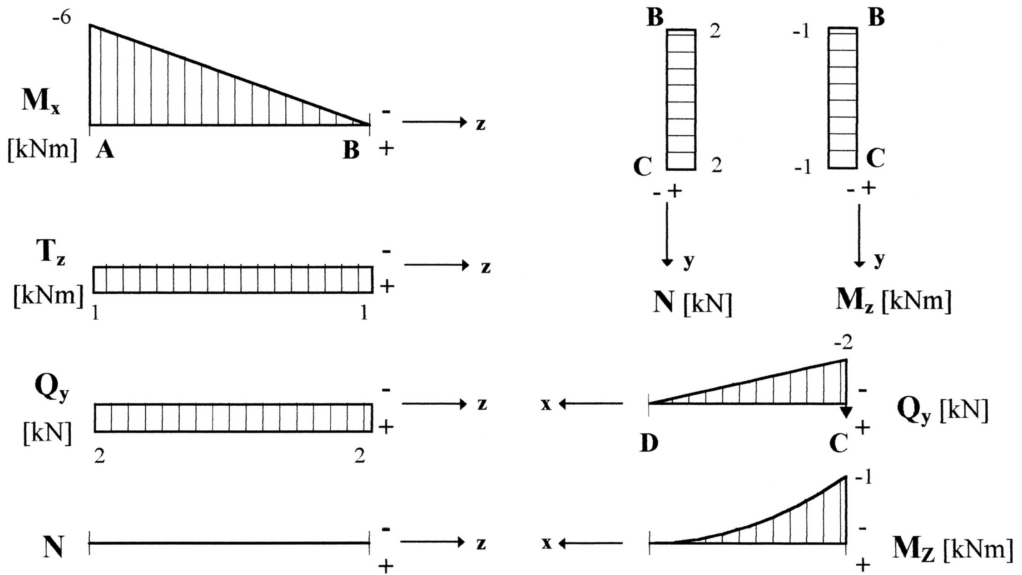
$$\vec{M}_{Ar} = \frac{q \cdot a^2}{2} \cdot \vec{k} - L \cdot q \cdot a \cdot \vec{i} = \frac{2 \cdot 1}{2} \cdot \vec{k} - 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \vec{i} = \vec{k} - 6\vec{i} \text{ [kNm]}.$$

A reakcióerőrendszer:

$$\mathbf{F}_{Ax} = \mathbf{F}_{Az} = 0, \quad \mathbf{F}_{Ay} = 2 \text{ kN } (\uparrow), \quad \mathbf{M}_{Ax} = 6 \text{ kNm}, \quad \mathbf{M}_{Ay} = 0, \quad \mathbf{M}_{Az} = -1 \text{ kNm}.$$

Az igénybevételi ábrák a 3.5.11 ábrán láthatók.

3.5.11 ábra

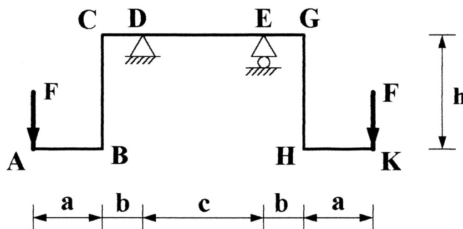


C. 3.5 GYAKORLÓ FELADATOK

3.5-5 Feladat

Ismert a 3.5.12 ábrán vázolt törtvonalú tartó terhelése.

3.5.12 ábra



Adatok:

$$a = 1,5 \text{ m},$$

$$b = 1 \text{ m},$$

$$c = 3 \text{ m}$$

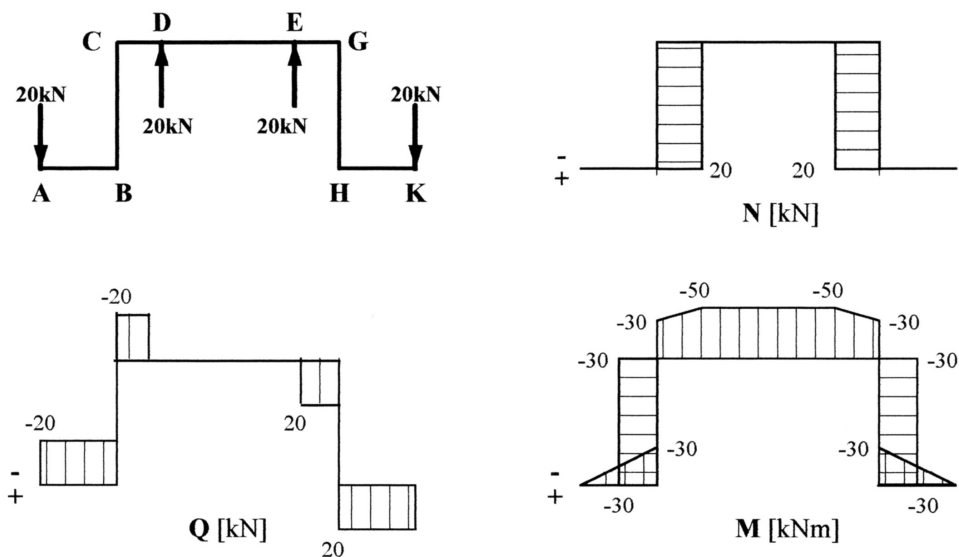
$$h = 2 \text{ m}$$

$$F = 20 \text{ kN}$$

Feladat: Határozza meg a tartó támasztóerőrendszerét és rajzolja meg az igénybevételi ábráit!

Eredmények: Az egyensúlyi erőrendszerrel terhelt tartó és igénybevételi ábrái a 3.5.13 ábrán láthatók.

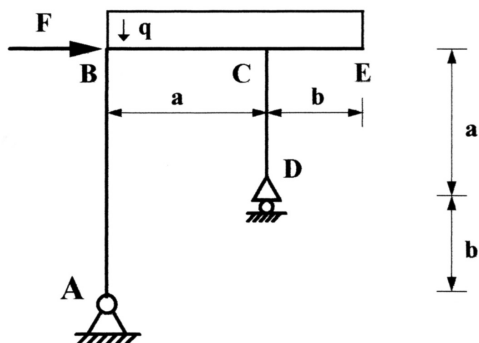
3.5.13 ábra



3.5-6 Feladat

Határozza meg a 3.5.14 ábrán vázolt törtvonalú tartó támasztóerőrendszerét és rajzolja meg az igénybevételi ábráit!

3.5.14 ábra

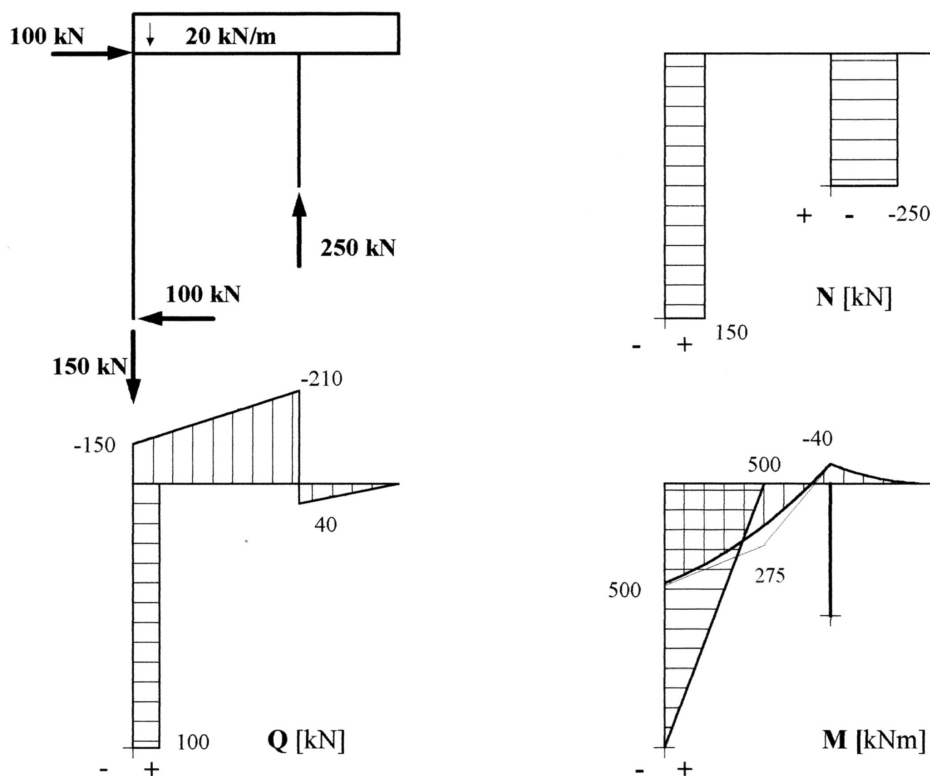


Adatok:

$a = 3$ m,
 $b = 2$ m,
 $F = 100$ kN,
 $q = 20$ kN/m.

Eredmények: Az egyensúlyi külső erőrendszerrel terhelt törtvonalú tartó és igénybevételi ábrái a 3.5.15 ábrán láthatók.

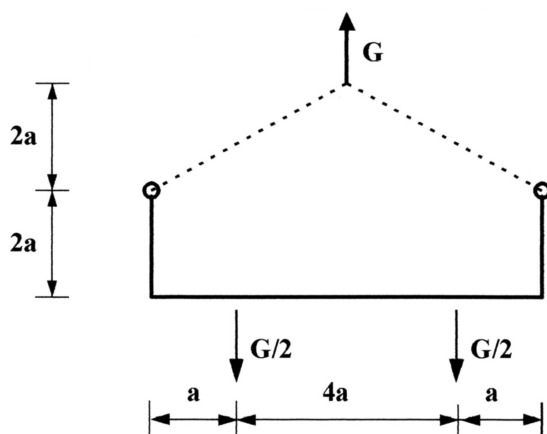
3.5.15 ábra



3.5-7 Feladat

A 3.5.16 ábrán egy G súly emelésére alkalmas emelőszerkezet statikai modelljét vázoltuk. A teheremelő szerkezetet a szaggatott vonallal jelölt kötéllel emeljük.

3.5.16 ábra



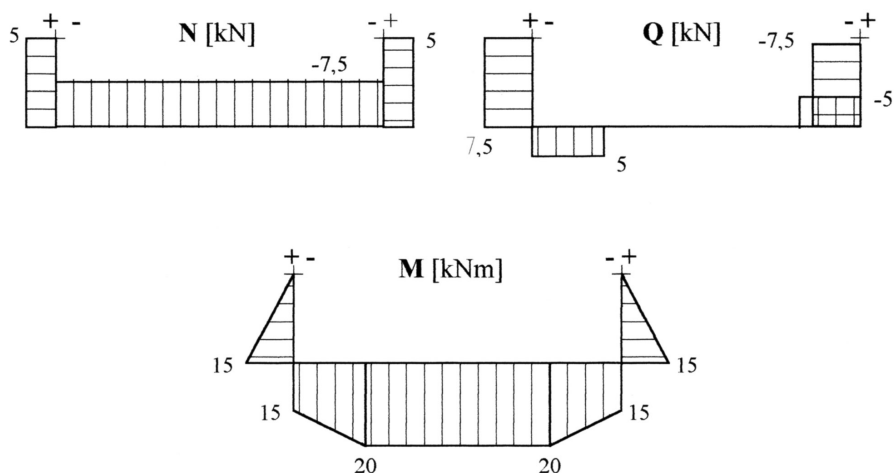
Adatok:

$$a = 1 \text{ m},$$

$$G = 10 \text{ kN}.$$

Feladat: Határozza meg a kötélerőket és rajzolja meg a törtvonalú tartó igénybevételei ábráit!

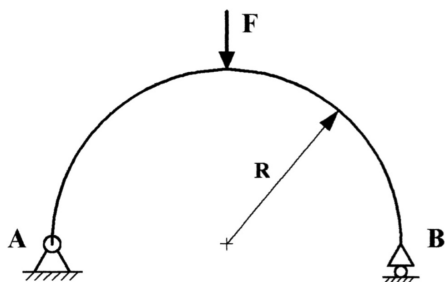
3.5.17 ábra



3.5-8 Feladat

A 3.5.18 ábrán egy íves tartót terhel egy koncentrált erő.

3.5.18 ábra



Adatok:

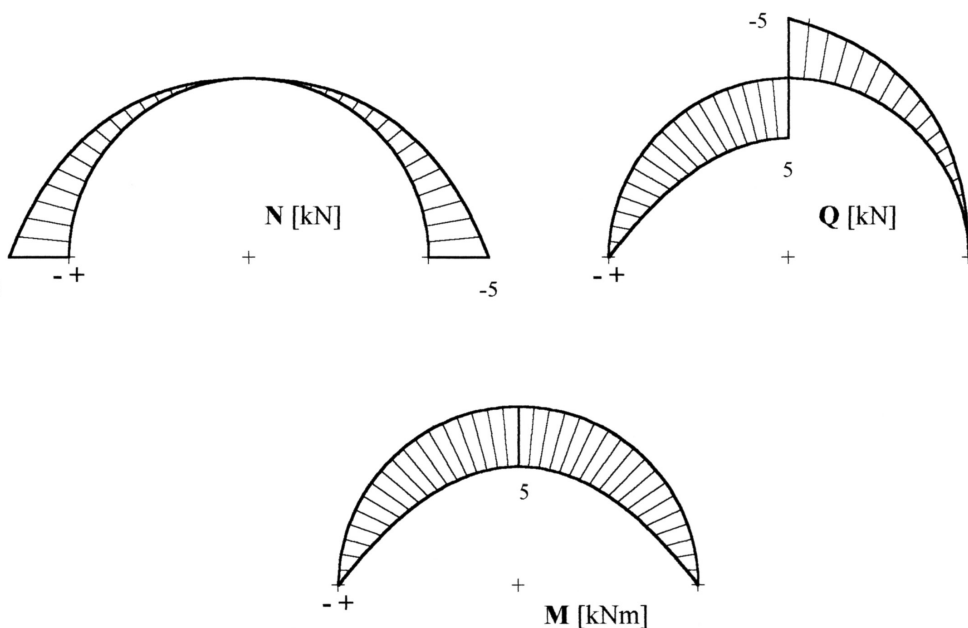
$$F = 10 \text{ kN},$$

$$R = 2 \text{ m}.$$

Feladat:

Rajzolja meg az igénybevé-
teli ábrákat!

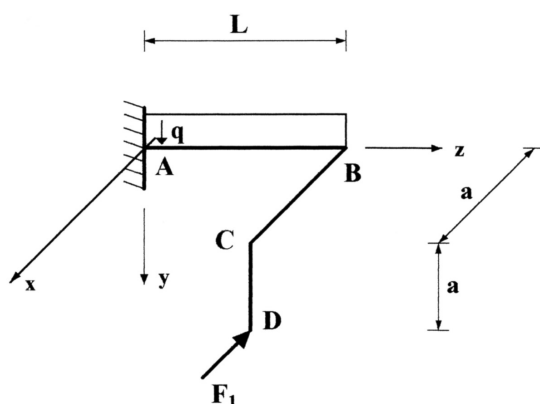
3.5.19 ábra



3.5-9 Feladat

A 3.5.20 ábrán egy térbeli törtvonalú tartót ábrázoltunk.

3.5.20 ábra



Adatok:

$a = 1 \text{ m}$,

$L = 2 \text{ m}$,

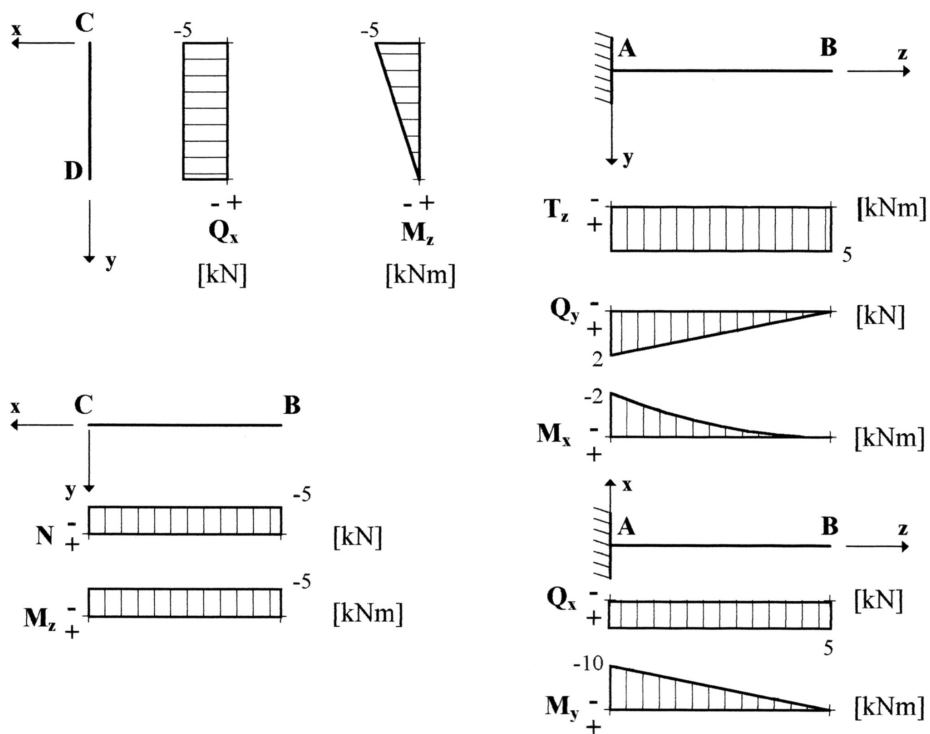
$q = 1 \text{ kN/m}$,

$F_1 = 5 \text{ kN}$.

Feladat: Rajzolja meg az igénybevételi ábrákat!

Eredmények: Az igénybevételi ábrákat a 3.5.21 ábrában adtuk meg.

3.5.21 ábra



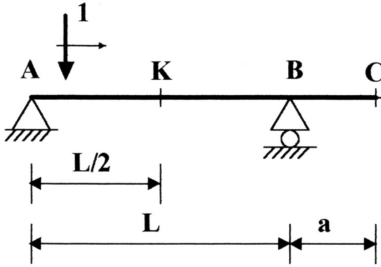
3.6 Hatásábrák

B. 3.6 KIDOLGOZOTT FELADATOK

3.6-1 Feladat

A 3.6.1 ábrán vázolt konzolos kéttámaszú tartón végigvonuló egységnyi nagyságú erő hatásait vizsgáljuk.

3.6.1 ábra



Adatok:

$$L = 3 \text{ m},$$

$$a = 1 \text{ m}.$$

Feladat: 1. Határozza meg az $\eta(F_A)$ és $\eta(F_B)$ hatásfüggvényeket!

2. Az előzőeken kívül rajzolja meg az $\eta(M_K)$,

$\eta(Q_K)$, $\eta(Q_B)_{\text{bal}}$, $\eta(Q_B)_{\text{jobb}}$, és $\eta(M_B)$ hatásábrákat!

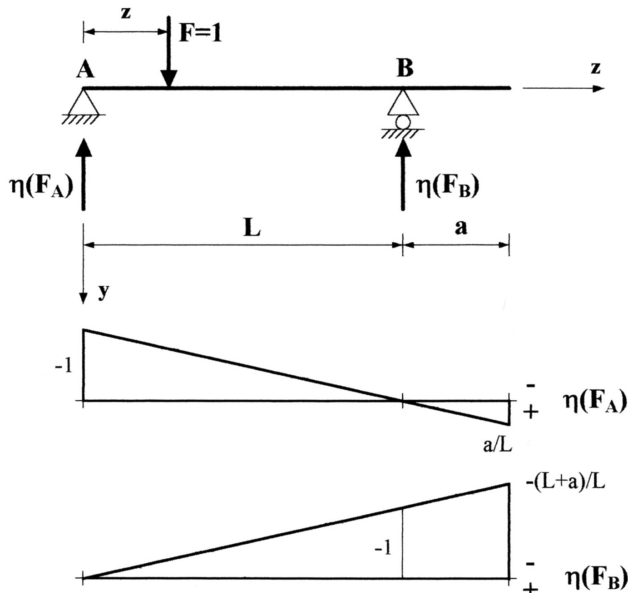
Megoldás: Az A és B pontokon átmenő tengelyekre felírt nyomatéki egyensúlyi egyenletekből felírható a két reakcióerő hatásfüggvény.

$$\sum M_{bi} = 0 = 1 \cdot (L - z) - \eta(F_A) \cdot L \quad \text{ahonnan} \quad \eta(F_A) = \frac{L - z}{L} = 1 - \frac{z}{L}$$

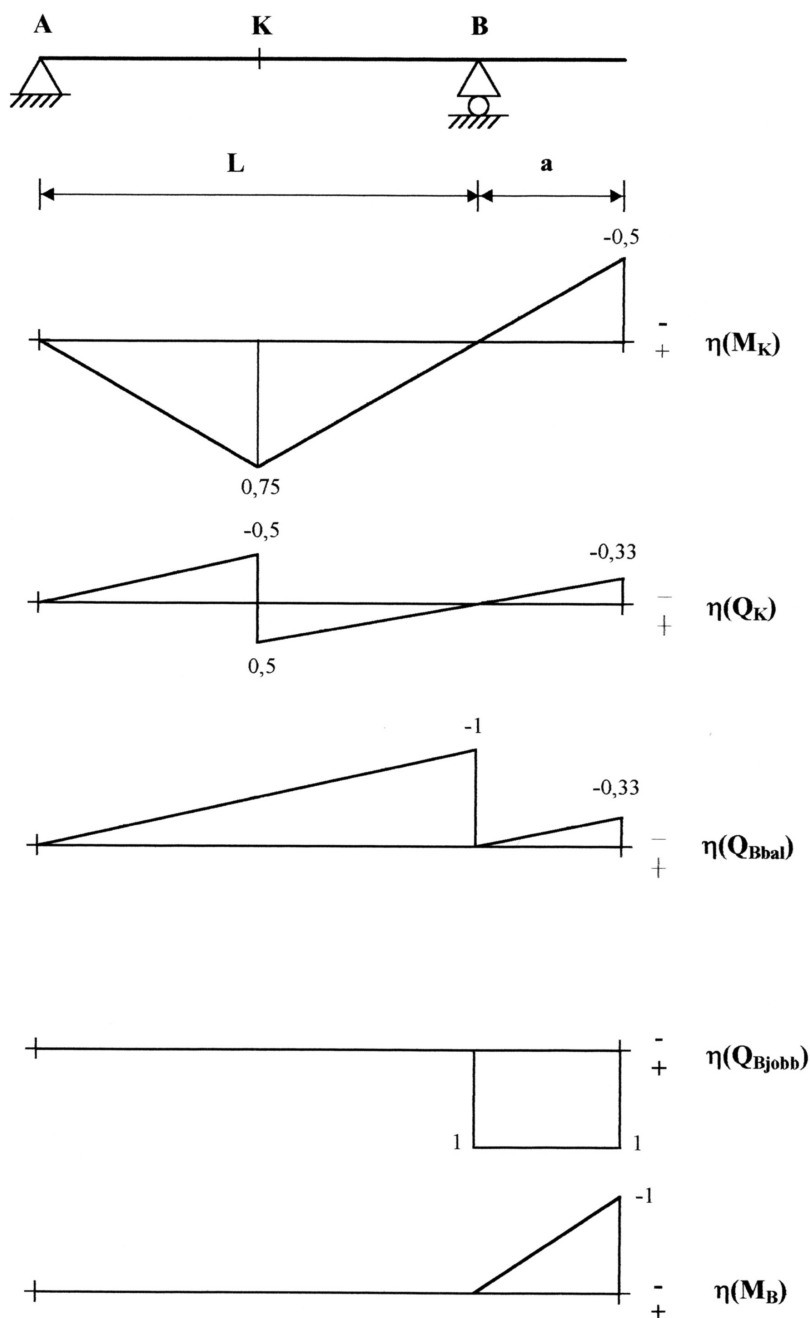
$$\sum M_{ai} = 0 = 1 \cdot z - \eta(F_B) \cdot L, \quad \text{ahonnan} \quad \eta(F_B) = \frac{z}{L}.$$

Az előbbieken meghatározott hatásfüggvényeket a 3.6.2 ábrán, a továbbiakat 3.6.3 ábrán rajzoltuk meg.

3.6.2 ábra

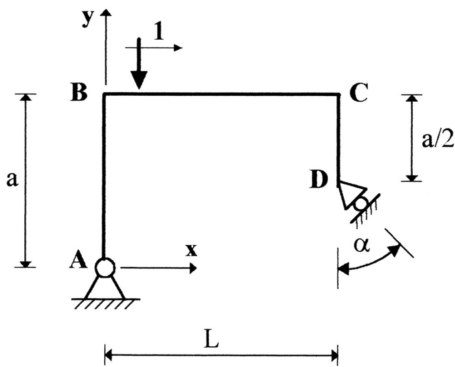


3.6.3 ábra



3.6-2 Feladat

3.6.4 ábra



Adatok:

$$L = 3 \text{ m},$$

$$a = 2 \text{ m},$$

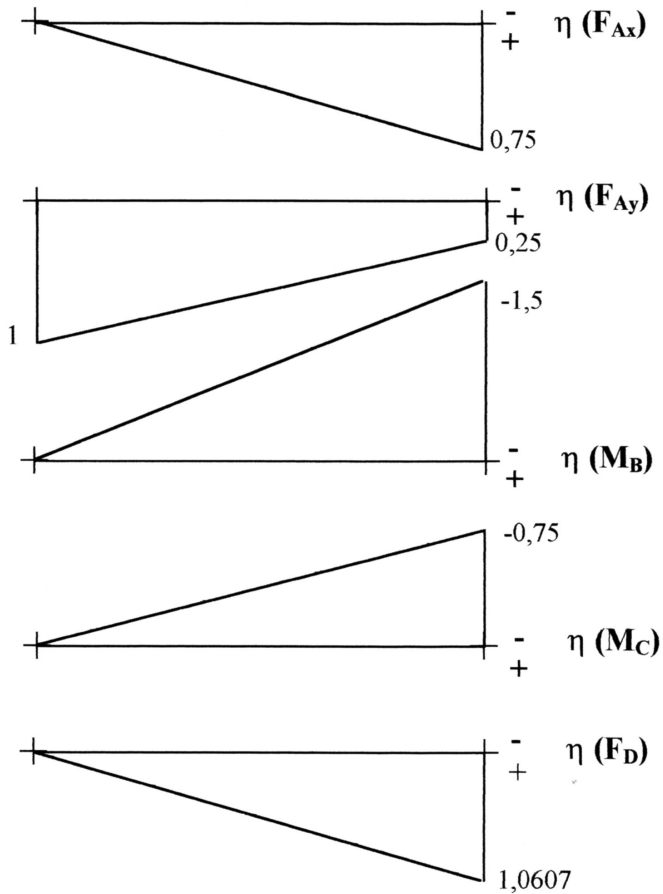
$$\alpha = 45^\circ.$$

Feladat:

Rajzolja meg a 3.6.4 ábrán
vázolt törtvonalú tartó
vízszintes BC szakaszán
végigvonuló egységnyi
erőből adódó $\eta(F_{Ax})$,
 $\eta(F_{Ay})$, $\eta(M_B)$, $\eta(M_C)$,
 $\eta(F_D)$ hatásábrákat!

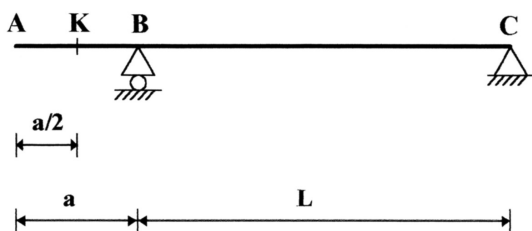
Megoldás: A hatásábrákat részletes magyarázat nélkül a 3.6.5 ábrán rajzoltuk meg.

3.6.5 ábra



3.6-3 Feladat

3.6.6 ábra



Adatok:

$$L = 4 \text{ m},$$

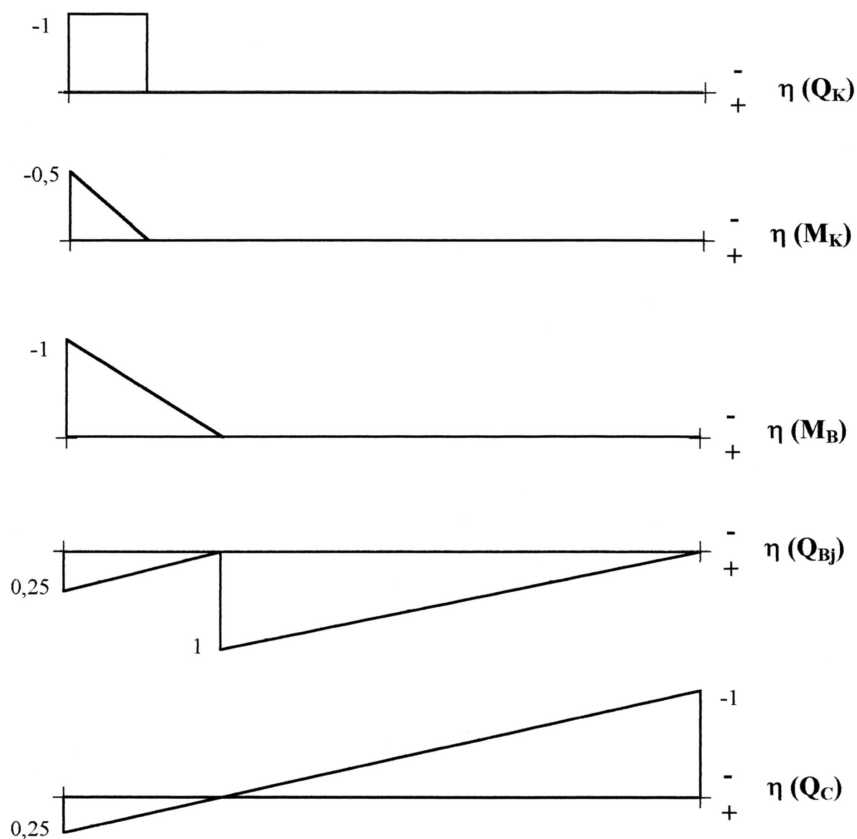
$$a = 1 \text{ m}.$$

Feladat:

Határozza meg a 3.6.6 ábrán látható konzolos kéttámaszú tartó $\eta(Q_K)$, $\eta(M_K)$, $\eta(M_B)$, $\eta(Q_{Bj})$ és $\eta(Q_C)$ hatásábráit!

A hatásfüggvényeket és a hatásábrákat a 3.6-1 Feladat megoldásához hasonlóan határozhatjuk meg: Az eredményeket a 3.6.7 ábrában vázoltuk.

3.6.7 ábra



4. MEREV RÚDSZERKEZETEK STATIKÁJA

A. 4. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Rúdszerkezet fogalma: rúdalakú tartóelemekből álló szerkezet, melyben a tartóelemek belső kényszerekkel kapcsolódnak egymáshoz, s az így felépített rendszert a külső kényszerek kapcsolják a környezethez.

A rúdszerkezet szabadságfoka: a szerkezet helyzetét egyértelműen meghatározó független mozgás-koordináták száma (s). Ezen koordináták száma:

$$\begin{aligned}\text{síkbeli szerkezet esetén } s &= 3r, \\ \text{térbeli szerkezeteknél } s &= 6r,\end{aligned}$$

ahol r a szerkezetet alkotó rudak száma.

A szerkezet mozgását úgy akadályozhatjuk meg, hogy szabadságfokait lekötjük, vagyis alkalmas számú, kialakítású és elhelyezkedésű kapcsolatot hozunk létre a szerkezet elemei, illetve a szerkezet és környezete között.

Ezek a kapcsolatok:

- a**, külső kényszerek, melyek a korábbi tanulmányokból ismert szabadságfok lekötésére alkalmasak,
- b**, belső kapcsolatok: csukló két szabadságfokot köt le síkban és hármat térben, anyagfolytonos kapcsolat hármat síkban és hatot térben.

A szerkezet merevségének szükséges feltétele:

$$\sum n \geq s,$$

labilis a szerkezet, ha

$$\sum n < s.$$

A szerkezet nyugalmi állapotának szükséges feltétele, hogy annak egészét és bármely részét egyensúlyi erőrendszer terhelje. Így r számú rúdból álló szerkezet esetén a felírható független statikai egyenletek száma (e):

$$\begin{aligned}\text{síkban } e &= 3r, \\ \text{térben } e &= 6r.\end{aligned}$$

A kényszereknél keletkező ismeretlen független reakciókomponensek számának összegét jelöljük i -vel.

A szerkezet statikailag túlhatározott, labilis, ha $i < e$,

a statikai határozottság szükséges feltétele $i = e$,

a statikai határozatlanság szükséges feltétele $i > e$.

A labilis szerkezetek csak speciális erőrendszer hatására maradnak nyugalomban (5. fejezet feladatai).

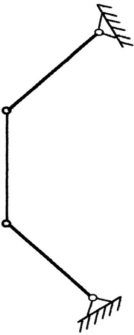
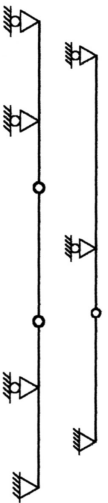
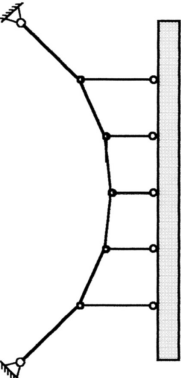
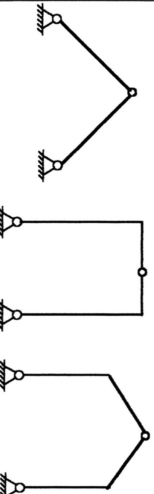
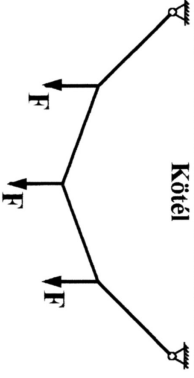
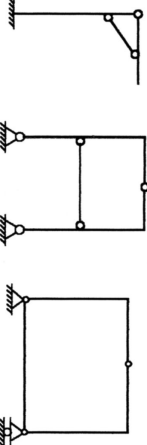
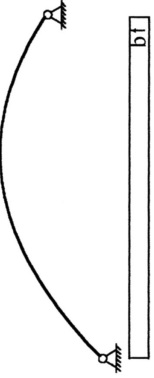
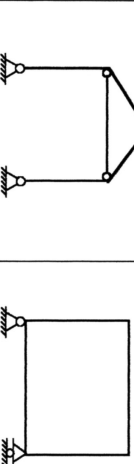
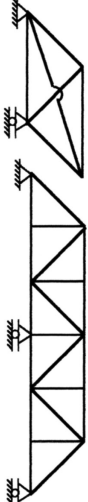
A stabil statikailag határozatlan szerkezetek ($\sum n > s$, illetve $i > e$) statikai módszerekkel nem oldhatók meg. A szerkezet statikai határozatlansági foka:

$$s_h = \sum n - s.$$

Az s_h számú „föls” ismeretlen szilárdságtani módszerekkel határozható meg.

A szerkezetek statikai és kinematikai analízise kölcsönösen megfelel egymásnak. Ennek alapján végeztük el a rúdszerkezetek osztályozását, melyre példákat a 4.1 táblázatban vázoltunk.

4.1 táblázat

Kinematikailag határozatlan Labilis felépítésű $\sum n < s$		Kinematikailag határozott, stabil felépítésű $\sum n \geq s$	
Statikailag túlhátározott $\sum i < e$		Statikailag határozott $\sum i = e$	
 Rúdlánc		 Csuklós többtámaszú (Gerber-) tartók	
 Háromcsuklós tartó, -keret		 Kétsuklós keret	
 Kötél		 Vonórudas keret	
 Rúd		 Zárt keret	
 Rácsos tartók		 Rácsos tartók	

Stabil, statikailag határozott rúdszerkezetek

- támasztóerők meghatározása:
 - a**, Belső felépítés szempontjából merev szerkezet esetén az egész szerkezetre felírt egyensúlyi egyenletekből.
 - b**, Belső felépítés szempontjából labilis (pl. háromcsuklós tartó) rúdszerkezet esetén a teljes szerkezetre, valamint a szerkezet bármely elemére felírt statikai egyensúlyi egyenletekből.
- belső kényszererők (csuklóerők) meghatározása:
 - egy-egy szerkezeti elem, vagy a szerkezet bármely elkülöníthető részének egyensúlyából.

A belső erők a hatás-ellenhatás elvének megfelelően párosával lépnek fel és egyensúlyi erőrendszert alkotnak.

4.1 CSUKLÓS TÖBBTÁMASZÚ (GERBER-) TARTÓK

A minimum két rúdból álló olyan egyenesvonalú rúdszerkezeteket nevezzük Gerber tartónak, melyeknél a rudakat belső csuklóval (Gerber-csukló) kapcsoljuk egymáshoz és az így felépített rendszert külső támaszokkal rögzítjük a külső környezethez (4.1 táblázat). Megoldásuk az előzőekben összefoglaltaknak megfelelően történik.

4.2 HÁROMCSUKLÓS TARTÓ, KERET

A háromcsuklós tartó két egyenesvonalú, vagy törtvonalú rúdból álló szerkezet, melynél a rudakat egymáshoz egy belső csukló és a környezethez két külső csukló kapcsolja. A keretszerűen felépített törtvonalú rudakból álló háromcsuklós tartókat a szakirodalom háromcsuklós keretnek nevezi.

4.3 ÖSSZETETT SZERKEZETEK

A több rúdból álló, az előzőeknél geometriailag összetettebb rúdszerkezeteket nevezzük összetett szerkezetnek. Ezek felépítésére vonatkozóan is érvényesek az előbbiekben megfogalmazottak.

4.4 RÁCSOS RÚDSZERKEZETEK, RÁCSOS TARTÓK

Az egyszerű rácsos tartó háromszög geometriai alakzatokból felépített rúdszerkezet, melynek egyenes rúdjaikat csuklókkal kapcsoljuk egymáshoz, és az így felépített rendszert alkalmasan külső kényszerekkel rögzítjük a környezethez.

A rácsos tartó statikai határozottságának szükséges feltétele:

$$r = 2c - n_k$$

- ahol:
- r** a rudak száma
 - c** a csuklók száma
 - n_k** a külső kényszerekkel lekötött szabadságfokok száma (síkban $n_k = 3$).

A fenti szükséges feltétel mellé az említett háromszög alakú hálózati felépítés párosul. A két feltételt együttesen nevezzük **szükséges és elégséges feltételnek**.

A rácsos tartó igénybevételeinek meghatározásához a tartóra vonatkozóan az alábbi feltevésekkel élünk:

- a, a rácsos tartó rúdait súrlódásmentes (ideális) csuklók kapcsolják össze,
- b, a rudak tengelyei (súlyvonalai) egymást egy pontban, a csomópontban metszik,
- c, a rudak egyenes tengelyűek,
- d, a rudak alkotta rendszer merev,
- e, a rácsos tartót csak csomópontban terhelik erők.

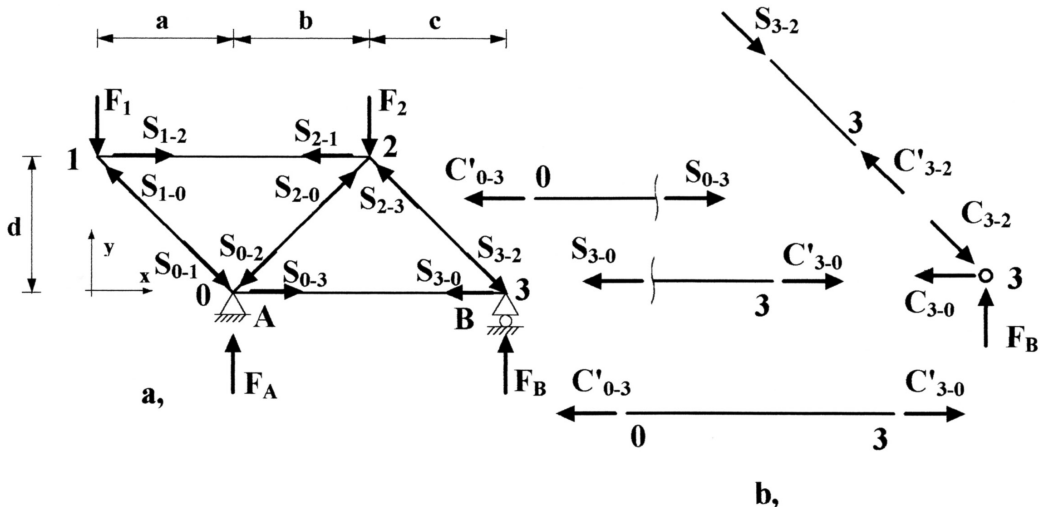
A rácsos tartókat az egyszerűbb ábrázolás kedvéért csuklók nélkül ábrázoljuk.

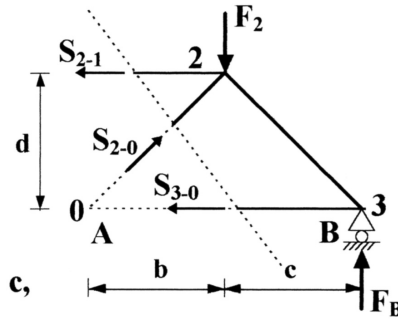
Rácsos tartó rúderőinek meghatározása

Fenti feltevésekből következik, hogy a rácsos tartó rúdjaiknak igénybevétele csak normál igénybevétel. Ezt a rúdban ébredő normálerőt nevezzük **rúderőnek** és „S”-sel jelöljük.

- **Rúderő:** a rúdban fellépő belső erő, mely pozitív (húzóerő), ha a rúdból kevert elemi részt a rúderő-páros húzza és negatív (nyomóerő), ha nyomja (4.1 ábra S_{3-0} és S_{3-2} erők).
- **Rúdra ható erők:** a rúd két végén fellépő erők, melyeket a rúdra kapcsolódó két csukló fejt ki a rúdra. Két erő egyensúlyának feltételéből következik, hogy a rúd két végén ható erők közös hatásvonalúak, azonos nagyságúak és ellentétes értelműek ($C'_{0-3} = C'_{3-0}$).
- **Csuklóra ható erő (csuklóerő):** az az erő, amit a rúd fejt ki a csuklóra, azaz a rúdra ható erő ellentettje ($C'_{3-0} = -C_{3-0}$). A csuklóerő és rúderő tehát megegyezik ($S_{3-0} = C_{3-0}$).

4.1 ábra





A fogalmak és az ábra alapján látható, hogy egy rúddal kapcsolatba hozható mindhárom erő azonos abszolút értékű, ezért ezeket együttesen jellemezhetjük a rúderővel. Úgy is tekinthetjük, hogy az S_{i-j} rúderő az az erő amit az $i-j$ jelű rúd fejt ki az i jelű csuklóra.

Rúderő meghatározási módszerek

a, Csomóponti módszer

E módszer alkalmazása során a rácsos tartóból kiragadjuk a csuklókat és a rájuk ható erők egyensúlyi feltételeit leíró egyenleteket alkalmazzuk. A csuklóra, mint anyagi pontra síkban két független vetületi egyenlet írható fel, amiből maximum két ismeretlen határozható meg.

$$1. \sum F_{xi} = 0 = S_{3-2,x} - S_{3-0},$$

(2)

$$2. \sum F_{yi} = 0 = F_B - S_{3-2,y}$$

(2)

Az $S_{2-1,x}$ és $S_{2-1,y}$ az S_{2-1} rúderő x és y irányú összetevője, melyek között egy geometriai egyenlet teremt kapcsolatot.

A rácsos tartó további rúderői a többi csukló egyensúlyi feltételéből határozhatók meg.

b, Átmetsző módszer

Az átmetsző módszerrel a rácsos tartót alkalmasan „átvágjuk” és valamelyik rész egyensúlyát vizsgáljuk. Az egyensúly vizsgálata síkbeli szétszórt erőrendszerre vonatkozik, és mint ismeretes három független egyensúlyi egyenlet írható fel, és ezekből három ismeretlen határozható meg. Az átmetsző módszer tehát egy átmetszéssel maximum három ismeretlen meghatározására alkalmas.

A 4.1 ábrán látható rácsos tartó 1-2, 0-2 és 0-3 jelű rúdjainak átmetszésével a c, ábrán vázolt rész egyensúlyi feltételeiből az S_{2-1} , S_{2-0} és S_{3-0} rúderők meghatározhatók szerkesztéssel a Culmann-, számítással a Ritter-módszerrel.

$$1. \sum M_{2i} = 0 = F_B \cdot c - S_{3-0} \cdot d \Rightarrow S_{3-0}$$

(II)

$$2. \sum M_{0i} = 0 = F_2 \cdot (b-c) - S_{2-1} \cdot d \Rightarrow S_{2-1}$$

(II)

$$3. \sum F_{yi} = 0 = F_B - F_2 - S_{2-0,y} \Rightarrow S_{2-0,y} \Rightarrow S_{2-0}$$

(II)

Végezetül az a, ábrába visszarájzoltuk a rúderőket.

4.1 CSUKLÓS TÖBBTÁMASZÚ (GERBER-) TARTÓK

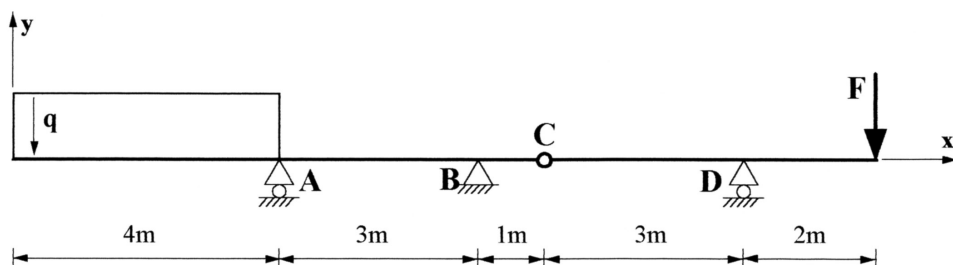
B. 4.1 Kidolgozott feladatok

4.1-1 Feladat

Ismert a 4.2 ábrán látható Gerber-tartót terhelő erőrendszer.

Adatok: $F = 30 \text{ kN}$, $q = 20 \text{ kN/m}$.

4.2 ábra

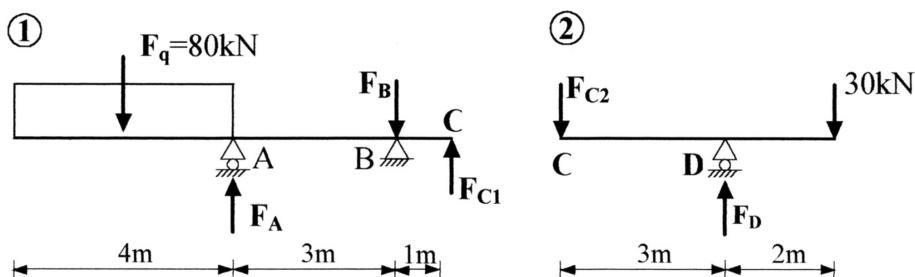


Feladat: 1. Határozzuk meg a támasztóerőket és a C csuklóban ébredő belső erőt!

2. Rajzoljuk meg – a jellemző metszések feltüntetésével – a tartó igénybevételi ábráit!

Megoldás: A tartót terhelő erőrendszer függőleges, ezért a támasztóerők is függőlegesek. A megoldás során a szerkezetet a C csuklónál két részre bontjuk. (4.3 ábra) A 2 jelű részre ható erők egyensúlyát vizsgálva, írjunk fel nyomatéki egyensúlyi egyenletet a C-n átmenő rajz síkjára merőleges c tengelyre!

4.3 ábra



$$\sum M_{ci} = 0 = 3 \cdot F_D - 5 \cdot 30, \text{ ahonnan: } F_D = 50 \text{ kN } (\uparrow)$$

(2)

A következőkben írunk fel a (2) részre függőleges vetületi egyenletet!

$$\sum F_{yi} = 0 = -F_{C2} + F_D - 30,$$

(2)

$$F_{C2} = 20 \text{ kN } (\downarrow)$$

A C csukló egyensúlyából következik:

$$F_{C1} = 20 \text{ kN } (\uparrow)$$

Az (1) tartórészre alkalmazva az A ponton átmenő síkra merőleges a tengelyre felírt nyomatéki egyenletet, amiből meghatározható F_B .

$$\Sigma M_{ai} = 0 = 3 \cdot F_q - 5 \cdot F_B + 4 \cdot F_{Cl}, = 2 \cdot 80 - 3 \cdot F_B + 4 \cdot 20$$

(1)

Kifejezés és behelyettesítés után: $F_B = 80 \text{ kN} (\downarrow)$.

Az F_A támasztóerő pedig meghatározható az (1) tartórészre a B ponton átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyenletből.

$$\Sigma M_{bi} = 0 = 5 \cdot 80 - 3 \cdot F_A + 1 \cdot F_{Cl}, = 400 - 3 \cdot F_A + 20$$

(1)

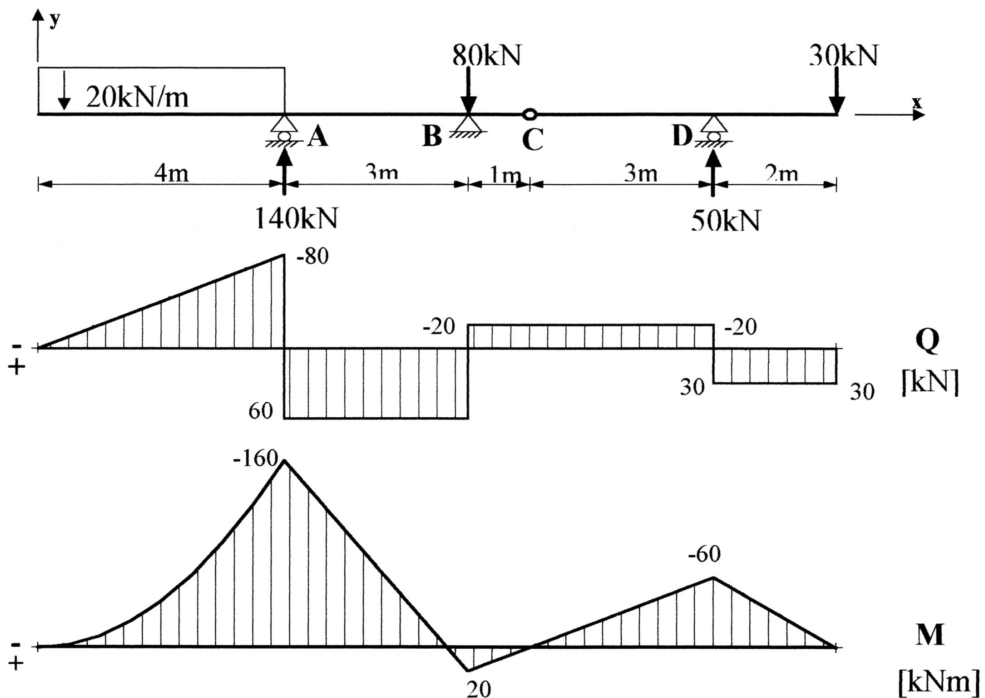
$F_A = 140 \text{ kN} (\uparrow)$

Ellenőrzésképpen felírhatjuk az y irányú vetületi egyenletet a teljes szerkezetre:

$\Sigma F_{yi} = 0 = -F_q + F_A - F_B + F_D - F = -80 + 140 - 80 + 50 - 30 = 0$, a számítás helyes, az egész tartó egyensúlyban van.

2. A tartó igénybevételi ábráit a 4.4 ábrán rajzoltuk meg.

4.4 ábra

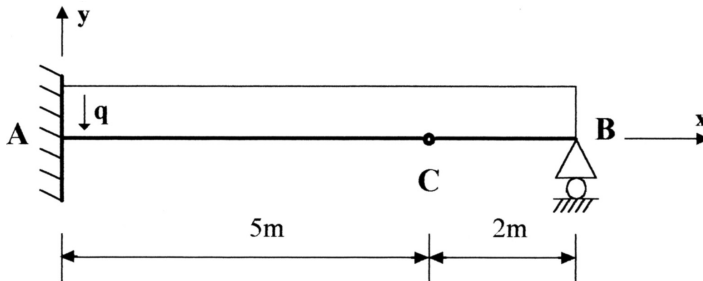


4.1-2 Feladat

Határozzuk meg a 4.5 ábrán vázolt Gerber-tartó támasztóerőit és rajzoljuk meg az igénybevételi ábráit!

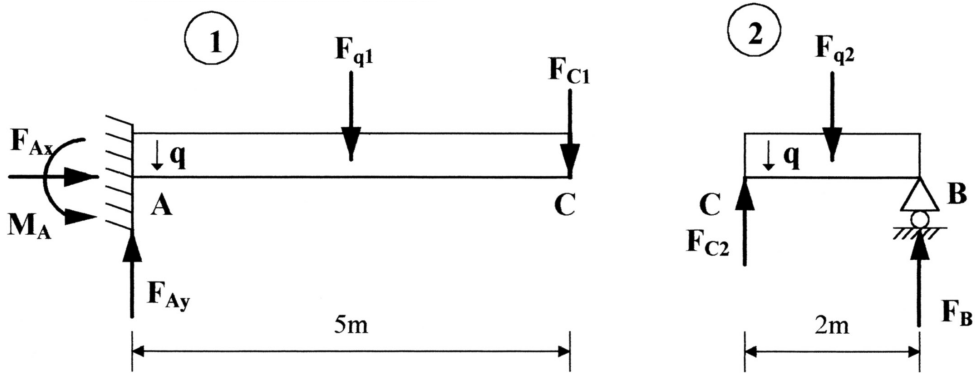
4.5 ábra

Terhelés: $q = 4 \text{ kN/m}$



Megoldás: Két részre bontjuk a tartót a C csuklónál és berajzoljuk az összes ismeretlen támasztóerőrendszer összetevőt (4.6 ábra).

4.6 ábra



$$F_{q1} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ kN}$$

$$F_{q2} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kN}$$

A (2) jelű tartórész egyensúlyát vizsgálva írjunk fel nyomatéki egyenletet a C ponton átmenő c tengelyre!

$$\sum M_{ci} = 0 = 1 \cdot F_{q2} - 2 \cdot F_B, \text{ ebből } F_B = 4 \text{ kN } (\uparrow).$$

(2)

Az F_{C2} erő meghatározásához nyomatéki egyenletet írunk fel a (2) jelű rész b tengelyére:

$$\sum M_{bi} = 0 = 2 \cdot F_{C2} - 1 \cdot F_{q2}, \text{ innen } F_{C2} = 4 \text{ kN } (\uparrow)$$

(2)

A csukló egyensúlyából következik: $F_{C1} = 4 \text{ kN } (\uparrow)$

Az F_{Ay} támasztóerőkomponenst megkaphatjuk például az (1) jelű részre felírt függőleges vetületi egyenletből:

$$\sum F_{yi} = 0 = -F_{Ay} + F_{q1} + F_{C1} = -F_{Ay} + 20 + 4, \text{ ahonnan } F_{Ay} = 24 \text{ kN } (\uparrow).$$

(1)

Az M_A befogási nyomaték meghatározásához használjuk az (1) jelű tartórészre felírt z-vel párhuzamos a tengelyre felírt nyomatéki egyenletet!

$$\sum M_{ai} = 0 = M_A - 2,5 \cdot F_{q1} - 5 \cdot F_{C1} = M_A - 50 - 20, \text{ innen } M_A = 70 \text{ kNm } (\curvearrowleft)$$

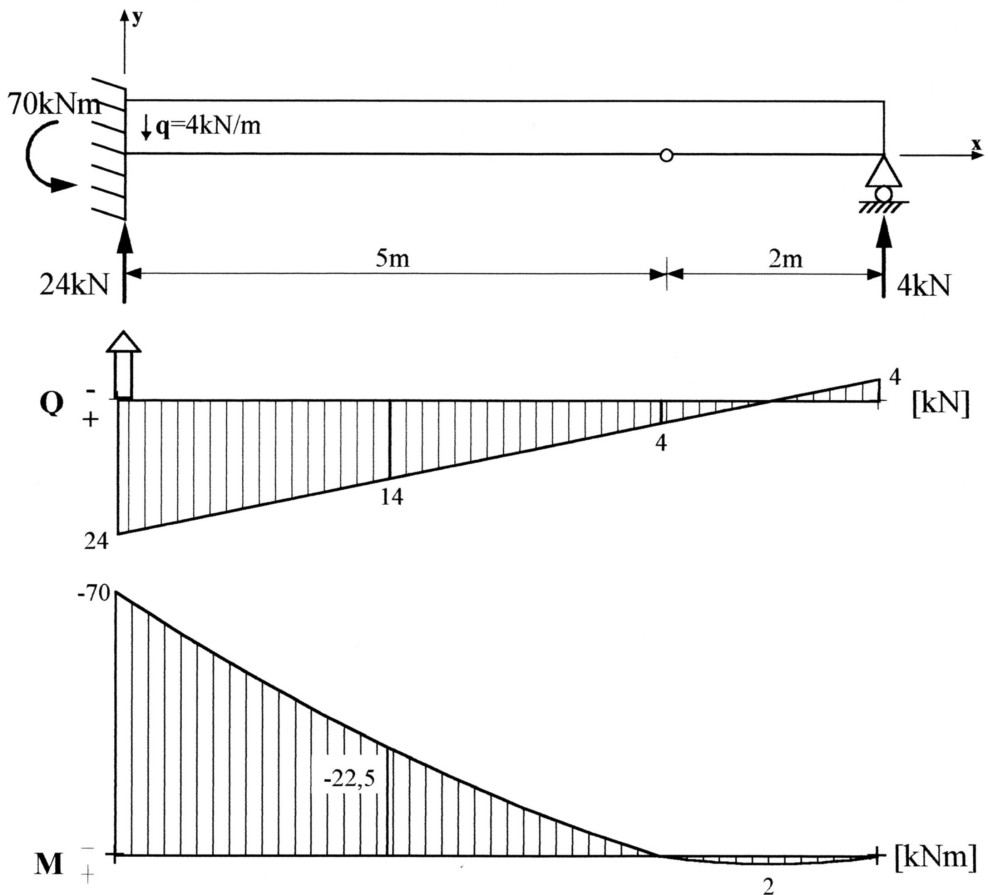
(2)

Mivel vízszintes terhelés nem működik a tartón, az $F_{Ax} = 0$.

Az egész szerkezetre az a tengelyre felírt nyomatéki egyenletből meggyőződhetünk a szerkezet egyensúlyáról.

A tartó igénybevételi ábrái a 4.7 ábrán láthatók.

4.7 ábra

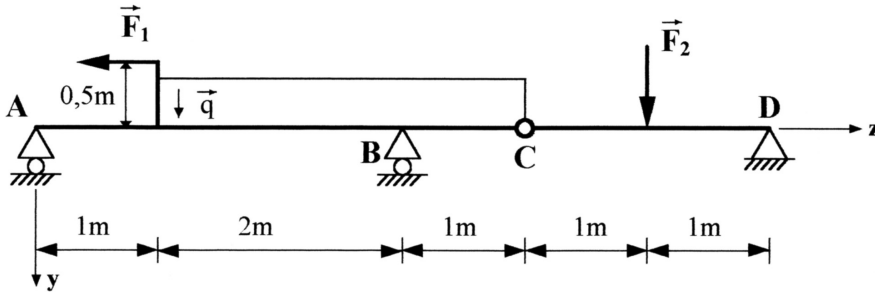


4.1-3 Feladat

A 4.8 ábrán vázolt Gerber-tartót F_1 , F_2 koncentrált és q megoszló erők terhelik.

Adatok: $F_1 = 64 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$, $q = 4 \text{ kN/m}$.

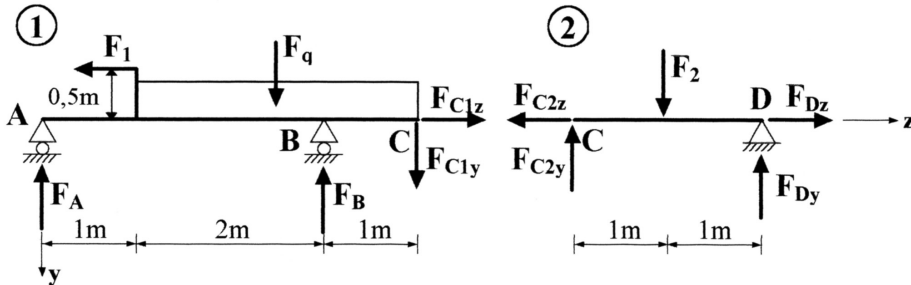
4.8 ábra



Feladat: Határozzuk meg a támasztóerőket és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat a jellemző metszések feltüntetésével!

Megoldás: Szétválasztjuk a tartót két részre és bejelöljük az összes ismeretlen és ismert erőt! (4.9 ábra).

4.9 ábra



A (2) rész egyensúlyát vizsgálva írjunk fel nyomatéki egyenletet a C ponton átmenő, síkra merőleges c tengelyre!

$$\sum M_{ci} = 0 = 2 \cdot F_{Dy} - 1 \cdot F_2, \text{ ebből } F_{Dy} = 2 \text{ kN } (\uparrow).$$

A (2) rész szimmetriájából következik, hogy $F_{C2y} = 2 \text{ kN } (\uparrow)$.

A C csuklóban ébredő erők egyensúlyából adódik $F_{C1y} = 2 \text{ kN } (\downarrow)$.

Most pedig írjunk fel az egész szerkezetre z irányú vetületi egyenletet:

$$\sum F_{zi} = 0 = -F_1 + F_{Dz}, \text{ ahonnan } F_{Dz} = 64 \text{ kN } (\rightarrow).$$

Így a C csuklóban ébredő belső erők z irányú összetevői:

$$F_{C2z} = 64 \text{ kN } (\leftarrow), \quad F_{C1z} = 64 \text{ kN } (\rightarrow).$$

Az F_A támasztóerőt megkaphatjuk például ha nyomatéki egyenletet írunk az (1) jelű részre, a B ponton átmenő x tengellyel párhuzamos b tengelyre.

$$\sum M_{bi} = 0 = 0,5 \cdot F_1 - 3 \cdot F_A + 0,5 \cdot F_q - 1 \cdot F_{C1y},$$

(2)

Ebből: $F_A = \frac{0,5 \cdot F_1 + 0,5 \cdot F_q - 1 \cdot F_{C1y}}{3} = \frac{0,5 \cdot 64 + 0,5 \cdot 12 - 1 \cdot 2}{3} = 12 \text{ kN } (\uparrow).$

Az egész szerkezetre felírt y irányú vetületi egyenletből adódik az F_B támasztóerő:

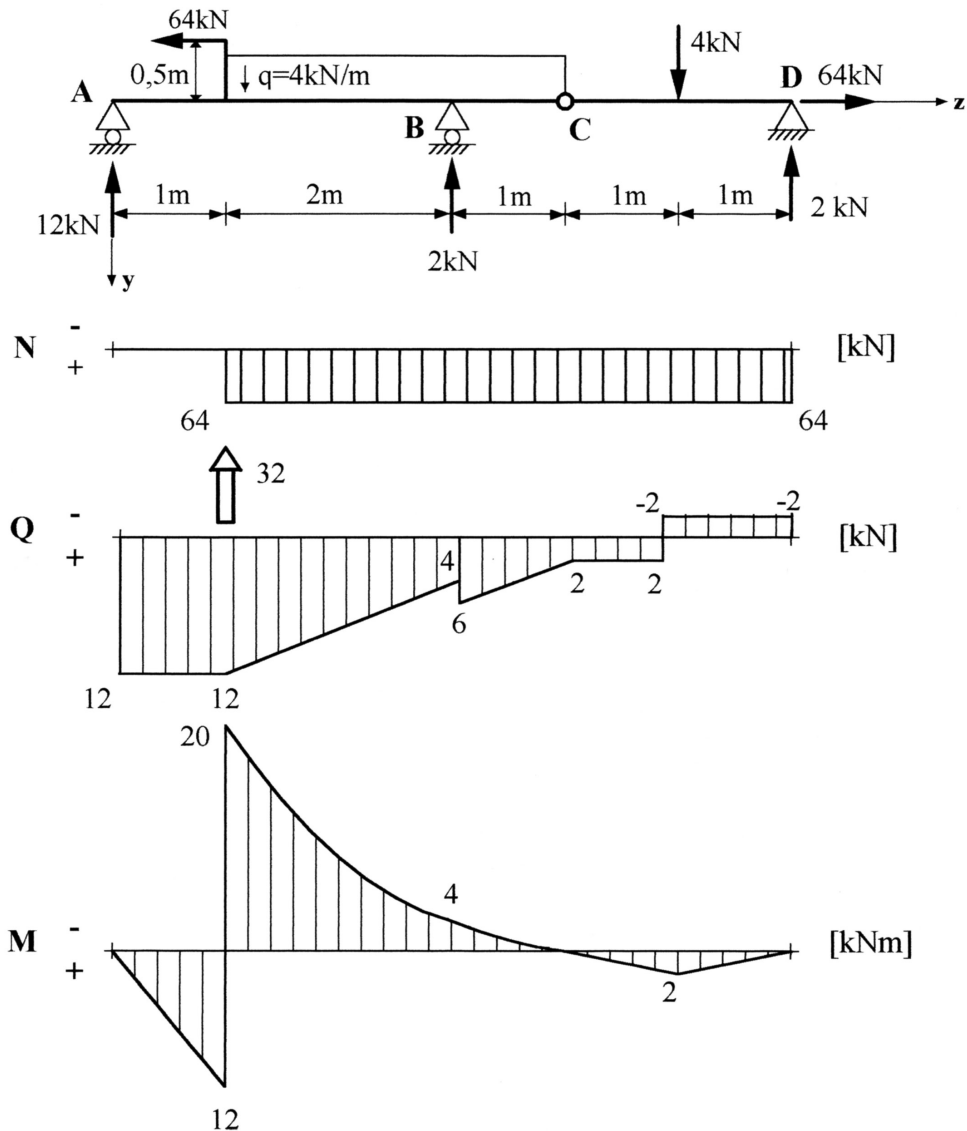
$$\sum F_{yi} = 0 = -F_A + F_q - F_B + F_2 - F_{Dy},$$

$$F_B = -F_A + F_q + F_2 - F_{Dy} = -12 + 12 + 4 - 2$$

$$F_B = 2 \text{ kN } (\uparrow).$$

A Gerber-tartó igénybevételi ábrái a 4.10 ábrán láthatók.

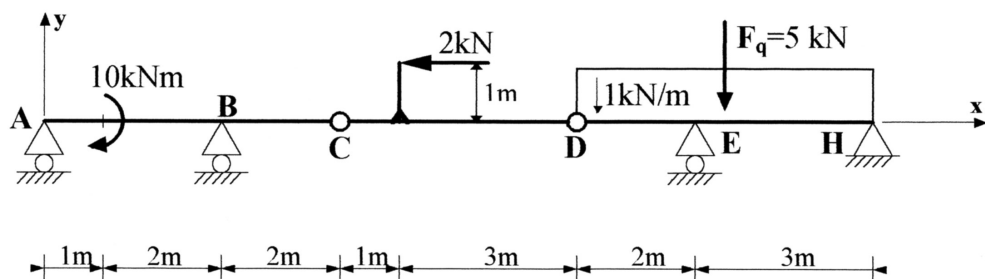
4.10 ábra



4.1-4 Feladat

A 4.11 ábrán egy három részből álló Gerber-tartót vázoltunk terhelésével együtt.

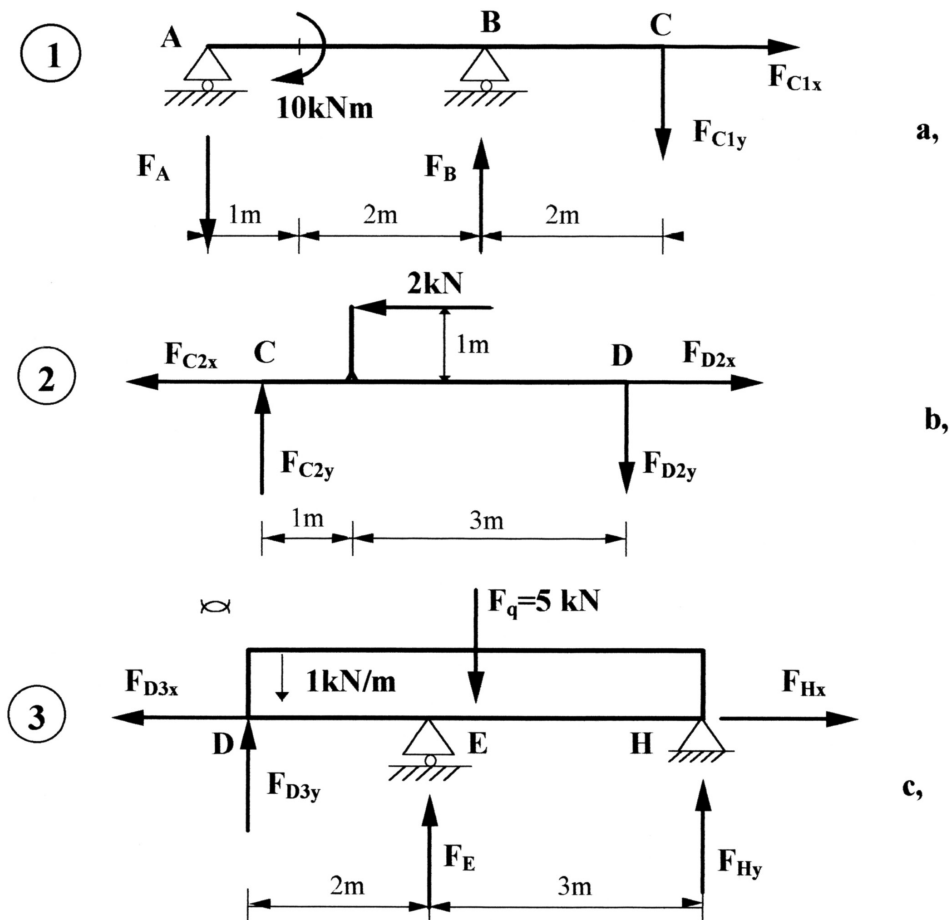
4.11 ábra



Feladat: Határozzuk meg a támasztó- és belső erőket!

Megoldás: Válasszuk szét a Gerber-tartót három részre a C és D csuklónál (4.12 ábra)!

4.12 ábra



F_{Hx} meghatározható az egész szerkezetre felírt x irányú vetületi egyenletből:

$$\Sigma F_{xi} = 0 = F_{Hx} - 2 \text{ kN, innen} \quad F_{Hx} = 2 \text{ kN } (\rightarrow).$$

Az (1) jelű részre alkalmazott x irányú vetületi egyenletből nyilvánvalóan következik:

$$F_{C1x} = F_{C2x} = 0.$$

Következő lépésként nyomatéki egyenletet írunk fel a (2) jelű rész C ponton átmenő c tengelyére:

$$\Sigma M_{ci} = 0 = 1 \cdot 2 - 4 \cdot F_{D2y} \quad \text{innen} \quad F_{D2y} = 0,5 \text{ kN } (\downarrow).$$

A csukló egyensúlya miatt

$$F_{D2y} = 0,5 \text{ kN } (\downarrow).$$

A (2) tartószakaszra felírt y irányú vetületi egyenletből:

$$\Sigma F_{yi} = 0 = F_{D2y} - F_{C2y}, \quad \text{innen} \quad F_{C2y} = 0,5 \text{ kN } (\uparrow).$$

A csukló egyensúlya miatt:

$$F_{C1y} = 0,5 \text{ kN } (\downarrow)$$

Az F_E erő meghatározásához a (3) jelű rész h tengelyére felírt nyomatéki egyenletet alkalmazzuk:

$$\Sigma M_{hi} = 0 = -5 \cdot 0,5 - 3 \cdot F_E + 2,5 \cdot 5, \quad \text{amiből} \quad F_E = 3,33 \text{ kN } (\uparrow).$$

Az előzőhöz hasonlóan:

$$\Sigma M_{ei} = 0 = -2 \cdot 0,5 + 3 \cdot F_{Hy} - 0,5 \cdot 5, \quad \text{amiből} \quad F_{Hy} = 1,167 \text{ kN } (\uparrow).$$

F_B kiszámítható az (1) jelű rész a tengelyére felírt nyomatéki egyenletből:

$$\Sigma M_{ai} = 0 = 5 \cdot 0,5 - 3 \cdot F_B + 10, \quad \text{s ebből} \quad F_B = 4,167 \text{ kN } (\uparrow).$$

Végül F_A meghatározása az (1) jelű rész b tengelyére felírt nyomatéki egyenletből:

$$\Sigma M_{bi} = 0 = -10 + 3 \cdot F_A - 2 \cdot 0,5, \quad F_A = 3,67 \text{ kN } (\downarrow).$$

Ellenőrzésül alkalmazzuk az egész szerkezetre az y irányú vetületi egyenletet:

$$\Sigma F_{yi} = 0 = -3,67 + 4,167 + 3,33 - 5 + 1,167 = 0, \text{ az egyensúlyi egyenlet teljesül.}$$

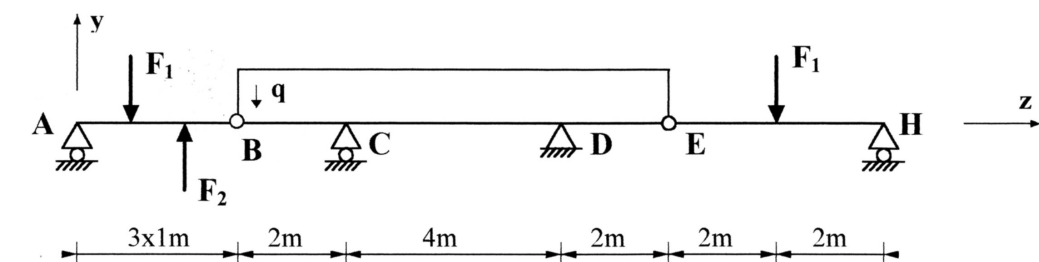
C. 4.1 GYAKORLÓ FELADATOK

4.1-5 Feladat

Határozza meg a 4.13 ábrán vázolt Gerber-tartó támasztóerőrendszerét, valamint rajzolja meg az igénybevételi ábrákat!

Adatok: $F_1 = 4 \text{ kN}$, $F_2 = 2 \text{ kN}$, $q = 2 \text{ kN/m}$.

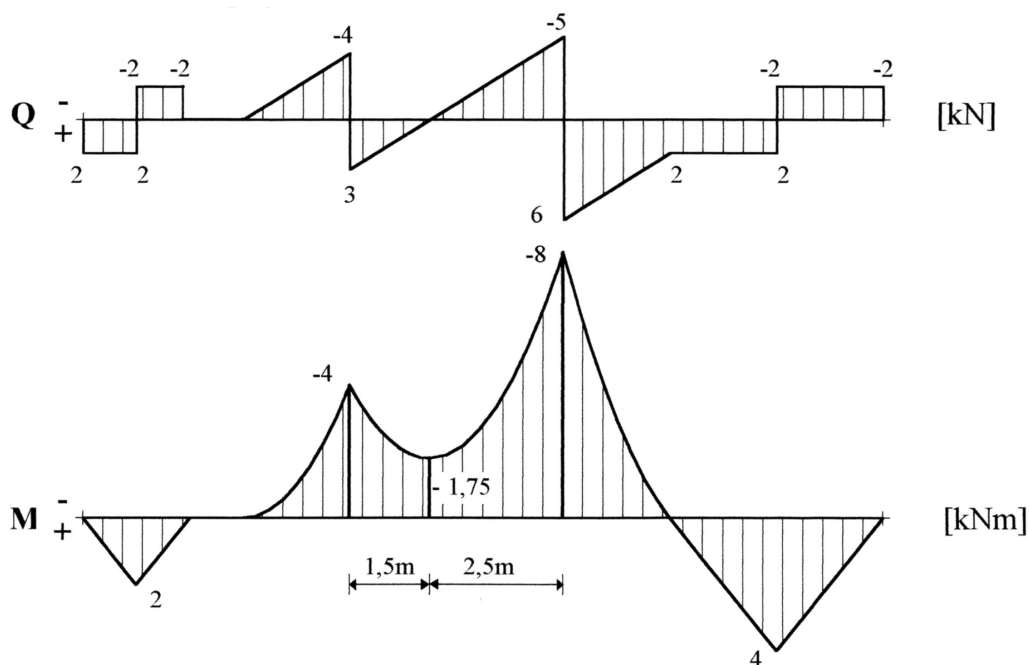
4.13 ábra



Eredmények: $F_A = 2 \text{ kN} (\uparrow)$, $F_B = 0$, $F_C = 7 \text{ kN} (\uparrow)$,
 $F_D = 11 \text{ kN} (\uparrow)$, $F_E = 2 \text{ kN} (\downarrow \uparrow)$, $F_H = 2 \text{ kN} (\uparrow)$.

Igénybevételi ábrák a 4.14 ábrán láthatók.

4.14 ábra

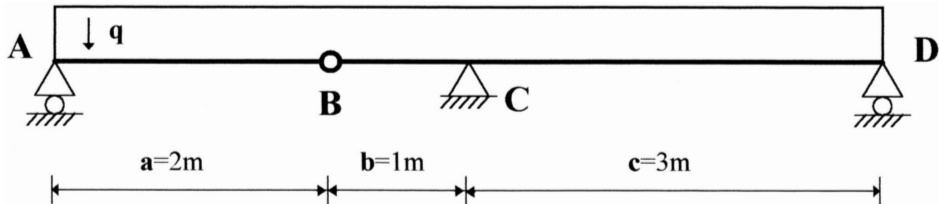


4.1-6 Feladat

Határozza meg a 4.15 ábrán vázolt Gerber-tartó támasztóerőit és rajzolja meg az igénybevételi ábráit!

Terhelés: $q = 3 \text{ kN/m}$

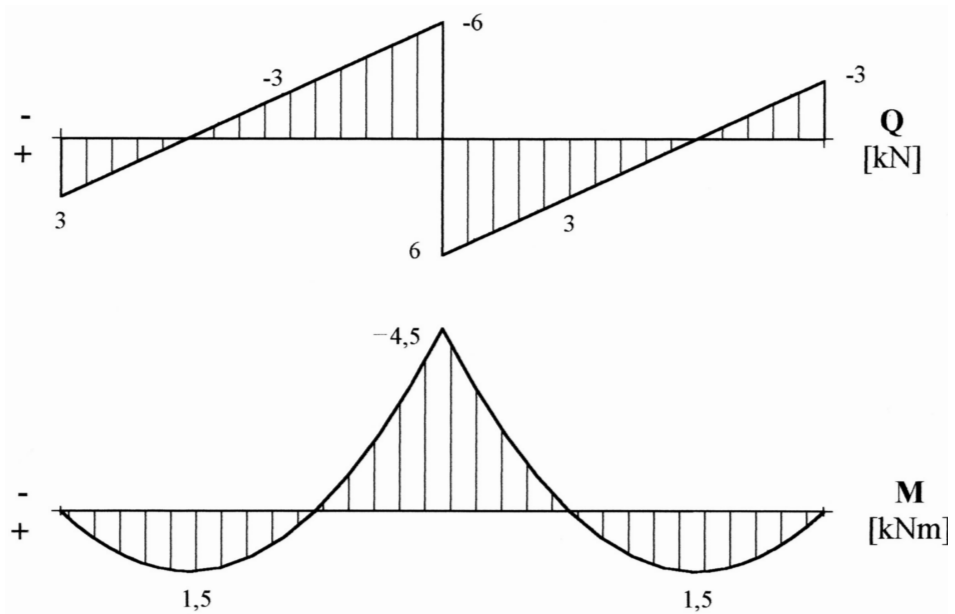
4.15 ábra



Eredmények: $F_A = 3 \text{ kN} (\uparrow)$, $F_B = 3 \text{ kN} (\uparrow\downarrow)$,
 $F_C = 12 \text{ kN} (\uparrow)$, $F_D = 3 \text{ kN} (\uparrow)$.

Az igénybevételi ábrákat a 4.16 ábrán vázoltuk.

4.16 ábra

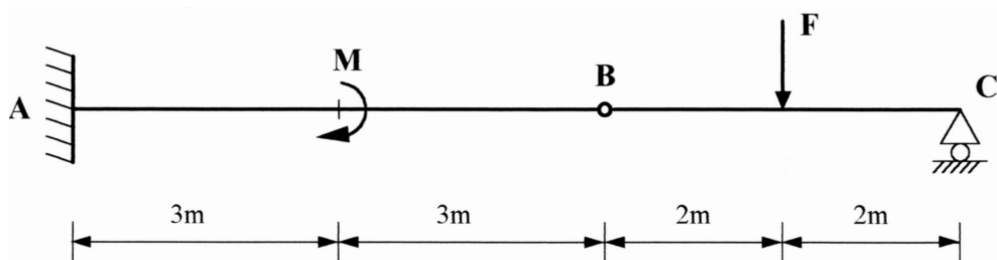


4.1-7 Feladat

Határozza meg a 4.17 ábrán vázolt Gerber-tartó támasztóerőit és belső erőit, valamint rajzolja meg az igénybevételi ábrákat!

Adatok: $F = 12 \text{ kN}$, $M = 8 \text{ kNm}$.

4.17 ábra



Eredmények:

$$F_A = 6 \text{ kN} (\uparrow),$$

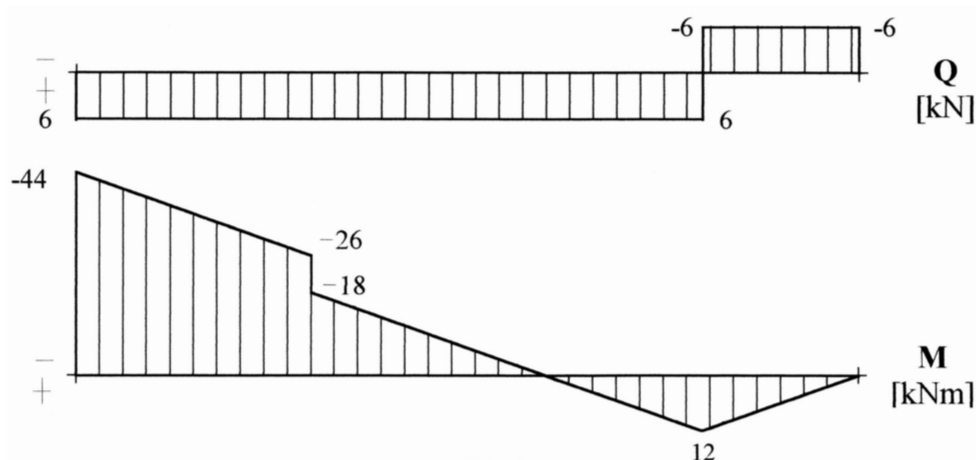
$$F_B = 6 \text{ kN} (\downarrow),$$

$$M_A = 44 \text{ kNm} (\downarrow),$$

$$F_C = 6 \text{ kN} (\uparrow).$$

Az igénybevételi ábrák a 4.18 ábrán.

4.18 ábra

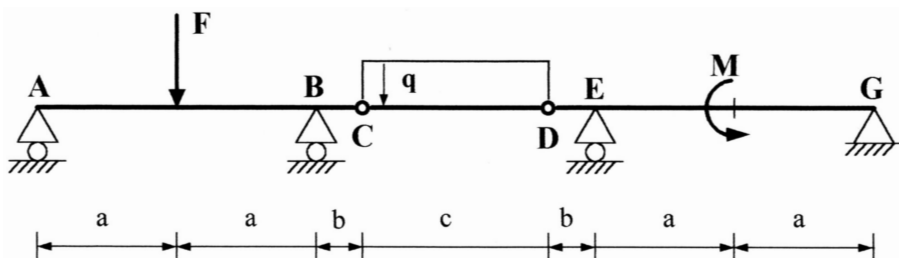


4.1-8 Feladat

Határozza meg a 4.19 ábrán látható Gerber-tartó támasztóerőit és belső erőit, valamint rajzolja meg az igénybevételi ábrákat!

Adatok: $F = 1,2 \text{ kN}$, $q = 0,6 \text{ kN/m}$, $M = 1,2 \text{ kNm}$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c = 4 \text{ m}$.

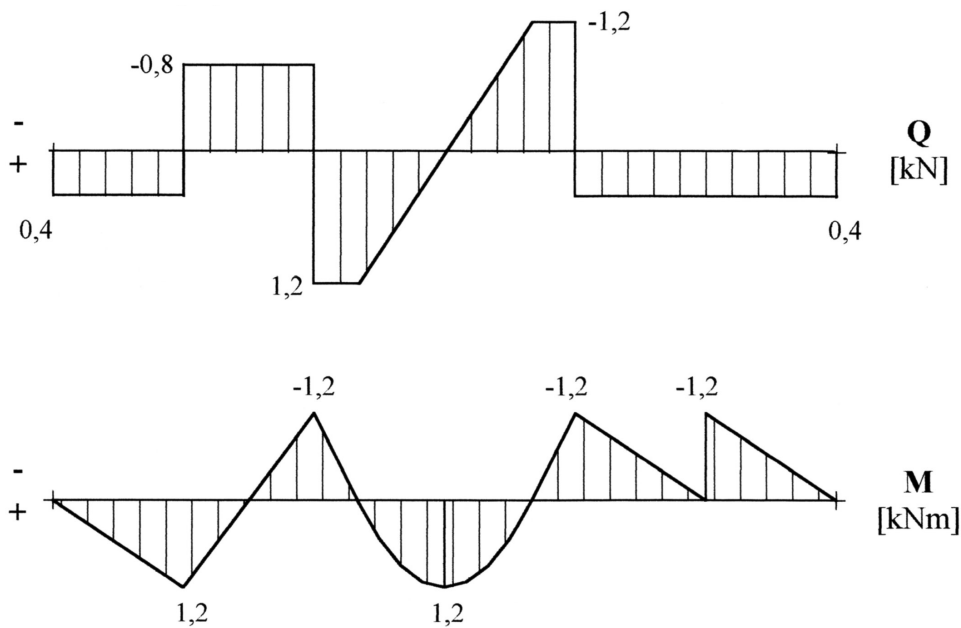
4.19 ábra



Eredmények: $F_A = 0,4 \text{ kN} (\uparrow)$, $F_B = 2 \text{ kN} (\uparrow)$, $F_C = 1,2 \text{ kN} (\downarrow \uparrow)$,
 $F_D = 1,2 \text{ kN} (\uparrow \downarrow)$, $F_E = 1,6 \text{ kN} (\uparrow)$, $F_G = 0,4 \text{ kN} (\downarrow)$.

Az igénybevételi ábrák a 4.20 ábrán.

4.20 ábra



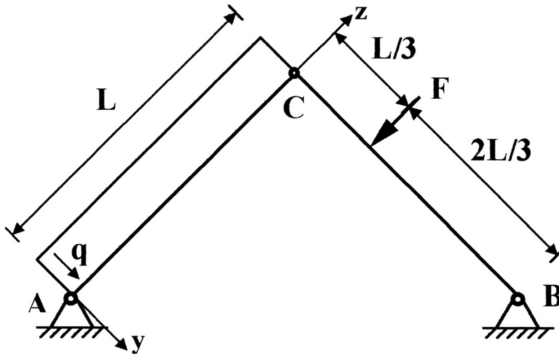
4.2 Háromcsuklós tartók

B. 4.2 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.2-1 Feladat

Ismert a 4.21 ábrán látható háromcsuklós keretet terhelő erőrendszer és a geometriai adatok.

4.21 ábra



Adatok:

$$F = 9 \text{ kN},$$

$$q = 4 \text{ kN/m},$$

$$L = 3 \text{ m}.$$

Feladat:

1. Határozzuk meg a külső és belső csuklóerőket!
2. Ábrázoljuk a szerkezet rúd-jainak erőjátékát és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!

Megoldás: A háromcsuklós keret statikailag határozott és stabil, így támasztóerői és belső csuklóereje statikai módszerekkel meghatározható. Megfelelő számú egymástól független statikai egyensúlyi egyenlet írható fel a szerkezet egészére, illetve egy-egy különálló részére.

Mivel a szerkezet két rúdja merőleges egymásra, ezért a koordináarendszer tengelyeit célszerű a rudakkal párhuzamosan felvenni (4.21 ábra).

$$\sum \mathbf{M}_{ci} = \mathbf{0} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}_{Ay} + 0,5 \cdot \mathbf{L}^2 \cdot \mathbf{q}, \text{ ahonnan } F_{Ay} = -0,5 \cdot q \cdot L = 0,5 \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ kN (}\nearrow\text{)}$$

(1)

A következőkben írjunk fel a szerkezet egészére y irányú vetületi egyenletet!

$$\sum F_{yi} = 0 = -F_{Ay} + F_{By} - q \cdot L, \quad F_{By} = F_{ay} - q \cdot L = 6 \text{ kN (}\nearrow\text{)}$$

(1+2)

A (2) tartórészre alkalmazva a C ponton átmenő síkra merőleges c tengelyre felírt nyomatéki egyenletet, amiből meghatározható F_{Bz} .

$$\sum \mathbf{M}_{ci} = \mathbf{0} = -\mathbf{L}/3 \cdot \mathbf{F} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}_{Bz} \quad F_{Bz} = F/3 = 3 \text{ kN (}\nearrow\text{)}$$

(2)

A teljes szerkezetre felírt y irányú vetületi egyenlet:

$$\sum F_{zi} = 0 = F_{Az} + F_{Bz} - F, \quad F_{Az} = F - F_{Bz} = 9 - 3 = 6 \text{ kN (}\nearrow\text{)}$$

(1+2)

A támasztóerőrendszert a 4.22 a. ábrán rajzoltuk meg.

A C csuklóban ébredő belső erőt az egyik – például az (1) jelű – rudat terhelő erők egyensúlyából számíthatjuk.

$$\sum F_{yi} = 0 = -F_{Ay} + q \cdot L - F_{c1y},$$

(1)

$$F_{c1y} = q \cdot L - F_{Ay} = 4 \cdot 3 - 6 = 12 \text{ kN (↖)}$$

$$\sum F_{zi} = 0 = F_{Az} - F_{c1z},$$

(1)

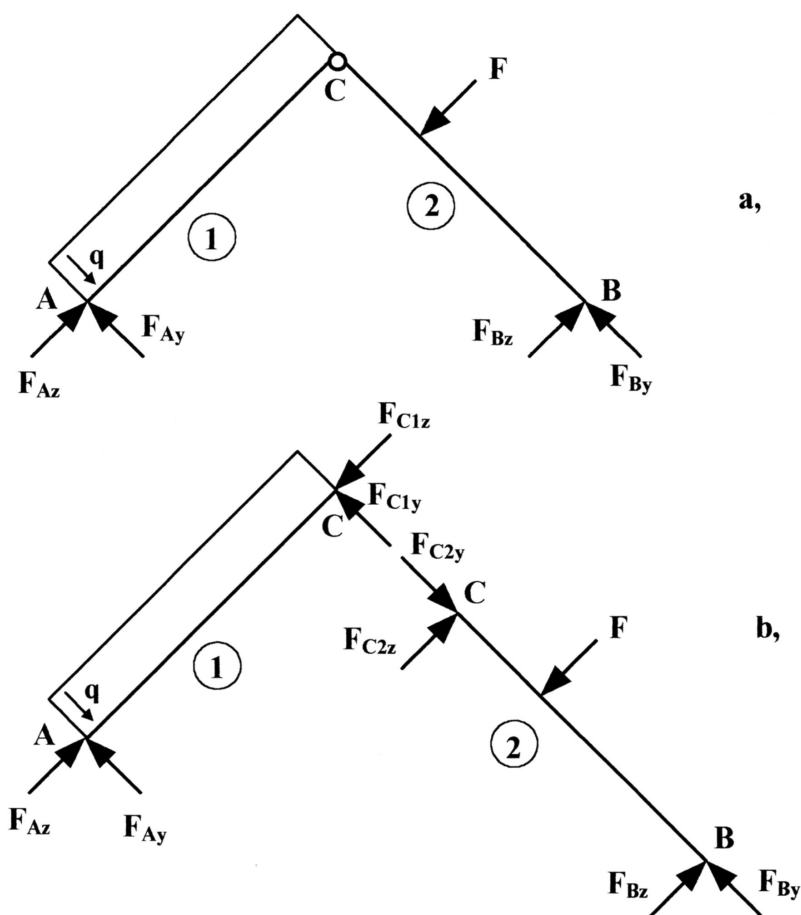
$$F_{c1z} = F_{Az} = 6 \text{ kN (↙)}.$$

Hasonlóan a (2) jelű rudat támadó erők egyensúlyából:

$$F_{c2y} = F_B = 6 \text{ kN (↘)} \quad \text{és} \quad F_{c2z} = F - F_{Bz} = 9 - 3 = 6 \text{ kN (↗)}.$$

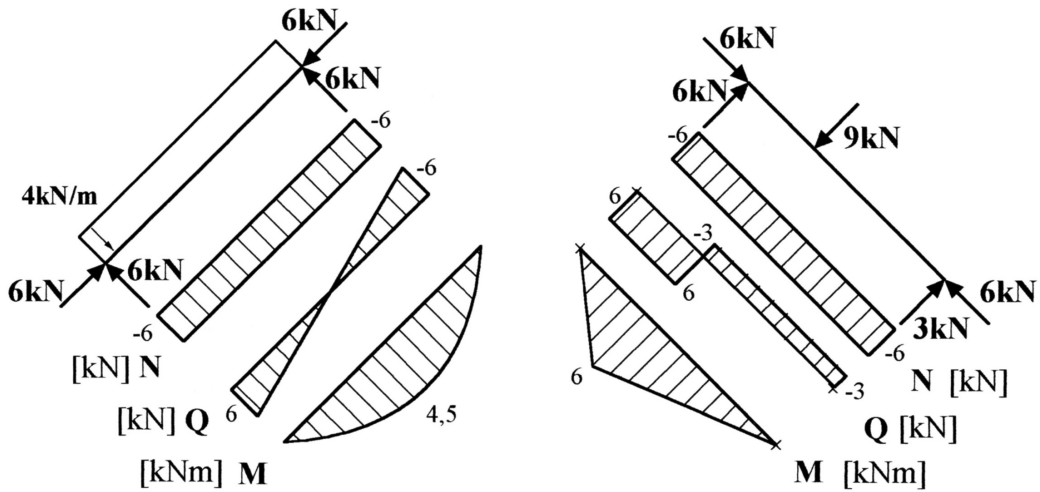
A tartó rúdjaik egyensúlyi erőrendszerét a 4.22 b. ábrán láthatjuk.

4.22 ábra



A rudak igénybevételi ábráit a 4.23 ábrán vázoltuk.

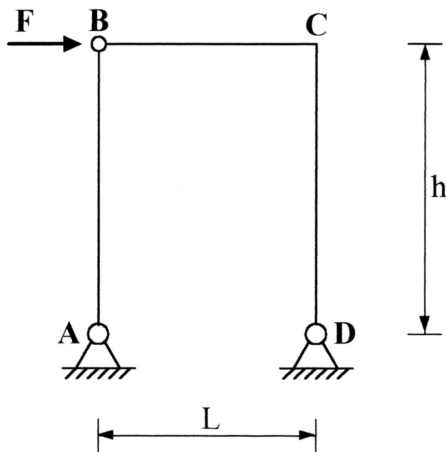
4.23 ábra



4.2-2 Feladat

A 4.24 ábrán látható háromcsuklós keretet egy koncentrált F erő terheli a B csuklóban.!

4.24 ábra



Adatok:

$$F = 12 \text{ kN},$$

$$L = 3 \text{ m},$$

$$h = 4 \text{ m}.$$

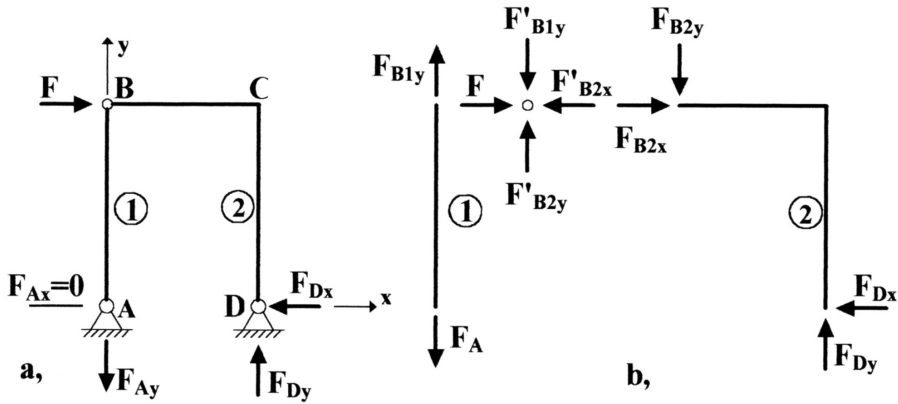
Feladat:

1. Határozzuk meg a támasztó- és belső erőket!
2. Rajzoljuk meg a keret igénybevételi ábráit!

Megoldás: Támasztóerők az A és D csuklóban éberednek, melyek a választott xy koordináta-rendszerben két komponenssel adhatók meg (4.25 a. ábra).

Meghatározásuk a szerkezet egészére, valamint egyes rúdjaira felírt egyensúlyi egyenletekkel lehetséges.

4.25 ábra



Az alábbiakban részletes magyarázat nélkül írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket.

$$\sum M_{di} = 0 = L \cdot F_{Ay} - h \cdot F, \quad \text{ebből} \quad F_{Ay} = 16 \text{ kN } (\downarrow) \\ (1+2)$$

$$\sum M_{bi} = 0 = h \cdot F_{Ax}, \quad \text{innen} \quad F_{Ax} = 0 \\ (1+2)$$

Megjegyzés: A vizsgált szerkezetet úgy is kezelhetjük mint egy törtvonalú merev rúd (2), melyet az (1) jelű rúd mint egyrudas megtámasztás támaszt meg. Ezt tehetjük azért, mert az (1) jelű rúd külső aktív erővel nem terhelt és így egyrudas támaszként funkcionál.

Ebben az esetben viszont $F_{Ax} = 0$ egyensúlyi egyenlet nélkül is kikövetkeztethető.

$$\sum F_{xi} = 0 = F - F_{Dx}, \quad \text{innen} \quad F_{Dx} = -F = 12 \text{ kN } (\leftarrow) \\ (1+2)$$

A B csuklóban keletkező belső erő az (1) és (2) jelű részek vizsgálatából határozható meg vetületi egyenletekből:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{B1x} \quad F_{B1x} = 0. \\ (1)$$

$$\sum F_{yi} = 0 = F_{B1y} - F_{Ay} \quad F_{B1y} = F_{Ay} = 16 \text{ kN } (\uparrow). \\ (1)$$

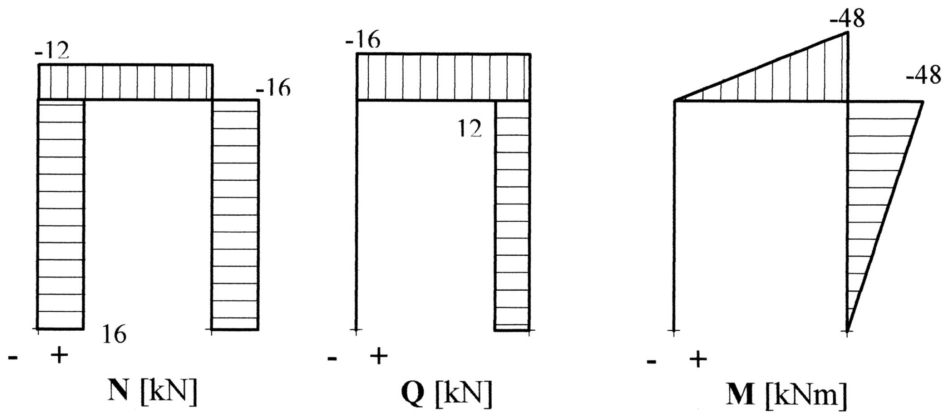
$$\sum F_{xi} = 0 = F_{B2x} - F_{Dx} \quad F_{B2x} = F_{Dx} = 12 \text{ kN } (\rightarrow). \\ (2)$$

$$\sum F_{yi} = 0 = -F_{B2y} + F_{Dy} \quad F_{B2y} = F_{Dy} = 16 \text{ kN } (\downarrow). \\ (2)$$

A kapott eredményekből láthatjuk, hogy a B csuklóban a rudakra működő belső erők x irányú összetevője nem egyenlő nagyságú, mert a B csukló x irányú külső erővel (F) terhelt. A csuklóra működő erőket a 4.25 b. ábrán tüntettük fel.

Az igénybevételi ábrák a 4.26 ábrán láthatók.

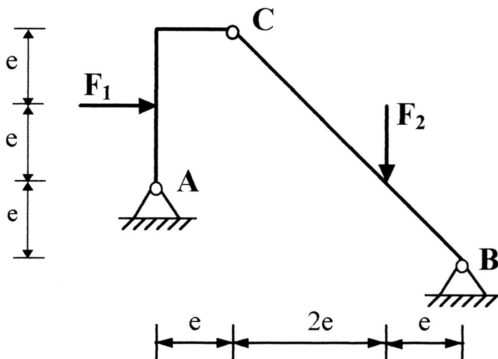
4.26 ábra



4.2-3 Feladat

A 4.27. ábrán vázolt háromcsuklós keret terhelése két azonos nagyságú koncentrált F erő.

4.27 ábra



Adatok:

$$F_1 = F_2 = F = 20 \text{ kN}, \\ e = 1 \text{ m}.$$

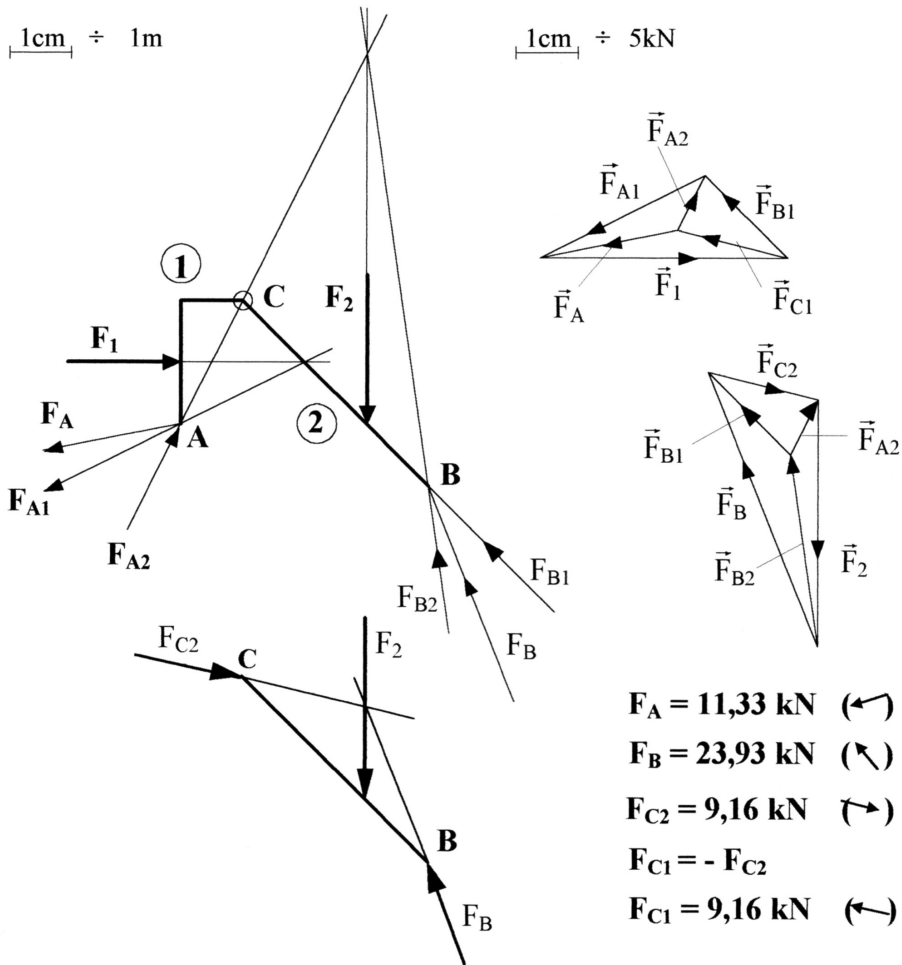
Feladat:

Határozzuk meg a háromcsuklós keret támasztó- és belső erőit szerkesztéssel !

Megoldás: A támasztóerőket a szuperpozíció elvének felhasználásával szerkesztjük meg: Első lépésben megszerkesztjük az AC rudat terhelő F_1 erő kiegyensúlyozásához szükséges F_{A1} és F_{B1} támasztóerő összetevőket, majd a CB rudat terhelő F_2 erő kiegyensúlyozásához szükséges F_{A2} és F_{B2} támasztóerőket. Mindkét esetben a külső aktív erővel nem terhelt rúd a két végén lévő csukló középpontján átmenő hatásvonalú támasztóerőt visel.

A támasztóerők meghatározása így három erő egyensúlyára vezethető vissza. A keresett támasztóerők vektora az összetevők vektori összege lesz (4.28 ábra).

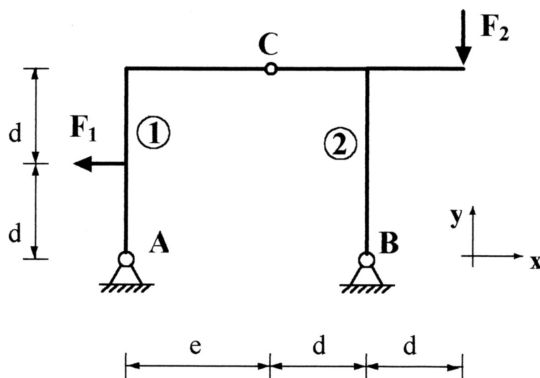
4.28 ábra



4.2-4 Feladat

A 4.29. ábrán látható egy konzolos háromcsuklós keret terheléssel együtt.

4.29 ábra



Adatok:

$$d = m$$

$$e = 3 \text{ m},$$

$$F_1 = 50 \text{ kN},$$

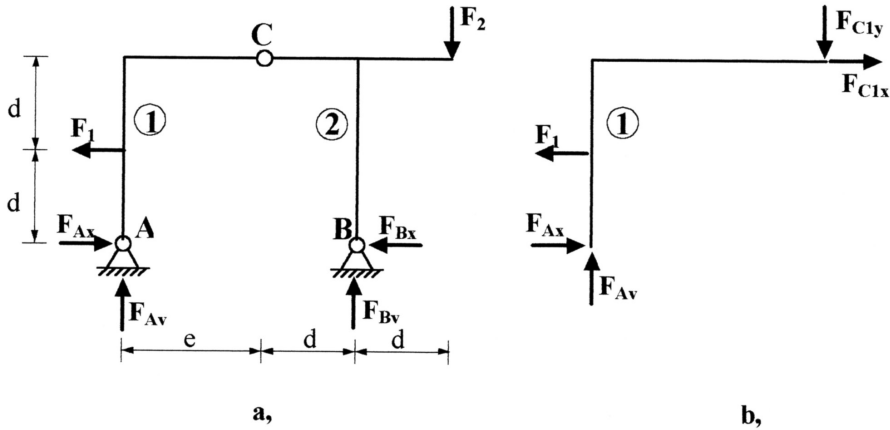
$$F_2 = 30 \text{ kN},$$

Feladat: 1. Határozzuk meg a szerkezet támasztó- és belső erőit!

2. Rajzoljuk meg az igénybevételei ábrákat!

Megoldás: 1. A külső csuklóerők (F_A és F_B) meghatározása a szerkezet C csuklónál történő szétválasztásával történhet. Az egyensúlyi egyenleteket részletes magyarázat nélkül írjuk fel az alábbiakban a 4.30 a. ábra jelölései szerint.

4.30 ábra



$$\sum M_{ai} = 0 = d \cdot F_1 - (e+2d) \cdot F_2 + (e+d) \cdot F_{By}, \quad (1+2)$$

Ebből:

$$F_{By} = \frac{-d \cdot F_1 + (e+2d) \cdot F_2}{e+d} = \frac{-2 \cdot 50 + (3+2 \cdot 2) \cdot 30}{3+2} = 22 \text{ kN } (\uparrow).$$

$$\sum M_{bi} = 0 = d \cdot F_1 - (e+d) \cdot F_{Ay} - d \cdot F_2, \quad (1+2)$$

Ebből:

$$F_{Ay} = \frac{d \cdot (F_1 - F_2)}{e+d} = \frac{2 \cdot (50 - 30)}{3+2} = 8 \text{ kN } (\uparrow).$$

$$\sum M_{ci} = 0 = 2d \cdot F_{Ax} - e \cdot F_{Ay} - d \cdot F_1, \quad (1)$$

$$F_{Ax} = \frac{d \cdot F_1 + e \cdot F_{Ay}}{2d} = \frac{2 \cdot 50 + 3 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 31 \text{ kN } (\rightarrow).$$

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax} - F_1 + F_{Bx}, \quad F_{Bx} = F_1 - F_{Ax} = 50 - 31 = 19 \text{ kN } (\rightarrow) \quad (1+2)$$

A belső csuklóerőket meghatározhatjuk például az (1) jelű rúdra felírt egyensúlyi egyenletekből:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax} - F_1 + F_{C1x}, \quad F_{C1x} = F_1 - F_{Ax} = 50 - 31 = 19 \text{ kN } (\rightarrow) \quad (1)$$

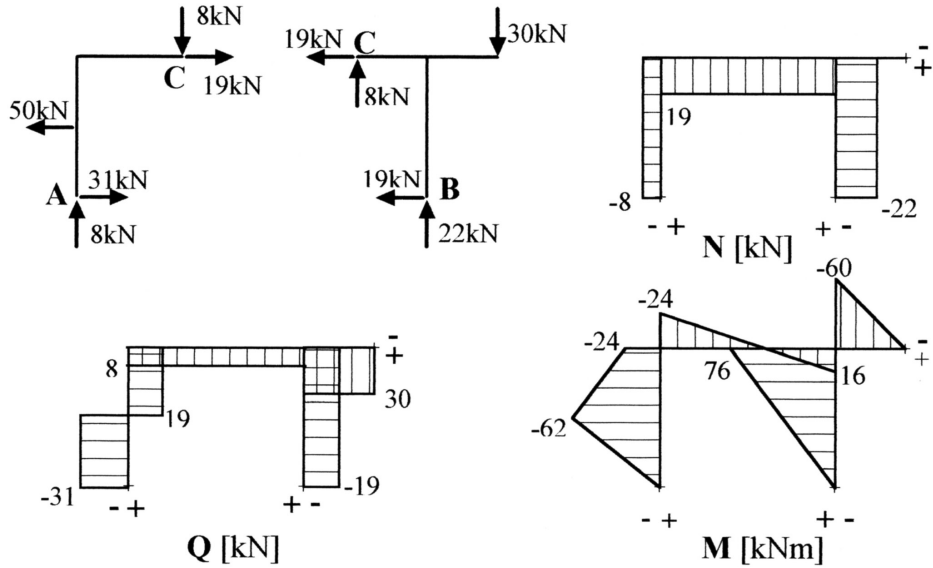
$$\sum F_{yi} = 0 = F_{Ay} - F_{C1y}, \quad F_{C1y} = F_{Ay} = 8 \text{ kN } (\downarrow) \quad (1+2)$$

Mivel a C csuklót külső erő nem terheli a (2) részre ható csuklóerők nagysága megegyezik az (1) részre ható erőkével.

$$F_{C2x} = 19 \text{ kN } (\leftarrow), \quad F_{C2y} = 8 \text{ kN } (\uparrow).$$

A rúdszerkezet rúdjaait támadó egyensúlyi erőrendszer és a rudak igénybevételi ábrái a 4.31 ábrán láthatók.

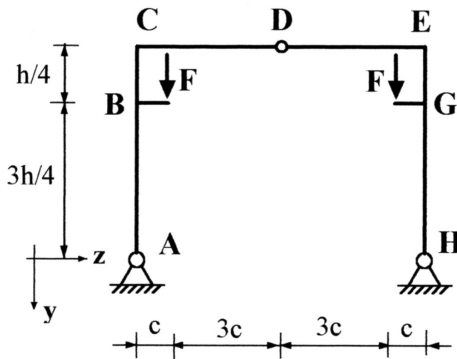
4.31 ábra



4.2-5 Feladat

Daruzott ipari csarnok háromcsuklós konzolos keret statikai modelljét rajzoltuk meg a 4.32 ábrán.

4.32 ábra



Adatok:

$$h = 8 \text{ m},$$

$$c = 1 \text{ m},$$

$$F = 10 \text{ kN}.$$

Feladat:

1. Határozzuk meg az F_A és F_H támasztóerőket, valamint a belső csuklóerőt!

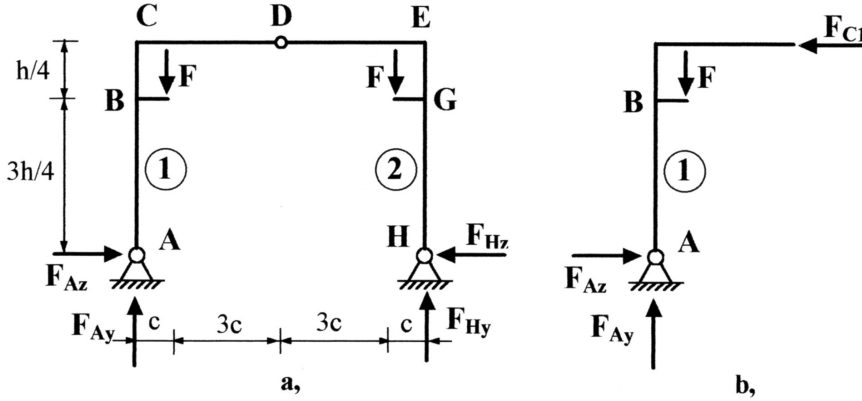
2. Rajzoljuk meg a keret igénybevételi ábráit!

Megoldás: 1. Először határozzuk meg a támasztóerőket!

A támasztóerőket ebben a feladatban is két-két komponensükkel írjuk le az adott yz koordináta-rendszerben.

A tartó egészére és (1) jelű elemére megfelelően megválasztott egyensúlyi egyenletekből meghatározhatjuk a csuklóerők összetevőit.

4.33 ábra



$$\Sigma M_{hi} = 0 = 7c \cdot F + c \cdot F - 8c \cdot F_{Ay}, \quad (1+2)$$

Ebből:

$$F_{Ay} = \frac{7c \cdot F + c \cdot F}{8c} = \frac{8c \cdot F}{8c} = F = 10 \text{ kN } (\uparrow).$$

$$\Sigma M_{di} = 0 = -4c \cdot F_{Ay} + h \cdot F_{Az} + 3c \cdot F, \quad (1)$$

$$F_{Az} = \frac{4c \cdot F_{Ay} - 3c \cdot F}{h} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 10 - 3 \cdot 1 \cdot 10}{8} = 1,25 \text{ kN } (\rightarrow).$$

$$\Sigma F_{yi} = 0 = F_{Ay} - F - F + F_{Hy}, \quad (1+2)$$

$$F_{Hy} = 2F - F_{Ay} = 2 \cdot 10 - 10 = 10 \text{ kN } (\uparrow).$$

$$\Sigma F_{zi} = 0 = F_{Az} - F_{Hz}, \quad (1+2)$$

$$F_{Hz} = F_{Az} = 1,25 \text{ kN } (\leftarrow).$$

A támasztóerők ismeretében valamelyik rudat támadó erők egyensúlyából számíthatjuk az F_{D1} vagy F_{D2} csuklóerőt.

Látható, hogy a szerkezet rúdjaiban működő külső erő és a támaszerő y irányú komponensének összege zérus, tehát a belső csuklóerő y irányú komponense is zérus, azaz a F_{D1} és F_{D2} vízszintes. Az (1) jelű rúdra ható erők egyensúlyára írhatjuk:

$$\Sigma F_{zi} = 0 = F_{Az} - F_{D1}, \quad (1)$$

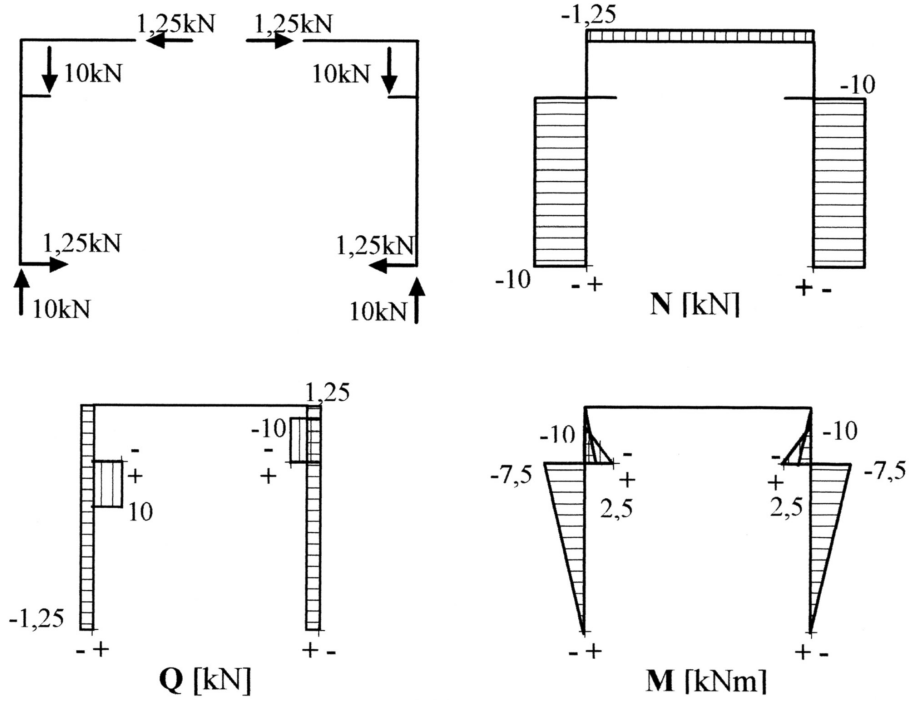
$$F_{D1} = F_{Az} = 1,25 \text{ kN } (\leftarrow).$$

Az előzőekben leírtak alapján:

$$F_{D2} = 1,25 \text{ kN } (\rightarrow).$$

2. A keret rúdjaiban támadó egyensúlyi erőrendszer és az igénybevételi ábrák a 4.34 ábrán láthatók.

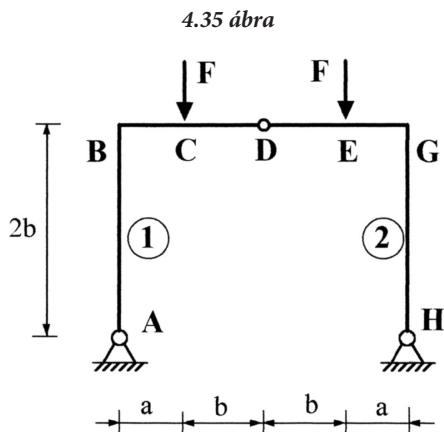
4.34 ábra



C. 4.2 GYAKORLÓ FELADATOK

4.2-6 Feladat

Ismertek a 4.35 ábrán látható keret geometriai adatai és terhelése.



Adatok:

$a = 1 \text{ m}$,
 $b = 2,5 \text{ m}$,
 $F = 15 \text{ kN}$.

Feladat:

Határozza meg a támasztó- és belső erőket szerkesztéssel!

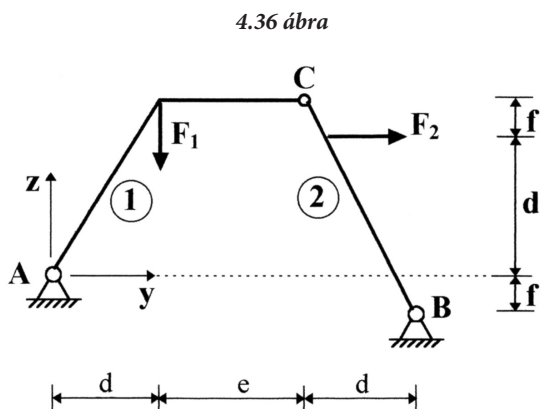
Eredmények:

$F_A = 15,3 \text{ kN}$ ($\nearrow$),
 $F_{D1} = 3 \text{ kN}$ ($\leftarrow$),

$F_H = 15,3 \text{ kN}$ ($\nwarrow$),
 $F_{D2} = 3 \text{ kN}$ ($\rightarrow$).

4.2-7 Feladat

Ismert a 4.36 ábrán vázolt háromcsuklós keret geometriája és terhelése.



Adatok:

$d = 2 \text{ m}$,
 $e = 3 \text{ m}$,
 $f = 1 \text{ m}$,
 $F_1 = 17 \text{ kN}$,
 $F_2 = 15 \text{ kN}$.

Feladat:

1. Határozza meg a támasztóerőket!
2. Ábrázolja a két rúd egyensúlyi erőrendszerét!

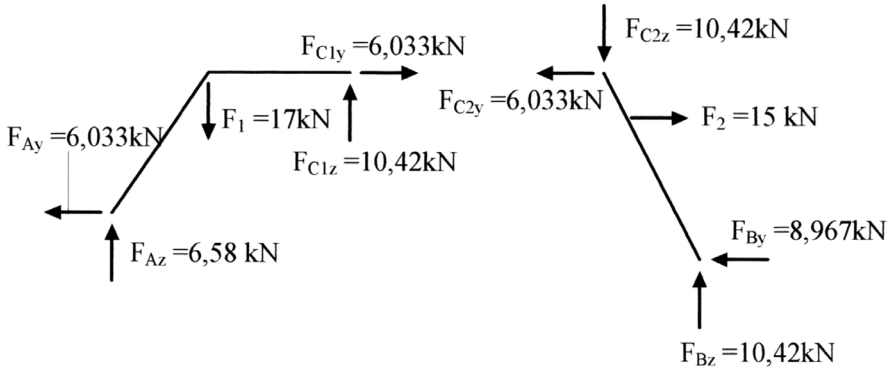
Eredmények:

$F_A = 8,91 \text{ kN}$ ($\nwarrow$),

$F_B = 13,74 \text{ kNm}$ ($\nwarrow$),

A rudakat támadó erőrendszerek a 4.37 ábrán láthatók.

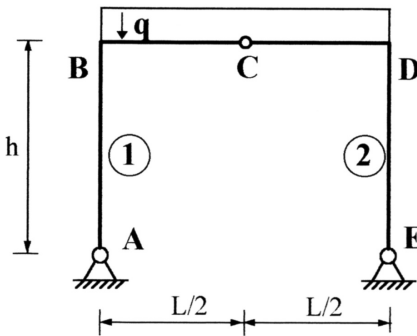
4.37 ábra



4.2-8 Feladat

A 4.38 ábrán vázolt háromcsuklós keret gerendája végig megoszló erővel terhelt.

4.38 ábra



Adatok:

$h = 10 \text{ m}$,

$L = 20 \text{ m}$,

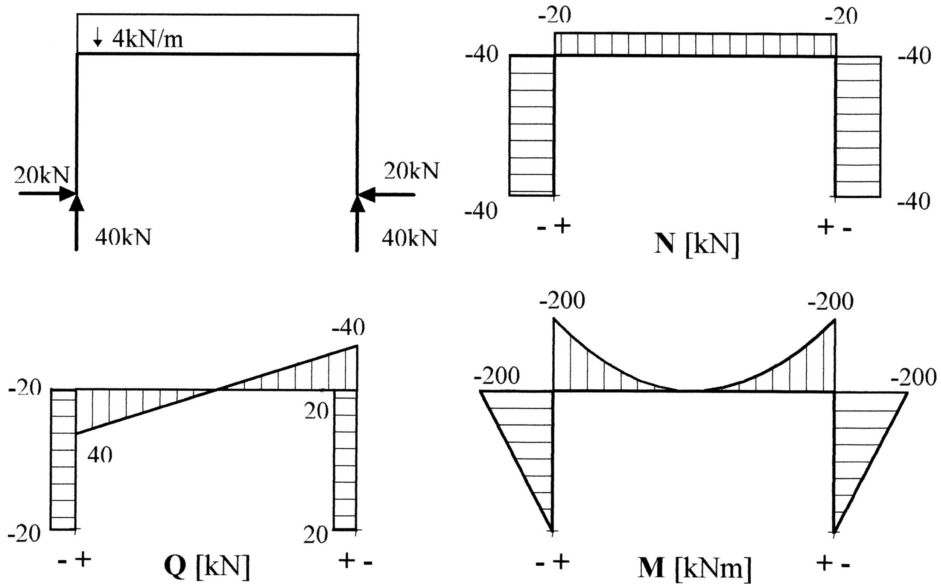
$q = 4 \text{ kN/m}$.

Feladat:

Rajzolja meg a tartó igénybevételei ábráit!

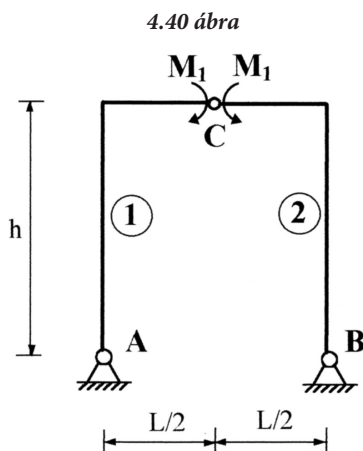
Eredmények: Az eredményeket a 4.39 ábrán adtuk meg.

4.39 ábra



4.2-9 Feladat

A 4.40 ábrán vázolt háromcsuklós keret a C csuklónál koncentrált nyomatékpár terheli.



Adatok:

$$h = 5\text{ m},$$

$$L = 4\text{ m},$$

$$M_1 = 30\text{ kNm}.$$

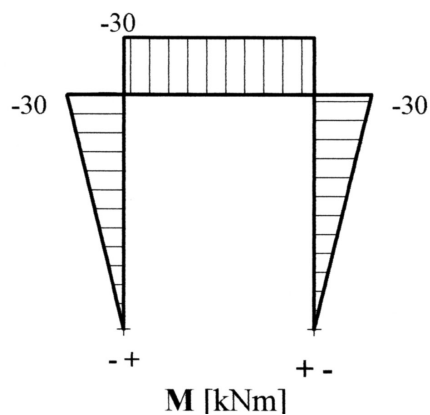
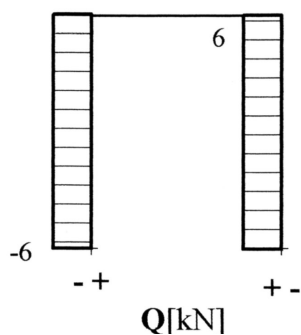
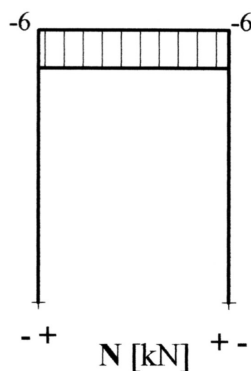
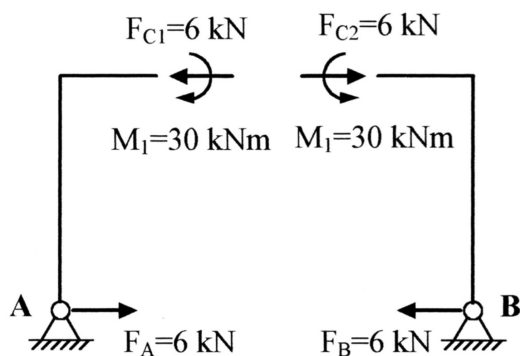
Feladat:

1. Határozza meg a támasztóerőket és a belső csuklóerőket!

2. Rajzolja meg az igénybevételi ábrákat!

Eredmények: Az eredményeket a 4.41 ábrán adtuk meg.

4.41 ábra

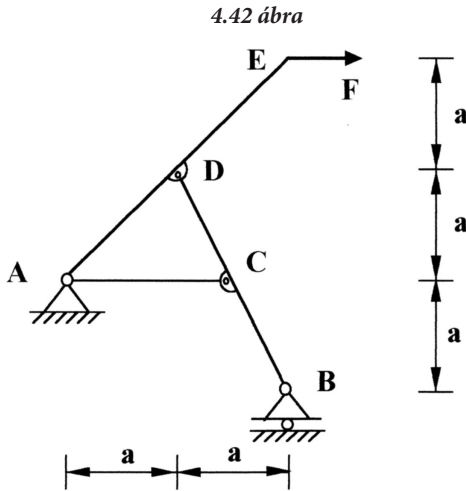


4.3 Összetett szerkezetek

B. 4.3 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.3-1 Feladat

A 4.42 ábrán vázolt összetett rúdszerkezetet egy vízszintes F erő terheli.



Adatok:

$$F = 10 \text{ kN},$$

$$a = \text{m}.$$

Feladat:

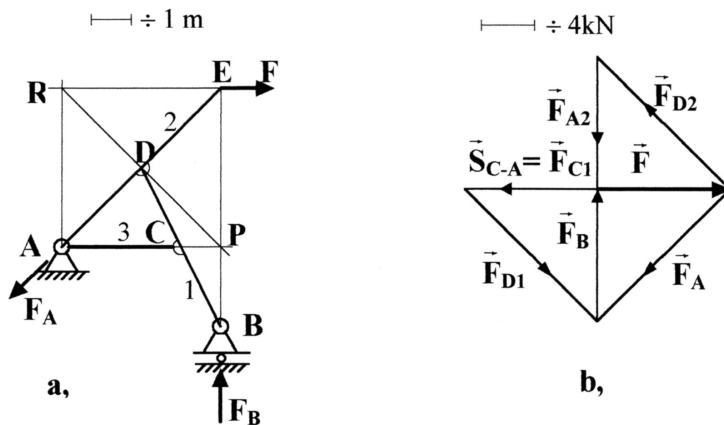
1. Határozzuk meg szerkesztéssel a reakció- és csukló erőket!
2. Rajzoljuk meg az igénybevételei ábrákat!

Megoldás: 1. Reakció- és csuklóerők meghatározása

A támasztóerők meghatározásához a három erő (F , F_A , F_B) egyensúlyára vonatkozó feltételek adnak segítséget.

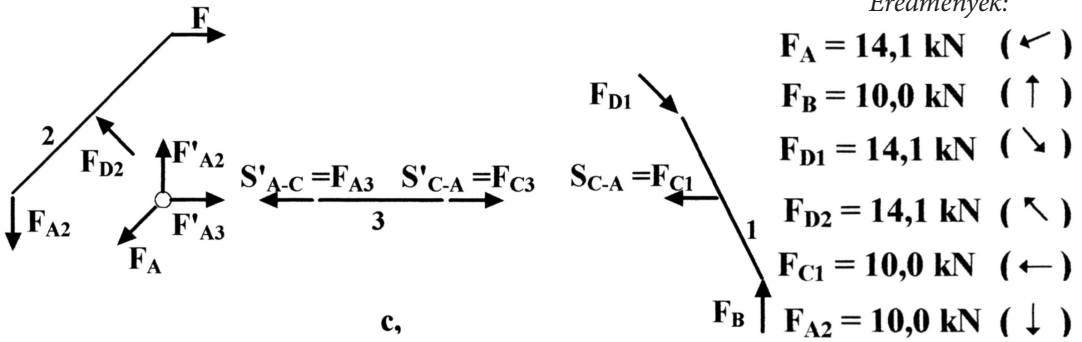
Ezek szerint a három erő egy pontban, jelen esetben az E pontban metszi egymást és így az F_A erő A-E rúd irányú (4.43.a ábra). A reakcióerők vektorát a 4.43.b ábrán szerkesztettük meg.

4.43.a-b ábra



A B-D rúd egyensúlyának vizsgálata során megállapítható ugyancsak három erő egyensúlyi feltételének figyelembevételével, hogy az F_D csuklóerő hatásvonala átmegy a P ponton. F_A és F_C szerkesztése szintén a 4.43.b. ábrán látható. Az A-E rúd egyensúlyi vizsgálatából pedig az következik, hogy a rudat terhelő három erő hatásvonalának közös pontja az R pont, tehát F_{A2} függőleges. A rudakra ható egyensúlyi erőrendszereket a 4.43.c ábrán rajzoltuk meg.

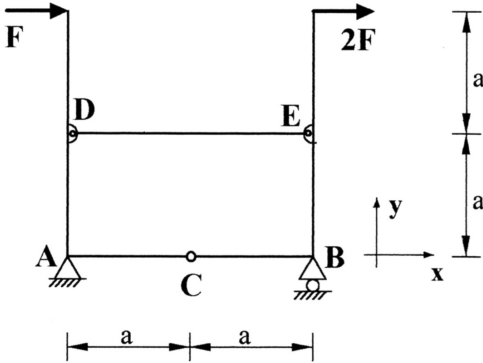
4.43.c ábra



4.3-2 Feladat

A 4.44 ábrán látható rúdszerkezetet két koncentrált erő terheli.

4.44 ábra



Adatok:

$$F = 10 \text{ kN},$$
$$a = 4 \text{ m.}$$

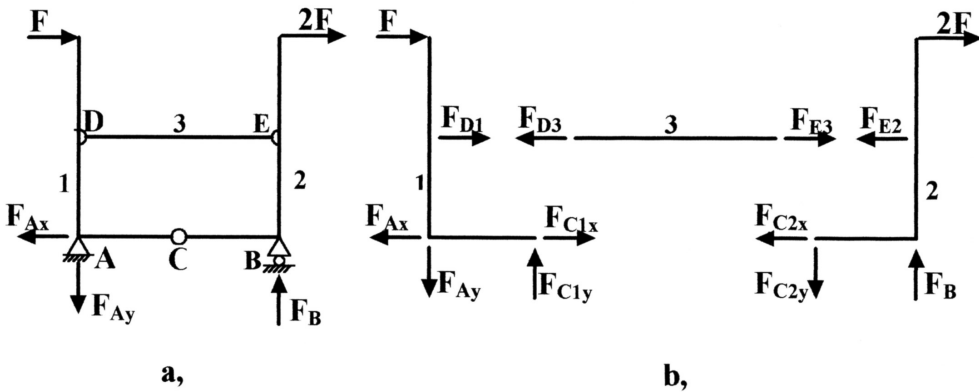
Feladat:

1. Határozzuk meg a reakció- és csuklóerőket!
2. Rajzoljuk meg az igénybevételei ábrákat!

Megoldás: 1. Reakció- és csuklóerők meghatározása

a, Az F_B reakcióerő az A ponton átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyensúlyi egyenletből határozható meg (4.45.a ábra).

4.45 ábra



Az alábbiakban részletes magyarázat nélkül írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket.

$$\Sigma M_{Ai} = 0 = 3 \cdot F \cdot 2a - 2a \cdot F_B, \text{ ebből } F_B = 3F = 30 \text{ kN } (\uparrow).$$

Az F_A reakció két összetevőjét vetületi egyenletekből számítjuk:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{xi} = 0 &= 3F - F_{Ax}, \text{ innen } F_{Ax} = 3F = 30 \text{ kN } (\leftarrow), \\ \Sigma F_{yi} = 0 &= F_B - F_{Ay}, \text{ innen } F_{Ay} = F_B = 30 \text{ kN } (\downarrow). \end{aligned}$$

b, Az F_{E2} csuklóerőt a (2) jelű rúd C ponton átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyenletből határozzuk meg.

$$\Sigma M_{ci} = 0 = 2 \cdot F \cdot 2a - F_{E2} \cdot a - F_B \cdot a, \text{ ebből } F_{E2} = 4F - F_B = 4 \cdot 10 - 30 = 10 \text{ kN } (\leftarrow).$$

(2)

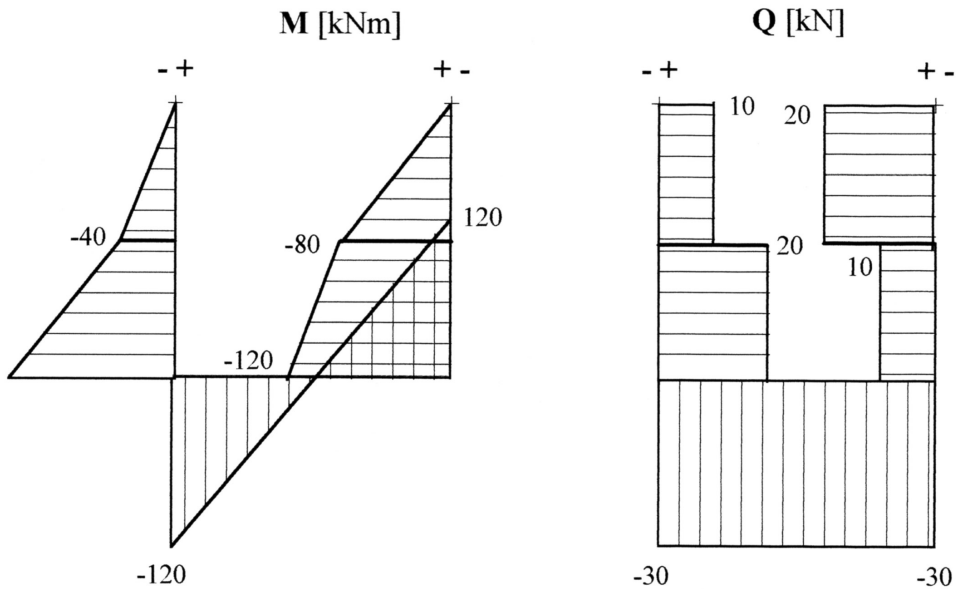
A C csuklóban keletkező belső erő az (1) és (2) jelű részek vizsgálatával határozható meg vetületi egyenletekből:

A további csuklóerőket részletezés nélkül közöljük:

$$\begin{aligned} |F_{C2x}| &= |F_{C1x}| = 10 \text{ kN}, |F_{C2y}| = |F_{C1y}| = 30 \text{ kN}, \\ |F_{D1}| &= |F_{D3}| = |F_{E3}| = |F_{E2}| = 10 \text{ kN}. \end{aligned}$$

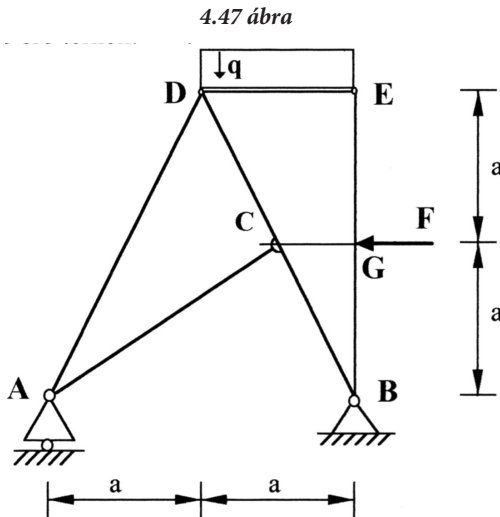
Az igénybevételi ábrákat a 4.46 ábrán rajzoltuk meg.

4.46 ábra



4.3-3 Feladat

A 4.47. ábrán vázolt rúdszerkezetet G pontjában F koncentrált erő, D-E szakaszán q megoszló erő terheli.



Adatok:

$$q = 2 \text{ kN/m},$$

$$F = 5 \text{ kN},$$

$$a = 2 \text{ m}.$$

Feladat:

1. Határozzuk meg a reakció és csuklóerőket!

2. Rajzoljuk meg az igénybevételei ábrákat!

Megoldás: 1. Reakció- és csuklóerők meghatározása

A reakcióerőket számítással határozzuk meg a részletesebb magyarázat mellőzésével.

$$\sum M_{bi} = q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F \cdot a - F_A \cdot 2a,$$

$$F_A = \frac{q \cdot a + 2 \cdot F}{4} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 5}{4} = 3,5 \text{ kN } (\uparrow).$$

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Bx} - F,$$

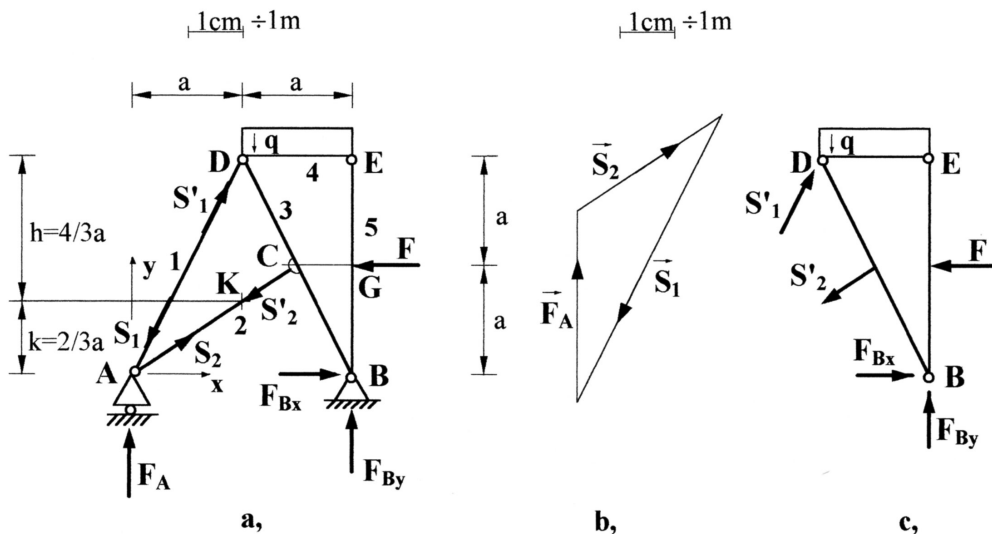
$$F_{Bx} = F = 5 \text{ kN } (\rightarrow)$$

$$\sum F_{yi} = 0 = F_A - q \cdot a + F_{By}$$

$$F_{By} = q \cdot a - F_A = 2 \cdot 2 - 3,5 = 0,5 \text{ kN } (\uparrow).$$

A támasztóerőket a 4.48.a ábrán tüntettük fel.

4.48 ábra



b, Az (1) és (2) jelű rudakat csak rúdvégi és rúdirányú erők terhelik, így ezek az A csomópont egyensúlyából egyszerűen meghatározhatók.

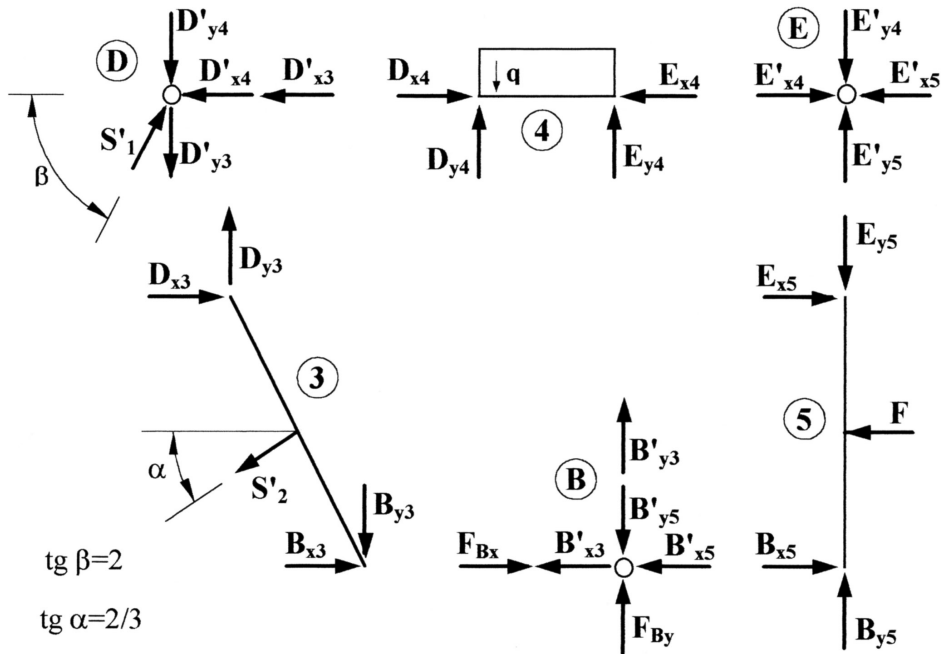
A 4.48.b ábrán megrajzolt vektorábra és az AKD háromszög hasonlóságának felhasználásával (grafoanalitikus módszer):

$$\frac{F_A}{h} = \frac{S_1}{L_1}, \quad S_1 = F_A \cdot \frac{L_1}{h} = F_A \cdot \frac{a \cdot \sqrt{5}}{\frac{4}{3} \cdot a} = 3,5 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{4} = 5,87 \text{ kN}.$$

$$\frac{F_A}{h} = \frac{S_2}{L_{AK}}, \quad S_2 = F_A \cdot \frac{L_{AK}}{h} = F_A \cdot \frac{\frac{a}{3} \cdot \sqrt{13}}{\frac{4}{3} \cdot a} = 3,5 \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} = 3,155 \text{ kN}.$$

A BED zárt alakzat csuklóerőinek meghatározásához az egyes rudak és csuklók egyensúlyát kell megvizsgálnunk. A 4.49 ábrán vázoltuk az egyensúlyi erőrendszereket.

4.49 ábra



A D_4 , E_4 , E_5 és B_5 csuklóerők összetevőinek meghatározását nem részletezzük, mert ezek az (1) és (5) jelű rudak mint kéttámaszú tartók és az E csukló egyensúlyából egyszerűen adódnak.

$$\begin{aligned} D_{y4} = E_{y4} = E'_{y5} = B_{y5} &= 2 \text{ kN } (\uparrow), & E_{x5} = B_{x5} = E'_{x4} = D_{x4} &= 2,5 \text{ kN } (\rightarrow), \\ D'_{y4} = E'_{y4} = E_{y5} = B'_{y5} &= 2 \text{ kN } (\downarrow), & E'_{x5} = E_{x4} = D'_{x4} = B'_{x5} &= 2,5 \text{ kN } (\leftarrow), \end{aligned}$$

A B és D csuklók, illetve a (3) jelű rúd egyensúlyi egyenleteiből megkapjuk a hiányzó csuklóerő összetevőket.

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} = 0 &= F_{Bx} - B'_{x5} - B'_{x3}, & B'_{x3} &= F_{Bx} - B'_{x5} = 5 - 2,5 = 2,5 \text{ kN } (\leftarrow), \\ (B) \end{aligned}$$

$$\Sigma F_{yi} = 0 = B'_{y3} + F_{By} - B'_{y5},$$

(B)

$$B'_{y3} = B'_{y5} - F_{By} = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ kN } (\uparrow),$$

A B csuklóról a (3) jelű rúdra ható erők:

$$B_{x3} = 2,5 \text{ kN } (\rightarrow), \quad B_{y3} = 1,5 \text{ kN } (\downarrow).$$

$$\Sigma F_{xi} = 0 = S'_{1x} - D'_{x4} - D'_{x3},$$

(D)

$$D'_{x3} = S'_{1x} - D'_{x4} = S_1 \cdot \cos\beta - D'_{x4} = 5,87 \cdot 0,4472 - 2,5 = 0,125 \text{ kN } (\leftarrow),$$

$$\Sigma F_{yi} = 0 = S'_{1y} - D'_{y3} - D'_{y4},$$

(D)

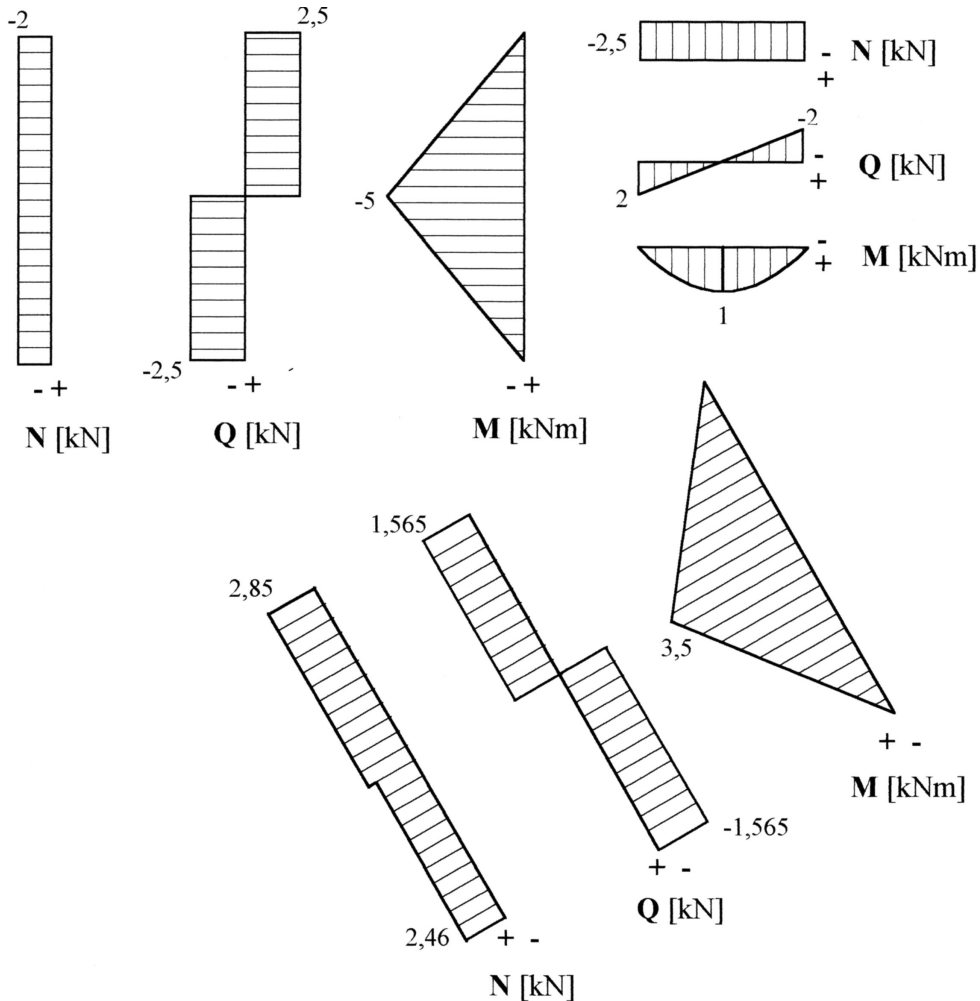
$$D'_{y3} = S'_{1y} - D'_{y4} = S_1 \cdot \sin\beta - D'_{y4} = 5,87 \cdot 0,8944 - 2 = 3,25 \text{ kN } (\downarrow),$$

A D csuklóról a (3) jelű rúdra ható erők:

A (3) jelű rúdra felírt vetületi egyenletekből meggyőződhetünk annak egyensúlyáról

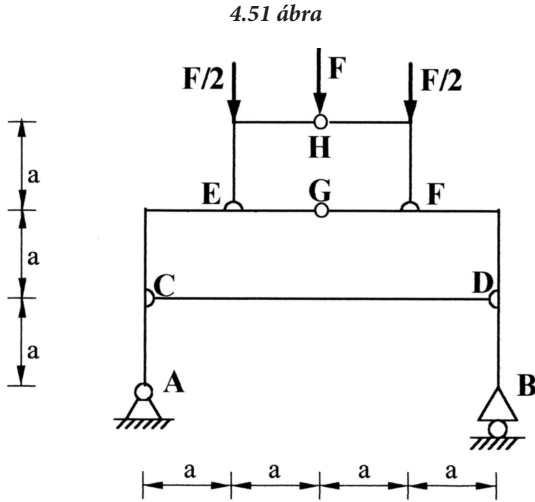
2. Az igénybevételi ábrákat a 4.50 ábra tünteti fel.

4.50 ábra



4.3-4 Feladat

A 4.51. ábrán egy emeletes keretszerkezet látható.



Adatok:

$$F = 10 \text{ kN},$$

$$a = 2 \text{ m}.$$

Feladat:

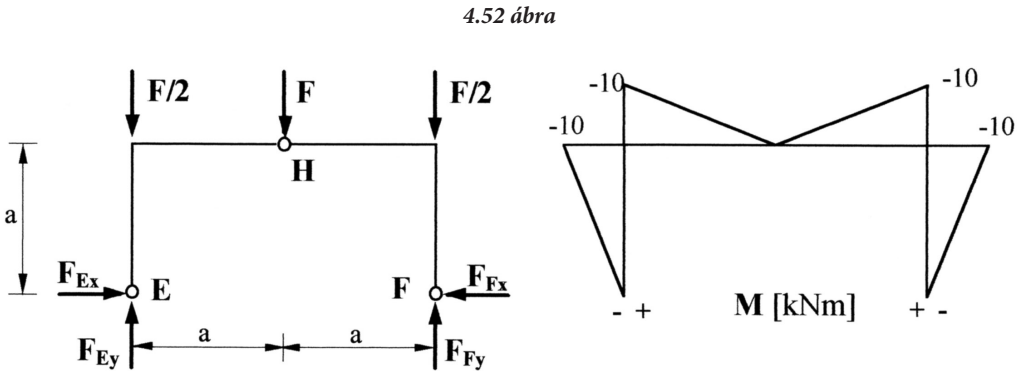
1. Határozzuk meg a szerkezet támasztó- és belső erőit!
2. Rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!

Megoldás: 1. Támasztóerők és belső erők meghatározása

A rúdszerkezetet csak függőleges külső erők terhelik, ezért az F_B függőleges voltából függőleges hatásvonalú F_A következik. Ezen túl figyelembe véve még a szerkezet függőleges tengely körüli szimmetriáját, következik:

$$F_A = F_B = F = 10 \text{ kN} (\uparrow).$$

A feladat megoldását célszerűen a felső háromcsuklós keret megoldásával folytatjuk (4.52 ábra).



A szerkezet és terhelés szimmetriájából következik, hogy az FE és FF csuklóerők is „szimmetrikusak”.

Így a függőleges vetületi egyenlet:

$$\sum F_{yi} = 0 = F_{Ey} - 2F + F_{Fy},$$

$$F_{Ey} = F_{Fy} = F = 10 \text{ kN} (\uparrow).$$

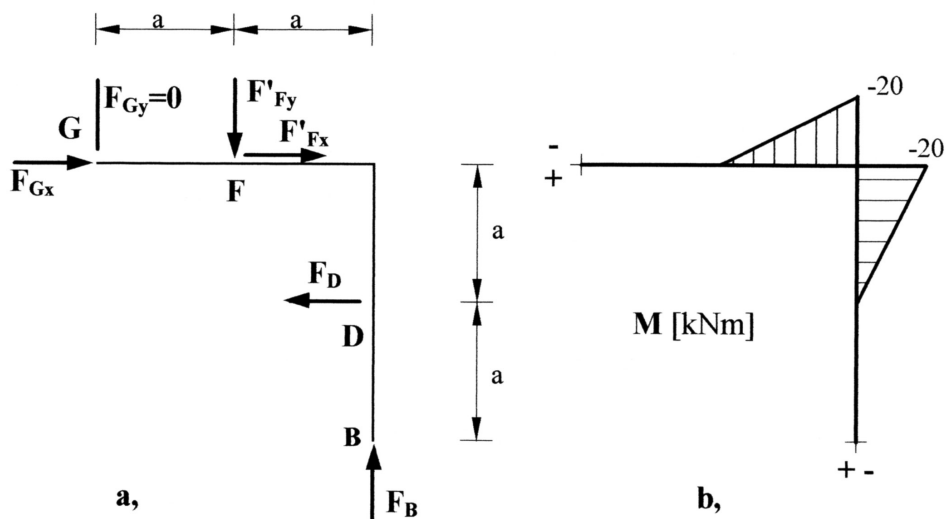
A vízszintes reakcióerő összetevőket valamelyik tartórész H pontján átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyenlet adja:

$$\sum M_{hi} = 0 = F_{Fy} \cdot a - F/2 \cdot a - F_{Fx} \cdot a,$$

$$F_{Fx} = F_{Fy} - F/2 = 10 - 5 = 5 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$F_{Ex} = 5 \text{ kN} (\rightarrow)$$

4.53 ábra



A továbbiakban írjuk fel a G - B rúdra (4.53 ábra) a függőleges vetületi egyenletet:

$$\sum F_{yi} = 0 = F_{Gy} - F'_{Fy} + F_B,$$

$$F_{Gy} = F'_{Fy} - F_B = 10 - 10 = 0.$$

Ez az eredmény a szimmetriából következik, mert a G csuklót terhelő egyensúlyi erőrendszer csak vízszintes csuklóerőkre áll fenn.

A G ponton átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyenletből F_D meghatározható:

$$\sum M_{gi} = 0 = F_B \cdot 2a - F_D \cdot a - F'_{Fy} \cdot a,$$

$$F_D = 2 F_B - F'_{Fy} = 2 \cdot 10 - 10 = 10 \text{ kN} (\leftarrow).$$

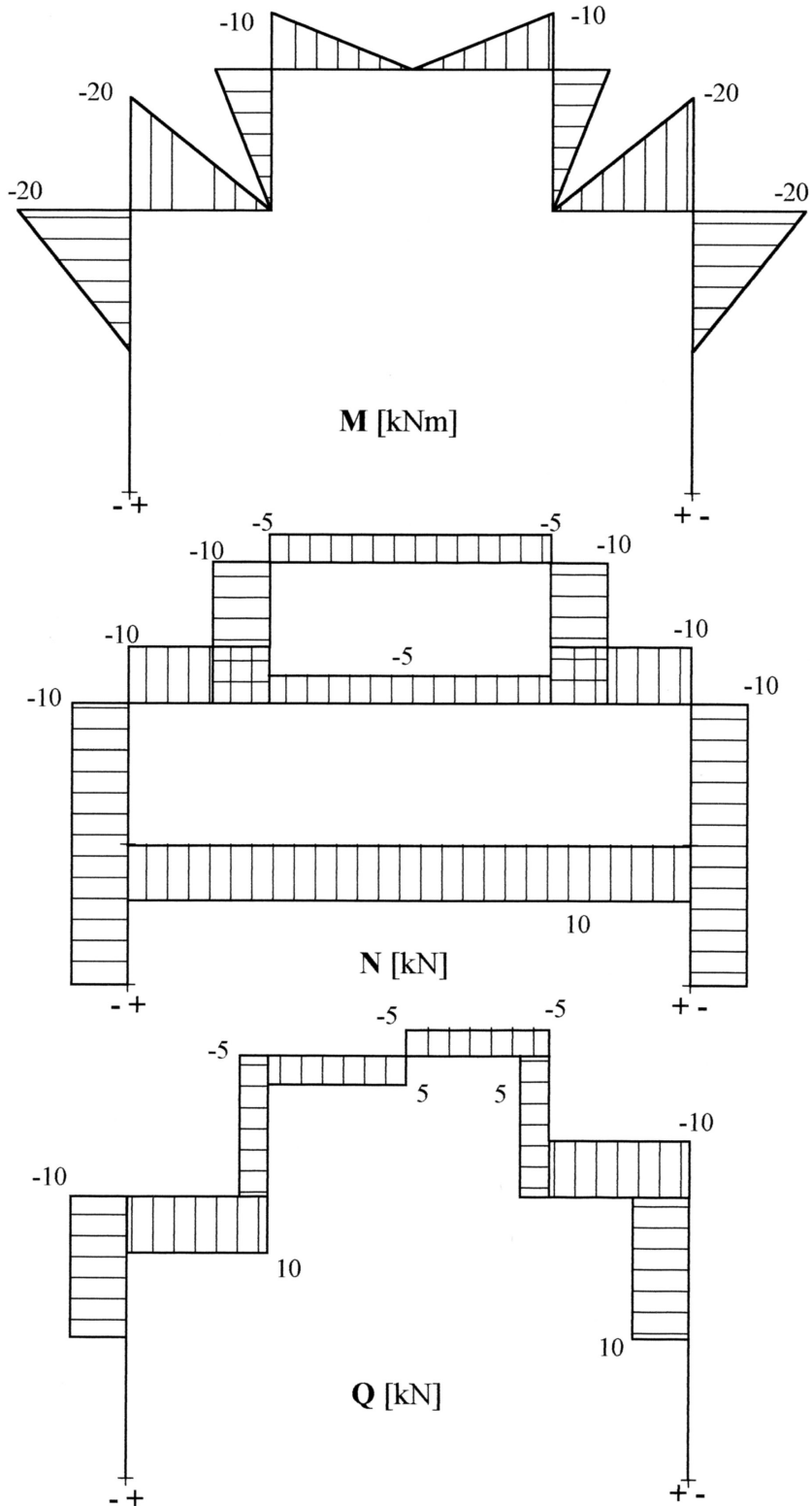
F_{Gx} a vízszintes vetületi egyenletből:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Gx} + F'_{Fx} - F_D,$$

$$F_{Gx} = F_D - F'_{Fx} = 10 - 5 = 5 \text{ kN} (\rightarrow).$$

Az igénybevételi ábrákat a 4.54 ábrában rajtoltuk meg.

4.54 ábra

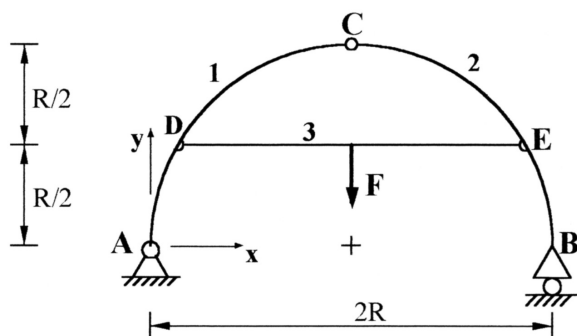


C. 4.3 GYAKORLÓ FELADATOK

4.3-5 Feladat

Határozza meg a 4.55 ábrán vázolt ívszerkezet reakció- és csuklóerőit!

4.55 ábra



Adatok:

$$F = 10 \text{ kN},$$

$$R = 5 \text{ m}.$$

Eredmények:

$$F_A = 5 \text{ kN } (\uparrow),$$

$$F_{E3y} = 5 \text{ kN } (\uparrow),$$

$$F_{E3x} = 1,34 \text{ kN } (\rightarrow),$$

$$F_{C2x} = 1,34 \text{ kN } (\rightarrow),$$

$$F_{C2y} = F_{C1y} = 0.$$

$$F_B = 5 \text{ kN } (\uparrow),$$

$$F_{D3y} = 5 \text{ kN } (\uparrow),$$

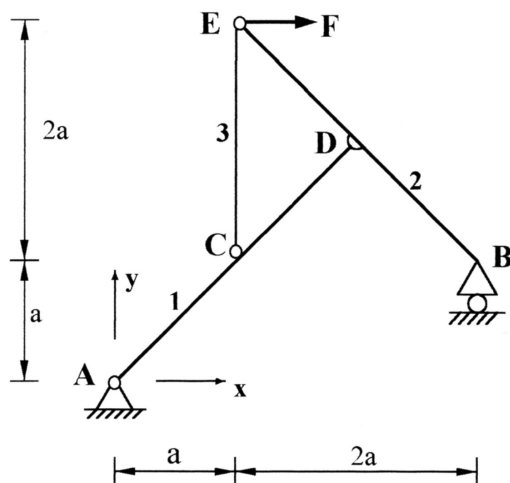
$$F_{D3x} = 1,34 \text{ kN } (\leftarrow),$$

$$F_{C1x} = 1,34 \text{ kN } (\leftarrow),$$

4.3-6 Feladat

Határozza meg a 4.56 ábrán vázolt rúdszerkezet reakció- és csuklóerőit!

4.56 ábra



Adatok:

$$a = 2 \text{ m},$$

$$F = 20 \text{ kN}.$$

Eredmények:

$$F_{Ax} = 20 \text{ kN } (\leftarrow), \quad F_{Ay} = 20 \text{ kNm } (\downarrow),$$

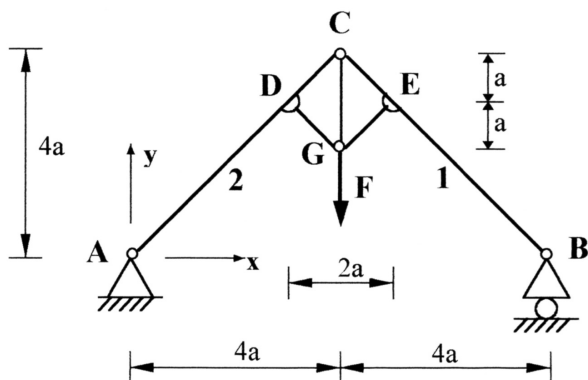
$$F_B = 20 \text{ kN } (\uparrow), \quad S_3 = 0,$$

$$F_{D2x} = 20 \text{ kN } (\leftarrow), \quad F_{D2y} = 20 \text{ kN } (\downarrow).$$

4.3-7 Feladat

Határozza meg a 4.57 ábrán vázolt rúdszerkezet reakció- és csuklóerőit!

4.57 ábra



Adatok:

$$F = 10 \text{ kN},$$

$$a = 2 \text{ m}.$$

Eredmények:

$$F_A = F_B = 5 \text{ kN } (\uparrow),$$

$$F_{C1} = 11,18 \text{ kN } (\nearrow),$$

$$F_{C2} = 11,18 \text{ kN } (\nwarrow),$$

$$F_{E1} = 14,1 \text{ kN } (\swarrow),$$

$$F_{D2} = 14,1 \text{ kN } (\searrow),$$

$$S_{GC} = 10 \text{ kN } (-),$$

$$S_{EG} = S_{GD} = 14,1 \text{ kN } (+).$$

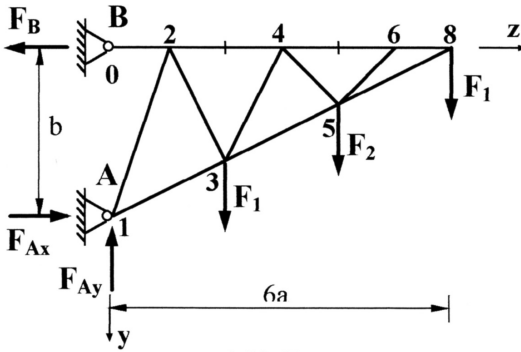
4.4 Rácsos tartók

B. 4.4 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.4-1 Feladat

Határozzuk meg a 4.58 ábrán látható rácsos tartó rúderőit!

4.58 ábra



Adatok:

$$F_1 = 3 \text{ kN},$$

$$F_2 = 2 \text{ kN},$$

$$a = 1 \text{ m},$$

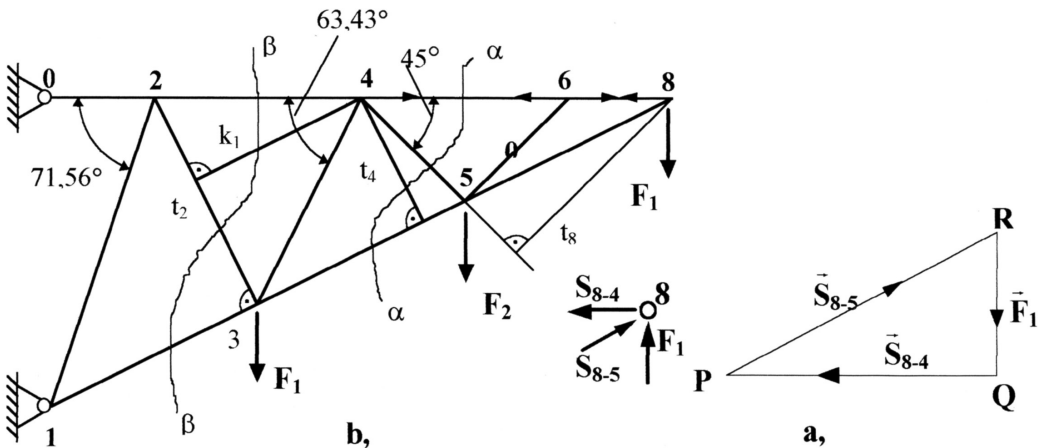
$$b = 3 \text{ m}.$$

Megoldás: A feladatban a reakcióerők meghatározása nem szükségszerű, ezért az egyensúlyi egyenletek felírása nélkül adjuk meg azok értékét.

$$F_B = 10,66 \text{ kN} (\leftarrow), \quad F_{Ax} = 10,66 \text{ kN} (\rightarrow), \quad F_{Ay} = 8 \text{ kN} (\uparrow).$$

A rúderők közül elsőként az S_{5-6} -t határozzuk meg, mert a (6) jelű csomópont egyensúlyából következik, hogy a rúd vakrúd, tehát $S_{5-6} = 0$. A 4-6 és 6-8 jelű rudakat a becsatlakozó vakrúd miatt közös jelöléssel 4-8 jelű rúdnak nevezzük. Az S_{4-8} és S_{5-8} rúderők a (8) jelű csomópont egyensúlyából határozhatók meg (4.59.a ábra).

4.59 ábra



A vektorábra és a geometriai ábra hasonlóságából ($AB8\Delta \sim RQP\Delta$) írhatjuk:

$$\frac{F_1}{S_{8-4}} = \frac{b}{6a}, \text{ amiből } S_{8-4} = \frac{6a}{b} \cdot F_1 = \frac{6 \cdot 1}{3} \cdot 3 = 6 \text{ kN}(+).$$

$$S_{5-8} = \sqrt{S_{8-4}^2 + F_1^2} \sqrt{6^2 + 3^2} = 6,71 \text{ kN.}$$

A további rúderőket átmetsző módszerrel határozzuk meg (4.59.b ábra).

Az α - α átmetszés alkalmazásával a 3-5 rúd (4) főpontján átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyensúlyi egyenlet a szétválasztott tartó jobboldali részére:

$$\Sigma M_{f4i} = 0 = S_{5-3} \cdot t_4 + F_2 \cdot a + F_1 \cdot 3a, \text{ amiből}$$

$$S_{5-3} = -\frac{F_2 + 3 \cdot F_1}{t_4} \cdot a = -\frac{2 + 3 \cdot 3}{1,342} \cdot 1 = 8,2 \text{ kN } (-).$$

$$\Sigma M_{f8i} = 0 = -S_{5-4} \cdot t_8 + F_2 \cdot 2a, \text{ amiből}$$

$$S_{5-4} = -\frac{F_2 \cdot 2a}{t_8} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2,12} = 1,89 \text{ kN } (+).$$

A β - β átmetszéssel elsőként az S_{4-2} rúderőt, majd S_{3-1} , illetve az S_{3-2} -t határozzuk meg.

$$\Sigma M_{f3i} = 0 = S_{4-2} \cdot 2b/3 - F_2 \cdot 2a - F_1 \cdot 4a, \text{ amiből}$$

$$S_{4-2} = -\frac{3 \cdot F_2 + 6 \cdot F_1}{b} \cdot a = -\frac{3 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{3} \cdot 1 = 8 \text{ kN } (+).$$

$$\Sigma M_{f2i} = 0 = S_{3-1} \cdot t_2 + F_1 \cdot a + F_2 \cdot 3a + F_1 \cdot 5a,$$

$$S_{3-1} = -\frac{6 \cdot F_1 + 3 \cdot F_2}{t_2} \cdot a = -\frac{6 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{2,236} \cdot 1 = 10,73 \text{ kN } (-).$$

$$\Sigma M_{f4i} = 0 = -S_{3-1} \cdot t_4 + S_{3-2} \cdot k_1 + F_1 \cdot 3a + F_2 \cdot a - F_1 \cdot a,$$

$$S_{3-2} = \frac{S_{3-1} \cdot t_4 - 2 \cdot F_1 \cdot a - F_2 \cdot a}{k_1} = \frac{10,73 \cdot 1,342 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{1,789} = 3,578 \text{ kN } (+).$$

A fennmaradó két rúderőt a 2 és 4 csomópontokra felírt függőleges vetületi egyenletből számíthatjuk ki.

$$\Sigma F_{yi} = 0 = -S_{4-5y} + S_{4-3y} = -S_{4-5} \cdot \sin 45^\circ + S_{4-3} \cdot \sin 63,43^\circ, \quad (4)$$

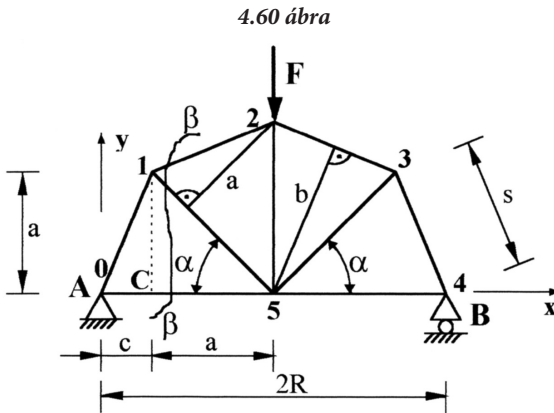
$$S_{4-3} = S_{4-5} \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 63,43^\circ} = 1,89 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 63,43^\circ} = 1,49 \text{ kN } (-).$$

$$\Sigma F_{yi} = 0 = -S_{2-3y} + S_{2-1y} = -S_{2-3} \cdot \sin 63,43^\circ + S_{2-1} \cdot \sin 71,56^\circ, \quad (2)$$

$$S_{2-1} = S_{2-3} \cdot \frac{\sin 63,43^\circ}{\sin 71,56^\circ} = 4,472 \cdot \frac{0,894}{0,9486} = 3,373 \text{ kN } (-).$$

4.4-2 Feladat

A 4.60 ábrán egy olyan rácsos tartót vázoltunk, melynek övcsomópontjai egy R sugarú körön helyezkednek el.



Adatok:

$$R = 5,0 \text{ m},$$

$$\alpha = 45^\circ,$$

$$F = 6 \text{ kN}.$$

Feladat:

Határozzuk meg a vázolt rácsos tartó rúderőit!

Megoldás: A támasztóerők a tartó és a terhelés szimmetriája miatt egyenlő nagyságúak.

$$F_A = F_B = \frac{F}{2} = \frac{6,0}{2} = 3,0 \text{ kN } (\uparrow).$$

Geometriai adatok meghatározása:

$$a = R \cdot \sin \alpha = 5 \cdot \sin 45^\circ = 3,53 \text{ m},$$

$$c = R - a = 5 - 3,53 = 1,46 \text{ m},$$

$$s = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{3,53^2 + 1,46^2} = 3,84 \text{ m},$$

$$b = \frac{R \cdot a}{s} = \frac{5 \cdot 3,53}{3,84} = 4,61 \text{ m}.$$

Az A csomópont egyensúlyi vektorábráját vázoltuk a 4.61 ábrán. A vektorábra és az AC1 háromszög hasonlósága alapján:

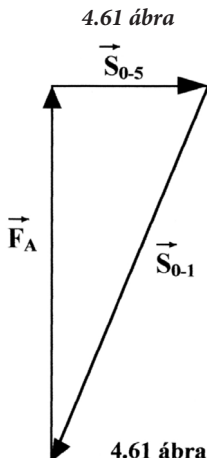
$$\frac{S_{0-1}}{F_A} = \frac{s}{a}, \text{ ahonnan}$$

$$S_{0-1} = \frac{s}{a} \cdot F_A = \frac{3,84}{3,53} \cdot 3,0 = 3,26 \text{ kN } (-).$$

Továbbá:

$$\frac{S_{0-5}}{F_A} = \frac{c}{a},$$

$$S_{0-5} = \frac{c}{a} \cdot F_A = \frac{1,46}{3,53} \cdot 3,0 = 1,24 \text{ kN } (+).$$



A továbbiakban alkalmazzuk a β – β átmetszést (4.60 ábra), mely alapján nyomatéki egyen-
súlyi egyenleteket írunk fel az alábbiak szerint:

$$\Sigma M_{\beta\beta} = 0 = R \cdot F_A - b \cdot S_{1-2},$$

$$S_{1-2} = F_A \cdot \frac{R}{b} = 3,0 \cdot \frac{5,0}{4,61} = 3,25 \text{ kN } (-).$$

$$\Sigma M_{\beta\beta} = 0 = R \cdot F_A - R \cdot S_{0-5} - a \cdot S_{1-5},$$

$$F_{Ay} = 16 \text{ kN } (\downarrow).$$

$$S_{1-5} = R \cdot \frac{F_A - S_{0-5}}{a} = 5,0 \cdot \frac{3,0 - 1,24}{3,53} = 2,49 \text{ kN } (+).$$

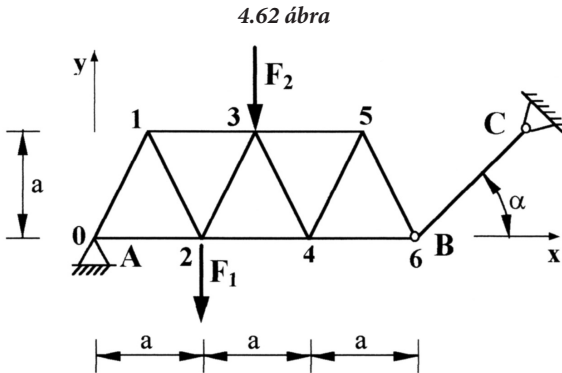
Az S_{5-2} rúderőt az 5 csomópont függőleges vetületi egyenletéből kapjuk az alábbiak szerint:

$$\Sigma F_{yi} = 0 = 2 \cdot S_{5-1} \cdot \sin \alpha - S_{5-2}, \quad (5)$$

$$S_{5-2} = 2 \cdot S_{5-1} \cdot \sin \alpha = S_{5-1} \cdot \sqrt{2} = 2,49 \cdot \sqrt{2} = 3,52 \text{ kN } (-).$$

4.4-3 Feladat

Határozzuk meg a 4.62 ábrán látható rácsos tartó rúderőit!



Adatok:

$$a = 1,5 \text{ m},$$

$$F_1 = 20 \text{ kN},$$

$$F_2 = 10 \text{ kN},$$

$$\alpha = 45^\circ.$$

Megoldás: 1. Reakcióerők meghatározása:

Az A ponton átmenő z irányú tengelyre felírt nyomatéki egyenlet:

$$\Sigma M_{ai} = 0 = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 1,5a - F_B \cdot \sin \alpha \cdot 3a, \text{ innen}$$

$$F_B = \frac{2 \cdot F_1 + 3 \cdot F_2}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 20 + 3 \cdot 10}{3 \cdot \sqrt{2}} = 16,5 \text{ kN } (\nearrow).$$

A B ponton átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyenletből F_{Ay} -t határozhatjuk meg.

$$\Sigma M_{bi} = 0 = -F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot 1,5a + F_{Ay} \cdot 3a,$$

$$F_{Ay} = \frac{2 \cdot F_1 + 1,5 \cdot F_2}{3} = \frac{2 \cdot 20 + 1,5 \cdot 10}{3} = 18,33 \text{ kN } (\uparrow).$$

A vízszintes vetületi egyenletből pedig F_{Ax} határozható meg.

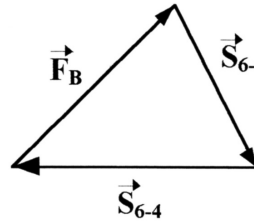
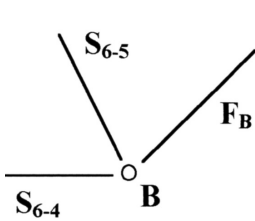
$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax} + F_{Bx} = F_{Ax} + F_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$F_{Ax} = -F_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -16,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -11,66 \text{ kN } (\leftarrow).$$

2. Rúderők meghatározása:

A 6-5 és 6-4 jelű rudak rúderőit csomóponti módszerrel határozzuk meg. A 4.63 ábrán rajzoltuk meg a B csomópontot terhelő erők vektorábráját. A vektorábra és az 5BC háromszög hasonlóságát felhasználva:

4.63 ábra



$$\frac{S_{6-4}}{F_B} = \frac{L_{5C}}{L_{BC}} = \frac{1,5 \cdot a}{\sqrt{2} \cdot a},$$

$$S_{6-4} = \frac{1,5}{\sqrt{2}} \cdot F_B = \frac{1,5}{\sqrt{2}} \cdot 16,5 = 17,5 \text{ kN } (+).$$

$$\frac{S_{6-5}}{F_B} = \frac{L_{B5}}{L_{BC}} = \frac{\sqrt{1,25} \cdot a}{\sqrt{2} \cdot a},$$

$$S_{6-5} = \frac{\sqrt{1,25}}{\sqrt{2}} \cdot F_B = \frac{1,118}{\sqrt{2}} \cdot 16,5$$

$$S_{6-5} = 13,04 \text{ kN } (-).$$

Az 5 és 4 csomópontok függőleges vetületi egyenleteiből következik, hogy az

$$S_{5-4} = -S_{5-6} \text{ és } S_{4-3} = -S_{4-5}.$$

tehát

$$S_{5-4} = 13,04 \text{ kN } (+),$$

$$S_{4-3} = 13,04 \text{ kN } (-).$$

Az S_{5-3} , illetve S_{4-2} rúderők meghatározása átmetsző módszerrel az f_4 illetve f_3 főponti tengelyekre írt nyomatéki egyenletből (4.64 ábra).

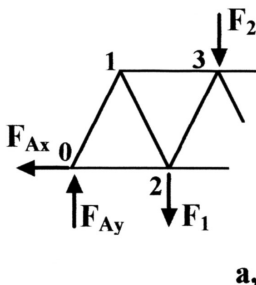
$$\sum M_{f4i} = 0 = F_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a + S_{5-3} \cdot a,$$

$$S_{5-3} = -F_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -16,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 11,67 \text{ kN } (-).$$

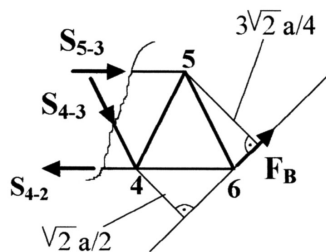
$$\sum M_{f3i} = 0 = -F_B \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot a + S_{4-2} \cdot a,$$

$$S_{4-2} = F_B \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4} = 16,5 \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4} = 29,168 \text{ kN } (+).$$

4.64 ábra



a,



b,

Az S_{1-3} illetve S_{0-2} rúderők meghatározása átmetsző módszerrel az f_1 illetve f_2 főponti tengelyekre felírt nyomatéki egyenletekből (4.64.b ábra).

$$\sum M_{f2i} = 0 = F_{Ay} \cdot a - S_{1-3} \cdot a,$$

$$S_{1-3} = F_{Ay} = 18,33 \text{ kN (-)}.$$

$$\sum M_{f1i} = 0 = F_{Ay} \cdot \frac{a}{2} - S_{0-2} \cdot a,$$

$$S_{0-2} = \frac{F_{Ay}}{2} = 9,165 \text{ kN (+)}.$$

Az S_{1-2} rúderőt a 4.64.b ábrán vázolt részre felírt függőleges vetületi egyenlettel számíthatjuk.

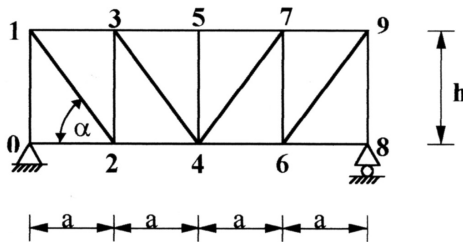
$$\sum F_{yi} = 0 = F_{Ay} - S_{1-2} \cdot \cos \beta,$$

$$S_{1-2} = \frac{F_{Ay}}{\cos \beta} = \frac{18,33}{0,8944} = 20,49 \text{ kN (+)}.$$

4.4-4 Feladat

Határozzuk meg a 4.65 ábrán vázolt rácsos tartó alábbiakban megadott rúderő hatásábráit és rúderőit!

4.65 ábra



Adatok:

$$F = 10 \text{ kN},$$

$$a = 3 \text{ m},$$

$$h = 4 \text{ m}.$$

Feladat: 1. $\eta(S_{1-2})$,

$\eta(S_{3-5})$,

$\eta(S_{3-4})$,

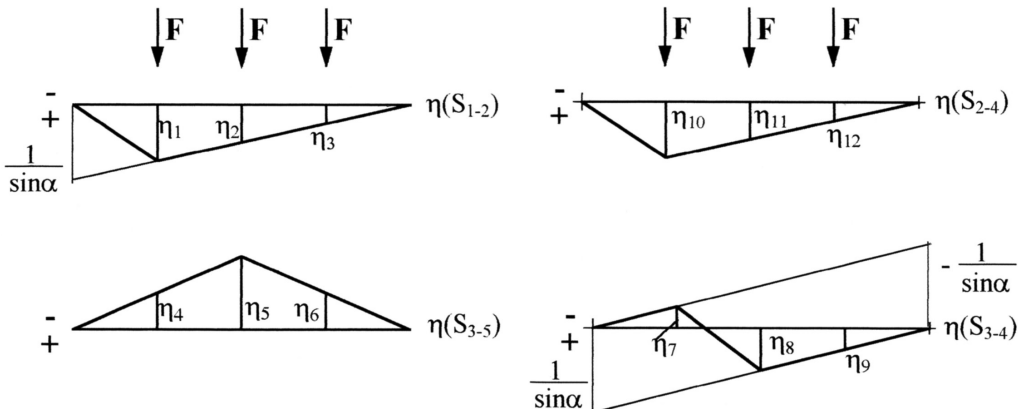
$\eta(S_{2-4})$

rúderő hatásábrák.

2. Rúderők meghatározása a megadott terhelésből.

Megoldás: A hatásábrákat részletes magyarázat nélkül a 4.66 ábrában adtuk meg.

4.66 ábra



A továbbiakban határozzuk meg a megadott rudakban keletkező rúderőket a hatásábrák leterhelésével.

A hatásordináták meghatározása:

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0,8.$$

$$\eta_1 = \frac{a}{4 \cdot \sin \alpha} = \frac{3}{4 \cdot 0,8} = 0,9375, \eta_2 = \frac{2}{3} \cdot \eta_1 = 0,625, \eta_3 = \frac{1}{3} \cdot \eta_1 = 0,3125,$$

$$\eta_5 = -\frac{a}{h} = -\frac{3}{4} = -0,75, \eta_4 = \eta_6 = \frac{\eta_5}{2} = -0,375,$$

$$\eta_7 = -\frac{1}{4 \cdot \sin \alpha} = -\frac{1}{4 \cdot 0,8} = -0,3125, \eta_9 = 0,3125,$$

$$\eta_8 = \frac{1}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{2 \cdot 0,8} = 0,625, \eta_{10} = \frac{3a}{4h} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = 0,5625,$$

$$\eta_{11} = \frac{2}{3} \cdot \eta_9 = \frac{2}{3} \cdot 0,3125 = 0,2083, \eta_{12} = \frac{1}{3} \cdot \eta_{10} = \frac{0,5625}{3} = 0,1875,$$

A rúderők meghatározása:

$$S_{1-2} = F \cdot (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = 10 \cdot (0,9375 + 0,625 + 0,3125) = 18,75 \text{ kN (+)},$$

$$S_{3-5} = F \cdot (\eta_4 + \eta_5 + \eta_6) = 10 \cdot (-0,375 - 0,75 + 0,375) = -15,0 \text{ kN (-)},$$

$$S_{3-4} = F \cdot (\eta_7 + \eta_8 + \eta_9) = 10 \cdot (-0,3125 + 0,625 + 0,3125) = 6,25 \text{ kN (+)},$$

$$S_{2-4} = F \cdot (\eta_{10} + \eta_{11} + \eta_{12}) = 10 \cdot (0,5625 + 0,2083 + 0,1875) = 9,583 \text{ kN (+)}.$$

5. LABILIS TEHERHORDÓ SZERKEZETEK

A. 5. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Tartószerkezetként a gyakorlatban alkalmaznak **labilis** teherhordó szerkezeteket is. Ezek speciális erőrendszer hordására alkalmas szerkezetek, melyek tetszőleges terhelés hatására általában elmozdulnak, de a szerkezet beállása után általában létezik az adott erőrendszer hordására alkalmas egyensúlyi szerkezeti alakzat..

A labilis teherhordó szerkezet vizsgálatánál a cél kétféle lehet:

1. Megkeresni az adott alakzathoz tartozó egyensúlyi erőrendszert.
2. Az adott erőrendszerhez keresni nyugalomban maradó szerkezeti alakzatot.

Egy szerkezet *labilis voltát*: 1. Kinematikai határozatlansága, azaz $\sum \mathbf{n} < \mathbf{s}$,

2. Statikai túlhatározottsága, azaz $\sum \mathbf{i} < \mathbf{e}$

egyenlőtlenségekkel fejezhetjük ki,

ahol: $\mathbf{n}$ a lekötött szabadságfokok száma,

$\mathbf{s}$ a szabadságfokok száma,

$\mathbf{i}$ az ismeretlenek száma,

$\mathbf{e}$ a felírható független statikai egyenletek száma.

A labilis teherhordó szerkezetek közül az egyszerű rúdláncok és az egyszerű kötélrendszer erőjátékával foglalkozunk.

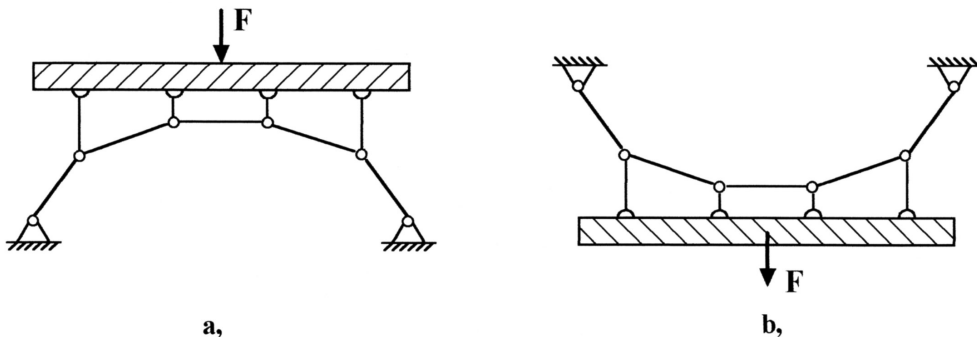
5.1 Rúdláncok

A rúdlánc olyan rudakból felépített labilis szerkezet, melynek rúdait a belső csuklók kapcsolják egymáshoz és a rúdlánc alakzatot csuklókkal rögzítjük a mozdulatlan környezethez.

A rúdlánc rúdjaiban fellépő igénybevételek alapján alapvetően két csoportot különböztetünk meg:

- feszítőműves rúdlánc, melynek rúdjaiban nyomóerők lépnek fel (5.1.a ábra).
- függesztőműves rúdlánc, melynek rúdjai húzottak (5.1.b ábra).

5.1 ábra



A rúdlánc megoldásának elve azonos az összetett szerkezetek megoldásával, vagyis számítási eljárás alkalmazásakor a szerkezetet részre bontjuk és alkalmas egyensúlyi egyenletek felírásával meghatározhatók az ismeretlenek.

Speciális eset, amikor a rúdlánc csuklókon terhelt. Ebben az esetben a rúdlánc rúdjaiban csak rúderők keletkeznek.

Külön kiemeljük a szerkesztési eljárást, mert a rúdláncot terhelő erőrendszerre megszerkesztett vektorábra és a rúdlánc alakja között egyértelmű geometriai kapcsolat van.

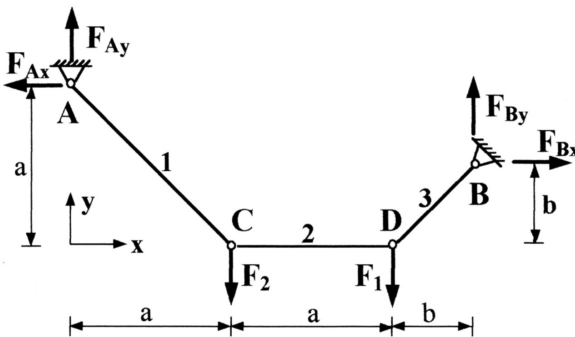
- csuklókon terhelte rúdlánc akkor van tartós egyensúlyban, ha a külső erőrendszerre szerkeszthető olyan kötélsokszög, melynek kötélerei illeszkednek a rúdlánc rúdjaire (a kötélerek adják a rúderőket).
- rudakon is terhelte rúdlánc akkor van tartós nyugalomban, ha a külső erőrendszerre szerkeszthető olyan kötélsokszög, melynek kötélerei átmennek a rúdlánc csuklóin.

B 5.1 KIDOLGOZOTT FELADATOK

5.1-1 Feladat

Az 5.4 ábrán vázolt rúdszerkezet tartós nyugalomban van.

5.4 ábra



Adatok:

$a = 4 \text{ m}$,

$b = 2 \text{ m}$,

$F_2 = 120 \text{ N}$.

Feladat:

Határozza meg számítással és szerkesztéssel az F_1 erőt, valamint a támasztó- és belső erőket!

Megoldás: A rúdlánc csak csuklókon terhelte, ezért a rudakban csak rúdírányú erők keletkeznek, az F_A erő 1-es az F_B erő pedig 2-es rúdírányú.

Írjunk fel nyomatéki egyenletet az (1) és (3) jelű rúd metszéspontján átmenő, síkra merőleges e tengelyre!

$$\sum M_{ci} = 0 = a/2 \cdot F_2 - a/2 \cdot F_1, \text{ ahonnan } F_1 = F_2 \text{ következik } F_1 = 120 \text{ kN } (\downarrow).$$

A következőkben írunk fel a szerkezet egészére a C ponton átmenő c tengelye nyomatéki egyenletet, amiből F_B meghatározható.

$$\sum M_{ci} = 0 = -F_1 \cdot a + F_B \cdot \cos 45^\circ \cdot a, \quad F_B = F_1 / \cos 45^\circ = 120 / \cos 45^\circ = 169,7 \text{ N } (\nearrow).$$

Az F_B támasztóerő x és y irányú komponense:

$$F_{Bx} = F_B \cdot \cos 45^\circ = 169,7 \cdot \cos 45^\circ = 120 \text{ N } (\rightarrow),$$

$$F_{By} = F_B \cdot \sin 45^\circ = 169,7 \cdot \sin 45^\circ = 120 \text{ N } (\uparrow).$$

A teljes szerkezetre felírt y irányú vetületi egyenlet:

$$\sum F_{yi} = 0 = F_{Ay} - F_1 - F_2 + F_{By}, \text{ innen } F_{Ay} = F_1 + F_2 - F_{By} = 120 + 120 - 120 = 120 \text{ N } (\uparrow)$$

A teljes szerkezetre felírt x irányú vetületi egyenlet:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Bx} - F_{Ax}, \text{ amiből } F_{Ax} = F_{Bx} = 120 \text{ N } (\leftarrow).$$

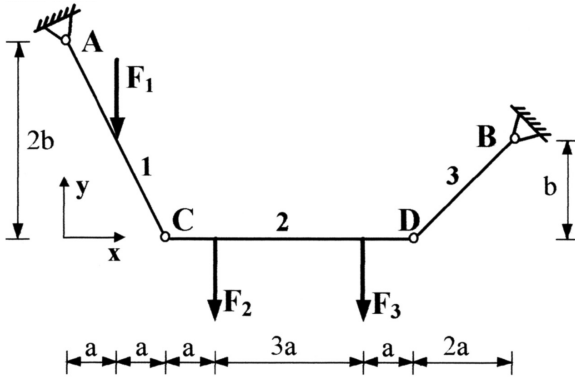
És végül:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{120^2 + 120^2} = 169,7 \text{ N } (\nearrow).$$

5.1-2 Feladat

Az 5.5 ábrán vázolt rúdlánc a megadott alakot felvéve a terhelések hatására tartós nyugalomban van.

5.5 ábra



Adatok:

$$a = 1 \text{ m},$$

$$b = 2 \text{ m},$$

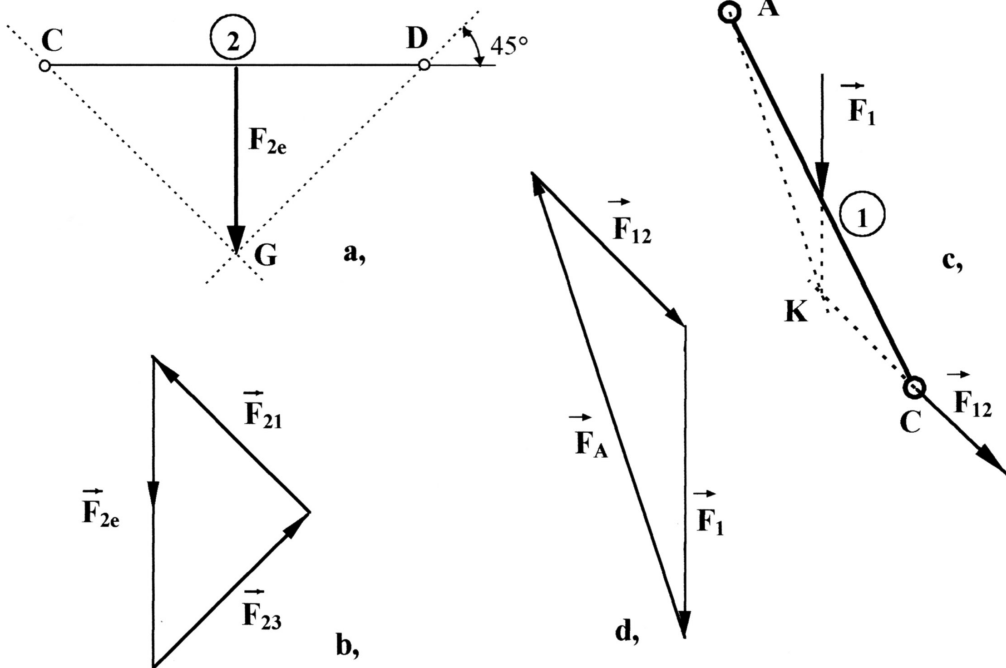
$$F_2 = F_3 = 5 \text{ kN}.$$

Feladat:

Határozzuk meg az F_1 erő egyensúlyhoz szükséges értékét!

Megoldás: Vizsgáljuk meg a (2) jelű elem egyensúlyát az 5.6.a ábrának megfelelően. A (3) jelű elemről a (2) jelűre átadódó erő hatásvonalát rúdirányú, mert a rúd külső aktív erővel nem terhelt.

5.6 ábra



A (2) jelű rúdra ható F_2 és F_3 erők eredője $F_{2e} = F_2 + F_3$ és hatásvonalát átmegy a rúd felezési pontján (a két erő azonos irányú és nagyságú).

A (2) jelű rúd egyensúlyából (három erő egyensúlya) következik, hogy az (1)-es rúdról átadódó erő hatásvonalát is át kell menjen az F_{2e} és F_{23} erő hatásvonalának metszéspontján a G ponton.

A (2)-es rudat terhelő erők vektorábráját az 5.6.b ábrán szerkesztettük meg. Hasonló megfontolások alapján az F_A támasztóerő hatásvonalának át kell menni az F_1 és F_{12} erők hatásvonalának metszéspontján. Az (1) jelű rúd erőjátékát az 5.6.c az egyensúlyi vektorábrát az 5.6.d ábrán szerkesztettük meg.

A szerkesztésből kapott eredmények:

$$\vec{F}_A = -5\vec{i} + 15\vec{j} \text{ [kN]},$$

$$\vec{F}_B = 5\vec{i} + 5\vec{j} \text{ [kN]}, \quad \vec{F}_1 = -10\vec{j} \text{ [kN]}.$$

Végül ellenőrzésképpen írjuk fel az egész rúdlánc C pontján átmenő síkra merőleges tengelyre a nyomatéki egyenletet:

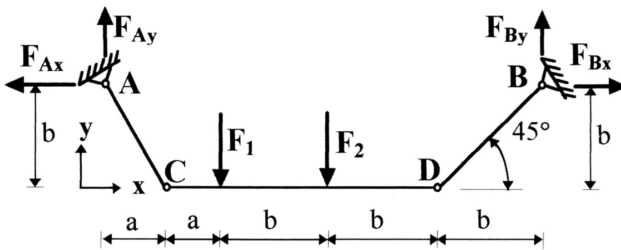
$$\Sigma M_{ci} = 0 = -2 \cdot a \cdot F_{Ay} + 2 \cdot b \cdot F_{Ax} + a \cdot F_1 - a \cdot F_2 - 4 \cdot a \cdot F_3 + 7 \cdot a \cdot F_{By} - b \cdot F_{Bx},$$

behelyettesítéssel meggyőződhetünk az egyensúlyi egyenlet teljesüléséről.

5.1-3 Feladat

Az 5.7 ábrán vázolt rúdláncot egyik elemén terheli két koncentrált erő, melyek hatására az adott geometriával tartós nyugalomban van.

5.7 ábra



Adatok:

$a = 2 \text{ m},$
 $b = 4 \text{ m},$
 $F_1 = 10 \text{ kN}.$

Feladat:

1. Mekkora F_2 erővel lehetséges a szerkezet egyensúlya?

Oldjuk meg a feladatot számítással és szerkesztéssel is!

2. Határozzuk meg a támasztóerőket!

Megoldás: Az A-C és B-D rudakat külső aktív erők nem terhelik, ezért a két rúd mint egyrudas megtámasztás működik, tehát bennük csak normáligenybevétel (rúdirányú erő) keletkezik.

Számítás során elsőként nyomatéki egyenletet írunk fel az F_A és F_B támaszerők hatásvonalának metszéspontján átmenő síkra merőleges tengelyre. Ebből az egyenletből F_2 erő nagysága meghatározható (5.8 ábra).

$$\Sigma M_{ri} = 0 = (x_0 - 2) \cdot F_1 - (10 - x_0 - 4) \cdot F_2,$$

ahol az x_0 távolság az 5.8.a ábra alapján határozható meg: $x_0 = 3,333 \text{ m}.$

$$F_2 = \frac{x_0 - 2}{10 - x_0 - 4} \cdot F_1 = \frac{3,333 - 2}{10 - 3,333 - 4} \cdot 10 = 5 \text{ kN}.$$

Az A-C rúd állásából következik, hogy $F_{Ay} = 2 \cdot F_{Ax}$. Ezt felhasználva a P ponton átmenő tengelyre írt nyomatéki egyenlet:

$$\Sigma M_{pi} = 0 = -8 \cdot F_{Ay} + 8 \cdot F_{Ax} + 4 \cdot F_1 = -8 \cdot 2 \cdot F_{Ax} + 8 \cdot F_{Ax} + 4 \cdot F_1,$$

$$F_{Ax} = \frac{4 \cdot F_1}{8} = \frac{4 \cdot 10}{8} = 5 \text{ kN} (\leftarrow),$$

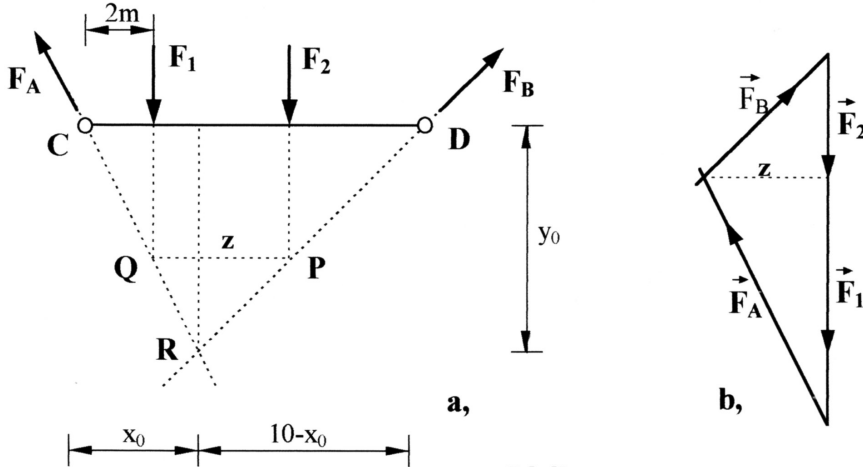
$$F_{Ay} = 2 \cdot F_{Ax} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ kN} (\uparrow).$$

A rúdlánc egészére felírt x irányú vetületi egyenlet:

$$\sum F_{xi} = 0 = -F_{Ax} + F_{Bx}, \text{ innen } F_{Bx} = F_{Ax} = 5 \text{ kN } (\rightarrow).$$

Mivel a B-D rúd 45° -os hajlású, ezért $F_{By} = F_{Bx} = 5 \text{ kN } (\uparrow)$.

5.8 ábra



Összefoglalva a számított eredményeket:

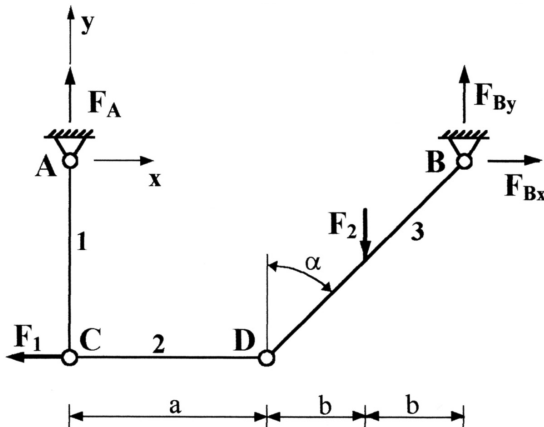
$$\vec{F}_A = -5\vec{i} + 10\vec{j} \text{ [kN]}, \quad \vec{F}_B = 5\vec{i} + 5\vec{j} \text{ [kN]}, \quad \vec{F}_2 = -5\vec{j} \text{ [kN]}.$$

A szerkesztés kötelsokszög eljárással történik, figyelembe véve az összefoglalóban elmondottakat. E szerint a kötelsokszögnek illeszkednie kell a külső aktív erőkkel nem terhelt rudakra és a csuklókra. A kötelsokszög záróoldalának át kell mennie az F_A és F_1 erők, illetve az F_B és F_2 erők hatásvonalának metszéspontján, azaz a Q és P pontokon (5.8.a ábra). A vektorábra az 5.8.b ábrán látható.

5.1-4 Feladat

Az 5.9 ábrán megrajzolt egyszerű rúdlánc tartós nyugalomban van.

5.9 ábra



Adatok:

$$\alpha = 45^\circ,$$

$$F_1 = 3 \text{ kN}.$$

Feladat:

1. Határozzuk meg számítással és szerkesztéssel a rúdlánc nyugalmi állapotához szükséges F_2 erőt!
2. Határozza meg a támasztóerőket!

Megoldás: 1. A rúdlánc (1) jelű rúdja csak függőleges, (2) jelű rúdja pedig csak vízszintes erőt vesz fel, ugyanis egyik rudat sem terheli aktív erő.

Vizsgáljuk a C csukló egyensúlyát (5.10.a ábra)!

A csuklóra felírható függőleges vetületi egyenletből következik

$$S_1 = 0,$$

ami egyben azt is jelenti, hogy

$$F_A = 0.$$

A vízszintes vetületi egyenlet pedig $S_2 = F_1 = 3 \text{ kN}$ eredményre vezet, a (2) jelű rúd húzott.

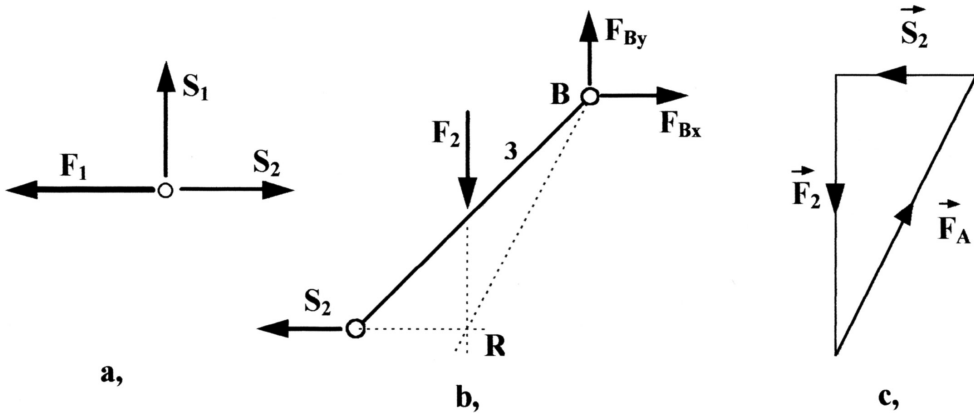
A (3) jelű rúdra ható erőket vázoltuk az 5.10.b ábrán. Az F_2 erő kiszámítható a rúdra ható erőrendszerre a B ponton átmenő síkra merőleges tengelyre felírt nyomatéki egyenletből.

$$\sum M_{bi} = 0 = b \cdot F_2 - 2b \cdot S_2,$$

(3)

Fenti egyenletből $F_2 = 2 \cdot S_2 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kN}$ (↓) adódik.

5.10 ábra



A (3) jelű rúdra x irányú vetületi egyenletet írva:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Bx} - S_2, \text{ innen } F_{Bx} = S_2 = 3 \text{ kN} (\rightarrow).$$

(3)

Az y irányú vetületi egyenlet:

$$\sum F_{yi} = 0 = F_{By} - F_2, \text{ innen } F_{By} = F_2 = 6 \text{ kN} (\uparrow) \text{ adódik.}$$

(3)

Szerkesztéssel ellenőrizzük az eredményeket. A (3) jelű rúd egyensúlya három erő egyensúlya alapján áll fenn, aminek alapján a három erő hatásvonalának egy pontban (R) kell metsződnie. A vektorábrát az 5.10.c ábrán láthatjuk.

Az eredmények összefoglalása:

$$F_A = 0,$$

$$\vec{F}_B = 3 \vec{i} + 6 \vec{j} \text{ [kN]},$$

$$\vec{F}_2 = -6 \vec{j} \text{ [kN]},$$

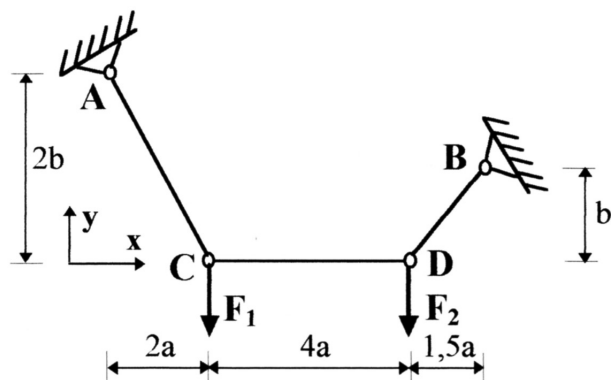
$$\vec{C}_{23} = -\vec{S}_2 = 3 \vec{i} \text{ [kN]}.$$

C. 5.1 GYAKORLÓ FELADATOK

5.1-5 Feladat

Az 5.11 ábrán vázolt szerkezet az F_1 és F_2 terhelő erők hatására a megadott alakot felvéve teljes nyugalomban van.

5.11 ábra



Adatok:

$$a = 1 \text{ m},$$

$$b = 1,5 \text{ m},$$

$$F_1 = 60 \text{ kN},$$

Feladat:

Határozza meg az F_2 erőt és a támasztó erőrendszert!

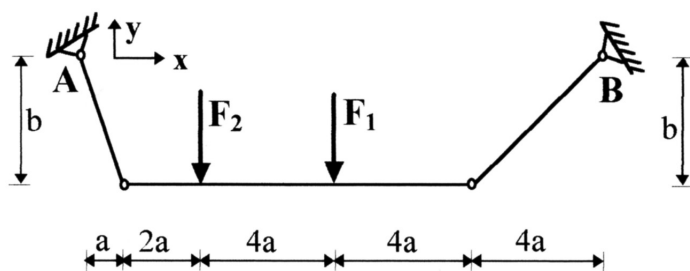
Eredmények: $F_2 = 40 \text{ kN},$

$$\vec{F}_A = -40 \vec{i} + 60 \vec{j} \text{ [kN]}, \quad \vec{F}_B = 40 \vec{i} + 40 \vec{j} \text{ [kN]}.$$

5.1-6 Feladat

Az 5.12 ábrán vázolt rúdlánc a terhelések hatására az adott alakzat mellett nyugalomban van.

5.12 ábra



Adatok:

$$a = 0,5 \text{ m},$$

$$b = \text{m},$$

$$F_2 = 30 \text{ kN}$$

Feladat:

Határozza meg az F_A és F_B támasztóerőket, valamint az F_1 erőt!

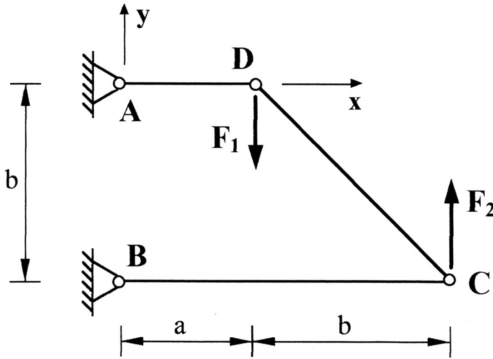
Eredmények: $F_1 = 0,$

$$\vec{F}_A = -6 \vec{i} + 24 \vec{j} \text{ [kN]}, \quad \vec{F}_B = 6 \vec{i} + 6 \vec{j} \text{ [kN]}.$$

5.1-7 Feladat

Az 5.13 ábrán vázolt rúdlánc az adott alakzattal tartós nyugalomban van.

5.13 ábra



Adatok:

$$F_1 = 4 \text{ kN},$$

$$a = 2 \text{ m},$$

$$b = 3 \text{ m}.$$

Feladat:

Határozza meg az F_2 erőt, valamint a támasztóerőket!

Eredmények:

$$F_2 = 4 \text{ kN} (\uparrow),$$

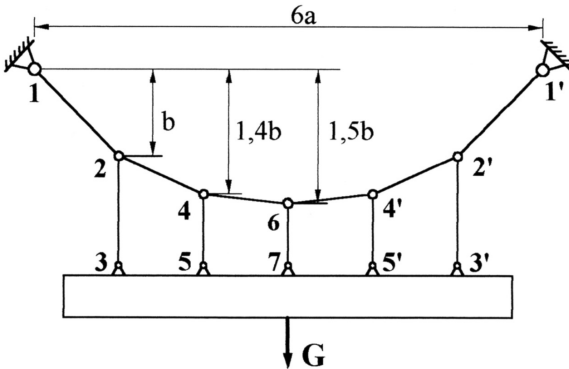
$$F_A = 4 \text{ kN} (\rightarrow),$$

$$F_B = 4 \text{ kN} (\leftarrow).$$

5.1-8 Feladat

Az 5.14 ábrán vázolt függesztőművet G súlyú merev test terheli.

5.14 ábra



Adatok:

$$G = 230 \text{ kN},$$

$$a = 4 \text{ m},$$

$$b = 4,5 \text{ m}.$$

Feladat: Határozza meg a függesztőmű rúdjaiban keletkező rúderőket!

Eredmények:

$$S_{6-7} = 23 \text{ kN}$$

$$S_{4-5} = S_{4'-5'} = 34,5 \text{ kN}$$

$$S_{2-3} = S_{2'-3'} = 69 \text{ kN}$$

$$S_{1-2} = S_{1'-2'} = 153,86 \text{ kN}$$

$$S_{2-4} = S_{2'-4'} = 112,1 \text{ kN}$$

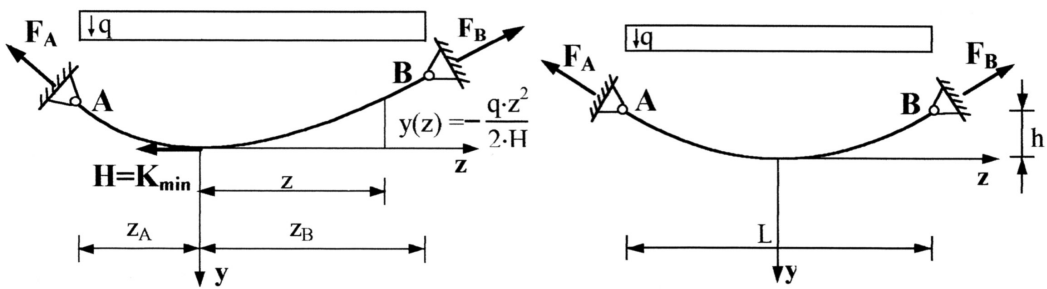
$$S_{4-6} = S_{4'-6'} = 102,87 \text{ kN}$$

5.2 Kötélszerkezetek

Kötélnek nevezzük a nagyon kis hajlítómerevséggel rendelkező (tökéletesen hajlékony) tartóelemet, melyek hosszirányú kiterjedése nagyságrenddel nagyobb keresztmetszeti kiterjedésénél, s mely a nyomóigénybevétel elől kitér, vagyis csak húzóerő felvételére alkalmas. Az elhanyagolható önsúlyú koncentrált erőkkel terhelt hajlékony és nyújthatatlan kötél erőjátékára alkalmazhatók a csuklókon terhelt rúdlánca elmondottak, azzal a különbséggel, hogy a kötélágakban csak húzóerő léphet fel. (Lásd függesztőműves rúdlánc).

Állandó intenzitású megoszló erővel terhelt kötél alakját a kötél differenciálegyenletéből határozhatjuk meg (5.2 ábra).

5.2 ábra



Szimmetrikus kötél esetén (5.3 ábra), amikor A és B azonos magasságban helyezkedik el, a koordinátarendszer kezdőpontjánál fellépő minimális kötélterő:

$$K_{\min} = H = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot h}.$$

A maximális kötélterő a csuklóknál lép fel, értéke:

$$F_A = F_B = \sqrt{H^2 + \left(\frac{q \cdot L}{2} \right)^2}.$$

A kötél alakját leíró függvény:

$$y = -\frac{4 \cdot h}{L^2} \cdot z^2,$$

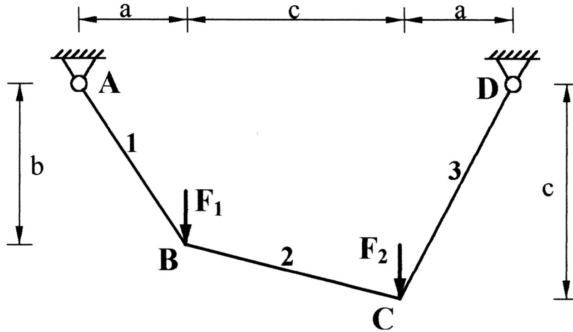
ami független a kötelet terhelő megoszló erőtől.

B.5.2 KIDOLGOZOTT FELADATOK

5.2-1 Feladat

Az F_1 és F_2 függőleges erők hatására az A és D helyeken rögzített kötél az 5.15 ábrán látható egyensúlyi alakot vesz fel.

5.15 ábra



Adatok:

$$a = 2 \text{ m},$$

$$b = 3 \text{ m},$$

$$c = 4 \text{ m},$$

$$F_1 + F_2 = 56 \text{ kN}.$$

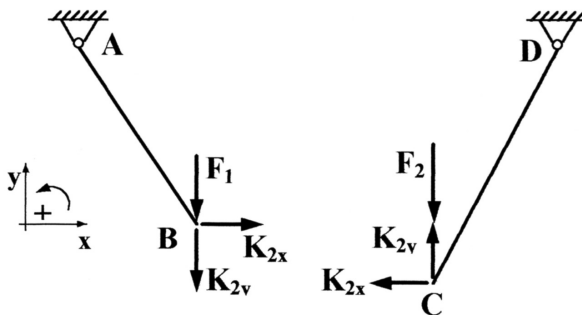
Feladat:

1. Határozzuk meg F_1 és F_2 erők nagyságát!

2. Határozzuk meg a kötélagakban ébredő K_1 , K_2 és K_3 kötelerőket!

Megoldás: 1. A 2-es kötélag átmetszése után (5.16 ábra) írjuk fel mindkét részre statikai egyensúlyi egyenleteket!

5.16 ábra



$$\sum M_{ai} = 0 = 3 \cdot K_{2x} - 2 \cdot F_1 - 2 \cdot K_{2y},$$

$$\sum M_{di} = 0 = 2 \cdot F_2 - 4 \cdot K_{2x} - 2 \cdot K_{2y},$$

A feladatkiírás szerint $F_2 = F - F_1$.

A kötélagak geometriájából

$K_{2x} = 4 \cdot K_{2y}$. Behelyettesítés után az egyenletrendszer:

$$3 \cdot 4 \cdot K_{2y} - 2 \cdot F_1 - 2 \cdot K_{2y} = 0,$$

$$2 \cdot F - 2 \cdot F_1 - 4 \cdot 4 \cdot K_{2y} - 2 \cdot K_{2y} = 0.$$

Az egyenletrendszert megoldva F_1 -re:

$$F_1 = \frac{5 \cdot F}{14} = \frac{5 \cdot 56}{14} = 20 \text{ kN}.$$

2. Kötelerők meghatározása:

Ugyancsak az előbbi egyenletrendszerből számítható K_{2y} : $K_{2y} = \frac{2 \cdot F}{28} = \frac{2 \cdot 56}{28} = 4 \text{ kN}.$

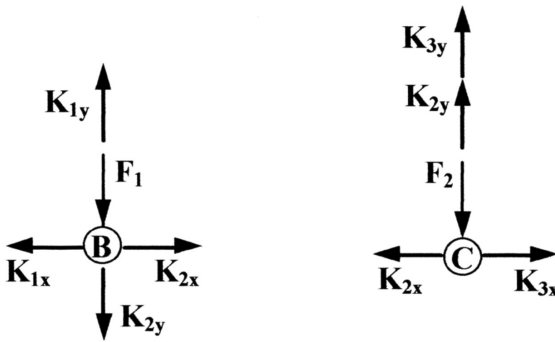
A K_2 kötelerő vízszintes komponense:

$$K_{2x} = 4 \cdot K_{2y} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ kN},$$

és az eredő kötelerő

$$K_2 = \sqrt{K_{2x}^2 + K_{2y}^2} = \sqrt{16^2 + 4^2} = 16,49 \text{ kN}.$$

5.17 ábra



A K_1 kötél erő a B csomópontban működő erők egyensúlyából (5.17 ábra):

$$K_{1x} = K_{2x} = 16 \text{ kN} (\leftarrow),$$

$$K_{1y} = K_{2y} + F_1 = 4 + 20 = 24 \text{ kN} (\uparrow),$$

$$K_1 = \sqrt{K_{1x}^2 + K_{1y}^2} = \sqrt{16^2 + 24^2},$$

$$K_1 = 28,84 \text{ kN}.$$

A K_3 kötél erőit pedig a C csomópontban működő erők egyensúlyából határozhatjuk meg:

$$K_{3x} = K_{2x} = 16 \text{ kN} (\rightarrow),$$

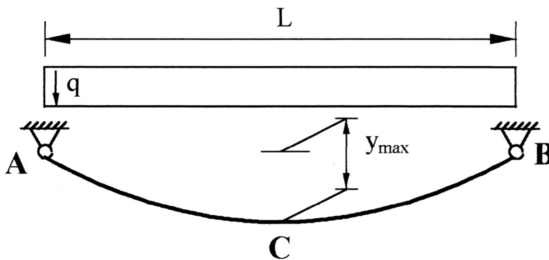
$$K_{3y} = F_2 - K_{2y} = 36 - 4 = 32 \text{ kN} (\uparrow),$$

Megjegyzés: A feladat szerkesztő eljárással való megoldásánál F_1 , F_2 , valamint a kötél erők is az F vektorára a kötélalakhoz szerkesztett vektorábrából leolvashatók.

5.2-2 Feladat

Az 5.13 ábra szerint felfüggesztett kötelet a saját súlya terheli, melynek nagysága q .

5.18 ábra



Adatok:

$$L = 20 \text{ m},$$

$$y_{\max} = 3 \text{ m},$$

$$q = 30 \text{ N/m}.$$

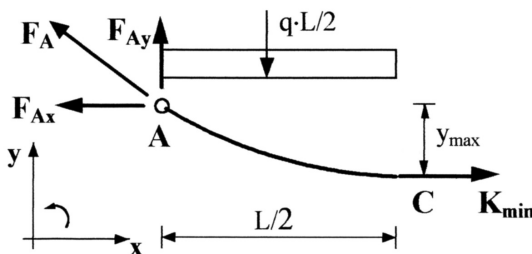
Feladat:

Határozzuk meg a minimális és maximális kötél erő!

Megoldás: A minimális kötél erő a kőtel alsó pontjában (C), a maximális kötél erő pedig a csuklóknál keletkezik.

Vágjuk el a C keresztmetszetben a kötelet és vizsgáljuk a fél kőtel egyensúlyát az 5.19 ábra alapján!

5.19 ábra



Az A ponton átmenő síkra merőleges tengelyre felírt nyomatéki egyenlet:

$$\sum M_{ai} = 0 = y_{\max} \cdot K_{\min} - q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4},$$

$$K_{\min} = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot y_{\max}} = \frac{30 \cdot 20^2}{8 \cdot 1,5} = 1000 \text{ N}.$$

A maximális kötél erő és a támaszerők:

$$F_{Ax} = K_{\min} = 1000 \text{ N},$$

$$F_{Ay} = q \cdot \frac{L}{2} = 30 \cdot \frac{20}{2} = 300 \text{ N},$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{1000^2 + 300^2} = 1044 \text{ N}.$$

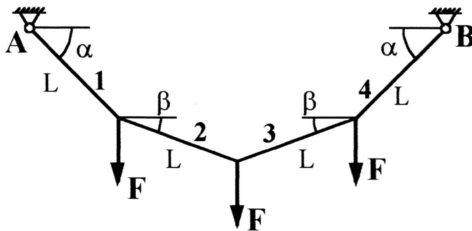
A maximális kötelerő tehát: $K_{\max} = 1044 \text{ N}$,
 illetve a szimmetria miatt $F_B = 1044 \text{ N}$.

C. 5.2 GYAKORLÓ FELADATOK

5.2-3 Feladat

Az 5.20 ábrán látható kötelet A és B végén csuklókhoz rögzítjük. A szomszédos terhelési helyek közti kötélhosszak azonosak.

5.20 ábra



Adatok:

$$\alpha = 45^\circ,$$

$$F = 10 \text{ kN}.$$

Feladat:

1. Határozza meg, hogy mekkora β szög esetén lesz a kötel nyugalomban!
2. Határozza meg a kötél-erőket!

Eredmények:

$$\beta = 18,43^\circ$$

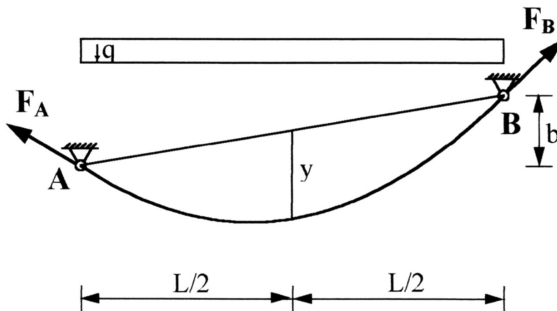
$$K_1 = K_4 = 21,2 \text{ kN},$$

$$K_2 = K_3 = 15,8 \text{ kN}.$$

5.2-4 Feladat

Az önsúlyával terhelte kötel geometriai alakja az 5.21 ábrán látható.

5.21 ábra



Adatok:

$$L = 6 \text{ m},$$

$$b = 1 \text{ m},$$

$$y = 1,25 \text{ m},$$

$$q = 10 \text{ kN/m}.$$

Feladat:

Határozza meg az A és B csuklókban ébredő erők nagyságát és a minimális kötelerőt!

Eredmények:

$$F_A = 43,27 \text{ kN} (\swarrow),$$

$$H = K_{\min} = 30,59 \text{ kN}.$$

$$F_B = 50,91 \text{ kN} (\nearrow),$$

6. SÚRLÓDÁSOS KAPCSOLATOK

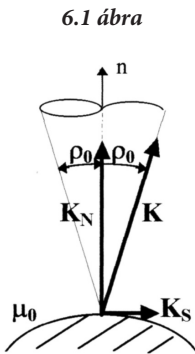
A. 6. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

A testek érintkezésének leírásánál gyakran nem elhanyagolható az érintkező felületek között fellépő súrlódás.

A **Coulomb-törvény** értelmében a kényszererő súrlódó összetevője az elmozdulás határhelyzetében arányos a kényszererő normálösszetevőjével.

$$\mathbf{K}_S = \mu_0 \cdot \mathbf{K}_N.$$

Az érintkező testek közötti kényszererő-összetevőkre a fenti határeset mellett végtelen sok $\mathbf{K}_S$ és $\mathbf{K}_N$ értékpár állhat fenn, amelyek az alábbi feltételnek eleget tesznek.



$$\mathbf{K}_S \leq \mu_0 \cdot \mathbf{K}_N,$$

$$\text{illetve más formában } \mu_0 = \frac{\mathbf{K}_S}{\mathbf{K}_N},$$

ami azt fejezi ki, hogy a kényszererő mindig egy $\rho_0 = \arctg \mu_0$ félkúpszögű kúp palástfelületén belül helyezkedik el (6.1 ábra).

Csavarmenet:

A csavarmenetet a csavarhengerről lefejtve egy érdes lejtőhöz jutunk, amelyen a csavaranya mozgásállapotára érvényes a Coulomb-törvény.

A csavar meghúzásához teheremeléskor szükséges nyomaték:

$$\mathbf{M}_{\max} = r_k \cdot Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho_0),$$

illetve a kilazításhoz (süllyesztéshez) szükséges nyomaték:

$$\mathbf{M}_{\min} = r_k \cdot Q \cdot \operatorname{tg}(\rho_0 - \alpha),$$

ahol: Q az emelendő teher, illetve a csavarfelületeket összeszorító erő,
 α a menetemelkedés szöge,
 ρ_0 a csavar és csavaranya érintkező felületeire jellemző súrlódási félkúpszög.

Csapsúrlódás:

Mint ismeretes az ideális csukló nyomaték átvitelére nem alkalmas. A valóságban azonban a súrlódás léte miatt mindig átvihető kismértékű nyomaték, melynek nagysága:

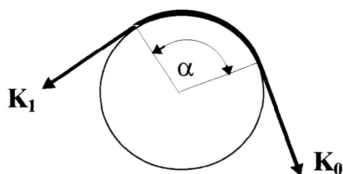
$$\mathbf{M}_c = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \cdot \sin \rho_0,$$

ahol: R a csap sugara,
 F a csapot terhelő erő.

Kötélsúrlódás:

Az íves felületeken átvett kötél kezdő és végső ágában fellépő erők – a tapasztalat is ezt mutatja – nem azonosak. Az elmozdítás irányában nagyobb erőt kell kifejteni a fellépő súrlódás miatt

6.2 ábra



A kötelerők közötti összefüggés az alábbi módon írható fel:

$$K_0 = K_1 \cdot e^{\mu_0 \alpha},$$

ahol: K_0 és K_1 a maximális és minimális kötelerő (6.2 ábra).

α a felfekvési ív középponti szöge.

μ_0 a kötél és az íves felület közötti nyugalmi súrlódási tényező

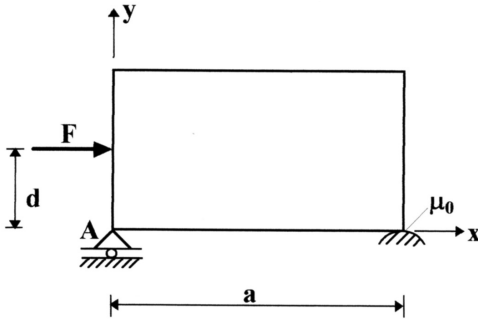
6.1 Súrlódásos alapfeladatok

B. 6.1 KIDOLGOZOTT FELADATOK

6.1-1 Feladat

A G súlyú testet a 6.3 ábra szerint egy görgővel és egy érdes felülettel támasztjuk meg.

6.3 ábra



Adatok:

$$G = 700 \text{ N},$$

$$a = 0,9 \text{ m},$$

$$d = 0,3 \text{ m},$$

$$\mu_0 = 0,45.$$

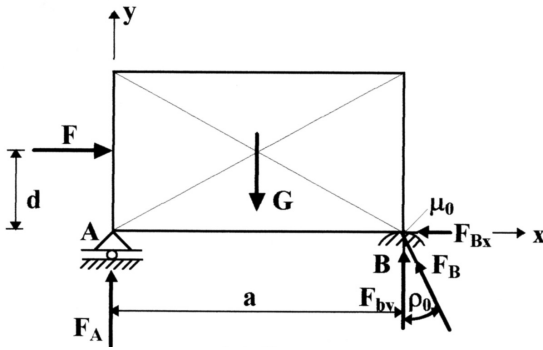
Feladat:

1. Határozzuk meg F erő maximális értékét, hogy a test még éppen nyugalomban maradjon!

2. Határozzuk meg $d=0$ esetén mekkora lehet az F erő, hogy a test még éppen nyugalomban legyen!

Megoldás: 1. F erő hatására a test x irányba, jobbra tolódna el. Ezt a B jelű érdes felülettel való megtámasztásnál keletkező reakcióerő érintőirányú (F_{Bx}) összetevője egyensúlyozza ki. Az egyensúly addig áll fenn, amíg F_B a súrlódási kúpba, illetve határesetben annak alkotójába esik (6.4 ábra).

6.4 ábra



A testre ható erőrendszernek (aktív és passzív erők) a határesetben még éppen egyensúlyban lennie.

Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket!

$$\sum M_{bi} = 0 = -d \cdot F + 0,5a \cdot G - a \cdot F_A,$$

$$\sum F_{xi} = 0 = F - \mu_0 \cdot F_{By},$$

$$\sum F_{yi} = 0 = F_A - G + F_{By}.$$

Az egyenletrendszerből F erő meghatározható. Először az első és harmadik egyenletből fejezzük ki F_A -t.

$$F_A = \frac{-d \cdot F + 0,5 \cdot a \cdot G}{a} = G - F_{By}.$$

A második egyenletből pedig fejezzük ki F_{By} -t.

$$F_{By} = \frac{F}{\mu_0}.$$

Ezt helyettesítsük be az előző egyenletbe és rendezzük az így kapott egyenletet a keresett F erőre.

$$-d \cdot F + \frac{a}{2} \cdot G = a \cdot \left(G - \frac{F}{\mu_0} \right), \text{ ahonnan } F = \frac{G \cdot (a - 0,5 \cdot a)}{\frac{a}{\mu_0} - d}$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$F = \frac{700 \cdot (0,9 - 0,5 \cdot 0,9)}{\frac{0,9}{0,45} - 0,3} = 185,29 \text{ adódik.}$$

2. Az adott $d=0$ esetén is az egyensúly határesetét vizsgáljuk. Az előző egyenletek felhasználásával írhatjuk:

$$-d \cdot F_1 + \frac{a}{2} \cdot G = a \cdot \left(G - \frac{F_1}{\mu_0} \right),$$

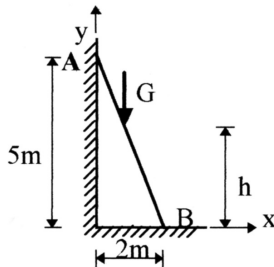
$d=0$ miatt az F_1 erő:

$$F_1 = \frac{\mu_0 \cdot G \cdot (a - 0,5 \cdot a)}{a} = \mu_0 \cdot G \cdot 0,5 = 0,45 \cdot 700 \cdot 0,5 = 157,5 \text{ N.}$$

6.1-2 Feladat

A 6.5 ábrán látható elhanyagolható súlyú létra alsó vége érdes vízszintes talajon, felső vége teljesen sima függőleges falon támaszkodik.

6.5 ábra



Adott: $\mu_0 = 0,3$.

Feladat:

Határozzuk meg, hogy milyen magasra (h) lehet a létrán felmenni, hogy a létra meg ne csússzon!

Megoldás:

A megcsúszás határhelyzetében is még egyensúlyi erőrendszer támadja a létrát. Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket!

1. $\sum M_{ai} = 0 = 2 \cdot F_{By} - 5 \cdot F_{Bx} - x \cdot G,$
2. $\sum F_{xi} = 0 = F_A - F_{Bx},$
3. $\sum F_{yi} = 0 = F_{By} - G.$

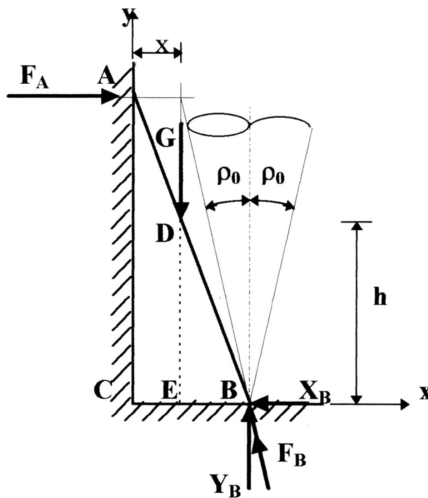
A 2. egyenletből $F_A = F_{Bx}$, a 3.-ból $F_{By} = G$ következik, valamint felhasználva, hogy a Coulomb-törvény szerint $F_{Bx} = \mu_0 \cdot F_{By}$ írhatjuk az 1. egyenletet:

$$2 \cdot G - 5 \cdot \mu_0 \cdot G - x \cdot G = 0.$$

Ebből:

$$x = 2 - 5 \cdot \mu_0 = 2 - 5 \cdot 0,3 = 0,5 \text{ m.}$$

6.6 ábra



Mivel $ABC \triangle$ és $BDE \triangle$ hasonló, írhatjuk:

$$\frac{h}{5} = \frac{2-x}{2}, \quad \text{ahonnan}$$

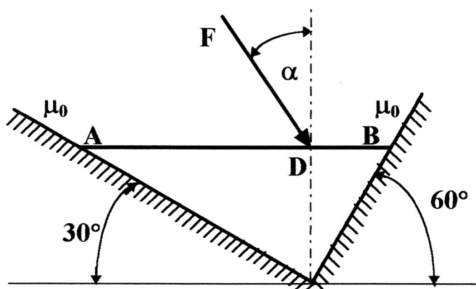
$$h = 5 \cdot \frac{2-x}{2} = 5 \cdot \frac{2-0,5}{2} = 3,75 \text{ m.}$$

A számításból láthatjuk, hogy h értéke független a létrára felmászó ember súlyától, csak a létra dőlésszögétől és a súrlódási viszonyoktól függ.

6.1-3 Feladat

A 6.7 ábrán látható elhanyagolható súlyú vízszintes gerenda mindkét végével érdes síkra támaszkodik. A rudat a D pontban a hajlásszögű F erő terheli. A rúd és az őt terhelő F erő síkja közös (függőleges sík).

6.7 ábra



Adott: $\mu_0 = 0,25$.

Feladat:

Határozzuk meg F erő α hajlásszögének legkisebb (α_1) és legnagyobb (α_2) értékét, hogy a gerenda még éppen nyugalomban legyen!

Megoldás: A gerenda addig marad nyugalomban, amíg az A és B helyen ébredő támasztóerők hatásvonalai nem lép ki a megrajzolt $\rho_0 = \arctan \mu_0$ hajlásszögű súrlódási kúpából.

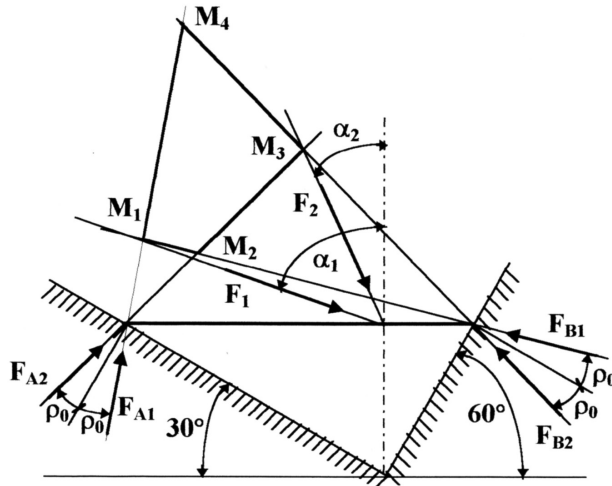
$$\rho_0 = \arctan \mu_0 = \arctan 0,25 = 14^\circ$$

F erő hatásvonalát határhelyzetben (F_1, F_2) érinti a súrlódásra jellemző M_1, M_2, M_3, M_4 felületet.

A léptékhelyesen szerkesztett ábrából (α_1) és (α_2) lemérhető

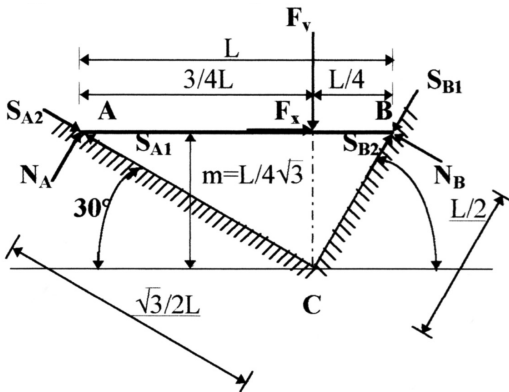
$$\alpha_1 = 28^\circ, \quad \alpha_2 = 68^\circ.$$

6.8 ábra



A feladat megoldása **számítással** a gerenda nyugalmi állapotának határesetére felírt egyensúlyi egyenletekkel lehetséges.

6.9 ábra



Ebben az esetben a három (nem egy egyenesre eső) A,B,C pontokon átmenő – az erőrendszer síkjára merőleges – tengelyre felírható nyomatéki egyenlet alkalmazása célszerű (6.9 ábra).

Az óramutató járásával ellentétes elcsúszás határhelyzetében felírható egyensúlyi egyenletekkel, a Coulomb-törvény alkalmazásával, valamint az F erő komponenseinek behelyettesítésével α_1 meghatározható.

Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum M_{ai} = 0 = \frac{L}{2} \cdot N_B - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L \cdot \mu_0 \cdot N_B - \frac{3}{4} \cdot L \cdot F_y.$$

$$\sum M_{bi} = 0 = \frac{1}{4} \cdot L \cdot F_y - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L \cdot N_A - \frac{L}{2} \cdot \mu_0 \cdot N_A,$$

$$\sum M_{ci} = 0 = \frac{L}{2} \cdot N_B - \frac{L}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot F_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L \cdot N_A.$$

Az előzőket figyelembevéve adódik:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} + 3 \cdot \mu_0}{(1 - \mu_0^2) \cdot 3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \mu_0}$$

Behelyettesítve $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2,55$, illetve $\alpha_1 = 68,5^\circ$.

Az óramutató járásával azonos irányban való elcsúszás határhelyzetében felírható nyomatéki egyenletekből:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} - 3\mu_0}{(1 - \mu_0^2) \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \mu_0}.$$

Behelyettesítéssel $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,53$, illetve $\alpha_2 = 28,1^\circ$.

Tehát a gerenda nyugalomban marad, amíg:

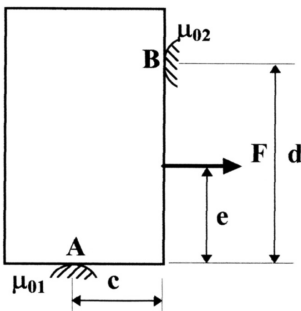
$$28,1^\circ \leq \alpha \leq 68,5^\circ.$$

C. 6.1 GYAKORLÓ FELADATOK

6.1-4 Feladat

A 6.10 ábrán látható merev testet A és B helyen érdes felület akadályozza mozgásában.

6.10 ábra



Adatok:

$$c = 0,3 \text{ m},$$

$$d = 0,5 \text{ m},$$

$$\mu_{01} = 0,4,$$

$$\mu_{02} = 0,6.$$

Feladat:

Határozza meg, hogy mekkora e távolságra működhet az F erő, hogy a test nyugalomban maradjon!

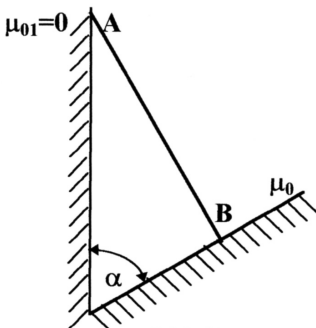
Eredmény:

$$0,258 \text{ m} \leq e \leq 0,5 \text{ m}.$$

6.1-5 Feladat

A 6.11 ábrán látható súlyos rúd A vége a teljesen sima függőleges falnak támaszkodik, B vége pedig merőleges az érdes ferde megtámasztó síkra.

6.11 ábra



Adott: $\alpha = 60^\circ$

Feladat:

Határozza meg mekkora lehet a μ_0 súrlódási tényező, hogy a rúd még éppen nyugalomban legyen!

Eredmény:

$$\mu_0 = 0,247$$

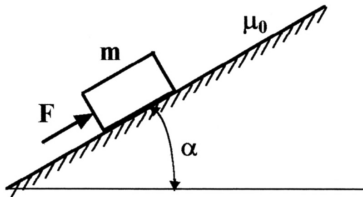
6.2 A súrlódás műszaki alkalmazásai

B. 6.2 KIDOLGOZOTT FELADATOK

6.2-1 Feladat

A 6.12 ábrán vázolta hajlásszögű érdes lejtőn m tömegű anyagi pontnak tekinthető testet lejtőirányú F erő terheli.

6.12 ábra



Adatok:

$$m = 10 \text{ kg},$$

$$\alpha = 35^\circ,$$

$$\mu_0 = 0,45.$$

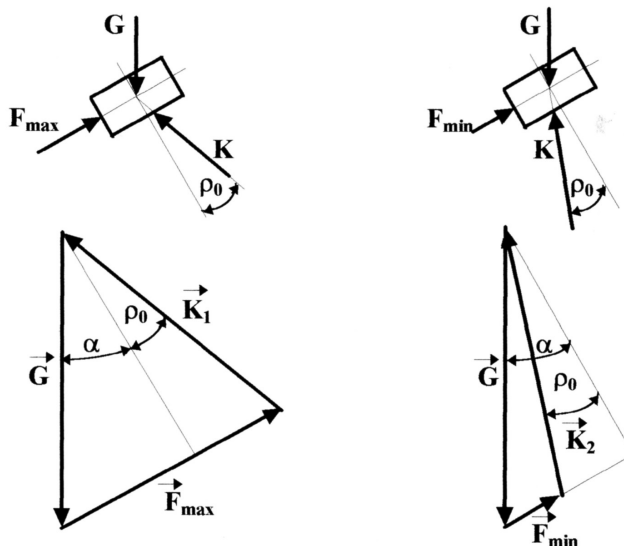
Feladat:

1. Határozzuk meg, hogy mekkora $F_{\min}$ és $F_{\max}$ erőértékek között marad az anyagi pont nyugalomban!

2. Határozzuk meg az $F_{\min}$ és $F_{\max}$ terhelő erő esetén fellépő kényszererő összetevőket!

Megoldás: 1. A 6.13 ábrán vázoltuk az anyagi pontot terhelő egyensúlyi erőrendszert.

6.13 ábra



A vektorábrákból láthatóan az F erők értéke:

$$F_{\max} = G \cdot \sin \alpha + G \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \rho_0 = G \cdot (\sin \alpha + \mu_0 \cdot \cos \alpha),$$

$$F_{\min} = G \cdot (\sin \alpha - \mu_0 \cdot \cos \alpha).$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$F_{\max} = 100 \cdot (\sin 35^\circ + 0,45 \cdot \cos 35^\circ) = 100 \cdot (0,5736 + 0,45 \cdot 0,819)$$

$$F_{\max} = 94,22 \text{ N}$$

$$F_{\min} = 100 \cdot (0,5736 - 0,45 \cdot 0,819)$$

$$F_{\min} = 20,49 \text{ N}$$

2. A kényszererő lejtőre merőleges összetevője mindkét esetben azonos, a súrlódási összetevők pedig előjelben különböznek, így:

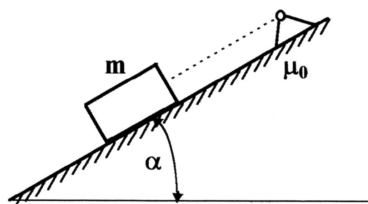
$$K_{N1} = K_{N2} = G \cdot \cos \alpha = 100 \cdot \cos 35^\circ = 81,92 \text{ N},$$

$$K_{S2} = -K_{S1} = \mu_0 \cdot K_n = 0,45 \cdot 81,92 = 36,86 \text{ N}.$$

6.2-2 Feladat

A 6.14 ábrán vázolt m tömegű anyagi pontnak tekinthető testet az A jelű csuklóhoz kötéllal rögzítjük.

6.14 ábra



Adatok:

$$\mu_0 = 0,2,$$

$$m = 50 \text{ kg},$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Feladat:

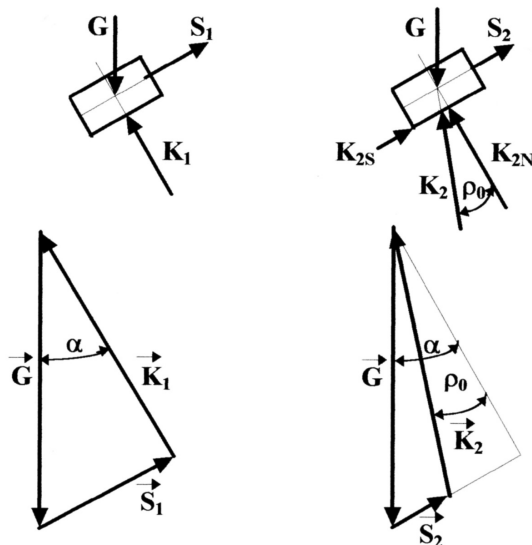
Határozzuk meg a kötelerőt:

a, súrlódásmentes felület esetén,

b, érdes felület esetén!

Megoldás: A testre ható erőrendszert mindkét esetre a 6.15 ábrán vázoltuk.

6.15 ábra



A kötelerő a súrlódásmentes felület esetén:

$$S_1 = G \cdot \sin \alpha,$$

behelyettesítve az adatokat:

$$S_1 = 500 \cdot \sin 30^\circ = 500 \cdot 0,5 = 250 \text{ N}.$$

Érdes felületen S_2 erővel tarthatjuk nyugalomban a testet. Az S_2 erő meghatározásához írunk fel lejtő irányú vetületi egyenletet:

$$\Sigma F_{si} = 0 = S_2 + \mu_0 \cdot G \cdot \cos \alpha - G \cdot \sin \alpha,$$

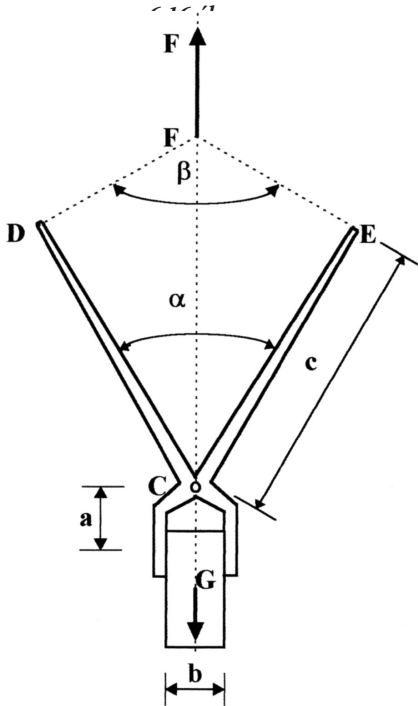
$$\text{amiből} \quad S_2 = G \cdot (\sin \alpha - \mu_0 \cdot \cos \alpha),$$

és behelyettesítés után:

$$S_2 = 500 \cdot (0,5 - 0,2 \cdot 0,866) = 163,4 \text{ N}.$$

6.2-3 Feladat

A 6.16 ábrán vázolt bugafogóval G súlyú bugát emelünk. A fogó két szára a C csuklóban csappal kapcsolódik egymáshoz. A fogót az emelendő tömeghez képest elhanyagolható tömegűnek tekinthetjük.



Adatok:

$$a = 150 \text{ mm},$$

$$b = 200 \text{ mm},$$

$$\alpha = 60^\circ \text{ mm},$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$\gamma_b = 120^\circ$$

$$= 2.$$

Feladat:

Határozzuk meg, hogy mekkora legyen a súrlódási tényező a fogó és a buga között, hogy a γ_b súzás elleni biztonság legyen!

Megoldás: A 6.16 ábrán vázolt rendszert (fogó és buga) a kötélzettel emeljük. A rendszerre felírt függőleges vetületi egyenletből a fogó súlytalansága esetén $F = G$ adódik.

Az F csomópont egyensúlyából meghatározhatjuk a kötélterőket (6.17.a ábra)

$$\sum F_{yi} = 0 = 2 \cdot K \cdot \sin \varphi - F$$

egyenletből a kötélterő:

$$K = \frac{F}{2 \cdot \sin \varphi}.$$

A buga egyensúlyát vizsgálva felírhatjuk a 6.17.b ábrán látható "háromtest" egyenletet:

$$\sum F_{yi} = 0 = G - 2 \cdot S, \text{ illetve } S = \mu_0 \cdot N.$$

Behelyettesítés és rendezés után a normálerő:

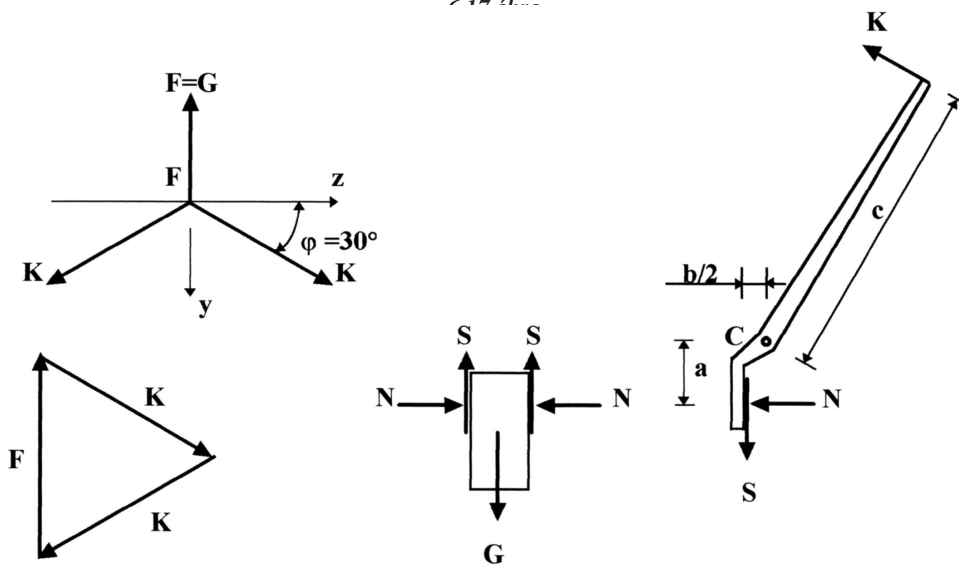
$$N = \frac{G \cdot c}{2 \cdot \mu_0}.$$

A 6.17.c ábrán

$$\sum M_{ci} = 0 = K \cdot c + S \cdot \frac{b}{2} - N \cdot a = K \cdot c + \frac{G \cdot b}{4} - \frac{G \cdot \gamma_b \cdot a}{2 \cdot \mu_0},$$

ahonnan a ke

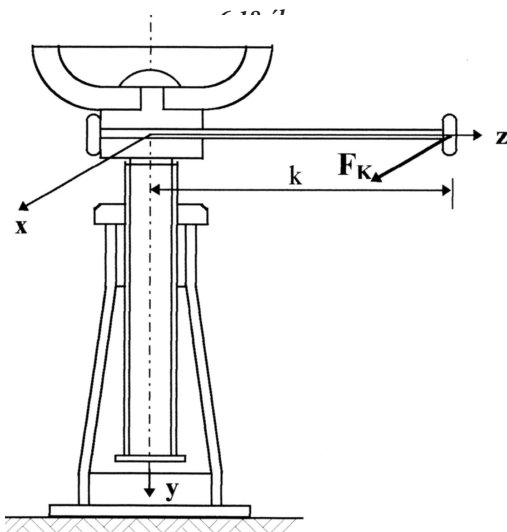
$$\mu_0 = \frac{G \cdot \gamma_b \cdot a}{2 \cdot \left(\frac{G \cdot c}{2 \cdot \sin \varphi} + \frac{G \cdot b}{4} \right)} = \frac{\gamma_b \cdot a}{\frac{c}{\sin \varphi} + \frac{b}{2}} = \frac{2 \cdot 150}{\frac{600}{0,5} + \frac{200}{2}} = 0,2308.$$



A súrlódási tényező képletéből látható, hogy az független a G súlytól.

6.2-4 Feladat

A 6.18 ábrán egy csavaros mozgatóorsót (emelőorsó) láthatunk, mellyel Q terhet kívánunk emelni.



Adatok:

$$k = 400 \text{ mm},$$

$$\mu_0 = 10 \text{ kN},$$

$$= 0,2,$$

Csavar M20:

$$d_2 = d_{\text{köz}} = 18,4 \text{ mm},$$

Menetemelkedés:

$$h = 2,5 \text{ mm}.$$

Feladat:

Határozzuk meg, hogy mekkora F_K kerületi erőt kell kifejteni a Q súlyú teher emeléséhez!

Megoldás: A Q teher emeléséhez szükséges maximális

és süllyesztéséhez szükséges minimális $M_{\max} = r_k \cdot Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho_0)$, esetén:

illetve

$$M_{\min} = r_k \cdot Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \rho_0).$$

A fenti képletekben

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{d_2 \cdot \pi} = \operatorname{arctg} \frac{2,5}{18,4 \cdot \pi} = 2,476^\circ,$$

$$\rho_0 = \operatorname{arctg} \mu_0 = \operatorname{arctg} 0,2 = 11,31^\circ.$$

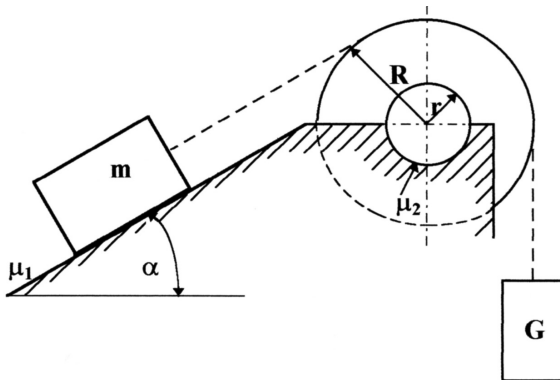
A maximális nyomatékot $F_{\max}$ erővel hozzuk létre. Az $M_{\max} = F_{\max} \cdot k$ összefüggésből kifejezve $F_{\max}$ -ot:

$$F_{\max} = \frac{d_2 \cdot Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho_0)}{2 \cdot k} = \frac{18,4 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg}(2,476^\circ + 11,31^\circ)}{2 \cdot 400} = 0,056 \text{ kN} = 56 \text{ N}.$$

6.2-5 Feladat

A 6.19 ábrán látható a hajlásszögű érdes lejtőre helyezett m tömegű testhez rögzített kötelet átvetjük az R sugarú keréken. A kötél vége G súlyerővel terhelt. A kerék r sugarú csapja és a csapágyfészek között μ_2 a súrlódási tényező.

6.19 ábra



Adatok:

$$\begin{aligned} \alpha &= 30^\circ, \\ m &= 40 \text{ kg}, \\ r &= 10 \text{ cm}, \\ R &= 25 \text{ cm}, \\ \mu_1 &= 0,3, \\ \mu_2 &= 0,1. \end{aligned}$$

Feladat:

1. Mekkora lehet a minimális G súly, hogy az m tömeg ne induljon el **lefelé**?
2. Mekkora lehet a maximális G súly, hogy az m tömeg ne induljon el **felfelé**?

Megoldás: A két nyugalmi határállapot egyensúlyi erőrendszerét láthatjuk a 6.20 ábrán. Elsőként geometriai adatokat határozzunk meg:

A csapsúrlódási kör sugara $r_0 = r \cdot \sin \operatorname{arctg} \mu_2 = 10 \cdot \sin 5,71^\circ = 0,995 \text{ cm}.$

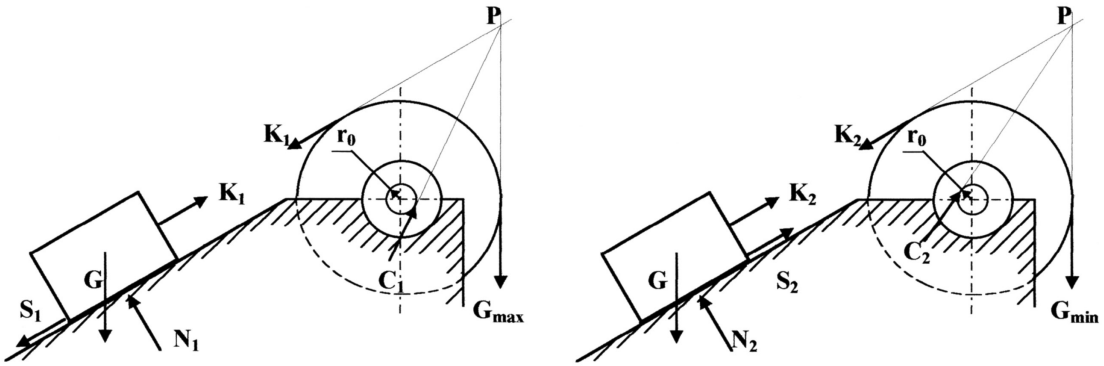
A C kényszererő a felfelé elmozdulás határállapotában jobbról (C_1), a lefelé elmozdulás határállapotában balról (C_2) érinti a csapsúrlódási kört. Ezen erők hajlásszöge a vízszintes tengelyhez:

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{r_0}{2 \cdot R} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{0,995}{2 \cdot 25} \right) = 1,14^\circ,$$

$$\varphi_1 = 60^\circ + \beta = 61,14^\circ, \quad \text{illetve}$$

$$\varphi_2 = 60^\circ - \beta = 58,86^\circ.$$

6.20 ábra



Egyensúlyi egyenletek:

a, Az m tömegű testre (felfelé elmozdulás határállapotában)

$$\begin{aligned} K_1 - \mu_1 \cdot N_1 - mg \cdot \sin \alpha &= 0, \\ mg \cdot \cos \alpha - N_1 &= 0. \end{aligned}$$

A két egyenlet egybevetéséből:

$$K_1 = mg \cdot (\sin \alpha + \mu_1 \cdot \cos \alpha) = 40 \cdot 10 \cdot (\sin 30^\circ + 0,3 \cdot \cos 30^\circ) = 303,9 \text{ N}.$$

Hasonlóan a lefelé elmozdulás határállapotára:

$$K_2 = mg \cdot (\sin \alpha - \mu_1 \cdot \cos \alpha) = 40 \cdot 10 \cdot (\sin 30^\circ - 0,3 \cdot \cos 30^\circ) = 96,08 \text{ N}.$$

b, Az R sugarú kerék egyensúlyi egyenletei:

Vízszintes vetületi egyenlet:

$$K_1 \cdot \cos \alpha - C_1 \cdot \cos \varphi_1 = 0.$$

Függőleges vetületi egyenlet:

$$K_1 \cdot \sin \alpha - C_1 \cdot \sin \varphi_1 + G_{\max} = 0.$$

A két egyenletből C_1 kiküszöbölésével $G_{\max}$ meghatározható

$$G_{\max} = K_1 \cdot (\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - \sin \alpha) = 303,9 \cdot (\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 61,14^\circ - \sin 30^\circ) = 325,6 \text{ N}.$$

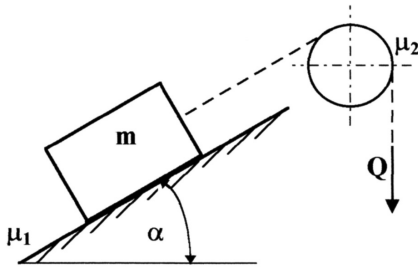
Hasonlóan határozható meg $G_{\min}$:

$$G_{\min} = K_2 \cdot (\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 - \sin \alpha) = 96,08 \cdot (\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 58,86^\circ - \sin 30^\circ) = 89,68 \text{ N}.$$

6.2-6 Feladat

A 6.21 ábrán egy a hajlásszögű érdes lejtőn lévő m tömegű ládát egy érdes hengeren átvett kötéllal húzunk fel, illetve süllyesztünk.

6.21 ábra



Adatok:

$$\alpha = 40^\circ,$$

$$m = 20 \text{ kg},$$

$$\mu_1 = 0,2,$$

$$\mu_2 = 0,25.$$

Feladat:

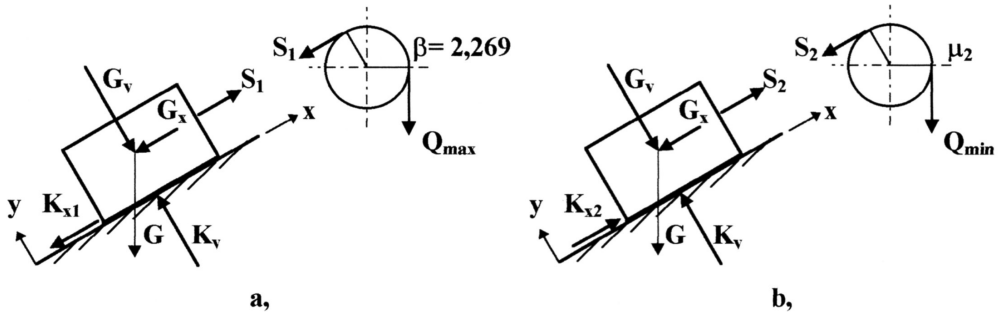
1. Határozzuk meg, hogy mekkora $Q_{\max}$ erővel tudjuk már éppen elmozdítani

a ládát felfelé, illetve mekkora $Q_{\min}$ erővel tudjuk még éppen nyugalomban tartani!

2. Határozzuk meg a kötélterőket!

Megoldás: A rendszer erőjátékát a 6.22 ábrán rajzoltuk meg, felfelé mozgítás határállapota a 6.22 a ábrán, a lefelé elcsúszás határállapota a b, ábrán látható.

6.22 ábra



a, Megoldás teheremelésre:

Az egyensúlyi egyenleteket részletes magyarázat nélkül az alábbiakban írtuk fel:

$$\sum F_{xi} = 0 = S_1 - G_x - K_{x1},$$

$$\sum F_{yi} = 0 = K_v - G_v,$$

$$K_{x1} = \mu_1 \cdot K_v, \text{ illetve } Q_{\max} = S_1 \cdot e^{\mu_2 \beta}.$$

Az egyenletrendszer rendezése után:

$$S_1 = G \cdot (\sin \alpha + \mu_1 \cdot \cos \alpha) = 200 \cdot (\sin 40^\circ + 0,2 \cdot \cos 40^\circ) = 159,2 \text{ N}.$$

$$Q_{\max} = S_1 \cdot e^{\mu_2 \beta} = 159,2 \cdot e^{0,25 \cdot 2,269} = 280,73 \text{ N}.$$

b, Megoldás tehersüllyesztésre

$$\sum F_{xi} = 0 = S_2 - G_x + K_{x2},$$

$$\sum F_{yi} = 0 = K_v - G_v,$$

$$K_{x2} = \mu_1 \cdot K_v, \text{ illetve } Q_{\min} = S_2 \cdot e^{-\mu_2 \beta}.$$

$$S_2 = G \cdot (\sin \alpha - \mu_1 \cdot \cos \alpha) = 200 \cdot (\sin 40^\circ - 0,2 \cdot \cos 40^\circ) = 97,92 \text{ N}.$$

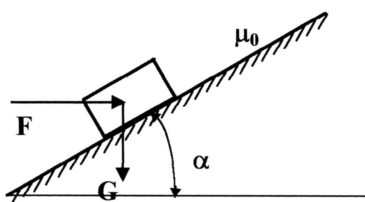
$$Q_{\min} = S_2 \cdot e^{-\mu_2 \beta} = 97,92 \cdot e^{-0,25 \cdot 2,269} = 55,53 \text{ N}.$$

C 6.2 GYAKORLÓ FELADATOK

6.1-7 Feladat

A 6.23 ábrán látható érdes lejtőn elhelyezkedő G súlyú kis kiterjedésű testet F vízszintes erő terheli.

6.23 ábra



Adatok:

$$G = 100 \text{ N},$$

$$F = 60 \text{ N},$$

$$\mu_0 = 0,24.$$

Feladat:

Határozza meg az a szög értékét, melynél még éppen nem indul el a tömeg

a, lefelé,

b, felfelé.

Eredmények:

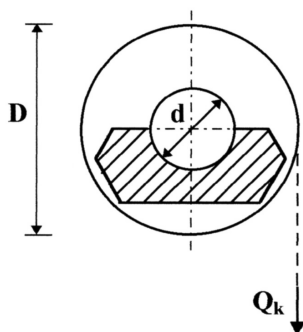
a, $\alpha = 44,46^\circ$,

b, $\alpha = 17,47^\circ$.

6.2-8 Feladat

A 6.24 ábrán egy D átmérőjű G súlyú kötéldobot d átmérőjű csappal csapágyazunk.

6.24 ábra



Adatok:

$$G = 150 \text{ N},$$

$$d = 5 \text{ cm},$$

$$D = 30 \text{ cm},$$

$$\mu_0 = 0,3.$$

Feladat: Határozza meg, hogy mekkora kötélrész lóghat le a dobról hogy üresjáratban a dob el ne forduljon!

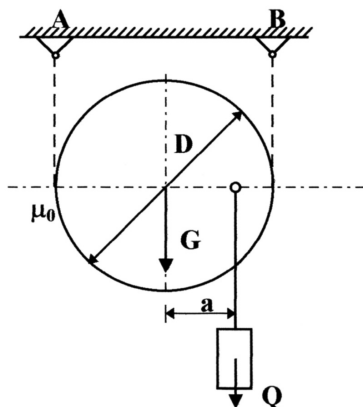
Eredmény:

$$Q_k = 7,89 \text{ N}.$$

6.2-9 Feladat

A 6.25 ábrán ábrázoltunk egy G súlyú és D átmérőjű korongot, melyet a vázolt módon az A és B pontban függesztünk fel.

6.25 ábra



Adatok:

$$G = 20 \text{ N},$$

$$a = 10 \text{ cm},$$

$$D = 30 \text{ cm},$$

$$\mu_0 = 0,15.$$

Feladat: Határozza meg $Q_{\max}$ értékét, mely mellett az egyensúly még lehetséges!

Eredmény:

$$Q_{\max} = 10,6 \text{ N}.$$

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

A vastagon szedett kérdések minimumkérdések

- 3.79 **Törtvonalú tartó fogalma.**
- 3.80 Milyen kényszerkapcsolat van a törtvonalú tartó két szomszédos rúdja között?
- 3.81 Hány szabadságfokot köt le az anyagfolytonos belső kapcsolat síkban és térben?
- 3.82 Rajzoljon síkbeli befogott törtvonalú tartót és végezze el statikai elemzését!
- 3.83 Rajzoljon térbeli befogott törtvonalú tartót és végezze el statikai elemzését!
- 3.84 Rajzoljon törtvonalú rúdalakú merev testekből álló statikailag határozott keretet és végezze el statikai elemzését!
- 3.85 Milyen igénybevételek lépnek fel egy térbeli törtvonalú alakú befogott rúdban?
- 3.86 Íves tartó fogalma.
- 3.87 Rajzoljon statikailag határozott íves tartót és végezze el statikai elemzését!
- 3.88 Egyszerű törtvonalú tartó támasztóerőrendszerének meghatározása.
- 3.89 Egyszerű törtvonalú tartó igénybevételi ábráinak megrajzolása.
- 3.90 Íves tartó igénybevételi függvényeinek meghatározása.
- 3.91 Íves tartó igénybevételi ábráinak meghatározása.
- 3.92 Rajzoljon egyszerű terhelésű befogott ívet és vázolja jelleghelyesen az igénybevételi ábráit!

- 4.1 **Rúdszerkezet fogalma és felépítése.**
- 4.2 **Belső erő fogalma.**
- 4.3 Milyen belső erők léphetnek fel a rúdszerkezet egyes rúdjai között?
- 4.4 **Belső kényszer fogalma és típusai.**
- 4.5 Milyen mozgást enged meg a belső csukló?
- 4.6 Milyen mozgást gátol meg az anyagfolytonos kapcsolat?
- 4.7 Rúdszerkezetek csoportosítása statikai és kinematikai elemzés alapján.
- 4.8 **Rúdszerkezet statikai határozottságának fogalma.**
- 4.9 Rúdszerkezet statikai túlhatározottságának fogalma.
- 4.10 A rúdszerkezet kinematikai határozottságának értelmezése.
- 4.11 A rúdszerkezet kinematikai határozatlanságának fogalma.
- 4.12 A statikai határozottság és merevség szükséges és elégséges feltétele.
- 4.13 **Vázoljon statikailag határozott rúdszerkezetet és végezze el statikai elemzését!**
- 4.14 Vázoljon statikailag egyszerűen határozatlan stabil rúdszerkezetre példákat!
- 4.15 Vázoljon vonórudas keretre példát!
- 4.16 Vázoljon emeletes keretre példát!
- 4.17 A rúdszerkezet statikai megoldásának általános módszere.
- 4.18 Mi a feltétele egy rúdszerkezet egyértelmű statikai megoldásának?
- 4.19 **Gerber-tartó fogalma, felépítése.**
- 4.20 **Vázoljon egy statikailag határozott Gerber-tartót és végezze el statikai elemzését!**
- 4.21 Gerber-tartó megoldásának bemutatása egyszerű példán.
- 4.22 Vázoljon egyszerű terhelésű Gerber-tartót és rajzolja meg az igénybevételi ábráit!
- 4.23 Mikor mondjuk, hogy egy Gerber-tartó csuklóelrendezése optimális?
- 4.24 Mondjon alkalmazási példákat Gerber-tartóra!
- 4.25 **Háromcsuklós tartó fogalma, felépítése.**
- 4.26 Ismertesse a háromcsuklós tartó megoldási módszerét egy egyszerű példán!
- 4.27 **Vázoljon háromcsuklós tartót és végezze el statikai elemzését!**

- 4.28 Milyen feladatra vezethető vissza a csuklón terhelt háromcsuklós tartó megoldása?**
- 4.29 Rudakon koncentrált erőkkel terhelt háromcsuklós tartó támasztó- és csuklóerőinek meghatározása egymásra halmozás (szuperpozíció) segítségével.
- 4.30 Egyszerű háromcsuklós keret támasztóerőinek és igénybevételi ábráinak meghatározása.
- 4.31 Mondjon alkalmazási példát háromcsuklós keretre!
- 4.32 Vázolja az egyik rúdján csak koncentrált külső aktív erővel terhelt háromcsuklós keret támasztóerőinek meghatározását szerkesztéssel!
- 4.33 Rácsos tartó fogalma, felépítése.**
- 4.34 Sorolja fel a rácsos tartóra tett statikai feltevéseket!
- 4.35 Rúderő fogalma és előjelszabálya.**
- 4.36 Sorolja fel a rácsos tartó típusokat a rácsolás alakja szerint!
- 4.37 Sorolja fel a rácsos tartó típusokat a tartó kontúrja szerint!
- 4.38 Mondjon alkalmazási példákat rácsos tartókra!
- 4.39 Vázzon egy egyszerű rácsos tartót és végezze el statikai elemzését!**
- 4.40 Mi a szükséges és elégséges feltétele a rácsos tartó statikai határozottságának?
- 4.41 Vázzon egy statikailag egyszeresen határozatlan rácsos tartót!
- 4.42 A valóságban milyen módon kapcsolódnak egymáshoz a rácsos tartó rúdjai?
- 4.43 Mit értünk egy rácsos tartó belső statikai határozatlanságán?
- 4.44 Mit értünk egy rácsos tartó külső statikai határozatlanságán?
- 4.45 Milyen igénybevétel keletkezik egy idealizált rácsos tartóban?**
- 4.46 A vakrúd fogalma.**
- 4.47 A rácsos tartó melyik csuklóját nevezzük többszörös csuklónak?
- 4.48 Csomóponti módszer alkalmazhatóságának feltétele.**
- 4.49 Átmetsző módszer alkalmazhatóságának feltétele.**
- 4.50 Az átmetsző módszer alkalmazása során milyen szerkesztő eljárást lehet alkalmazni?
- 4.51 Az átmetsző módszer alkalmazása során milyen statikai egyenleteket lehet alkalmazni?
- 4.52 Jellemezze a rácsos tartó rúderő meghatározásának módszereit!
- 4.53 A csomóponti módszer ismertetése egy egyszerű példán.**
- 4.54 Az átmetsző módszer ismertetése egy egyszerű példán.**
- 4.55 Rajzoljon olyan rácsos tartót terhelésekkel együtt amelyben van vakrúd!
- 4.56 Egyszerű térbeli rúdszerkezet egyensúlyi egyenletei.
- 4.57 A hatásfüggvény és hatására fogalma.
- 4.58 Értelmezze egy hatására valamely metszetét!
- 4.59 Kéttámaszú tartó reakcióerő hatására.
- 4.60 Kéttámaszú tartó nyíróerő hatására.
- 4.61 Kéttámaszú tartó nyomatéki hatására.
- 5.1 Labilis teherhordó szerkezet fogalma.**
- 5.2 Labilis teherhordó szerkezet típusai, jellemzésük.
- 5.3 Milyen területeken alkalmazhatók labilis teherhordó szerkezetek?
- 5.4 A rúdlánc fogalma, felépítése.**
- 5.5 A rúdlánc statikai túlhatározottságának, szabadságfokának fogalma és meghatározása.
- 5.6 Feszítőmű fogalma. Vázzon egy egyszerű feszítőművet!
- 5.7 Függesztőmű fogalma. Vázzon egy egyszerű függesztőművet!
- 5.8 Ismertesse a rúdlánccok megoldási módszereit!
- 5.9 Melyek a statikailag lényeges különbségek a feszítőmű és függesztőmű között?

- 5.10 Mi jellemzi a csuklókon terhelt egyensúlyi rúdlánc alakját?**
5.11 Mi jellemzi a rudakon terhelt egyensúlyi rúdlánc alakját?
 5.12 Szerkesszen egy adott erőrendszer viselésére alkalmas feszítőműves rúdláncot!
 5.13 Szerkesszen egy adott erőrendszer viselésére alkalmas függesztőműves rúdláncot!
 5.14 Egyszerű példán mutassa be a csuklókon terhelt rúdlánc rúderőinek és támasztóerő-rendszerének meghatározását!
 5.15 Egyszerű példán mutassa be a rudakon terhelt rúdlánc rúderőinek és támasztóerő-rendszerének meghatározását!
- 5.16 A kötél fogalma, jellemzése.**
5.17 Milyen igénybevétel felvételére alkalmas a kötél?
5.18 Milyen alakot vesz fel a koncentrált erővel terhelt kötél?
 5.19 Milyen alakot vesz fel az állandó megoszló erővel terhelt kötél?
 5.20 A két végén felfüggesztett állandó megoszló erővel terhelt kötélben hol lép fel a maximális kötelerő és mekkora a nagysága?
 5.21 Az állandó megoszló erővel terhelt kötél egyensúlyi differenciálegyenlete és megoldása.
 5.22 A kötelerő és a kötél belógásának kapcsolata.
- 6.1 Az ideális és valóságos kényszerek összehasonlítása.
 6.2 Jellemezze a fellépő kényszereket a sima és érdes felületi megtámasztásnál!
- 6.3 Soroljon fel példákat, hogy a műszaki gyakorlatban hol van jelentősége a súrlódásnak!**
6.4 Ismertesse az érdes felületi megtámasztásnál fellépő kényszererő normál- és súrlódó összetevője közötti törvényszerűséget! (Coulomb-törvény)
6.5 A súrlódási kúp fogalma.
6.6 A súrlódási tényező meghatározásának egy lehetséges módszere.
 6.7 Az érdes vízszintes síkon fekvő és aktív erőrendszerrel terhelt anyagi pont egyensúlyi feltételei, a kényszererő meghatározása.
 6.8 Az érdes lejtőn fekvő és aktív erőrendszerrel terhelt anyagi pont egyensúlyi feltételei, a kényszererő meghatározása.
 6.9 Két érdes felülettel megtámasztott rúd egyensúlyi feltételei, kényszererők meghatározása.
 6.10 A Q teher emeléséhez az emelőorsóra kifejtendő meghúzónyomaték.
 6.11 A Q teher süllyesztéséhez az emelőorsóra kifejtendő lazítónyomaték.
 6.12 Csavar és ék önzáróságának fogalma.
 6.13 Az R sugarú érdes csappal átvihető csapsúrlódási nyomaték meghatározása.
 6.14 A fellépő erők jellemzése az íves érdes felületen átvett és terhelt kötél esetén.
 6.15 Az íves érdes felületen átvett kötél kötélvégein működő erők közötti összefüggés.
 6.16 Vázoljon szalagféket és jellemezze a fellépő erőhatásokat!

IRODALOM

- [1] Szőnyiné Passa Erzsébet–Koppány Imre (1988): *Mechanika-Tartószerkezetek I/A. Tartók mechanikája*. Budapest: Tankönyvkiadó.
- [2] Roller Béla–Árvay Kálmán (1975): *Építési mechanika I. kötet*. (egyetemi jegyzet, BME) Budapest: Tankönyvkiadó.
- [3] Magyar Béla (1993): *Mechanika I. Statika*. (főiskolai jegyzet, SZIMF) Budapest: Tankönyvkiadó.
- [4] Szűcs Miklós (1991): *Kidolgozott példák statikából*. (egyetemi jegyzet) Budapest: Tankönyvkiadó.
- [5] Vigh Sándor (Szerk.) (1995): *Műszaki mechanika I. Példatár I*. ME DFK. Dunaújváros: ME DFK.
- [6] Kulcsár Béláné–Nagy Árpádné–Szabó Béláné (1990): *Műszaki mechanika Példatár I. Statika*. Kecskemét: GAME.