

Vigh Sándor–Koppány Imre–Szlávik Béláné
–Szőnyiné Passa Erzsébet–Pál Péter

MŰSZAKI MECHANIKA II. PÉLDATÁR II/A

A SZILÁRDSÁGTAN ALAPJAI

Feszültségi és alakváltozási állapot

Feszültségi állapot

Alakváltozási állapot

Hooke-törvény

Alakváltozási munka

Rugalmas állapotú prizmatikus rudak igénybevételei

Egytengelyű feszültségi állapotot okozó egyszerű
igénybevételek

Többtengelyű feszültségi állapotot okozó egyszerű
igénybevételek

Egytengelyű feszültségi állapotot okozó összetett
igénybevételek

Többtengelyű feszültségi állapotot okozó összetett
igénybevételek



Dunakavics
D·U·E PRESS

M
Ű
S
Z
A
K
I

K
Ö
N
Y
V
E
K

6.

Vigh Sándor–Koppány Imre–Szlávik Béláné–Szőnyiné Passa Erzsébet–Pál Péter

MŰSZAKI MECHANIKA II.

PÉLDATÁR II/A

© Vigh Sándor–Koppány Imre–Szlávik Béláné–Szőnyiné Passa Erzsébet–Pál Péter 2017

Lektorálta: Dr. Kegyes Csaba főiskolai tanár

DUNAÚJVÁROSI EGYETEM

www.uniduna.hu

D=U=E PRESS

Kiadóvezető Németh István

Felelős kiadó Dr. habil András István

Felelős szerkesztő Nemeskéry Artúr

Tördelés Duma Attila

Készült a HTSART nyomdában

Felelős vezető Halász Iván

ISBN 978-963-9915-86-2

Vigh Sándor–Koppány Imre–Szlávik Béláné
–Szönyiné Passa Erzsébet–Pál Péter

MŰSZAKI MECHANIKA II. PÉLDATÁR II/A

A SZILÁRDSÁGTAN ALAPJAI

Feszültségi és alakváltozási állapot

Feszültségi állapot

Alakváltozási állapot

Hooke-törvény

Alakváltozási munka

Rugalmas állapotú prizmatikus rudak igénybevételei

Egytengelyű feszültségi állapotot okozó egyszerű
igénybevételek

Többtengelyű feszültségi állapotot okozó egyszerű
igénybevételek

Egytengelyű feszültségi állapotot okozó összetett
igénybevételek

Többtengelyű feszültségi állapotot okozó összetett
igénybevételek



Dunakavics
DUE PRESS

Dunaújváros, 2017

TARTALOM

Előszó	7
3. Feszültségi és alakváltozási állapot.....	9
3.1 Feszültségi állapot.....	9
A.3.1 Elméleti összefoglaló.....	9
B.3.1 Kidolgozott feladatok (3.1-1 ... 3.1-8).....	11
C.3.1 Gyakorló feladatok (3.1-9 ... 3.1-17).....	24
3.2 Alakváltozási állapot	28
A.3.2 Elméleti összefoglaló.....	28
B.3.2 Kidolgozott feladatok (3.2-1 ... 3.2.-2).....	29
C.3.2 Gyakorló feladatok (3.2-3 ... 3.1-5).....	33
3.3 Hooke-törvény.....	35
A.3.3 Elméleti összefoglaló.....	35
B.3.3 Kidolgozott feladatok (3.3-1 ... 3.3-6).....	36
C.3.3 Gyakorló feladatok (3.3-7 ... 3.3-14).....	47
3.4 Alakváltozási munka	50
A.3.4 Elméleti összefoglaló.....	50
B.3.4 Kidolgozott feladatok (3.4-1 ... 3.4-2)	50
C.3.4 Gyakorló feladatok (3.4-3 ... 3.4-6).....	52
4. Rugalmas állapotú prizmatikus rudak igénybevételei.....	53
4.1 Egytengelyű feszültségi állapotot okozó egyszerű igénybevételek.....	53
4.1.1 Központos húzás-nyomás.....	53
A.4.1.1 Elméleti összefoglaló.....	53
B.4.1.1 Kidolgozott feladatok (4.1.1-1 ... 4.1.1-12).....	55
C.4.1.1 Gyakorló feladatok (4.1.1-12 ... 4.1.1-22).....	70
4.1.2 Egyenes hajlítás.....	75
A.4.1.2 Elméleti összefoglaló.....	75
B.4.1.2 Kidolgozott feladatok (4.1.2-1 ... 4.1.2-6).....	76
C.4.1.7 Gyakorló feladatok (4.1.2-7 ... 4.1.2-24).....	87
4.2 Többtengelyű feszültségi állapotot okozó egyszerű igénybevételek.....	95
4.2.1 Tiszta nyírás	95
A.4.2.1 Elméleti összefoglaló.....	95
B.4.2.1 Kidolgozott feladatok (4.2.1-1 ... 4.2.1-6).....	96
C.4.2.1 Gyakorló feladatok (4.2.1-7 ... 4.2.1-12).....	102
4.2.2 Tiszta csavarás.....	105
A.4.2.2 Elméleti összefoglaló.....	105
B.4.2.2 Kidolgozott feladatok (4.2.2-1 ... 4.2.2-7).....	106
C.4.2.2 Gyakorló feladatok (4.2.2-8 ... 4.2.2-14).....	117
4.3 Egytengelyű feszültségi állapotot okozó összetett igénybevételek.....	120
4.3.1 Ferde hajlítás.....	120
A.4.3.1 Elméleti összefoglaló.....	120
B.4.3.1 Kidolgozott feladatok (4.3.1-1 ... 4.3.1-6).....	121
C.4.3.1 Gyakorló feladatok (4.3.1-7 ... 4.3.1-14).....	133

4.3.2 Külpontos húzás-nyomás	136
A.4.3.2 Elméleti összefoglaló.....	136
B.4.3.2 Kidolgozott feladatok (4.3.2-1 ... 4.3.2-7).....	138
C.4.3.2 Gyakorló feladatok (4.3.2-8 ... 4.3.2-19).....	150
4.4 Többtengelyű feszültségi állapotot okozó összetett igénybevételek	155
4.4.1 Hajlítással egyidejű nyírás.....	155
A.4.4.1 Elméleti összefoglaló.....	155
B.4.4.1 Kidolgozott feladatok (4.4.1-1 ... 4.4.1-10).....	156
C.4.4.1 Gyakorló feladatok (4.4.1-7 ... 4.4.1-18).....	169
4.4.2 Normálerővel egyidejű csavarás.....	173
A.4.4.2 Elméleti összefoglaló.....	173
B.4.4.2 Kidolgozott feladatok (4.4.2-1 ... 4.4.2-2).....	173
C.4.4.2 Gyakorló feladatok (4.4.2-3).....	176
4.4.3 Hajlítással egyidejű csavarás.....	177
A.4.4.3 Elméleti összefoglaló	177
B.4.4.3 Kidolgozott feladatok (4.4.3-1 ... 4.4.3-3).....	177
C.4.4.3 Gyakorló feladatok (4.4.3-4 ... 4.4.3-5).....	183

ELŐSZÓ

A *Műszaki mechanika II. Példatár II/A* a szilárdságtan alapjainak tanulmányozásához nyújt elméleti összefoglalót, kidolgozott és gyakorló példákat.

A példatársorozat külön kötetben megjelenő 1. része a szilárdságtani táblázatokat tartalmazza az alábbi pontokban:

- anyagminőségek és méretezési feszültségek,
- keresztmetszeti táblázatok,
- szilárdságtani segéd táblázatok.

A II/A rész témakörei:

- feszültségi és alakváltozási állapot,
- Hooke-törvény,
- alakváltozási munka,
- egyszerű igénybevételek okozta feszültségek, méretezés és ellenőrzés egyszerű igénybevételekre,
- összetett igénybevételek okozta feszültségek, méretezés és ellenőrzés összetett igénybevételekre.

A példatár felépítése:

- A, Elméleti összefoglaló
- B, Kidolgozott feladatok
- C, Gyakorló feladatok

A példatársorozat további II/B része az alkalmazott szilárdságtan elméleti összefoglalása, valamint kidolgozott és gyakorló feladatainak gyűjteménye.

A feszültségi és alakváltozási állapot átlátásához és a szerkezeti elemek szilárdsági ellenőrzésének, méretezésének begyakorlásához az elméleti tananyag tanulmányozása után át kell tekinteni a kidolgozott feladatok megoldási módszerét, majd önállóan megoldani a gyakorló feladatokat. A gyakorló feladatok eredményeit közöltük, de ezek csak az önálló megoldás utáni ellenőrzésre szolgálnak.

Ezúton mondunk köszönetet Vigh Gellértnek a szövegszerkesztésért és az ábrák szerkesztéséért, Bod Gyöngyinek a gépelési munkáért és Vigh L. Gergelynek a műszaki szerkesztésért.

Külön köszönet illeti Kegyes Csaba főiskolai tanárt a gondos lektorálásért.

Kívánjuk, hogy a példatár használatával a szilárdságtani alapok elméleti tananyagát mind alaposabban sikerüljön elsajátítani és a jó példamegoldó készséget kialakítani.

A Szerzők

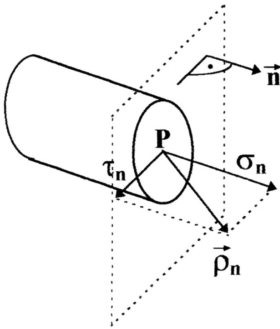
3. FESZÜLTSEGI ÉS ALAKVÁLTOZÁSI ÁLLAPOT

3.1 Feszültségi állapot

A. 3.1 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

A *feszültség* az egységnyi felületre eső megoszló belső erő (másképpen: a belső erő felületi intenzitása).

3.1.1 ábra



Vektormennyiség (3.1.1 ábrán $\vec{P}_n$), amely egy P ponthoz és egy $\vec{n}$ normálisú síkhoz tartozik.

Összetevői a síkra merőleges σ_n normálfeszültség és a síkkal párhuzamos τ_n csúsztató feszültség.

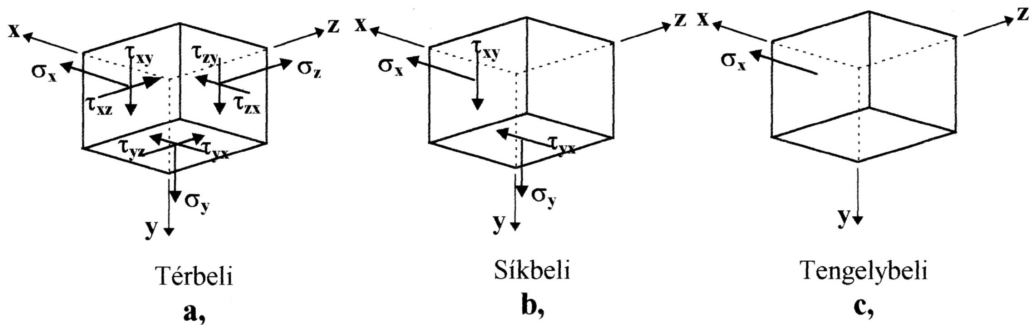
Mértékegységek és összefüggéseik:

$$1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MPa} = 0,1 \text{ kN/cm}^2.$$

A *feszültségi állapot* fogalmán egy P ponton áthaladó összes $\vec{n}_i$ normálisú síkon fellépő $\vec{P}_{ni}$ feszültségvektorok halmazát értjük. Ez a test egy pontjához tartozó fogalom.

Szemléltetése és csoportosítása: xyz „természetes koordináta-rendszerben” (3. 1.2 ábra).

3. 1.2 ábra



A *főfeszültségi síkok*ra az jellemző, hogy a rajtuk ébredő feszültségvektornak nincs τ összetevője, csak σ .

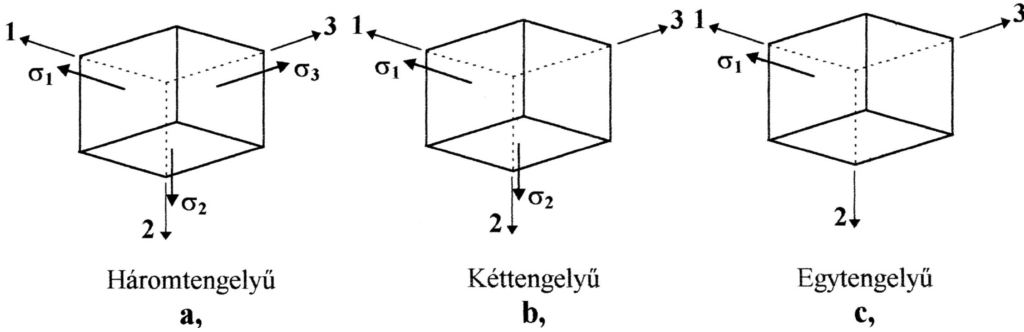
Utóbbiak a *főfeszültségek*, a síkra merőleges tengelyek a *feszültségi főtengelyek*.

A test bármely P pontjában található legalább 3, egymásra merőleges feszültségi sík és pontosan 3 főfeszültség. Ezek jele csökkenő sorrendben $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

A σ_1 a pontbeli összes feszültségek közül a *legnagyobb*.

A feszültségi állapotok szemléltetése és csoportosítása az **123** főtengelyek koordinátarendszerében: (3.1.3 ábra).

3.1.3 ábra



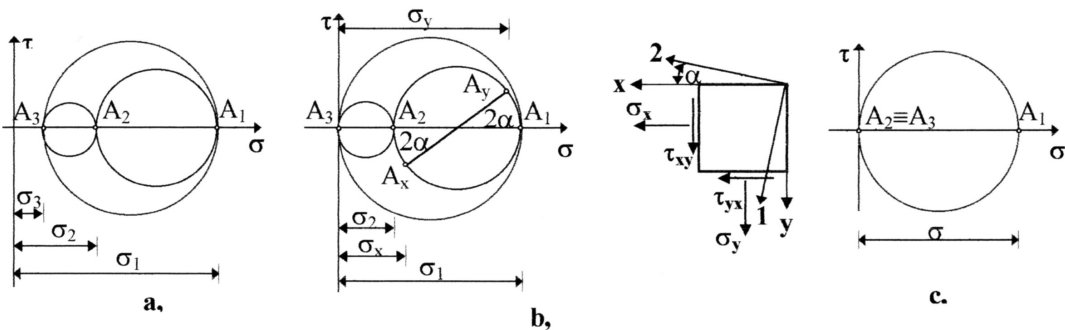
A *feszültségi Mohr-diagram* megrajzolható, ha egy főfeszültség ismert.

- Célja:
- a főfeszültségek meghatározása,
 - a feszültségi főirány(ok) leolvasása
 - egy fősíkra merőleges tetszőleges $\vec{n}$ normálisú síkon fellépő $\vec{\rho}_n$ meghatározása.

Az A_y és A_x pontok kijelölésekor követendő *előjelszabály*:

a τ összetevő pozitívan mérendő föl a $\sigma - \tau$ diagramon, ha az illető sík normálisát az óramutató járásával azonosan 90° -kal elforgatva kapott irányval a τ azonos irányú. Így jelen esetben τ_{yx} pozitívan került fölmérésre a diagramon.

3.1.4 ábra



A *főfeszültségek és a főirányszög számítása* a 3.1.4 b, ábra esetére:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.2)$$

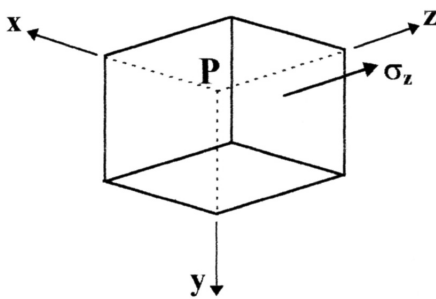
B. 3.1 KIDOLGOZOTT FELADATOK

3.1-1 Feladat

A terhelt test valamely **P** pontjának környezetéből kiemelt egységnyi élhosszúságú kiskocka lapjain a 3.1.5 ábrán vázolt feszültség ébred.

Adatok: $\sigma_z = 180 \text{ N/m}$

3.1.5 ábra



Feladat: 1. Állapítsuk meg, hogy a feszültségi állapotok mely csoportjába tartozik az adott eset!
 2. Rajzoljuk fel a feszültségi állapot Mohr-diagramját!
 3. Olvassuk le a Mohr-körrel a koordináta-rendszer **x** tengely körüli α_1 szöggel való elforgatásával nyert **y**, **z**, **z** tengelyekhez, mint normál irányokhoz tartozó síkokon ébredő feszültségeket!
 ($\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 60^\circ$.)
 4. Ábrázoljuk a σ_i és τ_i összetevők változását σ - α , τ - α Descartes-féle és polárkoordinátarendszerben!

Megoldás:

1. A 3.1.5 ábrán látható elemi hasáb lapjain feszültség nem ébred, így ezek főfeszültségi síkok.

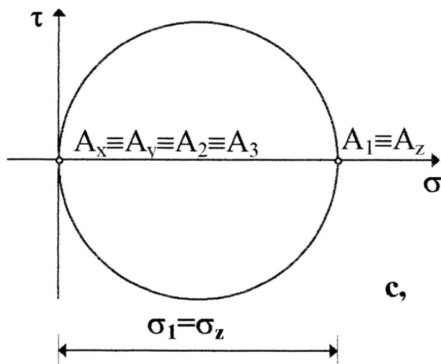
A rajtuk ébredő feszültségek a főfeszültségek, mégpedig – mivel $\sigma_z > 0$ –

$\sigma_1 = \sigma_z = 180 \text{ N/mm}^2$ a legnagyobb főfeszültség és $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_x = \sigma_y = 0$.

Mivel a főfeszültségek közül csak egy különbözik zérustól, egytengelyű feszültségi állapot esetéről van szó.

Megjegyzés: ilyen feszültségi állapot jellemzi a tiszta húzásnak, ill. tiszta hajlításnak alávetett rudak pontjait.

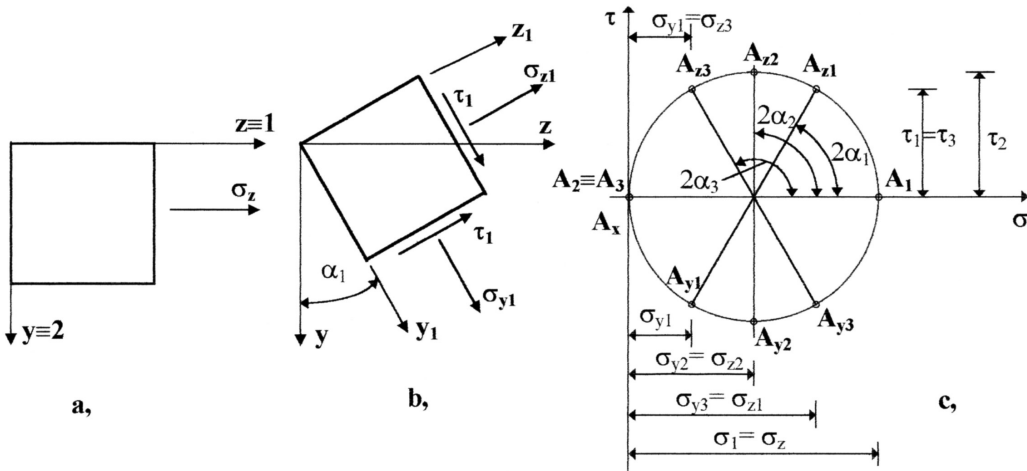
3.1.6 ábra



2. A feszültségi állapot Mohr-féle kördiagramja a 3.1.6 ábrán látható. Az adott esetben egy kör ponttá zsugorodott az origóban. Ez azt jelenti, hogy az **xy** síkban lévő bármely tengely egyben főtengely is, és az ezekre merőleges síkokon nem lép föl feszültség. (Ezeket a síkokat a kiskocka **z** tengely körüli forgatásával nyerhetjük.)

3. Nézzünk rá a kis kockára az **x** (fő)tengellyel szemben, majd forgassuk el azt az **x** körül α_1 szöggel az óramutató járásával ellentétesen (3.1.7 ábra)!

3.1.7 ábra



Az így kapott, z normálisú lapokon σ és τ feszültségek is föllépnek. Ezek értéke a Mohr-kör A_1 és A_2 pontjaiból $2\alpha_1$ szöggel elforgatva kapott A_{z1} , A_{y1} pontok koordinátáiként olvasható le:

$$\sigma_{z1} = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\alpha_1 = 90 + 90 \cdot \cos 60^\circ = 135 \text{ N/mm}^2,$$

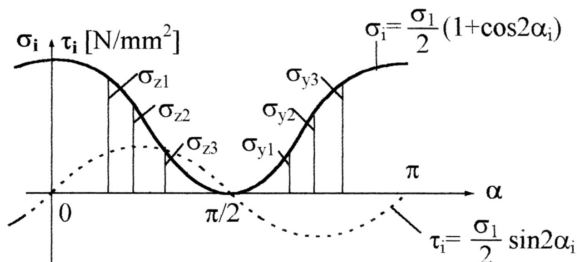
$$\sigma_{y1} = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\alpha_1 = 90 - 90 \cdot \cos 60^\circ = 45 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{y1z1} = \tau_{z1y1} = \tau_1 = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha_1 = 90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 77,94 \text{ N/mm}^2.$$

Hasonlóan kaphatók az α_2 , ill α_3 szögű elfordulásokhoz tartozó feszültségösszetevők, amelyek eredményei:

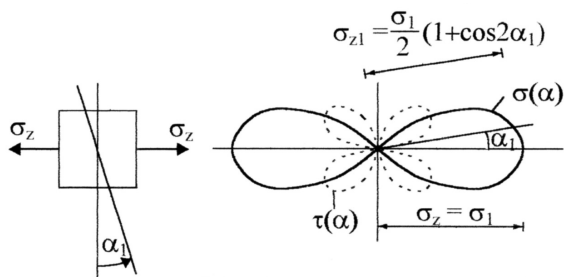
$$\begin{aligned} \sigma_{z2} = \sigma_{y2} = \tau_{y2z2} = \tau_{z2y2} = \tau_2 = 90 \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{z3} = 45 \text{ N/mm}^2, \sigma_{y3} = 135 \text{ N/mm}^2, \tau_3 = 77,94 \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

3.1.8 ábra



4. A 3.1.8 ábrán vázoltuk a 3. pontban leírt összefüggés szerinti feszültségeket, mint az α szög függvényeit. Folytonos vonal a σ normál feszültség, szaggatott vonal a τ csúsztató feszültség függvényének ábrázolására szolgált.

3.1.9 ábra



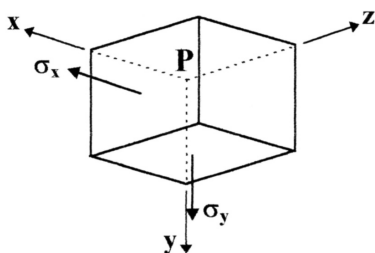
A 3.1.9 ábra ugyanezt polár koordináta-rendszerben ábrázolja. Ez pl. a $\sigma(\alpha)$ görbén igen szemléletesen mutatja, hogy egy adott α_1 irányban (a rá merőleges lappon) mekkora σ feszültség ébred. Ennek felmérése itt ezen irányban történt.

A diagramot – alakjára utalva – „lóhere diagramként” is szokták emlegetni. Látható, hogy a szaggatottan rajzolt $\tau(\alpha)$ diagram „négylevelű lóhere”.

3.1-2 Feladat

A terhelt test valamely P pontjának környezetéből kiemelt egységnyi élhosszúságú kiskocka lapjain a 3.1.10 ábrán vázolt feszültségek ébrednek.

3.1.10 ábra



Adatok: $\sigma_x = 160 \text{ N/mm}^2$,
 $\sigma_y = 60 \text{ N/mm}^2$.

Feladat:

1. Állapítsuk meg, hogy a feszültségi állapotok mely csoportjába tartozik az adott eset!
2. Rajzoljuk fel a feszültségi állapot Mohr-diagramját!
3. Olvassuk le a Mohr-diagramról a koordináta-rendszer z tengely körüli α_1 szöggel való elforgatásával nyert x_i , y_i tengelyekhez, mint normális irányokhoz tartozó síkokon ébredő feszültségeket!

$$(\alpha_1 = 30^\circ, \alpha_2 = 45^\circ)$$

Megoldás:

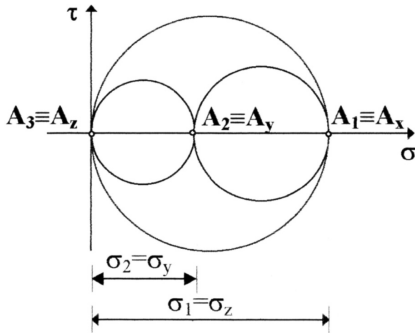
1. A 3.1.10 ábrán vázolt síkok főfeszültségi síkok.

A feszültségek: $\sigma_1 = \sigma_x = 160 \text{ N/mm}^2$,
 $\sigma_2 = \sigma_y = 60 \text{ N/mm}^2$,
 $\sigma_3 = \sigma_z = 0$.

A főtengetyek: $1 \equiv x$, $2 \equiv y$, $3 \equiv z$.

Mivel a főfeszültségek közül kettő különbözik zérustól, kéttengelyű feszültségi állapot esetéről van szó.

3.1.11 ábra

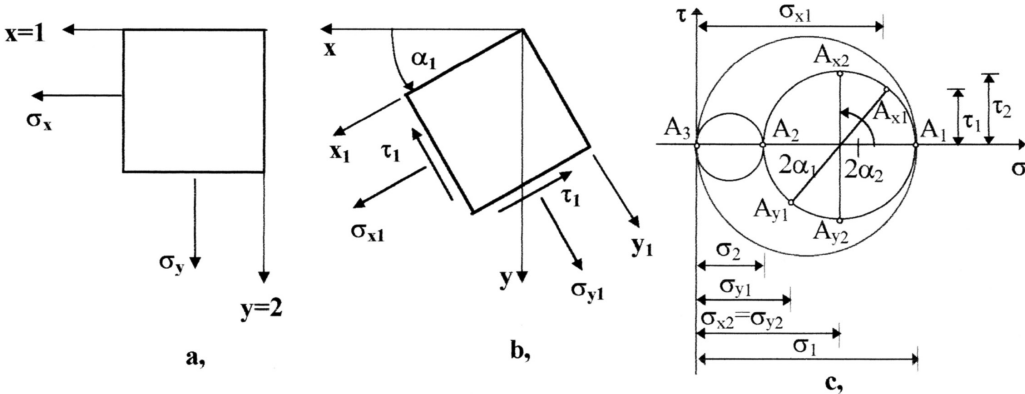


Megjegyzés: ilyen feszültségi állapot jellemzi például egy belső nyomással terhelt vékonyfalú cső, vagy hengeres tartály – csatlakozásokkal meg nem zavart – palástjának pontjait.

2. A feszültségi állapot Mohr-diagramja a 3.1.11 ábrán látható.

3. Nézzünk rá a kis kockára a z (fő)tengellyel szemben, majd forgassuk el azt a z tengely körül α_1 szöggel az óramutató járásával elmentésen (3.1.12 ábra)!

3.1.12 ábra



Az elforgatással kapott pontok koordinátáiként adódnak a keresett feszültségösszetevők:

$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha_1 = \frac{160 + 60}{2} + \frac{160 - 60}{2} \cdot \cos 60^\circ = 110 + 50 \cdot \frac{1}{2} = 135 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{y1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha_1 = 110 - 25 = 85 \text{ N/mm}^2 ,$$

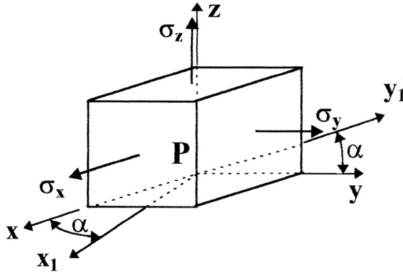
$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha_1 = 50 \cdot \sin 60^\circ = 43,3 \text{ N/mm}^2 .$$

Hasonlóan kapható α_2 -re, hogy $\sigma_{x2} = \sigma_{y2} = 110 \text{ N/mm}^2$, $\tau_2 = 50 \text{ N/mm}^2$.

3.1-3 Feladat

A rugalmas test valamely **P** pontjában a feszültségi állapot az **xyz** koordinátarendszerben ismert. (3.1.13 ábra):

3.1.13 ábra



Adatok:

$$\sigma_x = 20 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_y = 12 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_z = 2 \text{ kN/cm}^2,$$

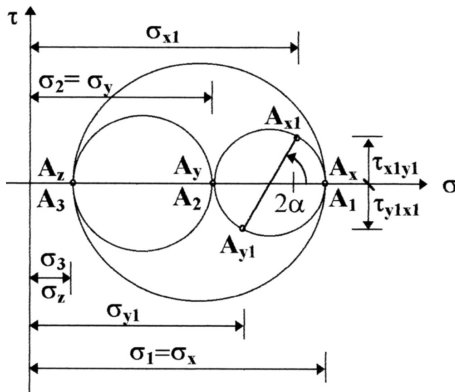
$$\alpha = 30^\circ$$

- Feladat:**
1. Rajzoljuk meg a **P** pontbeli feszültségi állapot Mohr-diagramját!
 2. Olvassuk le a Mohr-diagramról a főfeszültségeket ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) és határozzuk meg a főirányokat (1, 2, 3) !
 3. Határozzuk meg a Mohr-diagram segítségével a koordinátarendszernek az ábrán látható – **z** tengely körüli – elforgatásával kapott x_1, y_1 tengelyekhez, mint normális irányokhoz tartozó feszültségvektorok összetevőit ($\sigma_{x1}, \tau_{x1y1}, \sigma_{y1}, \tau_{y1x1}$)!

Megoldás:

1. A **P** pontbeli feszültségi állapot Mohr-diagramja a 3.1.14 ábrán látható.

3.1.14 ábra



2. Mivel az **x, y** és **z** irányoknak megfelelő pontok a σ tengelyre esnek, ezen irányok a feszültségi állapot főirányai, mégpedig **x** az 1-es, **y** a 2-es és **z** a 3-as főirány. Ezen irányokhoz tartozó feszültségek a főfeszültségek. Vagyis

$$\sigma_1 = \sigma_x = 20 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = 12 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = 2 \text{ kN/cm}^2.$$

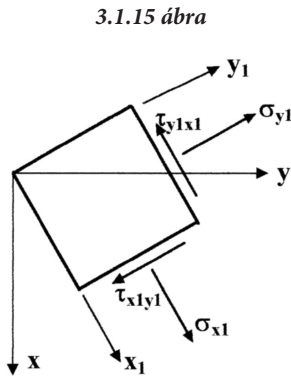
3. A koordinátarendszer **z** tengely körüli megadott irányú $\alpha = 30^\circ$ -os elforgatásával adódó x_1 és y_1 irányokhoz tartozó feszültségösszetevők meghatározása.

Mivel x_1 és y_1 irányok az 1, 2 főirányok által alkotott síkba (főfeszültségi-) esnek, az A_{x1}, A_{y1} az A_1, A_2 pontokon átmenő főkörön találhatók.

A kiskockán (3.1.13 ábra) **x**-ből x_1 -be, illetve **y**-ből y_1 -be óramutató járásával ellenkező irányba (3-ból szembenézve) $\alpha = 30^\circ$ -os szöggel jutunk, a főkörön (3.1.14 ábra) $A_x \equiv A_1$ -től A_{x1} -et, illetve $A_y \equiv A_2$ -től A_{y1} -et ugyanarra $2\alpha = 60^\circ$ -os középponti szöggel találjuk.

Ezen A_{x1} és A_{y1} pontok vízszintes és függőleges koordinátái adják a keresett feszültségösszetevőket. A σ_{x1} és σ_{y1} összetevők pozitív előjelűek.

A τ feszültségek előjele negatív, mivel a főkörön A_{x_1} pont a σ tengely fölött van, a $\tau_{x_1y_1}$ -et az x_1 irány órajárással egyező beforgatásával találjuk (3.1.15 ábra), ez pedig a x_1 normálisú síkon a $-y_1$ irányban egyezik meg. A Mohr-diagram alapján a feszültségösszetevők:



$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad ,$$

$$\sigma_{x1} = \frac{20 + 12}{2} + \frac{20 - 12}{2} \cdot 0,5 \quad ,$$

$$\sigma_{x1} = 18 \text{ kN / cm}^2 \quad ,$$

$$\sigma_{y1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad ,$$

$$\sigma_{y1} = \frac{20 + 12}{2} - \frac{20 - 12}{2} \cdot 0,5 \quad ,$$

$$\sigma_{y1} = 14 \text{ kN / cm}^2 \quad ,$$

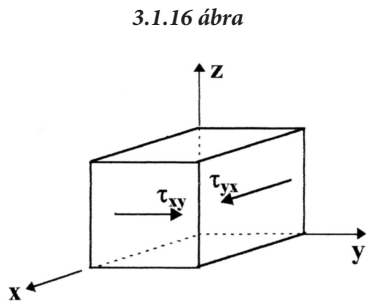
$$|\tau_{x1y1}| = |\tau_{y1x1}| = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{20 - 12}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A 3.1.15 ábra szerint előjelhelyesen a csúsztatófeszültségek:

$$\tau_{x1y1} = \tau_{y1x1} = -2\sqrt{3} \text{ kN / cm}^2 = -3,464 \text{ kN / cm}^2 \quad .$$

3.1-4 Feladat

A rugalmas test valamely P pontjában a feszültségi állapotot az xyz koordináta-rendszerben egy τ feszültségpár határozza meg (3.1.16 ábra).



Adatok: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 6 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat:

1. Ábrázoljuk a pontbeli feszültségi állapotot kiskockán és Mohr-diagramon!
2. Olvassuk le a főfeszültségeket (σ_1 , σ_2 , σ_3)!
3. Határozzuk meg a feszültségi állapot fő-tengelyeit (1, 2, 3)!

Megoldás:

1. A feszültségi állapot ábrázolása. A kiskocka minden irányának a Mohr-diagram egy pontja felel meg (3.1.16 ábrán pl. $x \rightarrow A_x$).
2. A főfeszültségek a Mohr-diagramról (3.1.17 ábra)

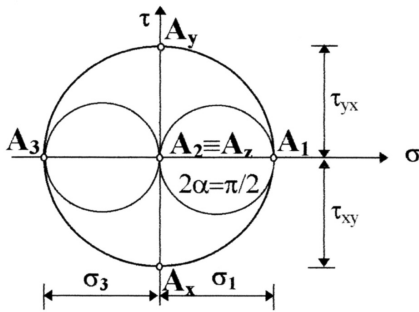
$$\sigma_1 = \tau_{xy} = 6 \text{ kN/cm}^2 \quad ,$$

$$\sigma_2 = 0 \quad ,$$

$$|\sigma_3| = |\tau_{yx}| \quad , \text{ de negatív előjelű, vagyis}$$

$$\sigma_3 = -6 \text{ kN/cm}^2 \quad .$$

3.1.17 ábra

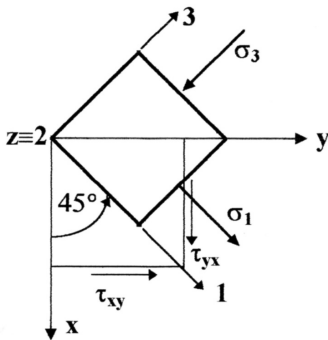


3. A feszültségi állapot főtengeleinek meghatározása.

A 3.1.17 ábrán látható, hogy a feszültségi állapot 2-es főtengele a z tengely ($\mathbf{A}_z \equiv \mathbf{A}_2$). A másik két főtengele az xy főfeszültségi síkban található. Nézzük az 1-es főtengele x tengellyel bezárt szögét!

A feszültségi állapotot szemléltető Mohr-diagram (3.1.17 ábra) legnagyobb főkörén $\mathbf{A}_x$ -ből $\mathbf{A}_1$ -be az óramutató járásával ellenkező irányban $2\alpha = 90^\circ$ -os középponti szöggel jutunk. Ez azt jelenti, hogy ha $\mathbf{z} \equiv \mathbf{2}$ főiránnyal szembenézünk (3.1.18 ábra) x irányból ugyancsak órajárással ellenkező irányban $\alpha = 45^\circ$ -os szöggel találjuk az 1-es főtengelet. A 3-as főtengele pedig erre merőleges.

3.1.18 ábra



Megjegyzés: Ilyen feszültségi állapot keletkezik tiszta nyírásakor, valamint például a kör keresztmetszetű csavart rudak nem a csavarás tengelyébe eső pontjaiban.

3.1-5 Feladat

Ismert egy szerkezeti elem veszélyes keresztmetszetében a veszélyes ponthoz ($\mathbf{P}$) tartozó feszültségi állapot.

Adatok: $\sigma_x = 160 \text{ MPa}$,
 $\tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$.

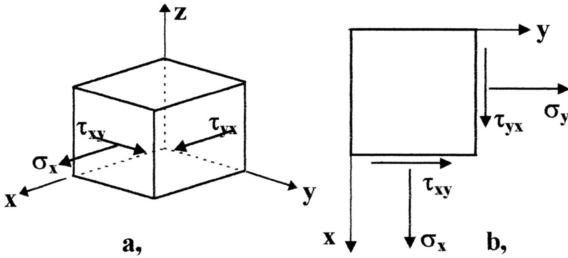
Feladat: A $\mathbf{P}$ pont feszültségállapotának ismeretében határozzuk meg:

1. a feszültségi Mohr-diagramot és olvassuk le a főfeszültségek értékét,
2. számítsuk ki a feszültségi főtengelek x , y tengelyekkel bezárt szögét!

Megoldás:

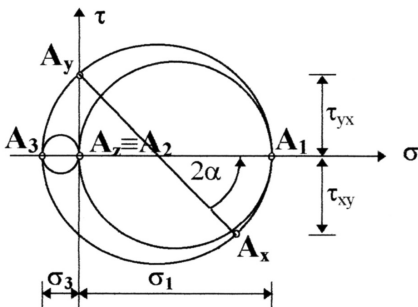
1. Ábrázoljuk a feszültségi állapotot elemi hasábon! (3.1.19 a, ábra)

3.1.19 ábra



A z tengellyel szembenézve határozzuk meg a τ feszültségek Mohr-diagrambeli előjelét (3.1.19 b, ábra)! Mivel a pozitív τ irányt a lapnormális óramutató járásával egyező irányú 90° -os elforgatásával kapjuk meg, a τ_{xy} negatív, a τ_{yx} pozitív előjelű lesz a Mohr-diagramon.

3.1.20 ábra



Szerkesszük meg a diagramot (3.1.20 ábra)!

Az A_x koordinátái $[\sigma_x, \tau_{xy}]$,

A_y koordinátái $[\sigma_y, \tau_{yx}]$,

A_z koordinátái $[\sigma_z, 0]$,

Olvassuk le a főfeszültségek értékét:

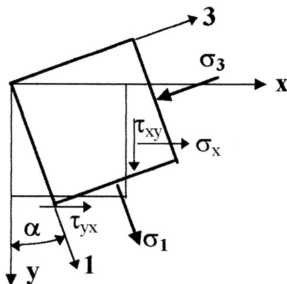
$$\sigma_1 = 180 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa},$$

$$\sigma_3 = -20 \text{ MPa}.$$

2. A főirányok x, y tengelyekkel bezárt szögét a Mohr-diagramból határozhatjuk meg. Az k pont megegyezik az A_2 ponttal, vagyis a z tengely főtengele. A főtengelekbe forgatás tehát a z tengely körüli forgatás lesz, vagyis a Mohr-diagramon az A pont helyben marad, az $A_x A_y$ pedig a külső, $\sigma_1 - \sigma_3$ közötti körön $A_1 - A_3$ -ba fordul.

3.1.21 ábra



Az elforgatás szöge, $2\alpha = 36,87^\circ$

$$\left(\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x}{2}} = \frac{60}{80} \right)$$

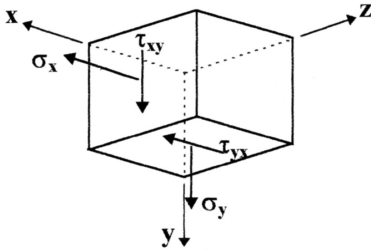
tehát a tengelyek elforgatása óramutató járásával ellentétes irányba,

$$\alpha = \frac{36,87^\circ}{2} = 18,435^\circ \text{ -kal történik (3.1.21 ábra).}$$

3.1-6 Feladat

A terhelt test valamely pontjának környezetéből kiemelt elemi hasábon a 3.1.22 ábrán vázolt feszültségek ébrednek.

3.1.22 ábra



Adatok:

$$\sigma_x = 140 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_y = 60 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 40 \text{ N/mm}^2.$$

Feladat: 1. Állapítsuk meg, hogy a feszültségi állapotok mely csoportjába tartozik az adott eset!

2. Rajzoljuk meg a feszültségi állapot Mohr-diagramját!

3. Olvassuk le a Mohr-diagramról a főfeszültségeket és a főirányok szögét!

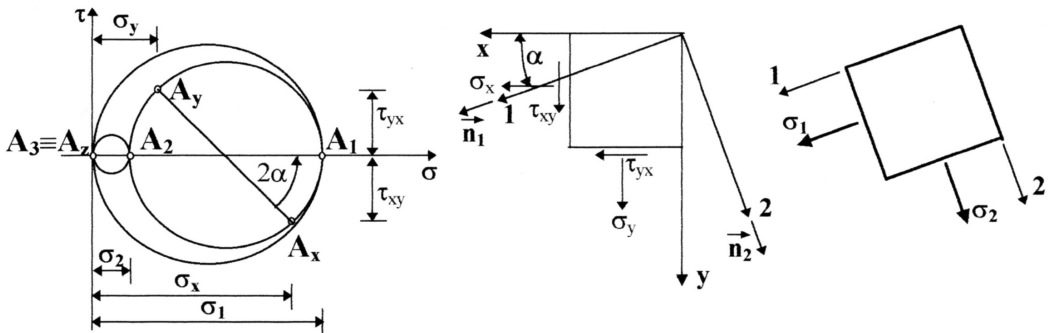
4. Adjuk meg a főirányok egységvektorait!

Megoldás:

1. A 3.1.22 ábrán vázolt síkok közül a z normálisú főfeszültségi sík, amelyen a főfeszültség értéke zérus. Így a vázolt feszültségi állapot kéttengelyű, vagy – speciális esetben – egytengelyű. Ennek eldöntése a 3. pontbeli számításokkal lehetséges.

2. A feszültségi állapot Mohr-diagramja a 3.1.23 ábrán látható.

3.1.23 ábra



3. A diagram alapján a főfeszültségek értéke:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{140 + 60}{2} + \sqrt{\left(\frac{140 - 60}{2}\right)^2 + 40^2} = 156,6 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 100 - 56,4 = 43,4 \text{ N/mm}^2.$$

Így már egyértelművé válik, hogy a feszültségi állapot kéttengelyű, $\sigma_3 = 0$ és a z tengely a 3-as főfeszültséggel esik egybe.

A főirányokat megadó a szög értéke:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 40}{140 - 60} = 1, \quad 2\alpha = 45^\circ, \quad \alpha = 22,5^\circ$$

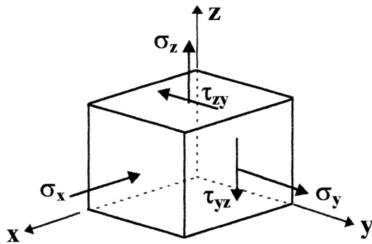
A főirányokat az ábrába berajzoltuk. (A forgatási irány mindkét ábrán az óra járásával ellentétes.)

Megjegyzés: Ilyen típusú feszültségi állapot lép föl általában a sík tárcsák, faltartók pontjaiban, amelyekre középsíkjukkal párhuzamos teher hat.

3.1-7 Feladat

A 3.1.24 ábrán az elemi hasábon vázoltunk egy térbeli feszültségi állapotot, melynek x tengelye feszültségi főtengely.

3.1.24 ábra



Adatok:

$$\sigma_x = -2 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_y = 8 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_z = 12 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\tau_{yz} = -4 \text{ kN/cm}^2.$$

Feladat:

1. Végezzünk x tengely körüli elforgatással koordináta-transzformációt, és egy teljes körülfordulás során $\pi/4$ szögenként, határozzuk meg az y' és z' normálisú felületen fellépő σ_n és τ_n feszültségeket!
2. Ábrázoljuk az x tengellyel szemben nézve síkban az elemi hasábon σ_n és τ_n feszültségeket!
3. Rajzoljuk meg a feszültségi Mohr-köröket!
4. Határozzuk meg a feszültségi főirányokat és irányvektoraikat!
5. Határozzuk meg a maximális τ feszültséget!

Megoldás:

1. A koordinátatranszformációt az x tengely körüli forgatással végezzük, így az x normálisú sík feszültségvektora változatlan marad. Az y és z normálisú síkon ábrázolt feszültségvektorok az elforgatási szög függvényében írhatók fel

A jegyzet (3.36) összefüggésének és 3.13 ábrájának megfelelően:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{yz} \cdot \sin 2\alpha,$$

$$\tau_{nv} = -\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{yz} \cdot \cos 2\alpha$$

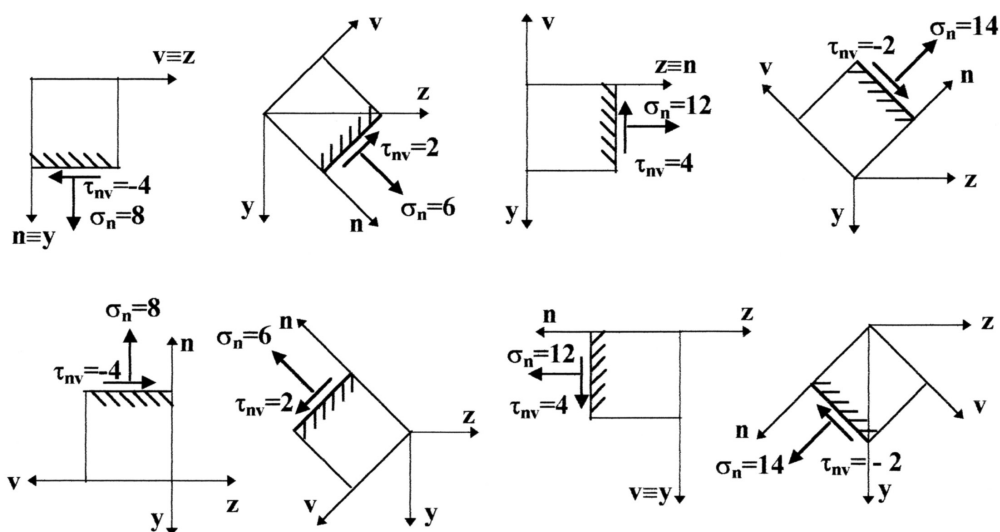
Bevezetve az $a = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}$, $b = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}$ és $c = \tau_{yz}$ jelöléseket, a σ_n és τ_n $\pi/4$ szögen-

kénti elforgatásával nyert értékeit az alábbi táblázat tartalmazza:

α	$\cos 2\alpha$	$\sin 2\alpha$	a	b	c	$b \cdot \cos 2\alpha$	$-b \cdot \sin 2\alpha$	$c \cdot \sin 2\alpha$	$c \cdot \cos 2\alpha$	σ_n	τ_{nv}
0	1	0				-2	0	0	-4	8	-4
$\pi/4$	0	1				0	2	-4	0	6	2
$\pi/2$	-1	0	10	-2	-4	2	0	0	4	12	4
$3\pi/4$	0	-1				0	-2	4	0	14	-2
π	1	0				-2	0	0	-4	8	-4

2. A táblázat eredményeit a 3.1.25 ábrában ábrázoltuk.

3.1.25 ábra



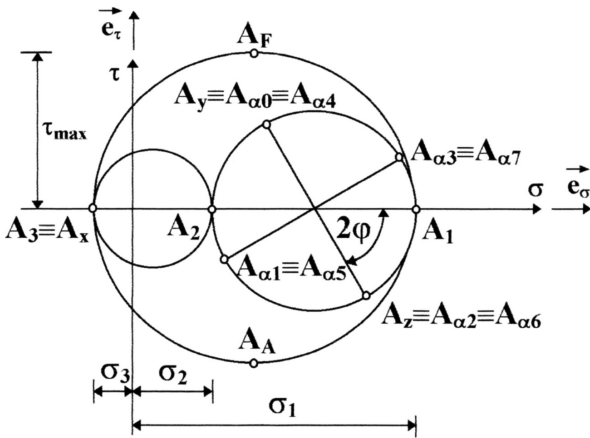
3. A feszültségi Mohr-körök ábrázolásához felírjuk a síkba terített feszültségvektorokat.

$$\begin{aligned}
 \vec{\rho}_x^{(s)} &= \sigma_x \cdot \vec{e}_\sigma = -2 \vec{e}_\sigma, \\
 \vec{\rho}_y^{(s)} &= \sigma_y \cdot \vec{e}_\sigma - \tau_{yz} \cdot \vec{e}_\tau = 8 \cdot \vec{e}_\sigma + 4 \cdot \vec{e}_\tau, \\
 \vec{\rho}_z^{(s)} &= \sigma_z \cdot \vec{e}_\sigma + \tau_{zy} \cdot \vec{e}_\tau = 12 \cdot \vec{e}_\sigma - 4 \cdot \vec{e}_\tau.
 \end{aligned}$$

A fenti feszültségvektorokat berajzolva a $\sigma - \tau$ koordináta-rendszerbe, kapjuk a feszültségi Mohr-körök A_x , A_y és A_z pontját. Az A_y és A_z pontok közösen határozzák meg az x tengely körüli forgatás során nyert azon Mohr-kört, mely a $\sigma_n(\alpha)$ és $\tau_n(\alpha)$ feszültségösszetevőkből előállított

$\vec{\rho}_n^{(s)}$ feszültségvektorok végpontjainak mértani helye. (3.1.26 ábra)

3.1.26 ábra



4. A főfeszültségek:

$$\sigma_1 = 14,24 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = 5,76 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_3 = \sigma_x = -2 \text{ kN/cm}^2.$$

Az (1) feszültségi főirány hajlás-
szöge z tengelyhez képest:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot \tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{-2 \cdot 4}{8 - 12} = 2$$

$$\text{ahonnan } 2\varphi = 63,44^\circ,$$

$$\text{illetve } \varphi = 31,72^\circ.$$

A főfeszültségi főirányok egységvektorai, az $\vec{n}_1$ és $\vec{n}_2$ egységvektorok :

$$\vec{n}_1 = -\sin \varphi \cdot \vec{j} + \cos \varphi \cdot \vec{k} = -0,525 \cdot \vec{j} + 0,85 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{n}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{j} + \sin \varphi \cdot \vec{k} = 0,85 \cdot \vec{j} + 0,525 \cdot \vec{k}.$$

5. A maximális csúsztatófeszültség a külső Mohr-kör sugara:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{14,24 - (-2)}{2} = 8,12 \text{ kN / cm}^2.$$

3.1-8 Feladat

Ismeretesek egy általános feszültségi állapot feszültségösszetevői az xyz koordinátarendszerben.

Adatok: $\sigma_x = 10 \text{ kN/cm}^2,$

$\sigma_y = 6 \text{ kN/cm}^2,$

$\sigma_z = -8 \text{ kN/cm}^2,$

$\tau_{xy} = 4 \text{ kN/cm}^2,$

$\tau_{yz} = -4 \text{ kN/cm}^2.$

Feladat: Határozzuk meg:

1. a főfeszültségeket,

2. a feszültségi főirányokat és
irányvektoraikat,

3. a maximális τ feszültséget!

Megoldás:

1. Az általános feszültségi állapot esetében a főfeszültségek meghatározására a feszültségi állapot karakterisztikus determinánsát alkalmazzuk. A determináns zérus értékénél a σ -ra történő megoldás a főfeszültségeket eredményezi.

$$\det \Phi = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

A determináns kifejtésével és az ismeretlen a-ra való rendezéssel az alábbi harmadfokú egyen-
letre jutunk:

$$\sigma^3 - \sigma^2 \cdot \Phi_I + \sigma \cdot \Phi_{II} - \Phi_{III} = 0,$$

ahol:

$$\Phi_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 10 + 6 - 8 = 8 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\Phi_{II} = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = 10 \cdot 6 - 10 \cdot 8 - 6 \cdot 8 - 4^2 - 4^2 = -100 \text{ kN}^2/\text{cm}^4,$$

$$\Phi_{III} = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{xz} \cdot \tau_{yz} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2$$

$$\Phi_{III} = -10 \cdot 6 \cdot 8 - 10 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^2 = -512 \text{ kN}^3/\text{cm}^6.$$

A feszültségi állapot esetén adódó harmadfokú egyenlet mindhárom gyöke valós. A gyökök meghatározhatók zárt alakban is a Cardano-képlettel, vagy valamely gyökkeresési eljárást alkalmazunk. Például az $\mathbf{f}(\sigma)$ függvényt ábrázolva megkeressük a tengelymetszeteket.

A gyökök meghatározásának részleteit mellőzve a három főfeszültség:

$$\sigma_1 = 12,7 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = 4,42 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_3 = -9,12 \text{ kN/cm}^2$$

2. A főirányok egységvektorainak meghatározásához a jegyzet (3.26) egyenleteit felhasználva az alábbi egyenletrendszert nyerjük:

$$(\sigma_x - \sigma_i) \cos \alpha_i + \tau_{xy} \cos \beta_i + \tau_{xz} \cos \delta_i = 0,$$

$$\tau_{yx} \cos \alpha_i + (\sigma_y - \sigma_i) \cos \beta_i + \tau_{yz} \cos \delta_i = 0,$$

$$\tau_{zx} \cos \alpha_i + \tau_{zy} \cos \beta_i + (\sigma_z - \sigma_i) \cos \delta_i = 0,$$

valamint az iránykoszinuszokra fennálló összefüggést felhasználva:

$$\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \delta_i = 1.$$

Mivel az első három egyenletet a főfeszültségek meghatározásánál felhasználtuk az ismeretlen iránykoszinuszok meghatározásához a negyedik egyenlet mellé az első háromból választunk két független egyenletet, így az $i = 1, 2, 3$ esetek mindegyikére a három-három ismeretlen meghatározható.

Jelen feladatban az egyenletrendszer az alábbiak szerint alakul:

$$(\sigma_x - \sigma_i) \cos \alpha_i + \tau_{xy} \cos \beta_i = 0,$$

$$\tau_{zy} \cos \beta_i + (\sigma_z - \sigma_i) \cos \delta_i = 0,$$

$$\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \delta_i = 1.$$

A megoldás részletezése nélkül írjuk fel a feszültségi főirányok egységvektorait:

$$\vec{n}_1 = \cos \alpha_1 \cdot \vec{i} + \cos \beta_1 \cdot \vec{j} + \cos \delta_1 \cdot \vec{k} = 0,8240 \cdot \vec{i} + 0,5562 \cdot \vec{j} - 0,1074 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{n}_2 = \cos \alpha_2 \cdot \vec{i} + \cos \beta_2 \cdot \vec{j} + \cos \delta_2 \cdot \vec{k} = -0,5636 \cdot \vec{i} + 0,7862 \cdot \vec{j} - 0,2532 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{n}_3 = \cos \alpha_3 \cdot \vec{i} + \cos \beta_3 \cdot \vec{j} + \cos \delta_3 \cdot \vec{k} = -0,0563 \cdot \vec{i} + 0,2692 \cdot \vec{j} - 0,9614 \cdot \vec{k}.$$

3. A maximális csúsztatófeszültség a 3.1-7 feladatból ismert módon:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{12,7 - (-9,12)}{2} = 10,91 \text{ kN / cm}^2.$$

C.3.1 GYAKORLÓ FELADATOK

3.1-9 Feladat

Adott a **P** pontbeli feszültségállapot.

Adatok: $\sigma_x = 160 \text{ MPa}$,
 $\sigma_z = 40 \text{ MPa}$,
 $\tau_{yx} = 50 \text{ MPa}$.

Feladat: Határozzuk meg
1. a feszültségi Mohr-diagramot,
2. a főfeszültségek nagyságát,
3. a feszültségi főirányok egységvektorait
 (az **x,y,z** koordinátarendszerben),
4. a maximális csúsztató feszültségeket és
 irányukat!

Eredmények	1. $A_x [\sigma_x, -\tau_{xy}]$	$A_y [0, \tau_{yx}]$	$A_z [0, 0]$
	2. $\sigma_1 = 174,34 \text{ MPa}$	$\sigma_2 = 40 \text{ MPa}$	$\sigma_3 = -14,34 \text{ MPa}$
	3.		
	$\vec{n}_1 = \cos 16^\circ \cdot \vec{i} + \sin 16^\circ \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = 0,961 \cdot \vec{i} + 0,275 \cdot \vec{j}$, $\vec{n}_2 = 1 \cdot \vec{k}$, $\vec{n}_3 = -\sin 16^\circ \cdot \vec{i} + \cos 16^\circ \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = -0,275 \cdot \vec{i} + 0,961 \cdot \vec{j}$. 4. $\tau_{\max} = 94,34 \text{ MPa}$.		

3.1-10 Feladat

A **P** pontbeli elemi hasábon egyetlen a, feszültség ébred.

Adatok: $\sigma_x = 120 \text{ MPa}$.

Feladat: **1.** Határozza meg a Mohr-diagram felhasználásával az **y** tengely körüli, óramutató járásával azonos irányú $\alpha_1 = 20^\circ$ elforgatáshoz tartozó feszültségösszetevőket!
2. Mekkora a feszültségösszetevők, ha az elforgatás az **x** tengely körül történik?

Eredmények:	1. $\sigma_{x1} = 105,96 \text{ MPa}$	$\sigma_{z1} = 14,04 \text{ MPa}$	$\tau_1 = -38,57 \text{ MPa}$
	2. $\sigma_{y1} = \sigma_{z1} = \tau_1 = 0$.		

3.1-11 Feladat

A **P** pontbeli elemi hasábon ébredő feszültségek σ_x és σ_y .

Adatok: $\sigma_x = 120$ MPa,
 $\sigma_y = -40$ MPa.

Feladat: 1. Határozza meg a Mohr-diagram felhasználásával a **z** tengely körüli, óramutató járásával azonos irányú $\alpha_1 = 20^\circ$ elforgatáshoz tartozó feszültségösszetevőket!
 2. Mekkora a feszültségösszetevők, ha az elforgatás az **x** tengely körül történik?

Eredmények:	1. $\sigma_{x1} = 101,28$ MPa,	$\sigma_{y1} = -21,28$ MPa,	$\tau_{x1y1} = 51,42$ MPa,
	2. $\sigma_{y1} = -35,32$ MPa,	$\sigma_{z1} = -4,68$ MPa,	$\tau_{y1z1} = 12,86$ MPa.

3.1-12 Feladat

A rugalmas test valamely **P** pontjában ismert a feszültségállapot.

Adatok: $\sigma_x = 20$ N/mm²,
 $\sigma_y = 100$ N/mm²,
 $\sigma_z = -40$ N/mm²,
 $\alpha = 15^\circ$.

Feladat: 1. Ábrázolja a pontbeli feszültségi állapotot elemi hasábon és Mohr-diagramon!
 2. A Mohr-diagram segítségével határozza meg a koordinátarendszernek **x** tengely körül órajárással szemben a szöggel való elforgatásával kapott **y, z** tengelyekhez, mint normálisokhoz tartozó feszültségkomponenseket (σ_{y1} , τ_{y1z1} , σ_{z1} , τ_{z1y1})!

Eredmények:	$\sigma_{y1} = 90,62$ N/mm ² ,	$\sigma_{z1} = -30,62$ N/mm ² ,	$\tau_{z1y1} = \tau_{y1z1} = -35$ N/mm ² .
-------------	---	--	---

3.1-13 Feladat

A rugalmas test valamely **P** pontjában a feszültségi állapotot egy τ feszültségpár határozza meg.

Adatok: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = -40$ N/mm²

Feladat: 1. Ábrázolja a pontbeli feszültségi állapotot elemi hasábon és Mohr-diagramon!
 2. Határozza meg a főfeszültségeket, valamint a feszültségi állapot főirányait!

Eredmények:	$\sigma_1 = 40$ N/mm ² ,	$\sigma_2 = 0$,	$\sigma_3 = -40$ N/mm ² ,	$\alpha = 45^\circ$.
-------------	-------------------------------------	------------------	--------------------------------------	-----------------------

3.1-14 Feladat

Ismerjük a **P** ponthoz tartozó feszültségi állapotot.

Adatok: $\sigma_z = 100 \text{ MPa}$,
 $\tau_{zy} = -40 \text{ MPa}$.

Feladat:

1. Rajzolja meg a feszültségi Mohr-diagramot!
2. Határozza meg a főirányokat!
3. Számítsa ki a főfeszültségeket!

Eredmények:	$\alpha_{x,1} = 19,33^\circ$,	$\sigma_1 = 114 \text{ MPa}$,	$\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$,	$\sigma_3 = -14 \text{ MPa}$.
-------------	--------------------------------	--------------------------------	------------------------------	--------------------------------

3.1-15 Feladat

Adottak a vizsgált pontbeli feszültségállapot jellemzői az **xyz** koordináta-rendszerben.

Adatok: $\sigma_z = 130 \text{ N/mm}^2$,
 $\sigma_y = -40 \text{ N/mm}^2$,
 $\tau_{yz} = -40 \text{ N/mm}^2$.

Feladat: Határozza meg a Mohr-diagram felhasználásával a főfeszültségeket és a főirányok szögét!

Eredmények:	$\sigma_1 = 121,91 \text{ N/mm}^2$,	$\sigma_2 = 0$,	$\sigma_3 = -31,91 \text{ N/mm}^2$,	$\alpha = 12,60^\circ$.
-------------	--------------------------------------	------------------	--------------------------------------	--------------------------

3.1-16 Feladat

Adott a **P** pontbeli feszültségállapot.

Adatok: $\sigma_z = 60 \text{ MPa}$,
 $\sigma_y = 40 \text{ MPa}$,
 $\tau_{xy} = -30 \text{ MPa}$.

Feladat: 1. Rajzolja meg a feszültségi Mohr-diagramot!
2. Határozza meg a főfeszültségeket!

Eredmények:	$\sigma_1 = 60 \text{ MPa}$,	$\sigma_2 = 56 \text{ MPa}$,	$\sigma_3 = -16 \text{ MPa}$.
-------------	-------------------------------	-------------------------------	--------------------------------

3.1-17 Feladat

Táblázatban megadott összetevőivel ismertek az alábbi feszültségi állapotok.

Feszültség		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_x	[kN/cm ²]	12	-8	0	-12	18	0	10	0	10	14
σ_y		10	0	-12	-12	6	0	0	0	-10	8
σ_z		0	8	-10	6	-6	0	0	10	10	4
τ_{xy}		0	6	0	-4	0	-6	0	10	0	5
τ_{xz}		0	0	-5	0	4	0	0	0	0	-5
τ_{yz}		5	0	0	0	0	0	-8	0	10	5

- Feladat:* 1. Írja fel a feszültségi vektorokat!
 2. Határozza meg a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat!
 3. Rajzolja meg a feszültségi Mohr-diagramot!

Eredmények:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_1 [kN/cm ²]	12,07	8,0	2,07	6,0	18,65	6	10	10	14,14	17,21
σ_2 [kN/cm ²]	12,0	3,21	-12,0	-8	6	0	8	10	10	11,15
σ_3 [kN/cm ²]	-2,07	-11,21	-12,07	-16	-6,65	-6	-8	-10	-14,14	-2,36
ismert főirány	x $\equiv$ 2	z $\equiv$ 1	y $\equiv$ 2	z $\equiv$ 1	y $\equiv$ 2	z $\equiv$ 2	x $\equiv$ 1	z $\equiv$ 1	x $\equiv$ 2	-
α_i	α_{y1}	α_{y2}	α_{x1}	α_{x2}	α_{x1}	α_{x1}	α_{z2}	α_{x2}	α_{z1}	-
α_k	α_{z3}	α_{x3}	α_{z3}	α_{y3}	α_{z3}	α_{y3}	α_{y3}	α_{y3}	α_{y3}	-
[°]	22,5	-28,15	-22,5	-45	-9,217	-45	45	45	-22,5	-

3.2 Alakváltozási állapot

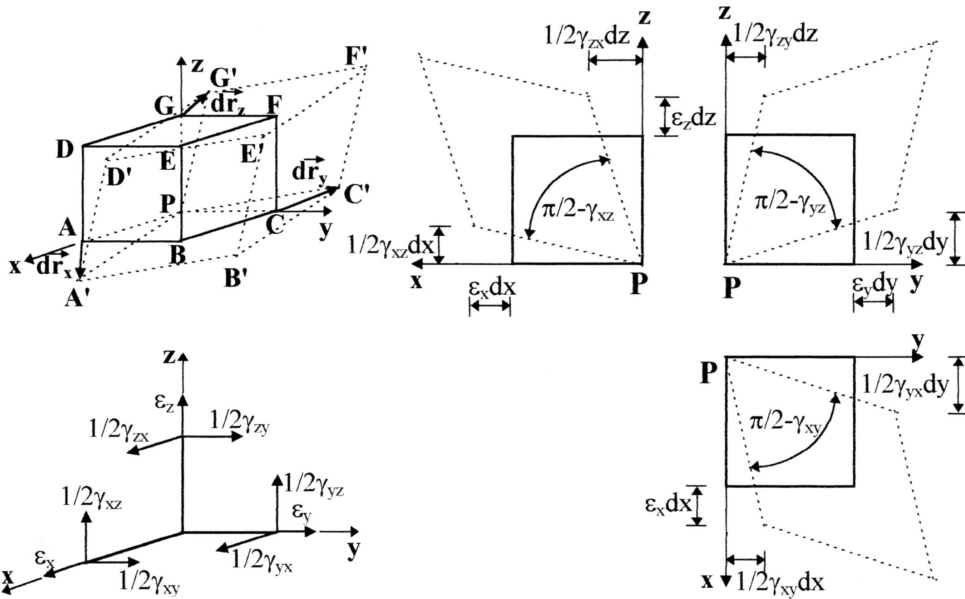
A. 3.2 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Az alakváltozási jellemzők a test valamely P pontjában (3.2.1 ábra)

- fajlagos nyúlások ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$) és
- a szögtorzulások ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$).

Ezek halmaza megadja a P pontbeli alakváltozási állapotot. Az ϵ_i és γ_{ij} mennyiségek dimenziótlanok.

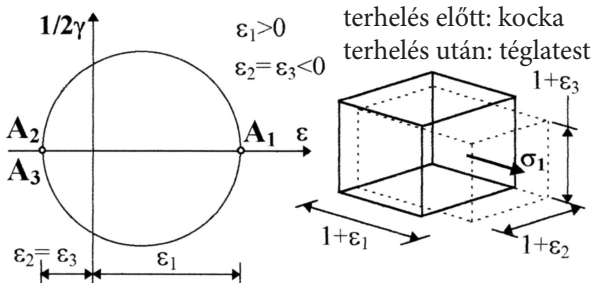
3.2.1 ábra



A feszültségi állapot analógiájára – és annak főirányaiival azonos irányban – értelmezhetők az alakváltozási főirányok ($1, 2, 3$) és főnyúlások ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$).

Alakváltozási Mohr-diagram rajzolható, ha egy főnyúlás ismert.

3.2.2 ábra



- Célja: – a főnyúlások meghatározása,
– az alakváltozási főirányok leolvasása,
– valamely $\vec{n}$ irányú ϵ_n meghatározása.

(Megjegyzés: mindezek meghatározhatók a feszültségi Mohr-diagram alapján, a Hooke-törvény alkalmazásával is.)

Példa egytengelyű feszültségi állapot esetén (lásd: 3.1.3 c, 3.1.4 c, ábra) kialakuló alakváltozási állapot Mohr-diagramja a 3.2.2 ábrán látható.

B. 3.2 KIDOLGOZOTT FELADATOK

3.2-1 Feladat

Ismert az alakváltozási állapot egy rugalmas test valamely P pontjában.

Adatok: $\epsilon_x = 6 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_y = 3,5 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xy} = 4 \cdot 10^{-4}$.

Feladat: 1. Szemléltessük az alakváltozási állapotot a P ponthoz kötött xyz koordinátarendszerben!

2. Rajzoljuk meg az alakváltozás után a P pontbeli elemi hasábot!

3. Ábrázoljuk az alakváltozási állapotot Mohr-diagramon!

4. Számítsuk ki a főnyúlások értékét!

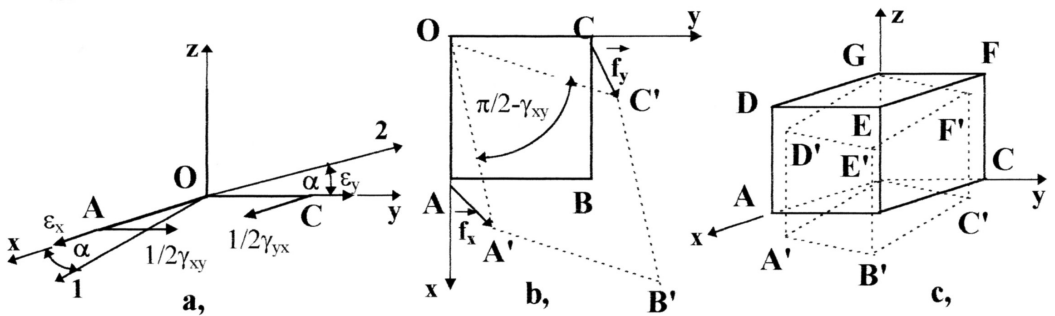
5. Határozzuk meg az alakváltozási főirányokat!

Megjegyzés: A feladatban $\epsilon_x = 0$, tehát síkalakváltozási állapotról van szó, ami a gyakorlatban ritkán fordul elő, de ilyen ébred pl. repedések csúcsánál vastag lemezek belsejében.

Megoldás:

1. A 3.2.3 a, ábrán az egységnyi élhosszúságú kocka OA és OC élének elmozduláskomponenseit látjuk bejelölve. Látható, hogy az OA él A végpontjának x irányú elmozdulása, ϵ_x , az él megnyúlását, y irányú elmozdulása, $1/2 \gamma_{xy}$, az él elfordulását, vagyis szögváltozást jelent.

3.2.3 ábra



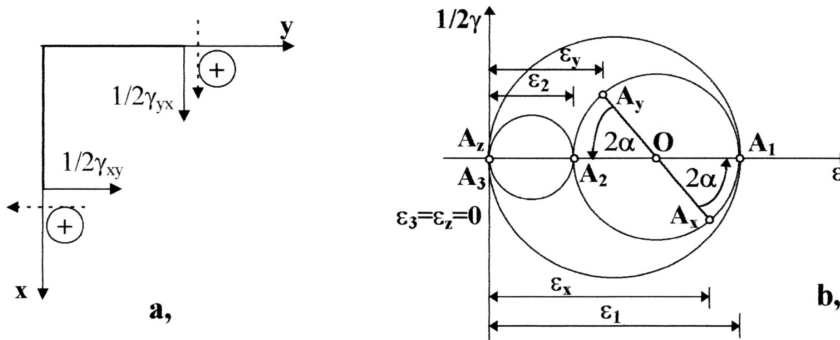
2. A P pontbeli elemi hasábot alakváltozás előtt folytonos, utána szaggatott vonallal ábrázoltuk a 3.2.3 c, ábrán.

Mivel $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, csak az x és y tengelyek szöge változott, mégpedig $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right)$ -ra.

3. A Mohr-diagram megrajzolásához el kell döntenünk, hogy az $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ -t ill. az $\frac{1}{2} \gamma_{yx}$ -et

milyen előjellel mérjük fel. A 3.2.4 a, ábra az xy síkon szaggatott vonallal jelzi a pozitívként fel-mérendő γ -k irányát, folytonossal pedig a feladatban szereplő szögváltozásokat.

3.2.4 ábra



Ezután megkeressük az $\vec{f}_x, \vec{f}_y, \vec{f}_z$ fajlagos elmozdulásvektorok végpontjait az $\epsilon - \frac{1}{2}\gamma$

koordináta-rendszerben (3.2.4 b, ábra). Ezek rendre: A_x, A_y , és A_z . Az xy alakváltozási fősis, tehát A_x és A_y ugyanazon főkör kerületi pontjai. A két pontot összekötő szakasz kimetszi a főkör középpontját (O), melynek ismeretében a kör megrajzolható. Ez kimetszi az A_1 és A_2 pontokat az ϵ tengelyből, és így már az is látszik, hogy $A_z \equiv A_3$ (eddig csak azt tudtuk, hogy a z főtengely, de hogy hányas jelű, azt nem). Következő lépésként megrajzoljuk az A_1A_3 és A_2A_3 , mint átmérő fölé a hiányzó főköröket.

4. A 3.2.4 b, ábrán látható szerkesztés alapján a főnyúlások értéke:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} = \left[\frac{6 + 3,5}{2} + \sqrt{\left(\frac{6 - 3,5}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2} \right] \cdot 10^{-4} \\ &= (4,75 + 2,36) \cdot 10^{-4} = 7,11 \cdot 10^{-4} \quad , \\ \epsilon_2 &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} = (4,75 - 2,36) \cdot 10^{-4} = 2,39 \cdot 10^{-4} \quad , \\ \epsilon_3 &= 0 \quad .\end{aligned}$$

5. A 3.2.4 b, ábra alapján megállapított főirányokat a 3.2.3 a, ábrába rajzoljuk vissza!

Mivel $A_z = A_3$, a z tengely a 3-as főtengely. Az 1-es és 2-es alakváltozási főtengelyek az xy síkban vannak. Az A_xA_1 -hez és A_yA_2 -hez tartozó középponti szög 2α , és A_x -ből A_1 -be, valamint A_y -ből A_2 -be (a legkisebb szög mentén) óramutató járásával ellentétes irányba jutunk, így az x ill. y tengelyeket is ebbe az irányba kell elforgatni α -val, hogy megkapjuk az 1-es, ill. a 2-es főtengelyeket.

A 3.2.4 ábrából
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{4}{6 - 3,5} = 1,6,$$

ahonnan $2\alpha = 58,0^\circ$, illetve $\alpha = 29,0^\circ$.

3.2-2 Feladat

Egy rugalmas test valamely **P** pontjában ismert az alakváltozási állapot.

$$\begin{aligned} \text{Adatok: } \epsilon_x &= 5 \cdot 10^{-4}, \\ \epsilon_y &= 4 \cdot 10^{-4}, \\ \epsilon_z &= 2 \cdot 10^{-4}, \\ \gamma_{xz} &= -10^{-3}. \end{aligned}$$

- Feladat:** 1. Szemléltessük a **P** ponthoz kötött **xyz** koordináta-rendszerben az alakváltozási állapotot!
 2. Rajzoljuk meg a **P** pontbeli alakváltozás utáni elemi hasábot!
 3. Ábrázoljuk az alakváltozási állapotot Mohr-diagramon!
 4. Számítsuk ki a főnyúlások értékét!
 5. Határozzuk meg az alakváltozási főirányokat!

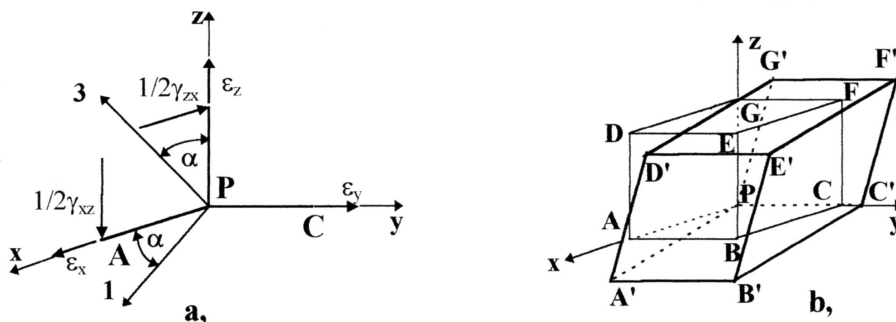
Megjegyzés:

Az $\epsilon_z = 2 \cdot 10^{-4}$ azt jelenti, hogy ha egy húzott rúd minden pontjában ekkora lenne a hosszirányú fajlagos nyúlás, akkor az $L_0 = 1 \text{ m}$ hosszú rúd teljes megnyúlása $\Delta L = \epsilon_z L_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 200 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 200 \mu \text{ m}$ lenne. Ezért ezt a fajlagos nyúlást szokás $\epsilon_z = 200 \mu \text{ m/m}$ alakban is megadni, amely azonos természetesen még az $\epsilon_z = 200 \cdot 10^{-6}$ formával is.

Megoldás:

1. Az alakváltozási állapotot a 3.2.5 ábrán látható módon ábrázoljuk. Figyeljünk az előjelekre!

3.2.5 ábra



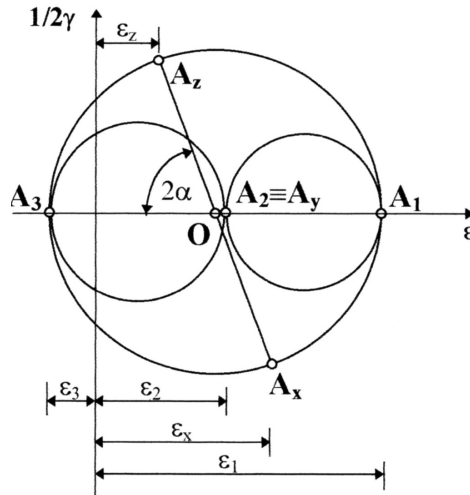
2. Az alakváltozás utáni elemi hasábot szemlélteti a 3.2.5 b, ábra.

3. Előjelszabályunk szerint ϵ_x -hez $\frac{1}{2} \gamma_{xz}$ -t negatívan kell felmérnünk (ez azonos az **xyz** koordináta-rendszerben megadott előjellel), így kapjuk az A_x pontot, az $\vec{f}_x$ fajlagos elmozdulásvektor végpontját (3.2.6 ábra). Az ϵ_z -hez tartozó $\frac{1}{2} \gamma_{zx}$ et pozitívként felmérve kapjuk A_z -t. Az A_y pont az ϵ tengelyen található, mivel $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$. Az y tengely tehát alakváltozási fő-tengely, az xz sík pedig alakváltozási fő sík, tehát A_x és A_z pontok ugyanannak a főkörnek a kerületén helyezkednek el.

Így az A_2 -t és A_x -et összekötő szakasz az E tengelyből kimetszi az egyik főkör középpontját.

O -t, az ebből $\overline{OA_x}$ sugárral megrajzolt főkör pedig az ε tengelyből A_1 és A_3 pontokat ($A_y \equiv A_2$)
A hiányzó két főkört az $\overline{A_1A_2}$ és $\overline{A_2A_3}$ szakaszok, mint átmérők határozzák meg.

3.2.6 ábra



4. A 3.2.6 ábra felhasználásával a főnyúlások értéke:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xz}\right)^2} = \left[\frac{5+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{5-2}{2}\right)^2 + 5^2} \right] \cdot 10^{-4} =$$

$$= (3,5 + 5,22) \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_y = 4 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_3 = 8,72 \cdot 10^{-4},$$

5. A 3.2.6 ábráról az is leolvasható, hogy a 2-es főtengely azonos az y tengellyel (mivel $A_y \equiv A_2$). Az 1-es és 3-as főtengelyek az xz síkban találhatók. A z és az x tengelyt óramutató járásával ellenkező irányba α szöggel elforgatva kapjuk a 3-as és az 1-es főtengelyeket.

Ahol:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{xz}}{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{2}} = \frac{\gamma_{xz}}{\varepsilon_x - \varepsilon_z} = \frac{10}{5-2} = 3,33, \text{ innen } 2\alpha = 73,3^\circ \text{ illetve } \alpha = 36,65^\circ.$$

A főtengelyek visszarajzolva a 3.2.5 a, ábrán láthatók.

C. 3.2 GYAKORLÓ FELADATOK

3.2-3 Feladat

Egy rugalmas test valamely **P** pontjában ismert az alakváltozási állapot.

- Adatok:** $\epsilon_x = 5 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_z = -3 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{zx} = 6 \cdot 10^{-4}$.
- Feladat:** 1. Szemléltesse az alakváltozási állapotot a **P** ponthoz kötött **xyz** koordináta-rendszerben!
 2. Rajzolja meg alakváltozás után a **P** pontbeli elemi hasábot!
 3. Ábrázolja az alakváltozási állapotot Mohr-diagramon!
 4. Határozza meg a főnyúlások értékét!
 5. Írja fel a főtengelyek egységvektorait!

<u>Eredmények:</u>	$\epsilon_1 = 6 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = -4 \cdot 10^{-4}$,	$\alpha = 18,43^\circ$,	$\vec{n}_1 = 0,9487 \cdot \vec{i} + 0,316 \cdot \vec{k}$, $\vec{n}_2 = \vec{j}$, $\vec{n}_3 = -0,316 \cdot \vec{i} + 0,9487 \cdot \vec{k}$.
--------------------	---	--------------------------	--

3.2-4 Feladat

Ismert az alakváltozási állapot egy rugalmas test valamely **P** pontjában.

- Adatok:** $\epsilon_x = -600 \mu\text{m/m}$,
 $\epsilon_y = 400 \mu\text{m/m}$,
 $\epsilon_z = 800 \mu\text{m/m}$,
 $\gamma_{xy} = 1000 \cdot 10^{-6}$.

Feladat:

1. Szemléltesse a **P** ponthoz kötött **xyz** koordinátarendszerben az alakváltozási állapotot!
2. Rajzolja meg a **P** pontbeli alakváltozás utáni elemi hasábot!
3. Ábrázolja az alakváltozási állapotot Mohr-diagramon!
4. Számítsa ki a főnyúlások értékét!
5. Határozza meg az alakváltozási főtengelyeket!
 Írja fel a főtengelyek egységvektorait!

<u>Eredmény:</u>	$\epsilon_1 = 8 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 22,5^\circ$, $\vec{n}_3 = 0,9239 \cdot \vec{i} - 0,3827 \cdot \vec{j}$.	$\epsilon_2 = 6,07 \cdot 10^{-4}$, $\vec{n}_1 = \vec{k}$,	$\epsilon_3 = -8,07 \cdot 10^{-4}$, $\vec{n}_2 = 0,3827 \cdot \vec{i} + 0,9239 \cdot \vec{j}$,
------------------	--	--	---

3.2-5 Feladat

Táblázatban megadott összetevőivel ismertek az alábbi alakváltozási állapotok.

Fajl. alakvált.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε_x	600	-400	0	-600	900	0	500	0	500	700
ε_y	500	0	-600	-600	300	0	0	0	-500	400
ε_z	0	400	-500	300	-300	0	0	500	500	200
γ_{xy}	0	600	0	-400	0	-600	0	1000	0	500
γ_{xz}	0	0	-500	0	400	0	0	0	0	-500
γ_{yz}	500	0	0	0	0	0	-800	0	1000	500

Eredmények:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε_1 [$\mu\text{m}/\text{m}$]	603,5	400	103,5	300	932,5	300	500	500	707	860,5
ε_2 [$\mu\text{m}/\text{m}$]	600	160,5	-600	-400	300	0	400	500	500	557,5
ε_3 [$\mu\text{m}/\text{m}$]	-103,5	-560,5	-603,5	-800	-332,5	-300	-400	-500	-707	-118
ismert főirány	$x \equiv 2$	$z \equiv 1$	$y \equiv 2$	$z \equiv 1$	$y \equiv 2$	$z \equiv 2$	$x \equiv 1$	$z \equiv 1$	$x \equiv 2$	-
α_i	α_{y1}	α_{y2}	α_{x1}	α_{x2}	α_{x1}	α_{x1}	α_{z2}	α_{x2}	α_{z1}	-
α_k	α_{z3}	α_{x3}	α_{z3}	α_{y3}	α_{z3}	α_{y3}	α_{y3}	α_{y3}	α_{y3}	-
[°]	22,5	-28,15	-22,5	-45	-9,217	-45	45	45	-22,5	-

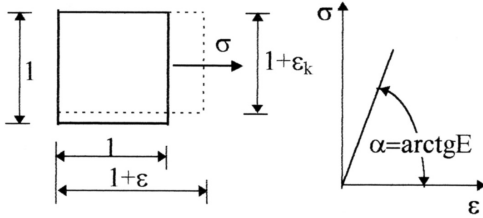
3.3 Hooke-törvény

A. 3.3 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

A Hooke-törvény a lineárisan rugalmas állapotú anyagra érvényes fizikai-, vagy anyagegyenleteket jelent.

Egytengelyű feszültségi állapotban érvényes az egyszerű Hooke-törvény:

3.3.1 ábra



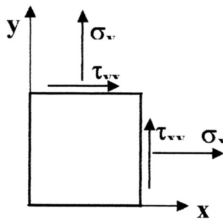
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad , \quad (3.3.)$$

$$\varepsilon_k = -\frac{\varepsilon}{m} = -\nu \cdot \varepsilon \quad (3.4.)$$

Itt E [N/mm²] az anyag rugalmassági modulusa, m a Poisson-szám, $\nu = 1/m$ a Poisson-tényező.

Kéttengelyű (síkbeli) feszültségi állapot esetén az általánosított Hooke-törvény:

3.3.2 ábra



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \quad (3.5.)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.6.)$$

ahol G az anyagra jellemző csúsztató rugalmassági modulus,

$$\text{amelyre} \quad G = \frac{m \cdot E}{2 \cdot (m + 1)} \quad . \quad (3.7.)$$

Az előbbi összefüggések megfordításával:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad ,$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (3.8.)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad .$$

általános térbeli feszültségi állapot esetén érvényes általános Hooke-törvény:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2G} \left(\sigma_i - \frac{\Phi_I}{m+1} \right), \quad i = x, y, z, 1, 2, 3, \quad (3.9.)$$

ahol

$$\Phi_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad , \quad (3.10.)$$

és

$$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}, \quad i, j = x, y, z \quad . \quad (3.11.)$$

Az előbbieket megfordításával:

$$\sigma_i = 2G \left(\varepsilon_i + \frac{\Phi_I}{m-2} \right), \quad i = x, y, z, 1, 2, 3, \quad (3.12.)$$

ahol

$$\Phi_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad , \quad (3.13.)$$

és

$$\tau_{ij} = G \cdot \gamma_{ij}, \quad i, j = x, y, z \quad . \quad (3.14.)$$

B. 3.3 KIDOLGOZOTT FELADATOK

3.3-1 Feladat

Egy rugalmas anyagú húzott rúd valamely **P** pontjában ismerjük a feszültségállapotot.

Adatok: $\sigma_z = 120 \text{ N/mm}^2$,
 $E_{\text{acél}} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$,
 $E_{\text{Al}} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$,
 $\nu_{\text{acél}} = 0,3$,
 $\nu_{\text{Al}} = 0,33$.

Feladat: 1. Mekkora a fajlagos nyúlások értéke, ha a rúd anyaga acél, ill. alumínium?
 2. Szemléltessük az alakváltozási állapotot Mohr-diagramon!
 3. Mekkora hosszirányú fajlagos nyúlás esetén érné el a folyáshatárt az acél, ill. az alumínium rúdban ébredő feszültség?

Megoldás:

1. A hosszirányú fajlagos nyúlás az egyszerű Hooke-törvény alapján

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \text{ így } \varepsilon_{z \text{ acél}} = \frac{\sigma_z}{E_{\text{acél}}} = \frac{120}{2,1 \cdot 10^5} = 5,71 \cdot 10^{-4} = 571 \cdot 10^{-6} = 571 \mu\text{m} / \text{m}$$

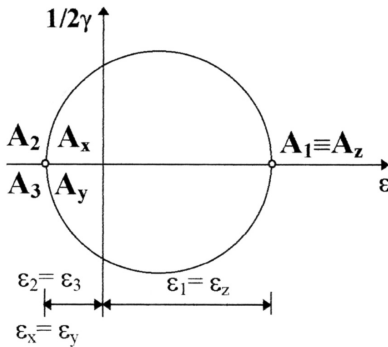
$$\varepsilon_{z \text{ Al}} = \frac{\sigma_z}{E_{\text{Al}}} = \frac{120}{0,7 \cdot 10^5} = 17,14 \cdot 10^{-4} = 1714 \cdot 10^{-6} = 1714 \mu\text{m} / \text{m}.$$

A keresztirányú fajlagos nyúlás: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_z$, tehát

$$\varepsilon_{x \text{ acél}} = \varepsilon_{y \text{ acél}} = -\nu_{\text{acél}} \cdot \varepsilon_{z \text{ acél}} = -0,3 \cdot 571 = -171,3 \mu\text{m/m},$$

$$\varepsilon_{x \text{ Al}} = \varepsilon_{y \text{ Al}} = -\nu_{\text{Al}} \cdot \varepsilon_{z \text{ Al}} = -0,33 \cdot 1714 = -565,6 \mu\text{m/m}.$$

3.2.3 ábra



2. Mivel $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xy} = 0$, az x, y, z alakváltozási főirányok. Az $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ főnyúlások ismeretében az alakváltozási Mohr-diagram egyszerűen megrajzolható (3.2.3 ábra). Mivel $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, $A_x \equiv A_y$, így a három főkörből kettő egybeesik, egy pedig ponttá zsugorodik.

3. Ha a rúdban ébredő feszültség eléri a folyáshatárt, akkor az egyszerű Hooke-törvény szerint

$$\varepsilon_z = \frac{R_p}{E}.$$

Táblázatból: $R_{p \text{ acél}} = 235 \text{ N/mm}^2$, (Fe 235),
 $R_{p \text{ Al}} = 140 \text{ N/mm}^2$, (AlMg3 23.14).

$$\text{Így } \varepsilon_{z \text{ acél}} = \frac{R_{p \text{ acél}}}{E_{\text{acél}}} = \frac{235}{2,1 \cdot 10^5} = 1,12 \cdot 10^{-3} = 1120 \cdot 10^{-6} = 1120 \mu\text{m} / \text{m},$$

$$\varepsilon_{z \text{ Al}} = \frac{R_{p \text{ Al}}}{E_{\text{Al}}} = \frac{140}{7 \cdot 10^4} = 20 \cdot 10^{-4} = 2000 \cdot 10^{-6} = 2000 \mu\text{m} / \text{m}.$$

Tehát a folyáshatár eléréséig a vizsgált alumíniumötvözetből készült rúd fajlagos nyúlása majdnem kétszer akkora, mint az acélrúdé.

3.3-2 Feladat

Ismeretes a rugalmas test **P** pontjában a feszültségi állapot az **xyz** koordinátarendszerben, valamint a rugalmas test anyagára jellemző **G** csúsztató rugalmassági modulus.

Adatok: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 6 \text{ kN/cm}^2$,
 $G = 0,8 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: 1. Határozzuk meg a pontbeli alakváltozási állapot jellemzőit az **xyz** koordinátarendszerben ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$), ($\gamma_{xy} \equiv \gamma_{yx}$)!
 2. Szemléltessük a létrejövő deformációt!

Megoldás:

1. A rugalmas test valamely **P** pontbeli feszültségi és alakváltozási állapot jellemzői között az ún. anyagegyenletek adnak összefüggést.

A fajlagos nyúlások az anyagjellemzőkön kívül a σ feszültségek függvényei. Mivel $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$, a fajlagos nyúlások is zérus értékűek **x**, **y** és **z** irányban is.

Vagyis:

$$\epsilon_x = 0, \quad \epsilon_y = 0, \quad \epsilon_z = 0.$$

A szögváltozások pedig a τ feszültség függvényei (az anyagjellemző **G**-n kívül). Tehát:

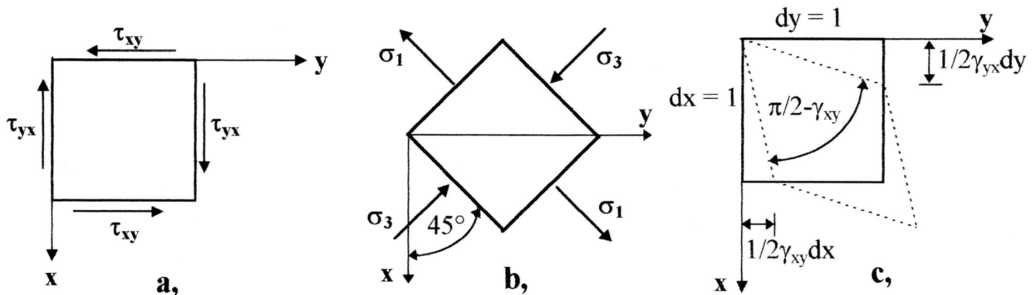
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{6}{0,8 \cdot 10^4},$$

A dualitás értelmében:

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = 7,5 \cdot 10^{-4}.$$

2. A pontbeli feszültségi állapotot az adott **xy** rendszerben a 3.3.4.a. ábra, a főirányok koordinátarendszerében a b. ábra és a deformált elemi hasábot a c. ábra mutatja.

3.3.4 ábra



Mivel az alakváltozásra jellemző $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$, a létrejövő deformációt az **xy** síkban létrejövő szögváltozás γ_{xy} határozza meg.

Vagyis az egységnyi oldalú **xy** síkú kis elemi négyzetből ugyanazon egységnyi oldalú rombusz lesz (3.3.4.c ábra). Az ábra torzított, a szemléltetést szolgálja, hiszen γ_{xy} nagyon kicsi, így az

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} dx$$

is alig mérhetően kicsi.

3.3-3 Feladat

Ismeretes egy rugalmas test valamely **P** pontjában a feszültségi állapot az **xyz** koordinátarendszerben, valamint a test anyagára jellemző csúsztató rugalmassági modulus és a Poisson-szám.

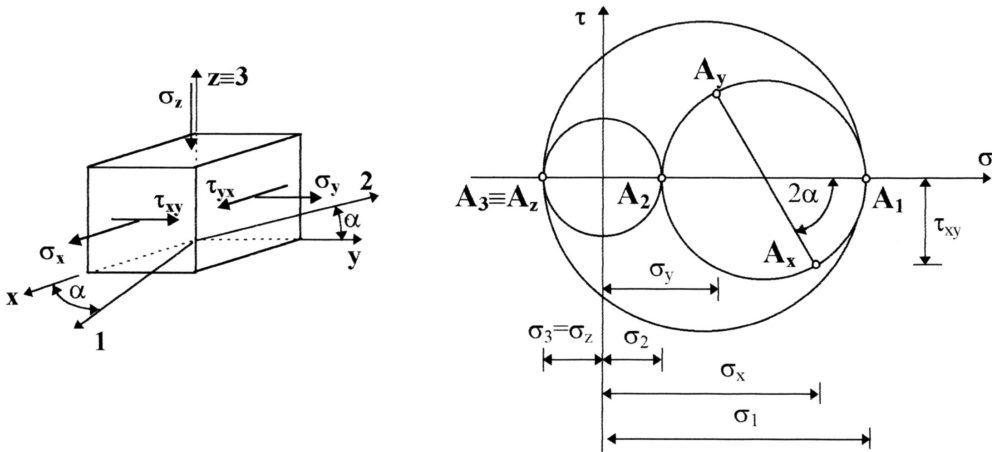
$$\begin{aligned} \text{Adatok: } \sigma_x &= 20 \text{ kN/cm}^2, & \sigma_y &= 8 \text{ kN/cm}^2, & \sigma_z &= -4 \text{ kN/cm}^2, \\ \tau_{xy} &= 8 \text{ kN/cm}^2, & m &= 3, & G &= 0,8 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2. \end{aligned}$$

- Feladat:** 1. Ábrázoljuk a pontbeli feszültségi állapotot kiskockán és Mohr-diagramon!
 2. Határozzuk meg a főfeszültségeket ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) és a főfeszültségi tengelyeket (1, 2, 3)!
 3. Határozzuk meg az alakváltozási állapot jellemzőit az **xyz** koordináta-rendszerben ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$)!
 4. Ábrázoljuk a pontbeli alakváltozási állapotot!
 5. Határozzuk meg az alakváltozás főirányait (1, 2, 3) és a főnyúlásokat ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$)!

Megoldás:

1. A pontbeli feszültségi állapot ábrázolása (3.3.5 ábra).

3.3.5 ábra



2. A főfeszültségek meghatározása a Mohr-diagram alapján:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{20 + 8}{2} + \sqrt{\left(\frac{20 - 8}{2}\right)^2 + 8^2} = 24 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{20 + 8}{2} - \sqrt{\left(\frac{20 - 8}{2}\right)^2 + 8^2} = 4 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = -4 \text{ kN/cm}^2.$$

A feszültségi állapot főtengelyeinek meghatározása. A 3-as feszültségi főirány adott, hiszen a **z** normálisú lapon csak normálfeszültség van. Az 1-es és 2-es feszültségi főirányok az **xy** főfeszültségi síkban találhatók.

Az x illetve az y tengellyel bezárt szögük α , a Mohr-diagram alapján számítható (3.3.5 ábra):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 8}{20 - 8} = 1,33 \quad ,$$

$$2\alpha = 53,06^\circ \text{ tehát: } \alpha = 26,53^\circ .$$

3. Az alakváltozás jellemzőit az általános Hooke-törvénnyel határozhatjuk meg, mivel a pontbeli feszültségi állapot többtengelyű.

Írhatjuk, hogy az x irányú fajlagos nyúlás: $\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \cdot \left(\sigma_x - \frac{\Phi_I}{m+1} \right) ,$

ahol Φ_I három egymásra kölcsönösen merőleges normálfeszültség összege:

$$\Phi_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 20 + 8 - 4 = 24 \text{ kN/cm}^2 .$$

Így

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^4} \cdot \left(20 - \frac{24}{3+1} \right) = 8,75 \cdot 10^{-4}$$

Ugyanezen összefüggéssel az y irányú fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2G} \cdot \left(\sigma_y - \frac{\phi_I}{m+1} \right) = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^4} \cdot \left(8 - \frac{24}{3+1} \right) = 1,25 \cdot 10^{-4} ,$$

majd a z irányú fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \cdot \left(\sigma_z - \frac{\phi_I}{m+1} \right) = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^4} \cdot \left(-4 - \frac{24}{3+1} \right) = -6,25 \cdot 10^{-4} .$$

A szögváltozás pedig:

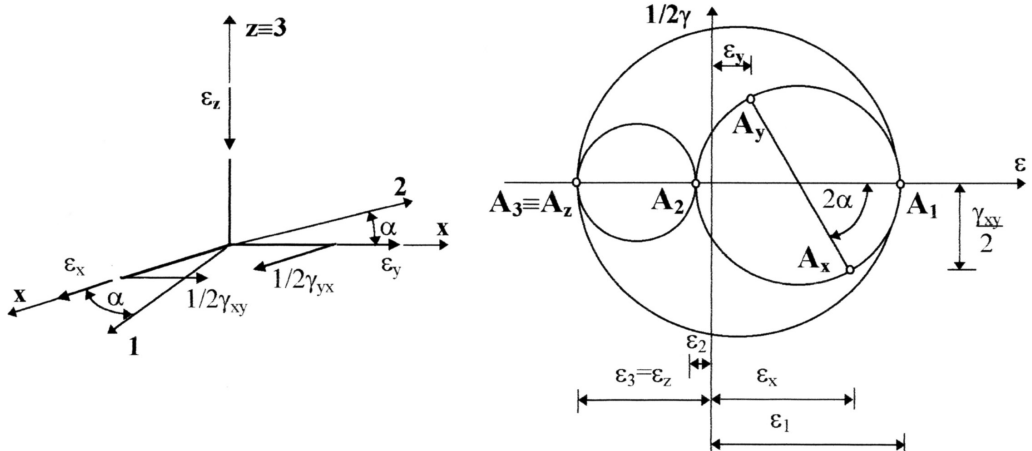
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{8}{0,8 \cdot 10^4} = 10 \cdot 10^{-4} .$$

A dualitás elve alapján:

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = 10 \cdot 10^{-4} .$$

4. A pontbeli alakváltozási állapot a 3.3.6 ábrán látható.

3.3.6 ábra



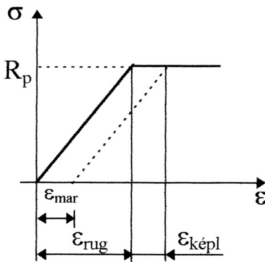
41

2. Az előbb meghatározott feszültség folyáshatárhoz viszonyított aránya:

$$\frac{\sigma_1}{R_p} = 0,944, \text{ tehát } 94,4\% \text{ a folyáshatárnak.}$$

3. A rugalmas-képlékeny anyagmodell esetén a teljes relatív megnyúlás a rugalmas (ϵ_{rug}) és a képlékeny ($\epsilon_{\text{képl}}$) megnyúlás összegeként adódik (3.3.8 ábra). Az ábrán figyelemmel kísérhetjük a visszaterhelés folyamatát is (szaggatott vonal).

3.3.8 ábra



Tehát $\epsilon_z = \epsilon_{\delta} = 1500 \cdot 10^{-6} = \epsilon_{\text{rug}} + \epsilon_{\text{képl}}$, ahol az ϵ_{rug} érték az R_p feszültséghez tartozó fajlagos megnyúlás:

$$\epsilon_{\text{rug}} = \frac{R_p}{E} = \frac{23,5}{20600} = 1140 \text{ mm / m}$$

Az előbbi egyenletbe átrendezés után behelyettesítve: $\epsilon_{\text{képl}} = \epsilon_{\text{mar}} = \epsilon_{\delta} - \epsilon_{\text{rug}} = 1500 - 1140 = 360 \text{ } \mu\text{m/m}$.

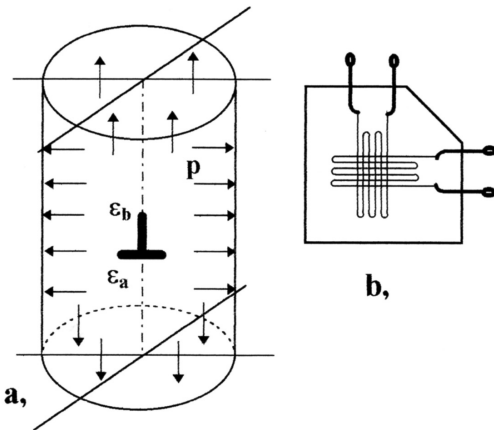
3.3-5 Feladat

Síkbeli (kéttengelyű) feszültségi állapotban lévő pontban végzett nyúlásmérés alapján határozzuk meg a kérdéses helyen működő főfeszültségeket! Az adott helyen a feszültségi főirányokat ismerjük.

Ilyen esetet vázoltunk a 3.3.9 ábrán, ahol egy zárt hengeres tartályon végzett tangenciális, ill. axiális irányú mérés eredményei: ϵ_a ill. ϵ_b .

A b. ábrán az adott mérésre célszerűen alkalmazható ún. kétirányú nyúlásmérő rozetta látható.

3.3.9 ábra



Adatok: $\epsilon_a = 850 \text{ } \mu\text{m/m}$,
 $\epsilon_b = 200 \text{ } \mu\text{m/m}$,
 $E = 206000 \text{ N/mm}^2$,
 $\nu = 0,3$.

Feladat: 1. Határozzuk meg a vizsgált pontbeli főfeszültségeket!
 2. Határozzuk meg a síkra merőleges irányú fajlagos nyúlást!

Megoldás:

1. A mérés kiértékelésénél a síkbeli Hooke-törvény (3.8.) szerinti összefüggését alkalmazzuk.

Eszerint a tangenciális feszültség:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_a + \nu \cdot \epsilon_b) = \frac{206000}{1 - 0,3^2} (850 \cdot 10^{-6} + 0,3 \cdot 200 \cdot 10^{-6}) = 206 \text{ N / mm}^2$$

az axiális feszültség:

$$\sigma_{ax} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_b + \nu \cdot \varepsilon_a) = \frac{206000}{1 - 0,3^2} (200 \cdot 10^{-6} + 0,3 \cdot 850 \cdot 10^{-6}) = 103 \text{ N/mm}^2$$

Láthatóan az ismert főirányokbeli főfeszültségek közül a nagyobbik, $\sigma_1 = \sigma_t = 103 \text{ N/mm}^2$.

2. Síkbeli feszültségi állapotban a harmadik főfeszültség $\sigma_3 = 0$. Ugyanakkor azonban az irányába eső fajlagos nyúlás – a Poisson-hatás miatt – nem zérus, ugyanis

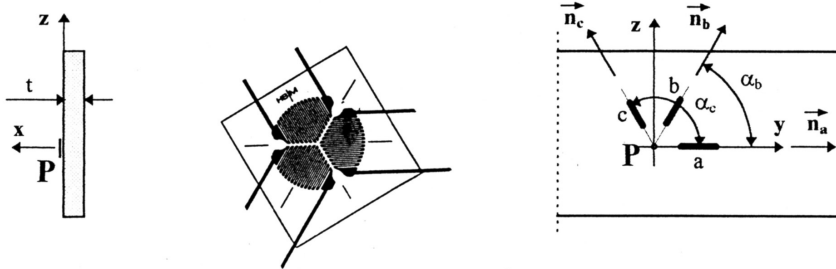
$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E} = \\ &= -0,3 \cdot \frac{206}{206000} - 0,3 \cdot \frac{103}{206000} = -450 \cdot 10^{-6} = -450 \text{ } \mu\text{m/m} \end{aligned}$$

3.3-6 Feladat

A 3.3.10 ábrán látható módon egy rugalmas szerkezeti elem (lemez) y - z síkban levő felületén a P pont környezetében elhelyezünk három irányú fajlagos nyúlásmérésre alkalmas nyúlásmérő-bélyeget. A gyárilag előállított egy hordozóra elhelyezett több különböző nyúlásmérő ellenállást rozettának nevezzük.

A rozetta a , b és c irányokban érzékeli a feszültségi állapot által létrehozott fajlagos nyúlást. A rozettát mérőhely-átkapcsolóval ellátott mérőhídba kötve egyenként mérhetjük az adott irányokban fellépő fajlagos nyúlásokat. Az ábrán vázolt rozettát $3 \times 120^\circ$ -os, vagy deltarozettának nevezzük.

3.3.10 ábra



Adatok: $\alpha_a = 0$, $\varepsilon_a = 400 \cdot 10^{-6} = 400 \text{ } \mu\text{m/m}$, $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$,
 $\alpha_b = 60^\circ$, $\varepsilon_b = 300 \cdot 10^{-6} = 300 \text{ } \mu\text{m/m}$, $\nu = 0,3$,
 $\alpha_c = 120^\circ$, $\varepsilon_c = -200 \cdot 10^{-6} = -200 \text{ } \mu\text{m/m}$, $t = 12 \text{ mm}$.

- Feladat: 1. Határozzuk meg a nyúlásmérések adataiból a P pontbeli alakváltozási állapotot!
2. Határozzuk meg az y - z síkban fellépő legnagyobb és legkisebb fajlagos nyúlást, illetve ezek irányát!
3. Határozzuk meg a P pontbeli feszültségi állapotot és a főfeszültségeket!
4. Rajzoljuk meg a feszültségi és alakváltozási Mohr-köröket!
5. Határozzuk meg a lemez vastagságváltozását!

Megoldás:

1. A **P** pontbeli alakváltozási állapot meghatározása a jegyzet (3.44.) összefüggéseinek felhasználásával lehetséges:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_y \cdot \cos^2 \alpha_a + \gamma_{yz} \cos \alpha_a \sin \alpha_a + \varepsilon_z \cdot \sin^2 \alpha_a \quad ,$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_y \cdot \cos^2 \alpha_b + \gamma_{yz} \cos \alpha_b \sin \alpha_b + \varepsilon_z \cdot \sin^2 \alpha_b \quad ,$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_y \cdot \cos^2 \alpha_c + \gamma_{yz} \cos \alpha_c \sin \alpha_c + \varepsilon_z \cdot \sin^2 \alpha_c \quad .$$

A fenti három egyenletben ε_y , γ_{yz} és ε_z az ismeretlen. Helyettesítsük be az ismert szögfüggvény értékeket és a mért fajlagos nyúlásadatokat, utóbbiakat $\mu\text{m}/\text{m}$ mértékegységben.

$$\varepsilon_a = \varepsilon_y \quad ,$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_y \cdot 0,25 + \gamma_{yz} \cdot 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon_z \cdot \frac{3}{4} \quad ,$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_y \cdot 0,25 - \gamma_{yz} \cdot 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon_z \cdot \frac{3}{4} \quad .$$

Az első egyenletből ε_y közvetlenül adódik, ami nyilvánvaló a 3.3.10 ábra alapján, mert az "a" jelű nyúlásmérő bélyeg y irányban került elhelyezésre.

Így $\varepsilon_y = 400 \cdot 10^{-6}$. A második és harmadik egyenlet összeadásával

$$\varepsilon_b + \varepsilon_c = \varepsilon_y \cdot 0,5 + \varepsilon_z \cdot \frac{6}{4} \quad \text{adódik, amiből ez kifejezhető:}$$

$$\varepsilon_z = (\varepsilon_b + \varepsilon_c - \varepsilon_y \cdot 0,5) \cdot \frac{2}{3} = \frac{300 - 200 - 400 \cdot 0,5}{3} \cdot 2 = -66,67 \text{ mm/m}.$$

A harmadik ismeretlent, γ_{yz} -t, kifejezhetjük a harmadik egyenletből:

$$\gamma_{yz} = \frac{4 \cdot (\varepsilon_y \cdot 0,25 + \varepsilon_z \cdot 0,75 - \varepsilon_c)}{\sqrt{3}} \quad ,$$

$$\gamma_{yz} = \frac{4 \cdot (400 \cdot 0,25 - 66,67 \cdot 0,75 + 200)}{\sqrt{3}} = 577,3 \text{ } \mu\text{m} / \text{m} \quad .$$

A $\sigma_x = 0$ ellenére, – ami síkfeszültségi állapotot jelent – az alakváltozási állapot nem síkbeli.

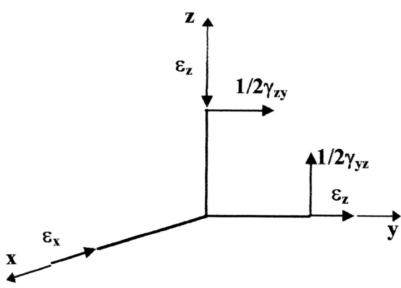
Az $\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] = -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_y + \sigma_z)$ összefüggésből látható, hogy ε_x csak $\sigma_y = -\sigma_z$ esetén zérus.

Az x irányú fajlagos nyúlás síkfeszültségi állapot esetén kifejezhető az alábbi módon:

$$\varepsilon_x = -76,92 \text{ } \mu\text{m}/\text{m}.$$

Az ismeretlenek meghatározása után rendelkezésre áll a **P** pontbeli alakváltozási állapot, amit a 3.3.11 ábrán rajzoltunk meg.

3.3.11 ábra



$$\vec{f}_x = \varepsilon_x \vec{i},$$

$$\vec{f}_y = \varepsilon_y \vec{j} + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \vec{k},$$

$$\vec{f}_z = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k}.$$

2. Az y-z síkban fellépő legnagyobb és legkisebb fajlagos nyúlás meghatározásához írjuk fel az y-z síkban tetszőlegesen elhelyezkedő $\mathbf{n}$ irányban a fajlagos nyúlást:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_y \cdot \cos^2 \alpha + \gamma_{yz} \cdot \cos \alpha \sin \alpha + \varepsilon_z \cdot \sin^2 \alpha.$$

ε_n -nek szélsőértéke van, ha az α változó szerinti differenciálhányadosa zérus, vagyis

$$\frac{d\varepsilon_n}{d\alpha} = -2\varepsilon_y \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_{yz} (\cos^2 2\alpha - \sin^2 \alpha) + 2\varepsilon_z \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

ahonnan

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\gamma_{yz}}{\varepsilon_z - \varepsilon_y} = \frac{\gamma_{yz}}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{577,3}{66,67 + 400} = 1,237.$$

A kétszeres szög, illetve α értéke:

$$2\alpha = 51,05 + k \cdot \pi, \quad \text{amiből} \quad \begin{aligned} 2\alpha_1 &= 51,05^\circ, & \alpha_1 &= 25,5^\circ, \\ 2\alpha_2 &= 231,05^\circ, & \alpha_2 &= 115,5^\circ. \end{aligned}$$

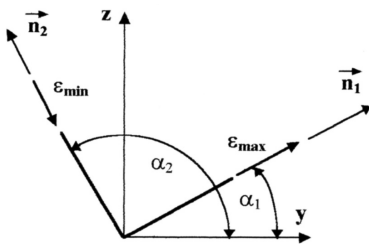
Behelyettesítve cn képletébe az α_1 szöget $\varepsilon_{\max}$ -t, α_2 szöget $\varepsilon_{\min}$ -t kapjuk:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_y \cdot \cos^2 \alpha_1 + \gamma_{yz} \cdot \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1 + \varepsilon_z \cdot \sin^2 \alpha_1,$$

$$\varepsilon_{\max} = 400 \cdot 0,8147 + 577,3 \cdot 0,9026 \cdot 0,4305 - 66,67 \cdot 0,1853 = 537,8 \mu\text{m/m},$$

$$\varepsilon_{\min} = 400 \cdot 0,1853 - 577,3 \cdot 0,4305 \cdot 0,9026 - 66,67 \cdot 0,8147 = -204,5 \mu\text{m/m}.$$

3.3.12 ábra



A maximális és minimális fajlagos nyúlás irányába eső egységvektorok:

$$\vec{n}_1 = \cos \alpha_1 \vec{j} + \sin \alpha_1 \vec{k} = 0,9026 \cdot \vec{j} + 0,4305 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{n}_2 = \cos \alpha_2 \vec{j} + \sin \alpha_2 \vec{k} = -0,4305 \cdot \vec{j} + 0,9026 \cdot \vec{k}$$

Fenti eredményeinket a 3.3.12 ábrán szemléltettük.

3. A P pontbeli síkfeszültségi állapot meghatározásához alkalmazzuk az általános Hooke-törvényt a (2.8.) összefüggéseinek megfelelően:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_z), \quad \sigma_z = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_z + \nu \cdot \varepsilon_y).$$

A feszültségek kiszámítása:

$$\sigma_y = \frac{2 \cdot 10^4}{1 - 0,3^2} \cdot (400 - 0,3 \cdot 66,67) \cdot 10^{-6} = 8,35 \text{ kN / cm}^2 ,$$

$$\sigma_z = \frac{2 \cdot 10^4}{1 - 0,3^2} \cdot (-66,67 + 0,3 \cdot 400) \cdot 10^{-6} = 1,17 \text{ kN / cm}^2 ,$$

$$\tau_{yz} = \gamma_{yz} \cdot G = \gamma_{yz} \cdot \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 577,3 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2 \cdot 10^4}{2 \cdot (1 + 0,3)} ,$$

$$\tau_{yz} = 4,44 \text{ kN / cm}^2 .$$

A főfeszültségek:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} ,$$

$$\sigma_1 = \frac{8,35 + 1,17}{2} + \sqrt{\left(\frac{8,35 - 1,17}{2}\right)^2 + 4,44^2} = 10,47 \text{ kN / cm}^2 ,$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = 0 ,$$

$$\sigma_3 = \frac{8,35 + 1,17}{2} - \sqrt{\left(\frac{8,35 - 1,17}{2}\right)^2 + 4,44^2} = -0,95 \text{ kN / cm}^2 .$$

4. A feszültségi és alakváltozási Mohr-köröket a 3.3.13 ábrán rajzoltuk meg közös ábrában.

$$\frac{\Phi_I}{m + 1} = \frac{8,35 + 1,17 + 0}{\frac{1}{0,3} + 1} = 2,2 \text{ kN / cm}^2 .$$

Határozzuk meg a Mohr-körből a feszültségi főtengely szögét!

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot \tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 4,44}{8,35 - 1,17} = 1,237 ,$$

az eredmény azonos **tg2α**-val, amit szélsőérték-kereséssel határoztunk meg.

A 3.3.13 ábra segítségével határozzuk meg a fajlagos főnyúlásokat.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2G} \cdot \left(\sigma_1 - \frac{\Phi_I}{m + 1} \right) = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \left(\sigma_1 - \frac{\Phi_I}{m + 1} \right)$$

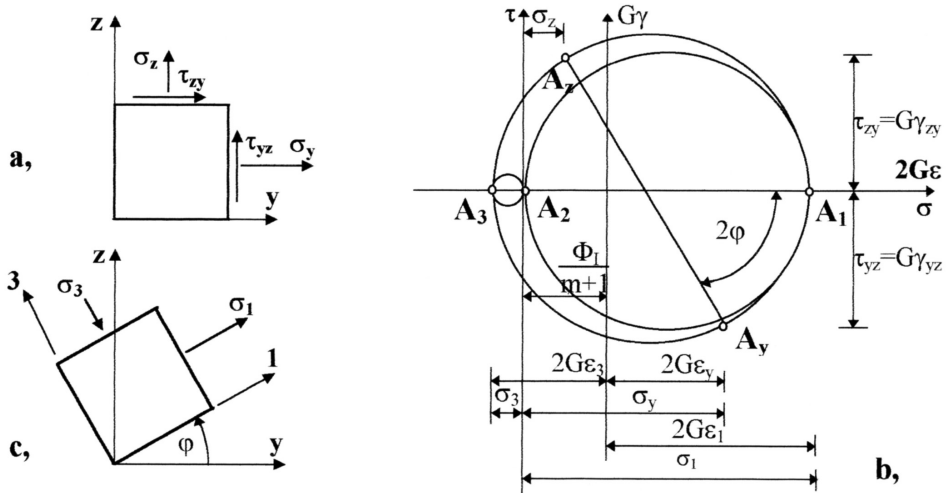
$$\varepsilon_1 = \frac{1 + 0,3}{2 \cdot 10^4} \cdot (10,47 - 2,2) = 5,375 \cdot 10^{-4} = 537,6 \text{ } \mu\text{m / m}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1 + 0,3}{2 \cdot 10^4} \cdot (0 - 2,2) = -1,43 \cdot 10^{-4} = -143 \text{ } \mu\text{m / m}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1 + 0,3}{2 \cdot 10^4} \cdot (-0,95 - 2,2) = -2,047 \cdot 10^{-4} = -204,7 \text{ } \mu\text{m / m}$$

ϵ_1 és ϵ_3 értéke természetesen azonos a korábban meghatározott $\epsilon_{\max}$ és $\epsilon_{\min}$ értékével.

3.3.13 ábra



5. A vizsgált lemez vastagságváltozása:

$$\Delta t = t \cdot \epsilon_x = 12 \cdot (-76,92) \cdot 10^{-6} = -9,23 \cdot 10^{-4} \text{ mm.}$$

C. 3.3 GYAKORLÓ FELADATOK

3.3-7 Feladat

Egy húzott acélrúd valamely **P** pontjában ismerjük a feszültségállapotot.

Adatok: $\sigma_z = 180 \text{ N/mm}^2$,
 $\nu = 0,3$,
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Feladat: 1. Számolja ki az alakváltozási állapot jellemzőit!
 2. Szemléltesse az alakváltozási állapotot Mohr-diagramon!

Eredmények:	$\epsilon_z = 857 \text{ } \mu\text{m/m}$,	$\epsilon_x = \epsilon_y = -257 \text{ } \mu\text{m/m}$.
-------------	---	---

3.3.-8 Feladat

A rugalmas test **P** pontjában ismert a feszültségi állapot, valamint a rugalmas test anyagára jellemző **G** csúsztató rugalmassági modulusz.

Adatok: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = -40 \text{ N/mm}^2$,
 $G = 8 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Feladat: 1. Határozza meg a pontbeli alakváltozási állapot jellemzőit!
 2. Ábrázolja a pontbeli alakváltozási állapotot!
 3. Határozza meg a főnyúlásokat (ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3)!

Eredmények:	$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = -5 \cdot 10^5$,	$\epsilon_1 = -5 \cdot 10^{-4}$,	$\epsilon_2 = 0$,	$\epsilon_3 = -5 \cdot 10^{-4}$
-------------	---	-----------------------------------	--------------------	---------------------------------

3.3-9 Feladat

A rugalmas test valamely **P** pontjában ismert a feszültségi állapot, valamint a test anyagára jellemző csúsztató rugalmassági modulusz (**G**) és a Poisson-szám (**m**).

Adatok: $\sigma_x = 2 \text{ kN/cm}^2$,
 $\sigma_y = 10 \text{ kN/cm}^2$,
 $\sigma_z = -4 \text{ kN/cm}^2$,
 $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 4 \text{ kN/cm}^2$,
 $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ kN/cm}^2$,
 $m = 3$.

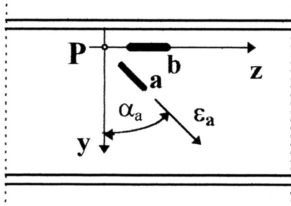
Feladat: 1. Határozza meg a pontbeli alakváltozási állapot jellemzőit!
 2. Ábrázolja a pontbeli alakváltozási állapotot!
 3. Az alakváltozási Mohr-diagram alapján határozza meg az alakváltozási állapot főirányait és a főnyúlásokat!

Eredmények:	$\epsilon_x = 0$,	$\epsilon_y = 5 \cdot 10^{-4}$,	$\epsilon_z = -3,75 \cdot 10^{-4}$,
	$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 5 \cdot 10^{-4}$,	$\alpha = 14,87^\circ$,	
	$\epsilon_1 = 5,665 \cdot 10^{-4}$,	$\epsilon_2 = 0$,	$\epsilon_3 = -4,415 \cdot 10^{-4}$.

3.3-10 Feladat

A 3.3.14 ábrán vázolt **I** keresztmetsztű tartó **P** pontjában nyúlásmérő ellenállással két irányban mérhetünk fajlagos nyúlást. Segítségül közöljük, hogy a **P** pont felső síkhoz való közelsége és a sík **y** irányú terheletlensége miatt $\sigma_y = 0$.

3.3.14 ábra



Adatok:

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= 300 \mu\text{m/m}, \\ \epsilon_b &= \epsilon_z = 600 \mu\text{m/m}, \\ \alpha_a &= 45^\circ, \\ E &= 20600 \text{ kN/cm}^2, \\ \nu &= 0,3.\end{aligned}$$

- Feladat:**
1. Adja meg a fajlagos alakváltozási vektorokat az x, y, z koordinátarendszerben!
 2. Határozza meg a feszültségi állapot összetevőit!
 3. Ábrázolja az alakváltozási és feszültségi Mohr-köröket!
 4. Határozza meg a főfeszültségi irányok egységvektorait, és az y tengellyel bezárt szögeit!

Eredmények:		
$\vec{f}_x = -180 \vec{i} \text{ [}\mu\text{m/m]},$ $\sigma_x = \sigma_y = 0,$ $\vec{n}_1 = 0,443 \vec{j} + 0,896 \vec{k},$ $\alpha_{1y} = 63,69^\circ,$	$\vec{f}_y = -180 \vec{j} + 510 \vec{k} \text{ [}\mu\text{m/m]},$ $\sigma_z = 12,36 \text{ kN/cm}^2,$ $\vec{n}_2 = \vec{i},$ $\alpha_{2y} = 90^\circ,$	$\vec{f}_z = 510 \vec{j} + 600 \vec{k} \text{ [}\mu\text{m/m]},$ $\tau_{yz} = 8,08 \text{ kN/cm}^2,$ $\vec{n}_3 = 0,896 \vec{j} - 0,443 \vec{k}.$ $\alpha_{3y} = -26,31^\circ.$

3.3-11 Feladat

Egy szerkezet kiválasztott pontjában nyúlásmérések alapján határozzuk meg a feszültségállapot jellemzőit. Mivel a főirányokat ismerjük, derékszögű, kétirányú rozettát használunk a főnyúlások mérésére.

Adatok: $\epsilon_1 = 862 \mu\text{m/m},$ $\epsilon_2 = 208 \mu\text{m/m},$ $E = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa},$ $\nu = 0,33.$

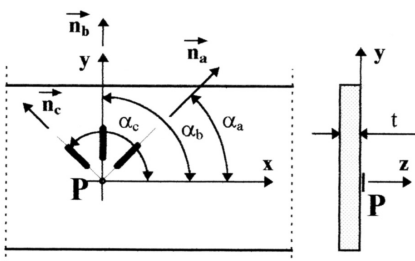
Feladat: Határozzuk meg a pontban működő síkbeli feszültségek közül a legnagyobbat és a legkisebbet!

Eredmények:	$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 66,34 \text{ MPa},$	$\sigma_{\min} = \sigma_2 = 35,11 \text{ MPa},$	$\sigma_z = 0.$
-------------	---	---	-----------------

3.3-12 Feladat

Egy lemez x - y síkban lévő felületi pontjának (P) környezetében rozettával három irányú fajlagos nyúlásmérést végzünk (3.3.15 ábra)

3.3.15 ábra



Adatok:

$$\begin{aligned}\alpha_a &= 45^\circ, \\ \alpha_b &= 90^\circ, \\ \alpha_c &= 135^\circ, \\ \nu &= 0,32, \\ t &= 12 \text{ mm}, \\ \epsilon_a &= -400 \mu\text{m/m}, \\ \epsilon_b &= 200 \mu\text{m/m}, \\ \epsilon_c &= -200 \mu\text{m/m}, \\ E &= 20600 \text{ kN/cm}^2,\end{aligned}$$

- Feladat:** 1. A mérési adatok alapján határozza meg a P pontbeli fajlagos alakváltozási vektorokat!
2. Rajzolja meg az alakváltozási állapot Mohr-diagramját!
3. Határozza meg a főnyúlásokat és az alakváltozási főirányokat!
4. Határozza meg a feszültségi állapotot és adja meg a feszültségösszetevőket az x, y, z és az $1, 2, 3$ koordináta-rendszerben!
5. A feszültségi állapot hatására mekkora a lemez vastagságváltozása?

Eredmények:	$\epsilon_x = -800 \mu\text{m/m}$, $\gamma_{xy} = -200 \mu\text{m/m}$, $\epsilon_1 = 282,3 \mu\text{m/m}$, $\vec{n}_1 = \vec{k}$, $\sigma_x = -16,89 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_1 = 0$,	$\epsilon_y = 200 \mu\text{m/m}$, $\Delta t = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, $\epsilon_2 = 209,9 \mu\text{m/m}$, $\vec{n}_2 = -0,0985 \vec{i} + 0,995 \vec{j}$, $\sigma_y = -1,285 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_2 = -1,13 \text{ kN/cm}^2$,	$\epsilon_z = 282,3 \mu\text{m/m}$, $\epsilon_3 = -809,9 \mu\text{m/m}$, $\vec{n}_3 = 0,995 \vec{i} + 0,0985 \vec{j}$, $\sigma_z = 0$, $\sigma_3 = -17,05 \text{ kN/cm}^2$,
--------------------	---	---	--

3.3-13 Feladat

A 3.1-17 feladatban adott feszültségi állapotokból határozza meg az alakváltozási állapotokat!

Adatok: $E = 20600 \text{ kN/cm}^2$, $m = 3$.

Eredmények:

Alakváltozás	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ϵ_x	420,7	-517,8	356	-485,4	873,8	0	485,4	-161,8	485,4	485,4
ϵ_y	291,3	0	-420,7	-485,4	97,09	0	-161,8	-161,8	-809	97,01
ϵ_z	-356	517,8	-291,3	679,6	-679,6	0	-161,8	485,4	485,4	-161,8
γ_{xy}	0	776,7	0	-517,8	0	-776,7	0	1294	0	647,2
γ_{xz}	0	0	-647,2	0	-517,9	0	0	0	0	-647,2
γ_{yz}	647,2	0	0	0	0	0	-1035	0	1294	647,2

3.3-14 Feladat

A 3.2-5 feladatban adott alakváltozási állapotokból határozza meg a feszültségi állapotokat!

Adatok: $E = 20600 \text{ kN/cm}^2$, $m = 3$.

Eredmények:

Feszültségek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_x	26,26	-6,18	17,0	-23,17	27,81	0	15,45	7,725	15,45	30,9
σ_y	24,72	0	-26,26	-23,17	18,54	0	7,725	7,725	0	26,26
σ_z	17,0	6,18	-24,72	-9,27	9,27	0	7,725	15,45	15,45	23,17
τ_{xy}	0	4,635	0	-3,09	0	-4,635	0	7,725	0	3,86
τ_{xz}	0	0	-3,86	0	3,09	0	0	0	0	-3,86
τ_{yz}	3,86	0	0	0	0	0	-6,18	0	7,725	3,86

3.4 Alakváltozási munka

A. 3.4 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

A rugalmas test térfogategységre jutó (fajlagos) alakváltozási munka – valamely xyz koordináta-rendszerbeli jellemzőkkel:

$$u = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) + \frac{1}{2} \cdot (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (3.15.)$$

– a főtegelyek koordináta-rendszerében:

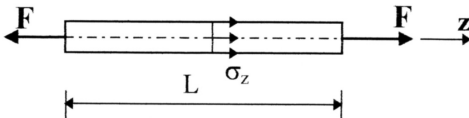
$$u = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad (3.16.)$$

B. 3.4 KIDOLGOZOTT FELADATOK

3.4-1 Feladat

Ismert egy húzott prizmatikus rúd (3.4.1 ábra) keresztmetszetére ható σ_z feszültség értéke, valamint a rúd geometriája és anyaga. Az alakváltozás rugalmas.

3.4.1 ábra



Adatok: $\sigma_z = 160 \text{ N/mm}^2$,
 $L = 1,0 \text{ m}$,
 $A = 240 \text{ mm}^2$,
 $E = 206000 \text{ N/mm}^2$.

- Feladat:** 1. Határozzuk meg a rúd egységnyi térfogatára jutó (fajlagos) alakváltozási munkát!
 2. Számítsuk ki a rúdban rugalmas energiaként felhalmozódó alakváltozási munkát!

Megoldás:

1. A fajlagos alakváltozási munka, ill. az anyagban felhalmozódó belső energia (3.15.) szerint:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \sum_i \sigma_i \varepsilon_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_i \tau_i \gamma_i = \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \varepsilon_z ,$$

hiszen jelen esetben egytengelyű a feszültségi állapot. Ebből (3.3.) behelyettesítésével

$$u = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_z \sigma_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_z^2}{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{160^2}{206000} = 0,0621 \text{ Nmm} / \text{mm}^2$$

2. Mivel a húzott rúd minden térfogatelemében azonos a fajlagos alakváltozási munka, így

$$U = \int_{(v)} u dv = uV = uAL = 0,0621 \cdot 240 \cdot 1000 = 14913 \text{ Nmm} = 14,913 \text{ Nm} .$$

3.4-2 Feladat

Ismert egy térbeli általános feszültségi állapot a terhelt test valamely **P** pontjában. A test alakváltozása lineárisan rugalmas tartományban következik be.

$$\begin{aligned} \text{Adatok: } \sigma_x &= 120 \text{ N/mm}^2, & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 20 \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_y &= 40 \text{ N/mm}^2, & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -30 \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_z &= -60 \text{ N/mm}^2, & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = -10 \text{ N/mm}^2, \\ E &= 80000 \text{ N/mm}^2, & \nu &= 0,35. \end{aligned}$$

Feladat: Határozzuk meg a **P** pont környezetében fellépő, egységnyi térfogatra jutó (fajlagos) alakváltozási munkát!

Megoldás:

Először meghatározzuk az alakváltozási jellemzőket.

Az általános Hooke-törvény szerint:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z}{E} = \frac{120 - 0,35 \cdot 40 + 0,35 \cdot 60}{80000} = 1587 \cdot 10^{-6}, \\ \varepsilon_y &= \frac{-\nu \cdot \sigma_x + \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z}{E} = \frac{-0,35 \cdot 120 + 40 + 0,35 \cdot 60}{80000} = 237,5 \cdot 10^{-6}, \\ \varepsilon_z &= \frac{-\nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y + \sigma_z}{E} = \frac{-0,35 \cdot 120 - 0,35 \cdot 40 - 60}{80000} = -1450 \cdot 10^{-6}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \tau_{xy}}{E} = \frac{2 \cdot (1 + 0,35) \cdot 20}{80000} = 675 \cdot 10^{-6}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \tau_{yz}}{E} = \frac{-2 \cdot (1 + 0,35) \cdot 30}{80000} = -1012 \cdot 10^{-6}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \tau_{zx}}{E} = \frac{-2 \cdot (1 + 0,35) \cdot 10}{80000} = -337,5 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Ezek után a fajlagos alakváltozási munka (3.15.) szerint:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_i \tau_i \gamma_i = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (120 \cdot 1587 + 40 \cdot 237,5 + 60 \cdot 1450 + 20 \cdot 675 + 30 \cdot 1012 + 10 \cdot 337,5) \cdot 10^{-6} \\ u &= 0,167 \text{ Nmm} / \text{mm}^3. \end{aligned}$$

C. 3.4 GYAKORLÓ FELADATOK

3.4-3 Feladat

Egy egytengelyű feszültségi állapotban lévő pontban ismert a főfeszültség értéke:

Adatok: $\sigma_1 = 22,66 \text{ kN/cm}^2$, $E = 20600 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Határozza meg a test illető pontja környezetében a fajlagos alakváltozási munkát!

Eredmény: $u = 0,01246 \text{ kNcm/cm}^3$.

3.4-4 Feladat

Ismeretesek egy térbeli feszültségi állapotban lévő pontban a feszültségjellemzők és a test rugalmassági anyagjellemzői.

Adatok: $\sigma_x = 20 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = 8 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_z = -4 \text{ kN/cm}^2$,
 $\tau_{xy} = 8 \text{ kN/cm}^2$, $G = 0,8 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $m = 3$.

Feladat: Határozza meg a vizsgált helyen fellépő fajlagos alakváltozási munkát!

Eredmény: $u = 0,0387 \text{ kNcm/cm}^3$

3.4.-5 Feladat

A 3.1.-17 feladat táblázatában megadtunk különböző feszültségi állapotokat.

Adatok: $E = 20600 \text{ kN/cm}^2$, $m=3$.

Feladat: Határozza meg a megadott feszültségi állapotok által végzett fajlagos alakváltozási munkát!

Eredmények:

$u \cdot 10^6$ kNcm/cm^3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	5598	6472	5598	8899	11229	2330	6569	8899	15372	8317

3.4.-6 Feladat

A 3.2.-5 feladat táblázatában megadtunk különböző alakváltozási állapotokat.

Adatok: $E = 20600 \text{ kN/cm}^2$, $m=3$.

Feladat: Határozza meg a megadott alakváltozási állapotok által végzett fajlagos alakváltozási munkát!

Eredmények:

$u \cdot 10^6$ kNcm/cm^3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	15025	3862	15025	13132	14523	1390,5	6334,5	7725	11587	21282

4. RUGALMAS ÁLLAPOTÚ PRIZMATIKUS RUDAK IGÉNYBEVÉTELE

Egyszerű igénybevételről beszélünk, ha egyetlen igénybevétel egyféle feszültséget okoz.

Összetett igénybevételről beszélünk, amikor

- egyetlen igénybevétel többféle feszültséget okoz,
- több igénybevétel egy-, vagy többféle feszültséget okoz.

Az alábbi táblázat az egyik szokásos csoportosításban foglalja össze az igénybevételeket:

Egyszerű igénybevételek	Összetett igénybevételek
Egytengelyű feszültségi állapotot okozó igénybevételek	
Központos (tiszt) húzás, nyomás Egyenes hajlítás	Külpontos húzás, nyomás Ferde hajlítás
Többtengelyű feszültségi állapotot okozó igénybevételek	
Tiszta nyírás Tiszta szabad csavarás	Hajlítással egyidejű nyírás Gátolt csavarás Hajlítással, húzással egyidejű csavarás

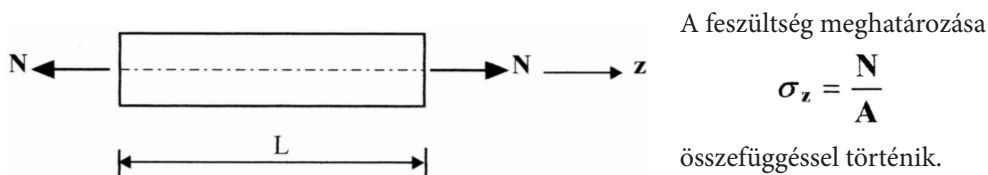
4.1 Egytengelyű feszültségállapotot okozó egyszerű igénybevételek

4.1.1 KÖZPONTOS HÚZÁS, NYOMÁS

A. 4.1.1 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

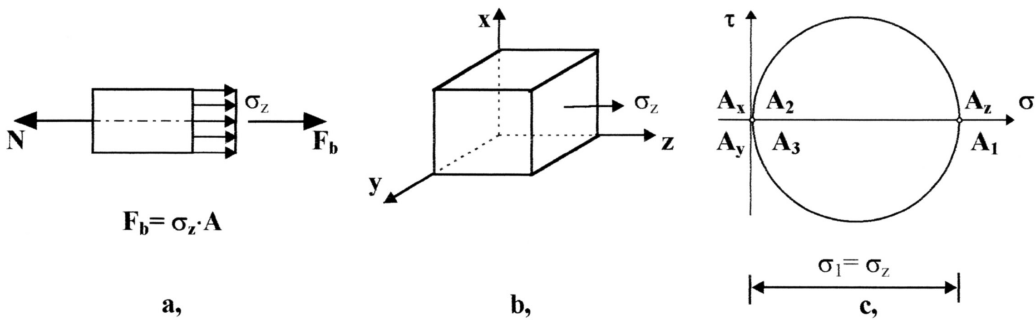
Központos húzásról és központos nyomásról akkor beszélünk, ha a húzó- vagy nyomóerő nem okozza a rúdtengely meggyörbülését, vagyis a különböző keresztmetszetek párhuzamos eltolódást szenvednek. A **homogén** anyagú rudak esetében a központos húzó- vagy nyomóerő a keresztmetszet **súlypontjában** működik (4.1.1 ábra).

4.1.1 ábra



A feszültségeloszlást, a feszültségi állapotot és a feszültségi Mohr-kört a 4.1.2 ábrán vázoltuk.

4.1.2 ábra

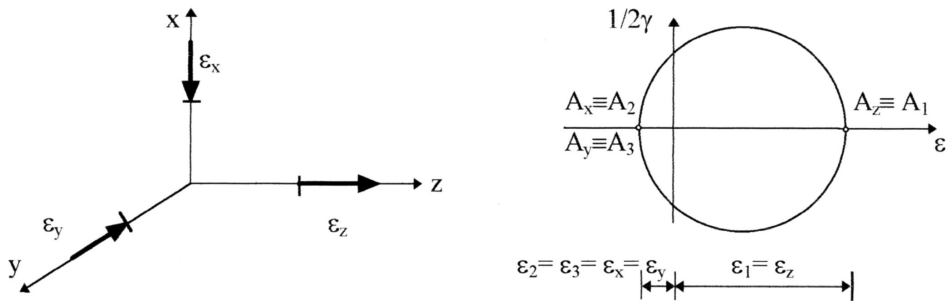


Az alakváltozás jellemzői:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \varepsilon_z$$

Az alakváltozási állapot többtengelyű (4.1.3 ábra).

4.1.3 ábra



A rúd teljes hosszváltozása a rugalmas tartományban: $\Delta L = \frac{1}{E} \int_0^L \sigma_z dz$,

ha N , E és A állandó, akkor: $\Delta L = \frac{N L}{A E}$.

Az alakváltozási energia, ha N , E és A állandó: $U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{E A} L$.

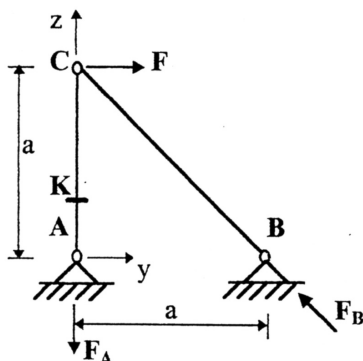
A központos húzásra felírt összefüggések *központosan nyomott rudakra* is igazak, de az ébredő feszültség és az alakváltozás jellemzőinek előjele fordított lesz.

B. 4.1.1 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.1.1-1 Feladat

Adott a 4.1.4. ábrán látható háromcsuklós szerkezet.

4.1.4. ábra



Adatok: $a = 1 \text{ m}$,
 $F = 100 \text{ kN}$,
 $R_{adm} = 200 \text{ N/mm}^2$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$,
 $\nu = 0,3$.

Feladat:

1. Méretezzük az AC rudat (tiszt) húzásra!
A választandó szelvény hidegen hajlított szelvény.
2. Határozzuk meg az AC rúd hosszváltozását!
3. Rajzoljuk meg az alakváltozási állapot Mohr-diagramját!

Megoldás:

1. Első lépésként meg kell határoznunk az AC jelű rúd igénybevételét. Mivel a rudakra csak a végükön adódik át erő, mindkét rúdban csak normálerő ébred. A támasztóerők feltételezett irányát a 4.1.4 ábra mutatja. írjunk fel nyomatéki egyenletet a B ponton átmenő, síkra merőleges b tengelyre!

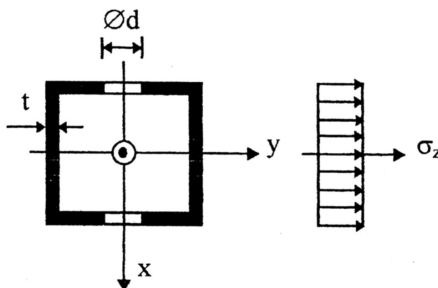
$$\Sigma M_{bi} = 0 = -a \cdot F + a \cdot F_A, \quad \text{innen}$$

$$F_A = F = 100 \text{ kN} (\downarrow),$$

a feltételezett irányba mutat.

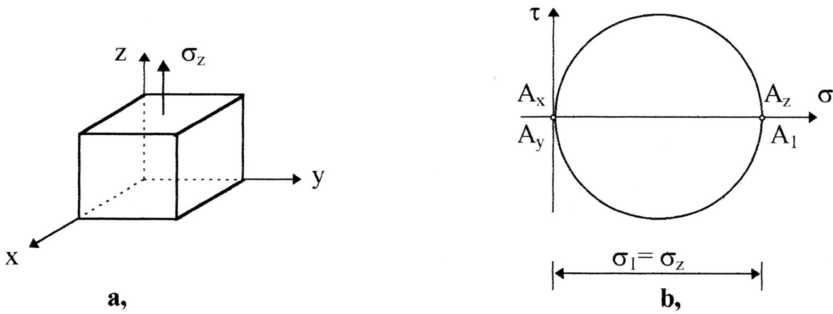
Tehát az AC rúd húzott, és minden keresztmetszetében $N = 100 \text{ kN}$ normálerő ébred. Mivel minden keresztmetszet egyformán veszélyes, egy tetszőleges K keresztmetszeten tüntessük fel a normálerőt, és rajzoljuk fel a feszültségeloszlási ábrát (4.1.5 ábra).

4.1.5 ábra



Tehát a keresztmetszet minden pontjában azonos nagyságú feszültség ébred. A P pont feszültség-állapotát mutatja a 4.1.6 ábra.

4.1.6 ábra



Olyan méretű keresztmetszetet kell választanunk, hogy $\sigma_z = \frac{N}{A_h} \leq R_{adm}$

egyenlőtlenség teljesüljön, amiből $A_h \geq \frac{N}{R_{adm}} = \frac{10^5}{200} = 500 \text{ mm}^2 = 5 \text{ cm}^2$

A táblázatból tehát olyan szelvényt kell kiválasztanunk, amely keresztmetszetének hasznos területe 5 cm^2 -nél nem kisebb. Emellett még azt is figyelembe kell vennünk, hogy a C csomóponti kapcsolat ezt az értéket csökkenti. Ha például egy $d = 16 \text{ mm}$ -es furatba illesztett csappal kapcsolódik a két rúd, a keresztmetszet területét ennek megfelelően növelni kell. Válasszuk a táblázatból az 50.50.4 jelű szelvényt, mely esetén $A_u = 6,94 \text{ cm}^2$.

Ebből le kell vonni a furatgyengítés miatt

$$A_f = 2 \cdot d \cdot t = 2 \cdot 16 \cdot 4 = 128 \text{ mm}^2 = 1,28 \text{ cm}^2\text{-t.}$$

A hasznos keresztmetszeti terület tehát

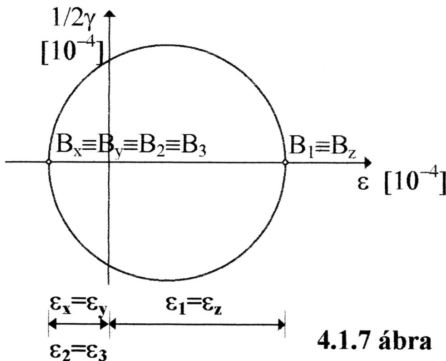
$$A_h = A_u - A_f = 6,94 - 1,28 = 5,66 \text{ cm}^2, \text{ ami}$$

nagyobb a korábban kiszámított szükséges keresztmetszeti területnél, azaz a választott szelvény húzásra, szilárdságilag megfelelő.

2. Az AC rúd hosszváltozása $\Delta a = \frac{N a}{A_u E} = \frac{10^5 \cdot 10^3}{6,94 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 0,719 \text{ mm}$

A furatgyengítés hatása a hosszváltozásra elhanyagolható.

4.1.7 ábra



4.1.7 ábra

3. Az alakváltozási Mohr-diagram megrajzolásához meg kell határoznunk a hossz- és keresztirányú fajlagos nyúlásokat.

$$\epsilon_z = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,719}{10^3} = 7,19 \cdot 10^{-4},$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z =$$

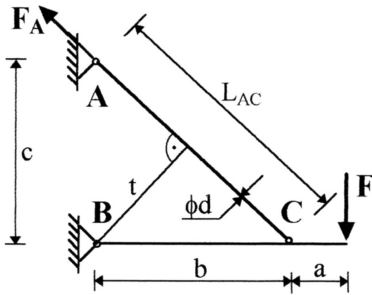
$$= -0,3 \cdot 7,19 \cdot 10^{-4} = -2,158 \cdot 10^{-4}$$

Ezek ismeretében az alakváltozási Mohr-diagram megszerkeszthető (4.1.7 ábra).

4.1.1-2 Feladat

A 4.1.8 ábrán egy rúdszerkezetet látunk, melyet F erő terhel.

4.1.8 ábra



Adatok: $a = 1 \text{ m}$,
 $b = 3 \text{ m}$,
 $c = 4 \text{ m}$,
 $d = 6 \text{ cm}$,
 $F = 240 \text{ kN}$,
 $R_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2$,
 $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

- Feladat:** 1. Ellenőrizzük a vázolt rúdszerkezet AC rúdját szilárdságilag (a bekötéseknél jelentkező hirtelen keresztmetszet-változás zavaró hatásától tekintsünk el)!
2. Számítsuk ki az AC rúd teljes hosszváltozását!
3. Határozzuk meg a rúd alakváltozási energiáját!

Megoldás:

1. Az AC rúd feszültségcsúcsra történő ellenőrzéséhez határozzuk meg a rúdban keletkező rúderőt. Írjunk fel nyomatéki egyenletet a B ponton átmenő síkra merőleges b tengelyre.

$$\Sigma M_{bi} = 0 = F \cdot (a + b) - F_A \cdot t.$$

Ebből

$$F_A = \frac{F(a + b)}{t}$$

t meghatározásához írjuk fel az ABC Δ területét:

$$\frac{1}{2} b c = \frac{1}{2} L_{AC} t,$$

amelyből

$$t = \frac{b c}{L_{AC}} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2,4 \text{ m}.$$

Helyettesítsünk be az F_A -ra kapott összefüggésbe:

$$F_A = \frac{240 (1 + 3)}{2,4} = 400 \text{ kN}.$$

A rúd igénybevétele: $N = F = 400 \text{ kN}$ húzóerő.

Az ébredő húzófeszültség:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{400}{\frac{6^2 \pi}{4}} = 14,15 \text{ kN/cm}^2.$$

$\sigma = 14,15 \text{ kN/cm}^2 < R_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2$,
 a rúd húzásra megfelel.

2. Az AC rúd teljes hosszváltozása az egyszerű Hooke-törvény segítségével:

$$\Delta L_{AC} = \frac{N L_{AC}}{AE} = \frac{400 \cdot 500}{\frac{6^2 \pi}{4} \cdot 2,1 \cdot 10^4} = 0,34 \text{ cm.}$$

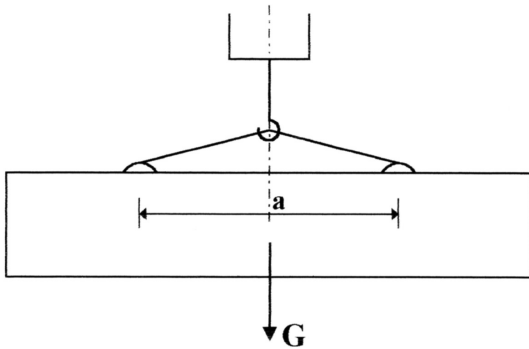
3. Mivel N , A és E egyaránt konstans, az AC rúd alakváltozási energiája a következő összefüggéssel számítható:

$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{E A} L_{AC} = \frac{400^2 \cdot 500}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot \frac{6^2 \pi}{4}} = 67,367 \text{ kNcm.}$$

4.1.1-3 Feladat

A 4.1.9 ábrán látható módon L hosszúságú n darab elemi szálból ($\varnothing d_1$) álló acélsodronnyal G súlyú terhet erősítünk az emelőhoroghoz.

4.1.9 ábra



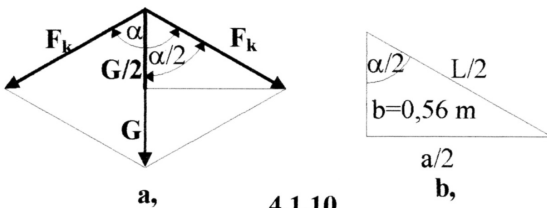
Adatok: $a = 3 \text{ m}$,
 $L = 3,2 \text{ m}$,
 $n = 96 \text{ db}$,
 $d_1 = 0,4 \text{ mm}$,
 $R_m = 1500 \text{ N/mm}^2$,
 $\gamma_b = 5$.

Feladat: Határozzuk meg, hogy mekkora súlyú terhet emelhet az acélsodronnyal, ha γ_b a teheremelésre előírt biztonsági tényező.

Megoldás:

Először a statikában tanultak szerint határozzuk meg – a keresett G súlyerő függvényében – az acélsodronnyban ébredő erőket. Bontsuk fel a G erőt a kötélgalak irányába eső összetevőkre. Rajzoljuk meg a vektorparalelogrammát (4.1.10 a, ábra).

4.1.10 ábra



Ebből a keresett F_k kötélterő:

$$F_k = \frac{G}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

A szerkezet geometriája alapján (4.1.10 b, ábra):

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{L} = \frac{0,56}{1,6} = 0,35, \quad \text{illetve} \quad F_k = \frac{G}{2 \cdot 0,35} = 1,43 G.$$

Az acélsodrony mértékadó igénybevétele – G súlyú teher emelésekor – $N = F_k$ nagyságú húzóerő. Húzóerő hatására az acélsodrony pontjaiban a feszültségi állapot egytengelyű. Tehát az acélsodrony megfelel, ha:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{1,43 G}{n \frac{d_1^2 \pi}{4}} \leq R_{adm} = \frac{R_m}{\gamma_b},$$

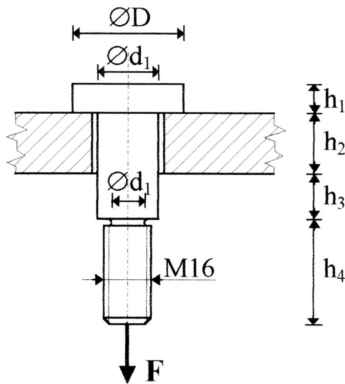
amiből az acélsodronnyal emelhető teher nagysága:

$$G \leq \frac{R_m \cdot n \cdot d_1^2 \cdot \pi}{\gamma_b \cdot 1,43 \cdot 4} = \frac{1500 \cdot 96 \cdot 0,4^2 \cdot \pi}{5 \cdot 1,43 \cdot 4} = 2530,85 \text{ N.}$$

4.1.1-4 Feladat

A 4.1.11 ábrán menetes végű függesztőcsap látható, melyet F húzóerő terhel.

4.1.11. ábra



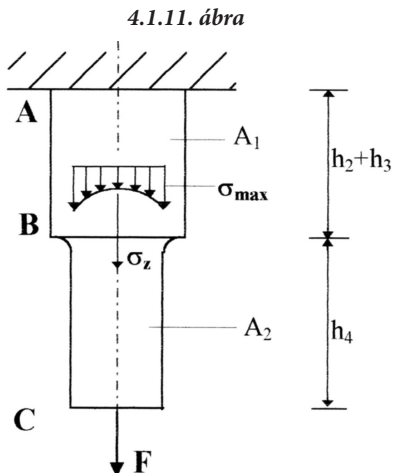
Adatok: $R_{adm} = 24 \text{ kN/cm}^2$,
 $F = 15 \text{ kN}$,
 $h_2 + h_3 = 3 \text{ cm}$,
 $h_4 = 4 \text{ cm}$,
 $d = 20 \text{ mm}$,
 $d_1 = 13 \text{ mm}$,
 $\alpha_{sc} = 2$,
 $E = 2,06 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat:

1. Ellenőrizzük a csapot szilárdságilag!
2. Határozzuk meg a csap alsó keresztmetszetének eltolódását!

Megoldás:

1. A 4.1.11. ábrán látható menetes csapot egy végén befogott, hirtelen változó keresztmetszetű húzott rúddal modellezhetjük (4.1.12 ábra).



Veszélyes keresztmetszete a B, ahol a hirtelen keresztmetszetváltozás miatt feszültségcsúcs lép fel, melynek nagysága:

$$\sigma_{max} = \sigma_{nom} \cdot \alpha_{sc} = \frac{F}{A} \cdot \alpha_{sc}$$

Az $\varnothing 13 \text{ mm}$ -es kör területe:

$$A = \frac{1,3^2 \cdot \pi}{4} = 1,327 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{max} = \frac{15}{1,327} \cdot 2 = 22,6 \text{ kN/cm}^2 < R_{adm} = 24 \text{ kN/cm}^2$$

tehát a csap húzásra megfelel.

Megjegyezzük, hogy a szerkezeti elemek nyírásra történő vizsgálatát a 4.2.1-1 feladatban végezzük el.

2. A csap alsó keresztmetszetének függőleges eltolódását a csap teljes megnyúlása adja. Ennek számításánál a hirtelen keresztmetszetrozítás feszültséget és ebből adódóan fajlagos nyúlást növelő hatását elhanyagolhatjuk. Tehát

$$\Delta L = \frac{F(h_2 + h_3)}{A_1 \cdot E} + \frac{F \cdot h_4}{A_2 \cdot E} = \frac{F}{E} \left(\frac{h_2 + h_3}{A_1} + \frac{h_4}{A_2} \right)$$

ahol: $A_2 = A_s$ az úgynevezett feszültségkeresztmetszet, amit a magátmérő és a közepes átmérő átlagából számolunk, ill. a táblázat alapján $A_2 = 1,57 \text{ cm}^2$.

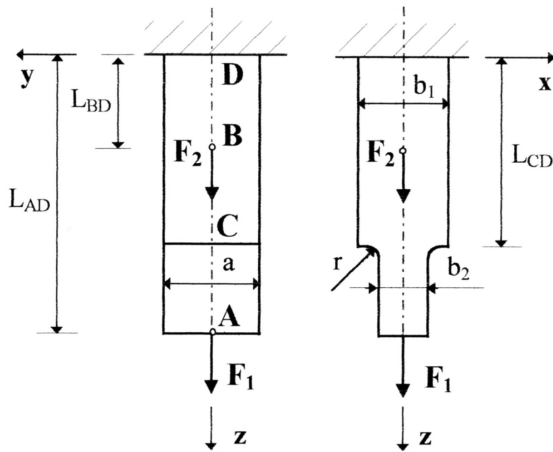
Végezzük el a behelyettesítést!

$$\Delta L = \frac{15}{2 \cdot 10^4} \left(\frac{3}{1^2 \cdot \pi} + \frac{4}{1,57} \right) = 2,63 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,0263 \text{ mm}.$$

4.1.1-5 Feladat

A 4.1.13 ábrán látható befalazott tartót az A keresztmetszetben F_1 , a B keresztmetszetben F_2 erőkkel terheljük. Az AC és CD szakaszon állandó keresztmetszetű a tartó.

4.1.13 ábra



Adatok:

$$\begin{aligned} F_2 &= 2F_1, \\ R_{adm} &= 15 \text{ kN/cm}^2, \\ E &= 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2, \\ r &= 6 \text{ mm}, \\ L_{AD} &= 1,8 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{CD} &= 1,2 \text{ m}, \\ L_{BD} &= 0,6 \text{ m}, \\ a &= 2 \text{ cm}, \\ b_1 &= 2 \text{ cm}, \\ b_2 &= 1 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Feladat:

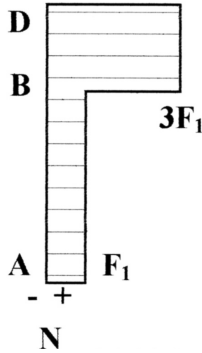
1. Meddig növelhetjük az erők nagyságát, hogy a tartó szilárdságilag még megfeleljen (az önsúly hatását figyelmen kívül hagyjuk)?
2. A maximális terhelés mellett számítsuk ki a rúd megnyúlását!
3. Ellenőrizzük a tartó C keresztmetszetét, ahol hirtelen keresztmetszetrozítás van!
Az ellenőrzést a maximális terhelésre végezzük el!

Megoldás:

1. Terhelőerők meghatározása. Elsőként rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráját.
A 4.1.14 ábrán látható rúderő ábra alapján a BD szakasz keresztmetszetei látszanak veszélyesnek. Nem szabad azonban figyelmen kívül hagyni, hogy a tartó nem állandó keresztmetszetű.

Az AC szakaszon a tartó keresztmetszete csak fele, mint a CD szakaszon. Mivel azonban a rúderő értéke csak 1/3-a, így egyértelmű vizsgálatunk elején tett megállapításunk. Vagyis a BD szakasz igénybevétele a mértékadó igénybevétel.

4.1.14 ábra



Fenti megállapításunknál nem vettük figyelembe, hogy C-ben hirtelen változik meg a tartó keresztmetszete. Tehát a C keresztmetszetben feszültségcsúcs várható. Végezzük el a vizsgálatot a BD szakaszon.

Itt

$$N = N_{\max} = 3 \cdot F_1$$

Mivel a húzott rúdban a feszültségi állapot egytenge-lyű, a rúd megfelel, ha

$$\frac{N_{\max}}{A_{BD}} = \frac{3 \cdot F_1}{A_{BD}} \leq R_{adm}$$

amiből

$$F_1 \leq \frac{R_{adm} \cdot A_{BD}}{3} = \frac{R_{adm} \cdot a \cdot b_1}{3}$$

Behelyettesítés után az ismeretlen erőkre

$$F_1 \leq \frac{15 \cdot 2 \cdot 2}{3} = 20 \text{ kN}, \text{ illetve } F_2 \leq 40 \text{ kN} \text{ adódik.}$$

2. A rúd teljes hosszváltozásának meghatározásánál figyelembe kell venni, hogy a tartóban ébredő rúderő és a keresztmetszet is szakaszosan változik. Számításunknál $F_1 = 20 \text{ kN}$ maximális terhelő erőt vegyünk figyelembe.

Írhatjuk:

$$\Delta L_{AD} = \Delta L_{AC} + \Delta L_{CB} + \Delta L_{BD}.$$

Részletesebben:

$$\Delta L_{AD} = \frac{F_1 \cdot L_{AC}}{E \cdot a \cdot b_2} + \frac{F_1 \cdot L_{CB}}{E \cdot a \cdot b_1} + \frac{3 \cdot F_1 \cdot L_{BD}}{E \cdot a \cdot b_1}$$

Helyettesítsünk be: $\Delta L_{AD} = \frac{20}{2 \cdot 10^4} \left(\frac{60}{2 \cdot 1} + \frac{60}{2 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 60}{2 \cdot 2} \right) = 0,09 \text{ cm}.$

3. A tartó C keresztmetszetében a keresztmetszet hirtelen változik, ezért itt feszültségcsúcs várható, a feszültségeloszlás nem egyenletes. Rajzoljuk meg a feszültségeloszlást a keresztmetszetben (4.1.15 ábra).

A várható feszültségcsúcs:

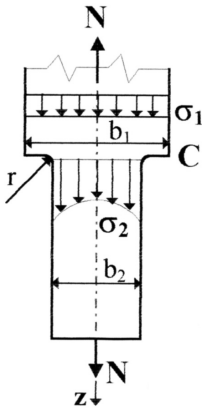
$$\sigma_{z \max} = \alpha_{sc} \cdot \sigma_{c \text{ nom}}$$

ahol α_{sc} alak tényező és

$$\sigma_{c \text{ nom}} = \frac{F_1}{a \cdot b_2}$$

α_{sc} a keresztmetszet megváltozásának mértékétől, valamint a keresztmetszetváltozás kialakítá-sától függ és táblázatból vehető:

4.1.15 ábra



$$\alpha_{sc} = 1,355.$$

Behelyettesítve a az $\sigma_{z \max}$ -ra felírt összefüggésbe:

$$\sigma_{z \max} = 1,355 \cdot \frac{20}{2} = 13,55 \text{ kN / cm}^2.$$

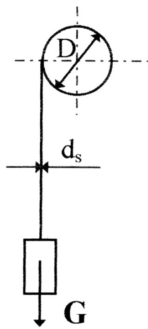
$$\text{Mivel } \sigma_{z \max} = 13,55 \text{ kN/cm}^2 < R_{adm} = 15 \text{ kN/cm}^2,$$

a tartó a keresztmetszetváltozás helyén keletkező feszültségcsúcsra is megfelel.

4.1.1-6 Feladat

Egy D átmérőjű kábeldobra acélsodrony kötelet cséveltünk, mellyel egy G súlyú terhet mozgunk.

4.1.16 ábra



Adatok:

$$\begin{aligned} D &= 0,6 \text{ m}, & R_{adm} &= 130 \text{ MPa}, \\ d_s &= 4,7 \text{ mm}, & E &= 2,06 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \\ A_s &= 8,4 \text{ mm}^2, & g_s &= 0,77 \text{ N/m}, \\ G &= 500 \text{ N}. \end{aligned}$$

Feladat:

Határozzuk meg, hogy a kábeldob 100 körülfordulása után mennyit süllyed a G terhel!

Megoldás: A terhel süllyedése a leengedett sodronyhossz és a sodrony megnyúlásának összege.

A kábeldob 100 fordulattal $L = 100 \cdot D \cdot \pi$ hosszúságú sodronyt enged le.

A huzal egyes keresztmetszeteiben fellépő belső erőt a következő függvénnyel írhatjuk le:

$$N(z) = G + z \cdot g_s$$

ebből következik állandó keresztmetszetet feltételezve a keresztmetszetekben fellépő feszültségre:

$$\sigma_z(z) = \frac{N(z)}{A_s} = \frac{G + z \cdot g_s}{A_s}$$

Az egyszerű Hooke-törvény alapján a megnyúlás

$$\Delta L = \frac{\sigma_z \cdot L}{E}$$

A mi esetünkben ez minden dz hosszúságú részre igaz.

Ennek alapján:

$$\Delta L = \frac{\int_0^L (G + z \cdot g_s) dz}{E \cdot A_s} = \frac{\left[G \cdot z + \frac{g_s \cdot z^2}{2} \right]_0^{100 D \pi}}{E \cdot A_s} = \frac{G \cdot 100 D \pi + g_s \cdot (100 D \pi)^2 \cdot 0,5}{E \cdot A_s},$$

$$\Delta L = \frac{500 \cdot 100 \cdot 0,6 \cdot \pi + 0,77 \cdot (100 \cdot 0,6 \cdot \pi)^2 \cdot 0,5}{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 8,4 \cdot 10^{-6}} = 0,065 \text{ m}.$$

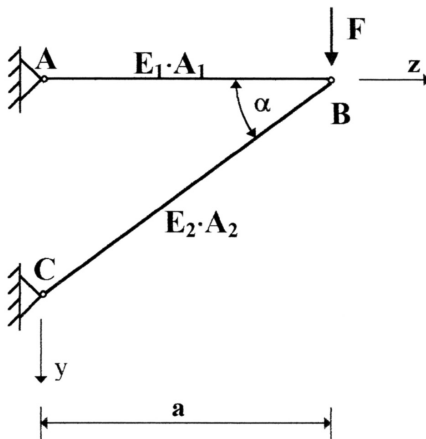
Tehát a dob 100 fordulatra a teher

$$100 \cdot D \cdot \pi + \Delta L = 188,495 + 0,065 = 188,56 \text{ m} \text{ -t süllyed.}$$

4.1.1-7 Feladat

Adott a 4.1.17. ábrán látható háromcsuklós szerkezet.

4.1.17 ábra



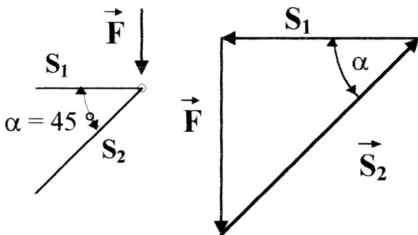
Adatok: $a = 2 \text{ m}$,
 $\alpha = 45^\circ$,
 $F = 200 \text{ kN}$
 $E_1 = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$,
 $E_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$,
 $A_1 = 10 \text{ cm}^2$,
 $A_2 = 100 \text{ cm}^2$.

Feladat: 1. Határozzuk meg a rudakban keletkező feszültségek nagyságát és a rudak megnyúlását!
 2. Határozzuk meg a B csukló elmozdulását!

Megoldás:

1. A rudakban fellépő feszültségek meghatározásához elsőként a rúderőket kell meghatározunk. A 4.1.18 ábra szerinti vektorábrából meghatározhatók az S_1 és S_2 rúderők.

4.1.18 ábra



$$S_1 = F = 200 \text{ kN (+)},$$

$$S_2 = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{200}{\sin 45^\circ} = 282,8 \text{ kN (-)}.$$

A rudakban keletkező feszültségek:

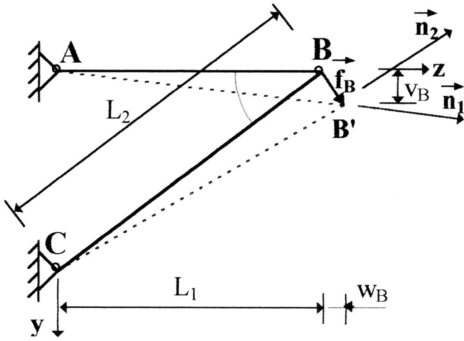
$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A_1} = \frac{200}{10} = 20 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{A_2} = \frac{282,8}{100} = 2,828 \text{ kN/cm}^2.$$

A rudak hosszváltozása:

$$\Delta L_1 = \frac{S_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{200 \cdot 200}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0,19 \text{ cm}, \Delta L_2 = \frac{S_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{-282,8 \cdot \sqrt{2} \cdot 200}{2 \cdot 10^4 \cdot 100} = -0,04 \text{ cm}$$

4.1.19 ábra



2. A B csukló elmozdulását $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ elmozdulásösszetevőivel adjuk meg. A tartószerkezet elmozdulásának mechanizmusát a 4.1.19 ábrán vázoltuk. Geometriai összefüggések:

$$\overline{AB} = L_1,$$

$$\overline{AB'} = L_1 + \Delta L_1,$$

$$\overline{CB} = L_2,$$

$$\overline{CB'} = L_2 + \Delta L_2.$$

Fenti összefüggések az eredeti (L_1 , illetve L_2) rúd hosszak $L_1 + \Delta L_1$ illetve $L_2 + \Delta L_2$ -re történő megváltozását fejezik ki.

Az elmozdulásvektor az eredeti és a megváltozott geometriai alakzat rúdjaiknak a kezdőpontból a végpontjukba mutató vektorainak különbségvektora. $\vec{f}_B = \vec{AB'} - \vec{AB} = \vec{CB'} - \vec{CB}$, részletezve a vektoregyenletet:

$$(\mathbf{L}_1 + \Delta \mathbf{L}_1) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{L}_2 + \Delta \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{n}_2 - \mathbf{a} \cdot (-\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Képezve a vektoregyenlet y és z irányú vetületi egyenleteit:

$$(\mathbf{L}_1 + \Delta \mathbf{L}_1) \cdot \mathbf{n}_{1y} = (\mathbf{L}_2 + \Delta \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{n}_{2y} + \mathbf{a},$$

$$(\mathbf{L}_1 + \Delta \mathbf{L}_1) \cdot \mathbf{n}_{1z} - \mathbf{L}_1 = (\mathbf{L}_2 + \Delta \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{n}_{2z} - \mathbf{a}.$$

Fenti két egyenletben négy ismeretlen van (az $\mathbf{n}_1$, és $\mathbf{n}_2$ egységvektorok összetevői), meghatározásukhoz két további egyenlet szükséges:

$$\mathbf{n}_{1y}^2 + \mathbf{n}_{1z}^2 = 1 \text{ és } \mathbf{n}_{2y}^2 + \mathbf{n}_{2z}^2 = 1,$$

ezekkel együtt a négy ismeretlen meghatározható.

Az egyenletrendszer megoldása részletezés nélkül:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{2y} &= \frac{(\mathbf{L}_1 + \Delta \mathbf{L}_1)^2 - (\mathbf{L}_2 + \Delta \mathbf{L}_2)^2 - \mathbf{L}_1^2}{2 \cdot (\mathbf{L}_2 + \Delta \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{L}_1} = \\ &= \frac{(200 + 0,19)^2 - (\sqrt{2} \cdot 200 - 0,04)^2 - 200^2}{2 \cdot (\sqrt{2} \cdot 200 - 0,04) \cdot 200} = -0,70633, \end{aligned}$$

$$\mathbf{n}_{2z} = \sqrt{1 - \mathbf{n}_{2y}^2} = \sqrt{1 - 0,70633^2} = 0,70788,$$

$$\mathbf{n}_{1y} = \frac{(\mathbf{L}_2 + \Delta \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{n}_{2y} + \mathbf{a}}{\mathbf{L}_1 + \Delta \mathbf{L}_1} = \frac{-(\sqrt{2} \cdot 200 - 0,04) \cdot 0,70633 + 200}{200 + 0,19} = 1,2386 \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{n}_{1z} = \sqrt{1 - \mathbf{n}_{1y}^2} = \sqrt{1 - 1,2386^2 \cdot 10^{-6}} = 0,99999.$$

Az elmozduláskomponensek:

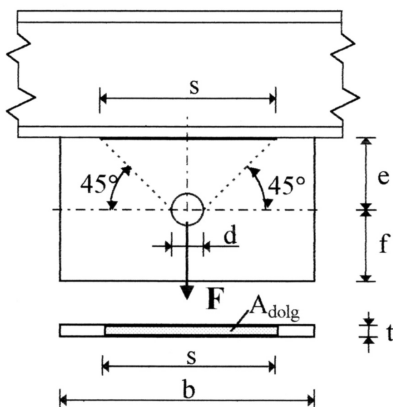
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{f}_{By} = (\mathbf{L}_1 + \Delta \mathbf{L}_1) \cdot \mathbf{n}_{1y} = (200 + 0,19) \cdot 1,2386 \cdot 10^{-3} = 0,248 \text{ cm},$$

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{f}_{Bz} = (\mathbf{L}_1 + \Delta \mathbf{L}_1) \cdot \mathbf{n}_{1z} - \mathbf{L}_1 = (200 + 0,19) \cdot 0,99999 - 200 = 0,188 \text{ cm}.$$

4.1.1-8 Feladat

A 4.1.20 ábrán egy I keresztmetszetű tartóra hegesztett felfüggesztő elemet látunk.

4.1.20 ábra



Adatok: b= 250 mm,
e= 80 mm,
t = 10 mm,
d = 21 mm,
F = 60 kN,
 $R_{adm} = 160$ MPa,
 $R_{padm} = 320$ MPa.

Feladat: Ellenőrizzük a felfüggesztő elemet, ha az F erő a furat palástján adódik át!

Megoldás:

Ellenőrizzük először a palástnyomási feszültséget! A palástnyomásra igénybevett vetületi felület: $A_p = 2,1 \cdot 1,0 = 2,1 \text{ cm}^2$.

A paláston fellépő nyomófeszültség:

$$\sigma_p = \frac{F}{A_p} = \frac{60000}{210} = 285,7 \text{ MPa} < R_{padm} = 370 \text{ MPa},$$

tehát az elem palástnyomásra megfelel.

A palásfelületen áthatódó F erő nem a teljes keresztmetszetet terheli, hanem közelítően az ábrán 45°-os szétterüléssel adódó dolgozó felületet.

A dolgozó hossz:

$$s = d + 2 \cdot e = 21 + 2 \cdot 80 = 181 \text{ mm.}$$

A dolgozó felület:

$$A_{\text{dolg}} = s \cdot v = 18,1 \cdot 1,0 = 18,1 \text{ cm}^2.$$

A fellépő húzófeszültség:

$$\sigma_k = \frac{F}{A_{\text{do lg}}} = \frac{60000}{1810} = 33 \text{ MPa},$$

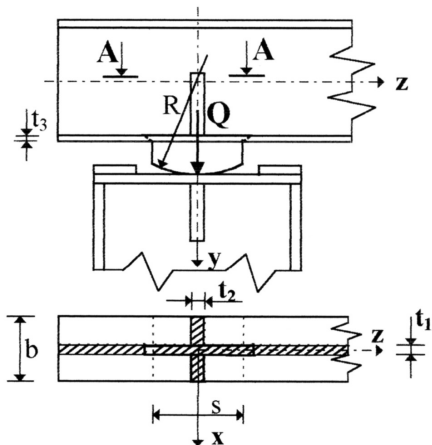
$$\sigma_k = 33 \text{ MPa} < R_{adm} = 160 \text{ MPa},$$

tehát a felfüggesztő elem szilárdságilag megfelel.

4.1.1-9 Feladat

Egy kéttámaszú tartó egyik támaszának részleteit vázoltuk a 4.1.21 ábrán.

4.1.21 ábra



Adatok: $R = 0,2 \text{ m}$,
 $b = 0,1 \text{ m}$,
 $s = 0,1 \text{ m}$,
 $t_1 = t_2 = t_3 = 8 \text{ mm}$,
 $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ MPa}$,
 $R_{\text{adm}} = 160 \text{ MPa}$,
 $R_{\text{Hertz}} = 840 \text{ MPa}$,
 saru anyaga: Fe 490 (A 50),
 szerkezeti anyag: Fe 275 (A 44).

Feladat: Határozzuk meg, hogy mekkora kényszererőt képes a saru felvenni!

Megoldás:

A saru és sarufészek közti vonalmenti érintkezéskor fellépő feszültség a következőképpen számítható:

$$\sigma_v = 0,42 \cdot \sqrt{\frac{F \cdot E}{b \cdot R}} \leq \sigma_{\text{Hertz}},$$

amiből a támaszerő határértéke a saru határfeszültsége alapján:

$$F_{H1} = \frac{\sigma_{Hertz}^2 \cdot b \cdot R}{0,42^2 \cdot E} = \frac{840^2 \cdot 100 \cdot 200}{0,42^2 \cdot 2,06 \cdot 10^5} = 388350 \text{ N.}$$

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy mekkora erő felvételére képes az alapanyag. A dolgozó keresztmetszetet az A-A metszeten rajzoltuk be, melynél közelítően 45°-os szétterülés feltételével éltünk.

$$A_{\text{dolg}} = (s + 2 \cdot t_3) \cdot t_1 + t_2 \cdot (b - t_1) = (100 + 16) \cdot 8 + 8 \cdot (100 - 8) = 1664 \text{ mm}^2.$$

A reakcióerő határértéke az alapanyag teherbírása alapján:

$$F_{H2} = R_{adm} \cdot A_{dolg} = 160 \cdot 1664 = 266240 \text{ N.}$$

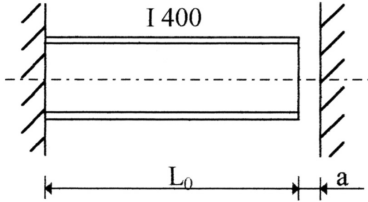
A lehetséges maximális reakcióerő a két számított határérték közül a kisebb, vagyis

$$\mathbf{F_H = 266,24 \text{ kN.}}$$

4.1.1-10 Feladat

A 4.1.22 ábrán látható rúd egyik végén befogott, a szabad végétől "a" távolságban egy merev szerkezeti elem helyezkedik el.

4.1.22 ábra



Adatok: $L_0 = 2 \text{ m}$,
 $a = 1 \text{ mm}$,
 $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/C}^\circ$,
 $T_1 = 20 \text{ C}^\circ$,
 $T_2 = 120 \text{ C}^\circ$,
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Feladat: Mekkora rúderő és feszültség keletkezik a rúdban, ha a hőmérséklet T_1 -ről T_2 -re növekszik?

Megoldás:

A rúd megnyúlása akadályozatlan hőtágulás esetén:

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = 2000 \cdot 1,4 \cdot 10^{-5} \cdot (120 - 20) = 2,8 \text{ mm}.$$

A gátolt megnyúlás: $\Delta L_g = \Delta L - a = 2,8 - 1 = 1,8 \text{ mm}$.

A gátolt alakváltozást úgy is értelmezhetjük, mintha az $L_0 + \Delta L$ hosszúságú rudat ($L_0 + \Delta L_{sz}$) -re nyomtuk volna össze ($\Delta L_{sz} = a = 1 \text{ mm}$, szabad megnyúlás).

A rúd fajlagos hosszváltozása:

$$\varepsilon_z = -\frac{\Delta L_g}{L_0 + \Delta L} = -\frac{1,8}{2000 + 2,8} = -8,99 \cdot 10^{-4}$$

Az egyszerű Hooke-törvény alapján a rúdban ébredő feszültség:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = 2,1 \cdot 10^5 \cdot (-8,99 \cdot 10^{-4}) = -188,7 \text{ MPa},$$

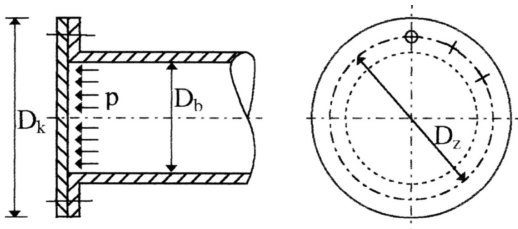
a fellépő erő: $F = \sigma_z \cdot A = -188,7 \cdot 1,18 \cdot 10^4 = -2,227 \cdot 10^6 \text{ N} = -2227 \text{ kN}$,

ahol: $A = 118 \text{ cm}^2 = 1,18 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$ táblázatból vehető.

4.1.1-11 Feladat

A 4.1.23 ábrán egy csavarozott kivitelű csővéglezárást ábrázoltunk. A D_b belső átmérőjű csőben p belső nyomás uralkodik. A lezárolapot D_z átmérőjű körön elhelyezkedő n db csavarral szorítjuk a csővéghöz. A csavar anyagának megengedett feszültsége R_{adm} , rugalmassági modulusa E .

4.1.23 ábra



Adatok:

$D_k = 620 \text{ mm}$, $t_1 = 10 \text{ mm}$,
 $D_b = 400 \text{ mm}$, $t_2 = 12 \text{ mm}$,
 $D_z = 560 \text{ mm}$, $t_t = 1 \text{ mm}$,
 $p = 10 \text{ bar} = 1 \text{ MPa}$, $t_a = 3 \text{ mm}$,
 $R_{adm} = 190 \text{ MPa}$,
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$,
 $n = 12$.

- Feladat:** 1. Határozzuk meg a szükséges csavarátmérőt, ha a tömítendő felületek közötti nyomás nem csökkenhet p érték alá!
2. Határozzuk meg a csavarok fajlagos nyúlását és hosszváltozását!

Megoldás:

1. A fedőlapra ható p nyomás eredője csavarokon keresztül adódik át a csőkarimára.

A csavarokat olyan mértékben kell meghúzni (előfeszíteni), hogy a belső nyomás működése után se csökkenjen a felületek közötti p_r fajlagos összeszorító erő p érték alá. Vizsgáljuk meg, hogy p belső nyomás működése mekkora p_r fajlagos erőváltozást okoz! Az eredő erők egyensúlyából írhatjuk:

$$p \cdot \frac{D_b^2 \cdot \pi}{4} = p_r \cdot \frac{D_k^2 - D_b^2}{4} \cdot \pi,$$

amiből

$$p_r = p \cdot \frac{D_b^2}{D_k^2 - D_b^2}.$$

Az összes szükséges nyomás:

$$p_{\bar{o}} = p + p_r = p \cdot \left(1 + \frac{D_b^2}{D_k^2 - D_b^2} \right) = 1,0 \cdot \left(1 + \frac{400^2}{620^2 - 400^2} \right) = 1,713 \text{ MPa}.$$

Egy csavart terhelő húzóerő:

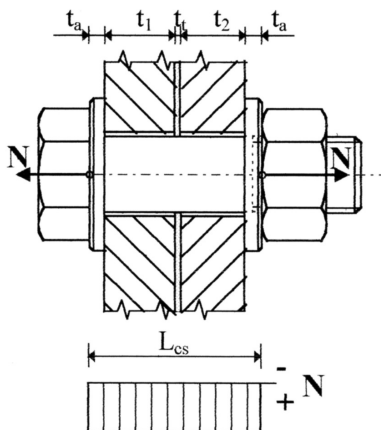
$$F_{cs} = \frac{p_{\bar{o}} \cdot (D_k^2 - D_b^2) \cdot \pi}{4 \cdot n} = \frac{1,713 \cdot (620^2 - 400^2) \cdot \pi}{4 \cdot 12} = 25159 \text{ N} \approx 25,16 \text{ kN}.$$

A csavarok szükséges magátmérője:

$$d_{msz} = \sqrt{\frac{4 \cdot F_{cs}}{R_{adm} \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 25,16}{19 \cdot \pi}} = 1,298 \text{ cm}$$

ami alapján **M 16** méretű csavart választunk, ennek magátmérője $d_m = 13,55 \text{ mm}$, magkeresztmetszete $A_m = 1,44 \text{ cm}^2$, szárkeresztmetszete $A_{sz} = 2,01 \text{ cm}^2$.

4.1.24 ábra



2. A csavarok fajlagos nyúlását a szárkeresztmetszet alapján számíthatjuk. Ekkor azt feltételezzük, hogy a csőkarima és fedőlemez együttes közrefogására nem jut menetes rész (4.1.24 ábra)

A csavar dolgozó – erőt-felvevő – hossza L_{cs} .

$$L_{cs} = 2 \cdot t_a + t_1 + t_2 + t_1 = 2 \cdot 3 + 10 + 12 + 1 = 29 \text{ mm}.$$

A csavar fajlagos nyúlása:

$$\varepsilon_{cs} = \frac{\sigma_{cs}}{E} = \frac{F_{cs}}{A_{sz} \cdot E} = \frac{25160}{201 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 5,961 \cdot 10^{-6}.$$

A csavar megnyúlása:

$$\Delta L_{cs} = L_{cs} \cdot \varepsilon_{cs} = 29 \cdot 5,961 \cdot 10^{-6} = 0,0173 \text{ mm}.$$

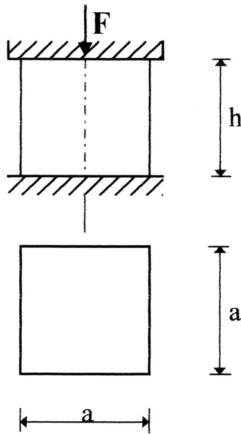
Megjegyzés: Tövigmenetes csavar alkalmazásakor a csavar magkeresztmetszetével kell számolnunk az alakváltozási jellemzőket.

Egyes szabványok szerint az erőteni számításokban az ún. feszültség-keresztmetszetet vehetjük számításba. Ez a magátmérő és közepes átmérő átlagával számított keresztmetszeti terület.

4.1.1-12 Feladat

A 4.1.25 ábrán C 10-es betonból készült tömböt látunk. A tömböt felső keresztmetszetében egyenletesen megoszló erőrendszer terheli, amelynek eredője a súlyponton támadó F erővel helyettesíthető. Így a betontömb, mint központosan nyomott zömök rúd vizsgálható.

4.1.25 ábra



Adatok: $h = 40 \text{ cm}$,
 $a = 20 \text{ cm}$,
 $F = 20 \text{ kN}$,
 $p = 10 \text{ bar} = 1 \text{ MPa}$,
 $R_{be} = 10 \text{ MPa}$,
 $E_b = 7,1 \cdot 10^3 \text{ MPa}$.

Feladat: 1. Határozzuk meg a betonoszlopban ébredő feszültséget az önsúly elhanyagolásával!

2. Számítsuk ki az oszlop hosszváltozását!

3. Határozzuk meg az oszlop törőerejét!

Megoldás:

Az oszlop igénybevétele nyomóerő:

$$N = F = 200 \text{ kN}.$$

A betonoszlopban keletkező feszültség:

$$\sigma_k = \frac{F}{A} = \frac{N}{a \cdot a} = \frac{200000}{200 \cdot 200} = 5 \text{ MPa},$$

A hosszváltozás:

$$\Delta L = \frac{N \cdot h}{E \cdot A} = \frac{-200000 \cdot 400}{7100 \cdot 200 \cdot 200} = -0,28 \text{ mm}.$$

A törést okozó erő R_{bc} feszültséget hoz létre, ezért a törőerő:

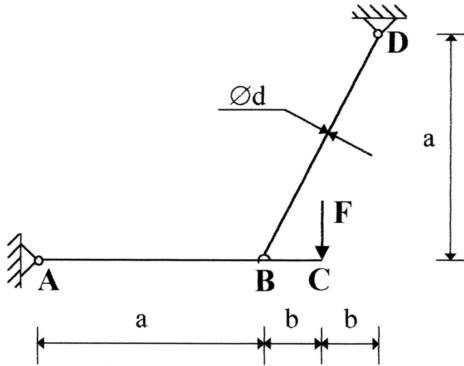
$$N_c = R_{bc} \cdot A = 10 \cdot 200 \cdot 200 = 400000 \text{ N} = 400 \text{ kN}.$$

C. 4.1.1 GYAKORLÓ FELADATOK

4.1.1-13 Feladat

A 4.1.26 ábrán látható rúdszerkezetet F erő terheli.

4.1.26 ábra



Adatok: $a = 1,2 \text{ m}$,
 $b = 0,4 \text{ m}$,
 $d = 4 \text{ mm}$,
 $F = 1000 \text{ N}$,
 $R_{\text{adm}} = 140 \text{ MPa}$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

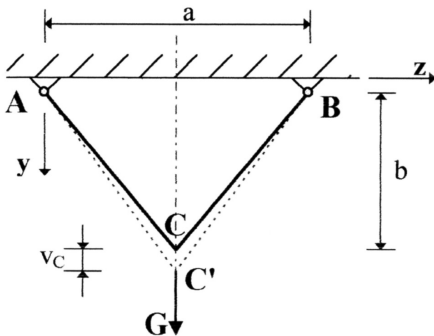
Feladat: 1. Ellenőrizze a szerkezet **BD** rúdját!
 2. Határozza meg a **BD** rúd megnyúlását!

Eredmények:	$\sigma_h = 127 \text{ MPa} < R_{\text{adm}} = 140 \text{ MPa}$,	$\Delta L = 0,9 \text{ mm}$.
-------------	---	-------------------------------

4.1.1-14 Feladat

A 4.1.27 ábrán kötélszerkezetre függesztettünk egy G súlyú testet. A kötélet kis átmérőjű köracél.

4.1.27 ábra



Adatok: $d = 3 \text{ mm}$,
 $a = 6 \text{ m}$,
 $b = 4 \text{ m}$,
 $v_c = 5 \text{ mm}$,
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

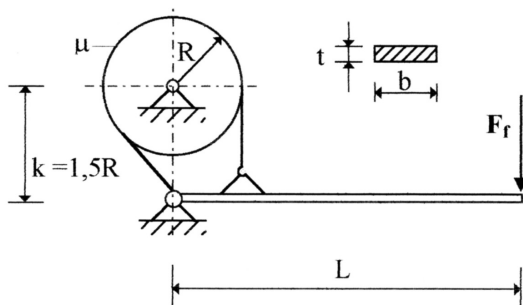
Feladat: Határozza meg a rúdszerkezet terhelhetőségét, ha a **C** csomópont megengedett süllyedése v_c !

Eredmény:	$G = 1,187 \text{ kN}$.
-----------	--------------------------

4.1.1-15 Feladat

A 4.1.28 ábrán egy egykaros szalagfék látható.

4.1.28 ábra



Adatok: $R = 15 \text{ cm}$,
 $\mu = 0,2$,
 $L = 45 \text{ cm}$,
 $t = 1 \text{ mm}$,
 $F_f = 500 \text{ N}$,
 $R_{adm} = 24 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Határozza meg a fékszalag szükséges b szélességét, mely alkalmas az F_f fékezőerő továbbítására!

Eredmény:	$b = 13,56 \text{ mm}$.
-----------	--------------------------

4.1.1-16 Feladat

Egy L hosszúságú acélszalra Q terhet kívánunk felfüggeszteni.

Adatok: $Q = 80 \text{ N}$, $L = 10 \text{ m}$, $\Delta L_{adm} = 5 \text{ mm}$, $R_{adm} = 140 \text{ MPa}$, $E = 206000 \text{ MPa}$.

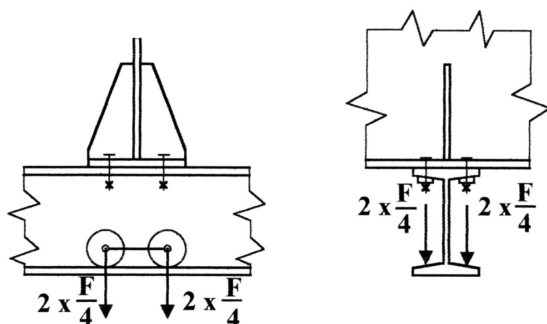
Feladat: Határozza meg az acélszal szükséges átmérőjét a feszültség- és az alakváltozás korlátozása szempontjából!

Eredmények:	$d_{alk} = 1 \text{ mm}$,	$A_{sz} = 0,776 \text{ mm}^2$.
-------------	----------------------------	---------------------------------

4.1.1-17 Feladat

A 4.1.29 ábrán egy MSZ 325 szerinti **I 300**-as keresztmetszetű futómacskapálya felfüggesztési részletét ábrázoltuk. A futómacska négy egymáshoz közelálló kerekén egyenként $F/4$ nagyságú keréknyomás adódik át. A pályát L távolságonként függesztjük fel. Az emelt teherre vonatkozó biztonsági tényező γ_b , a dinamikus tényező μ .

4.1.29 ábra



Adatok: $L = 6 \text{ m}$,
 $\mu = 1,4$,
 $\gamma_b = 1,8$,
 $F = 8 \text{ kN}$,
 $R_{u,cs} = 18 \text{ kN/cm}^2$.

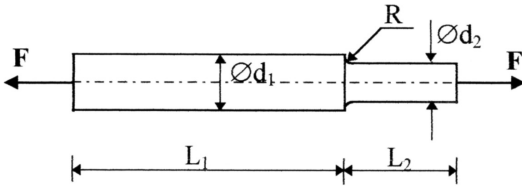
Feladat: Határozza meg a felfüggesztőcsavarok szükséges átmérőjét!

Eredmény:	Szükséges 4 db M8-as csavar.
-----------	------------------------------

4.1.1-18 Feladat

A 4.1.30 ábrán vázolt d_1 és d_2 átmérőjű szakaszokból álló, kör keresztmetszetű egyenes rudat F erő terheli. a keresztmetszet hirtelen változásának zavaró hatásától eltekintünk.

4.1.30 ábra



Adatok: $d_1 = 4 \text{ cm}$,
 $d_2 = 3 \text{ cm}$,
 $L_1 = 50 \text{ cm}$,
 $L_2 = 20 \text{ cm}$,
 $R_{adm} = 10 \text{ kN/cm}^2$,
 $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$,
 $\nu = 0,3$.

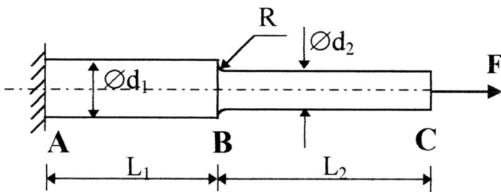
- Feladat: 1. Határozza meg F erő maximális értékét!
 2. Határozza meg a rúd hosszváltozását!
 3. Határozza meg a d_2 átmérő csökkenését!

Eredmények:	$F_{max} = 70,68 \text{ kN}$,	$\Delta L = 0,024 \text{ cm}$,	$\Delta d_2 = -4,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$.
-------------	--------------------------------	---------------------------------	--

4.1.1-19 Feladat

A 4.1.31 ábrán vázolt rudat az A keresztmetszetben F erő terheli. A hirtelen keresztmetszetváltozás miatti feszültségkoncentrációs tényező α_{sc} .

4.1.31 ábra



Adatok: $F = 25 \text{ kN}$,
 $d_1 = 32 \text{ mm}$,
 $d_2 = 20 \text{ mm}$,
 $L_1 = 40 \text{ cm}$,
 $L_2 = 60 \text{ cm}$,
 $R_{adm} = 12 \text{ kN/cm}^2$,
 $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$,
 $\alpha_{sc} = 1,3$.

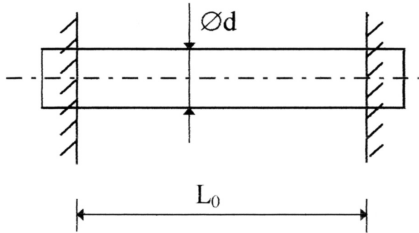
- Feladat: 1. Ellenőrizze a rudat a keresztmetszetváltozás helyén!
 2. Határozza meg a rúd megnyúlását!
 3. Határozza meg a d_2 átmérő csökkenését!

Eredmények:	$\sigma_{max} = 10,34 \text{ kN/cm}^2$,	$\Delta L_{AC} = 0,03 \text{ cm}$,	$\Delta d_2 = -2,387 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$.
-------------	--	-------------------------------------	--

4.1.1-20 Feladat

A 4.1.32 ábrán látható két végén befogott rudat T_1 hőmérsékleten építették be a merev falba.

4.1.32 ábra



Adatok: $T_1 = 26\text{ }^\circ\text{C}$,
 $T_2 = -4\text{ }^\circ\text{C}$,
 $L_0 = 80\text{ cm}$,
 $d = 4\text{ cm}$,
 $E = 13900\text{ kN/cm}^2$,
 $\alpha_t = 1,66 \cdot 10^{-5}\text{ }1/^\circ\text{C}$.

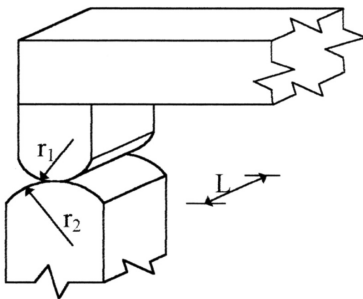
Feladat: Mekkora feszültség és erő ébred a rúdban, ha a hőmérséklet T_2 -re csökken?

Eredmények:	$\sigma = 6,92\text{ kN/cm}^2$,	$F = 86,99\text{ kN}$.
-------------	----------------------------------	-------------------------

4.1.1-21 Feladat

A 4.1.33 ábrán egy kéttámaszú gerenda megtámasztása látható.

4.1.33 ábra



Adatok: $r_1 = 0,1\text{ m}$,
 $r_2 = 0,2\text{ m}$,
 $F = 200\text{ kN}$,
 $E = 206000\text{ MPa}$,
 $\gamma_b = 2$,
 A saru anyaga: Fe 490 (A 50).

Feladat: Határozza meg a saru szükséges L hosszát!

Eredmény:	$L = 152,4\text{ mm}$.
-----------	-------------------------

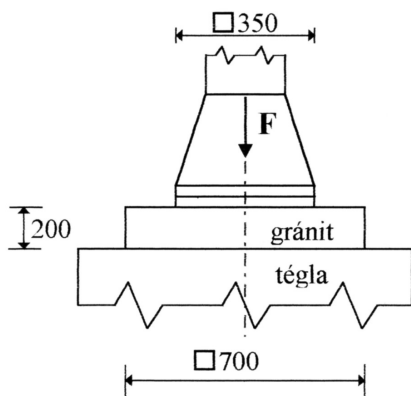
4.1.1-22 Feladat

A 4.1.34 ábrán egy F terhelésű pillér alapozásának vázlata látható. A pillér közvetlenül gránit-tömbre, az pedig téglalapra támaszkodik.

Adatok: $R_{\text{Gadm}} = 0,45\text{ kN/cm}^2$, $R_{\text{Tadm}} = 0,12\text{ kN/cm}^2$,
 $F = 550\text{ kN}$,

A gránit sűrűsége: $\rho = 2500\text{ kg/m}^3$.

4.1.34 ábra



Feladat: Ellenőrizze felületi nyomásra a gránitot és a téglalapot!

<u>Eredmények:</u>	$\sigma_G = 0,449 \text{ kN/cm}^2 < R_{Gadm}$	$\sigma_T = 0,113 \text{ kN/cm}^2 < R_{Tadm}$
--------------------	---	---

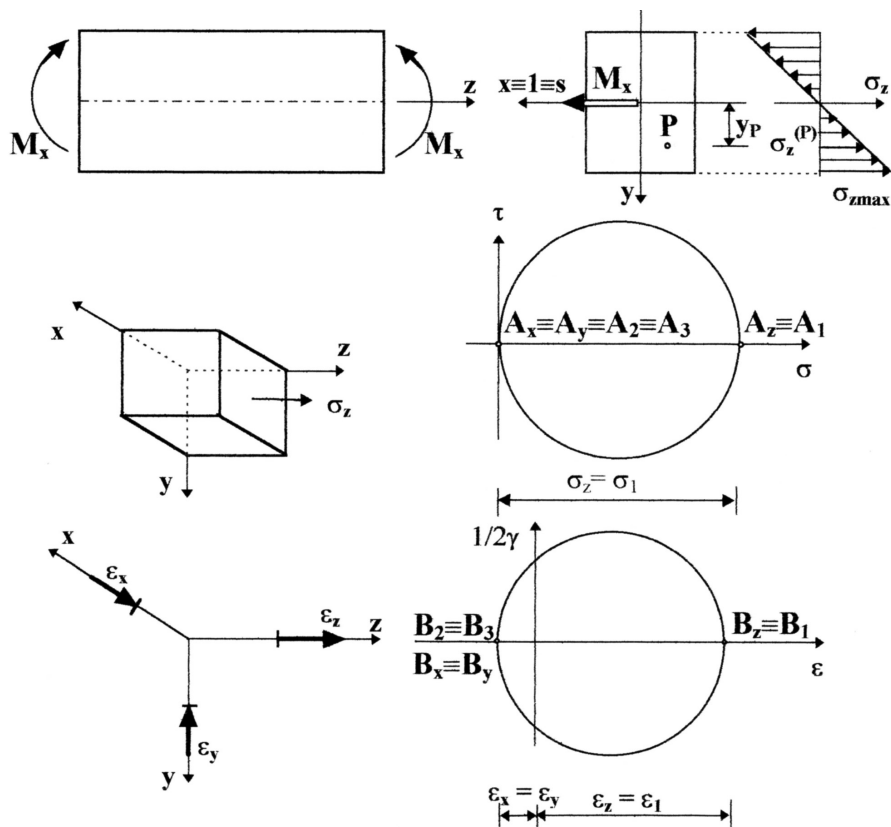
4.1.2 EGYENES HAJLÍTÁS

A.4.1.2 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Tiszta egyenes hajlítás esetén a keresztmetszet síkjába eső nyomatékvektor működik, mely egybeesik a keresztmetszet valamelyik tehetetlenségi főtengelyével. Ekkor a hajlítás tengelye és a semleges tengely egybeesik.

A feszültségeloszlás, a feszültségi és alakváltozási állapot ábrázolása a 4.1.34 ábrán látható.

4.1.34 ábra



A feszültség számítása Navier-képlet szerint:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \text{ illetve } \sigma_{z \max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Alakváltozásjellemzők:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \cdot \epsilon_z$$

Az egyenes hajlítás differenciálegyenlete: $v'' = -\frac{M_x}{E \cdot I_x}$.

Az alakváltozási energia:

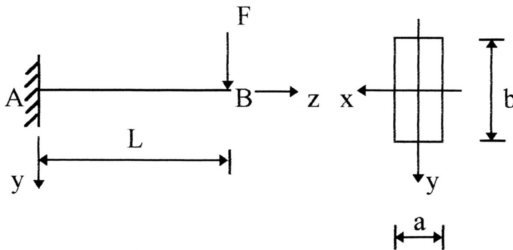
$$U = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{M_x^2}{E \cdot I_x} \cdot dz.$$

B. 4.1.2 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.1.2-1 Feladat

A 4.1.35. ábrán egy téglalap keresztmetszetű befogott rudat vázoltunk, melyet az F koncentrált erő terhel. A tartó anyagának folyási határa R_p , a folyás elkerülésével szembeni biztonsági tényező γ_b .

4.1.35 ábra



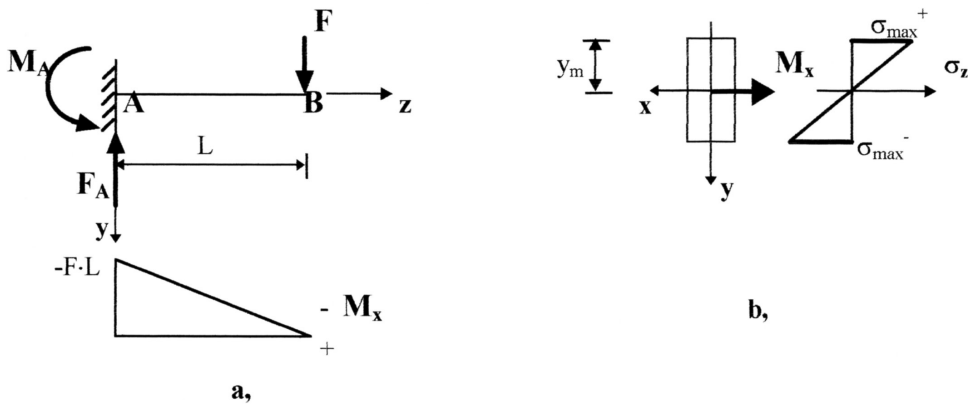
Adatok: $L = 80 \text{ cm}$,
 $F = 5 \text{ kN}$,
 $R_p = 24 \text{ kN/cm}^2$,
 $\gamma_b = 1,3$,
 $b/a = 2,5$,
 $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$.

- Feladat: 1. Méretezze a tartót hajlításra!
 2. Határozza meg a tartó maximális görbületét!

Megoldás:

1. Megrajzoljuk a tartó hajlító igénybevételi ábráját (4.1.36.a, ábra)!

4.1.36 ábra



A maximális hajlító igénybevétel az A keresztmetszetben lép fel, nagysága:

$$M_A = -F \cdot L = -5 \cdot 80 = -400 \text{ kNcm}.$$

A 4.1.36.b, ábrán vázoltuk a rúd keresztmetszetét és a feszültségeloszlást. A feszültség maximális értéke a Navier-összefüggés szerint:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_m = \frac{M_A}{I_x} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{M_A}{W_x}.$$

ahol:
$$W_x = \frac{a \cdot b^2}{6} = \frac{a \cdot (2,5 \cdot a)^2}{6} = \frac{6,25 \cdot a^3}{6}$$

A maximális feszültségre megengedhető érték $R_{adm} = \frac{R_b}{\gamma_b}$, melyre teljesülnie kell a $-\frac{M_A}{W_x} \leq \frac{R_b}{\gamma_b}$ egyenlőtlenségnek.

A szükséges keresztmetszeti tényező: $W_{x \min} = W_{sz} = \frac{|M_A| \cdot \gamma_b}{R_b} = \frac{400 \cdot 1,3}{24} = 21,66 \text{ cm}^3$

A keresztmetszet szükséges szélessége: $a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_{sz}}{6,25}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 21,66}{6,25}} = 2,75 \text{ cm}$

magassága: $b = 2,5 \cdot a = 2,5 \cdot 2,75 = 6,87 \text{ cm}$.

A választott tartóméret: $a = 28 \text{ mm}$ és $b = 70 \text{ mm}$.

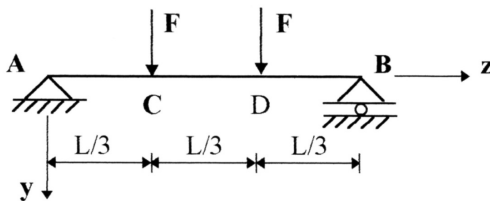
2. A tartó maximális görbülete: $g = v'' = -\frac{M_x}{E \cdot I_x} = -\frac{M_A}{E \cdot I_x}$ összefüggéssel számítható.

$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{2,8 \cdot 7,0^3}{12} = 80,033 \text{ cm}^4$, $g = -\frac{-400}{20000 \cdot 80,033} = 2,499 \cdot 10^{-4} \text{ 1/cm}$

4.1.2-2 Feladat

A 4.1.37. ábrán vázolt kéttámaszú rúdra (tengelyre) két koncentrált erő hat.

4.1.37 ábra



Adatok: $F = 10^4 \text{ N}$,
 $L = 600 \text{ mm}$,
 $R_{adm} = 140 \text{ MPa}$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

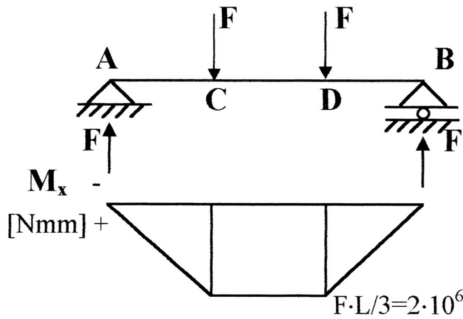
- Feladat:** 1. Méretezzük a tengelyt kör ill. körgyűrű keresztmetszetűre (A nyírásból származó feszültségeket elhanyagolhatjuk.)!
 2. Mekkora a szélső szál megnyúlása a választott csőtengely esetén?

Megoldás:

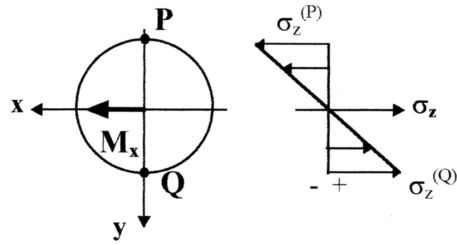
1. Első lépésben rajzoljuk meg a rúd hajlítónyomatéki ábráját (4.1.38. ábra) !

A legnagyobb hajlítónyomaték a rúd CD szakaszát terheli. Válasszunk ki ezek közül egy keresztmetszetet, rajzoljuk rá az igénybevételt, és ábrázoljuk a feszültségeloszlást (4.1.39 ábra)!

4.1.38 ábra



4.1.39 ábra



Ebből látható, hogy hajlításra **P** és **Q** a keresztmetszet veszélyes pontjai. Mivel ezen pontokban egytengelyű feszültségállapot van, a rúd megfelel, ha $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq R_{\text{adm}}$ teljesül.

Innen
$$W_x \geq \frac{M_x}{R_{\text{adm}}} = \frac{2 \cdot 10^6}{140} = 14285,7 \text{ mm}^3$$

Kör keresztmetszet esetén
$$W_x = \frac{d^3 \cdot \pi}{32}, \text{ tehát } \frac{d^3 \cdot \pi}{32} \geq 14285,7 \text{ mm}^3.$$

Ebből:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{14285,7 \cdot 32}{\pi}} = 52,6 \text{ mm}.$$

A választott átmérő legyen $d = 55 \text{ mm}$.

A tényleges keresztmetszeti tényező így:
$$W_x = \frac{55^3 \cdot \pi}{32} = 16325,5 \text{ mm}^3.$$

A maximális feszültség:
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{2 \cdot 10^6}{16325,5} = 122,51 \text{ MPa}.$$

A keresztmetszet kihasználtsága:
$$\frac{\sigma_{\max}}{R_{\text{adm}}} \cdot 100\% = 87,5\% - \text{os}.$$

Amennyiben a tengelyt körgyűrű keresztmetszetűre készítik, a keresztmetszeti tényező

$$W_x = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{32 \cdot D}.$$

Ahhoz, hogy a méreteket meg tudjuk határozni, meg kell választanunk például a belső (d) és külső (D) átmérők arányát. Legyen
$$\frac{d}{D} = 0,8.$$

Ekkor:
$$W_x = \frac{(D^4 - 0,8^4 \cdot D^4) \cdot \pi}{32 \cdot D} = \frac{(1 - 0,8^4) \cdot D^3 \cdot \pi}{32} = 0,05796 \cdot D^3$$

Itt is teljesülnie kell, hogy $0,05796 D^3 \geq 14285,7 \text{ mm}^3$, ahonnan

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{14285,7}{0,05796}} = 62,7 \text{ mm}$$

Legyen: $D = 65 \text{ mm}$ és $d = 0,8 \cdot D = 52 \text{ mm}$.

Hasonlítsuk össze a kör (A_1) és a körgyűrű (A_2) keresztmetszetek területét!

$$A_1 = \frac{55^2 \cdot \pi}{4} = 2375,83 \text{ mm}^2, \quad A_2 = \frac{(65^2 - 52^2) \cdot \pi}{4} = 1194,59 \text{ mm}^2.$$

Miután a rudak súlya egyenesen arányos a keresztmetszetük területével, látható, hogy a csőten-gely alkalmazása anyagtakarékos, hiszen fele akkora súlyú, mint a tömör.

$$2. \text{ A szélső szál megnyúlása: } \Delta L = \int_0^L \varepsilon dz = \int_0^L \frac{\sigma}{E} dz = \int_0^L \frac{M}{W_x \cdot E} dz.$$

mivel $W_x \cdot E$ állandó,

$$\Delta L = \frac{1}{W_x \cdot E} \cdot A_M.$$

ahol A_M a nyomatéki ábra területét jelenti.

A választott méretekkel:

$$W_x = \frac{(65^4 - 52^4) \cdot \pi}{32 \cdot 65} = 15917,9 \text{ mm}^3.$$

Behelyettesítve:

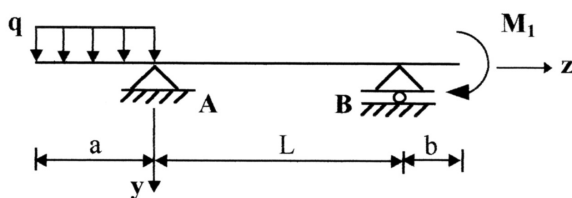
$$\Delta L = \frac{1}{15917,9 \cdot 2 \cdot 10^5} \left(\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^2}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^2 \right) = 0,25 \text{ mm}$$

az alsó szélső szál megnyúlása.

4.1.2-3 Feladat

A 4.1.40 ábrán mindkét végén konzolos kéttámaszú szabványos I keresztmetszetű tartó látható.

4.1.40 ábra



Adatok: $a = 1 \text{ m}$,
 $L = 2 \text{ m}$,
 $b = 0,4 \text{ m}$,
 $q = 20 \text{ kN/m}$,
 $M_1 = 18 \text{ kNm}$,
 $R_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: 1. Rajzoljuk meg a tartó hajlító nyomatéki ábráját!

2. Válasszunk szabványos melegen hengerelt I szelvényt, hogy a tartó szilárdságilag megfeleljen (a nyírásból származó feszültséget elhanyagoljuk)!

3. Határozzuk meg a választott szelvény kihasználtsági fokát!

Megoldás:

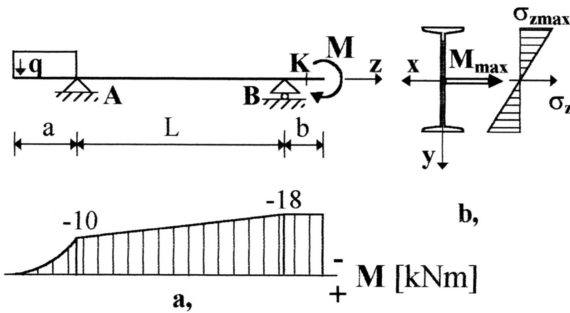
1. A hajlító nyomatéki ábra megrajzolásához írjuk fel az alátámasztási keresztmetszetekben ébredő hajlítónyomaték számszerű értékét:

$$M_A = -\frac{q \cdot a^2}{2} = -\frac{20 \cdot 1,0^2}{2} = -10 \text{ kNm}.$$

$$M_B = M_1 = -18 \text{ kNm}.$$

A konzolok terhelésének jellegét, valamint a támaszoktól, mint terheletlen rúdszakaszt véve, megrajzolható a tartó hajlítónyomatéki ábrája (4.1.41.a, ábra).

4.1.41. ábra



2. A tartó méretezését – szabványos I szelvény választását – a maximális nyomatékra végezzük el. Maximális nyomaték a jobboldali konzol keresztmetszeteiben ébred (K keresztmetszetben is), és értéke a 4.1.41.a, ábrából:

$$M_{\max} = |M_B| = 18 \text{ kNm} (-).$$

Rajzoljuk meg a K keresztmetszetben a feszültségeloszlási ábrát (4.1.41.b, ábra). A legnagyobb hajlítófeszültség a hajlítás tengelyétől – x tengely – legmesszebbre lévő keresztmetszeti pontokban ébred.

Ezen pontokban:

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{\max}}{W_x}.$$

Feladatkiírásunk szerint a nyírást elhanyagoljuk, így a tartó megfelel, ha

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R_{\text{adm}}.$$

Ebből az összefüggésből a választandó I szelvényre jellemző W_x -et határozhatjuk meg.

Így:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R_{\text{adm}}}.$$

Helyettesítsünk be:

$$W_x \geq \frac{18 \cdot 10^2}{16} = 112,5 \text{ cm}^3.$$

Ennek megfelelően szabványtáblázatunkból azt az I szelvényt választjuk, amelynek az x tengelyre vonatkozó keresztmetszeti tényezője ezt a feltételt már kielégíti. Vagyis választjuk az I 160-as szelvényt, amelyre: $W_x = 117 \text{ cm}^3$.

3. Természetesen a választott I szelvénynek a szélső szálaiban ébredő $\sigma_{z \max \text{ tényl}}$ kisebb lesz R_{adm} -nél. Nézzük mekkora lesz a tényleges legnagyobb feszültség:

$$\sigma_{z \max \text{ tényl}} = \frac{M_{\max}}{W_{x \text{ tényl}}} = \frac{18 \cdot 10^2}{117} = 15,38 \text{ kN / cm}^2.$$

Ez a megengedett feszültség %-ában:

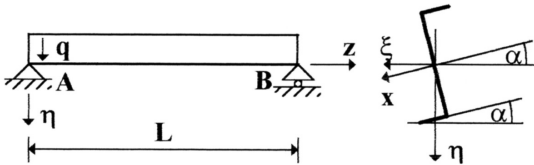
$$\frac{\sigma_{Z \max \text{ tenyl}}}{R_{\text{adm}}} \cdot 100 = \frac{15,38}{16} \cdot 100 = 96,12 \%,$$

vagyis a választott szelvény kihasználtsága: 96,12%

4.1.2-4 Feladat

A 4.1.42. ábrán egy hidegen hajlított Z profilú hosszanti tetőgerenda (szelemen) látható. Terhelése függőleges (ηz) síkú.

4.1.42 ábra



Adatok: $L = 3 \text{ m}$,
A szelvény: Z 140/50x4
 $\alpha = 18,4^\circ$,
 $R_{\text{adm}} = 16 \text{ kN/cm}^2$.

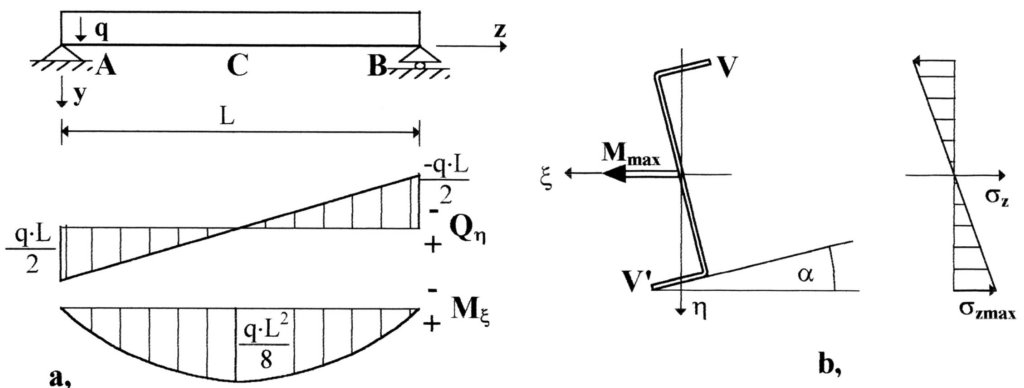
Feladat: Mekkora lehet a gerendát terhelő végig egyenletesen megoszló erőrendszer intenzitása (q), ha a nyírásból keletkező feszültséget elhanyagoljuk?

Megoldás:

Először rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit (4.1.43 a, ábra).

Mivel feladatkiírásunk szerint a nyírásból keletkező feszültség elhanyagolható, a tartó igénybevétele hajlítás. A hajlítás tengelye a tengely, amely a keresztmetszet súlyponti tehetetlenségi fő-tengelye. Így a tartó igénybevétele egyenes hajlítás. Veszélyes keresztmetszete a C jelű (középső) keresztmetszet.

4.1.43 ábra



A mértékadó nyomaték:

$$M_{\max} = M_{\xi \max} = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

Rajzoljuk meg a hajlítófeszültség eloszlását a veszélyes (C) keresztmetszetben (4.1.43 b, ábra).

Ezen pontokban ébredő feszültség:
$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{\max}}{I_{\xi}} \cdot \eta_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\xi}}.$$

A korábban felírt $M_{\max}$ összefüggést felhasználva adódik:

$$\sigma_{z \max} = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot W_{\xi}}$$

Mivel a veszélyes pontokban (V és V') a feszültségi állapotot egy σ feszültség egyértelműen meghatározza, a feszültségi állapot egytengelyű.

Így a tartó szilárdságilag megfelel, ha:

$$\sigma_{z \max} = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot W_{\xi}} \leq R_{\text{adm}}$$

Ebből

$$q \leq \frac{8 \cdot W_{\xi} \cdot R_{\text{adm}}}{L^2}.$$

Táblázatból a Z 140/50x4-es hidegen hajlított szelvény keresztmetszeti tényezője:

$$W_{\xi} = 33,4 \text{ cm}^3.$$

Ezek után helyettesítsünk be q -ra kapott összefüggésbe:

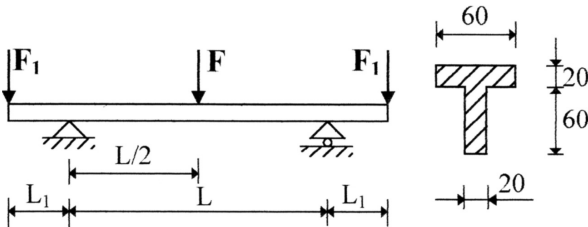
$$q \leq 0,0475 \text{ kN/cm} = 4,75 \text{ kN/m}$$

Tehát az adott méretű és anyagú szelemen terhelése legfeljebb $q = 4,75 \text{ kN/m}$ intenzitású egyenletesen megoszló teher lehet.

4.1.2-5 Feladat

A 4.1.44. ábrán látható öntöttvas gerenda T keresztmetszetű.

4.1.44 ábra



Adatok: $L = 2,0 \text{ m}$,

$L_1 = 0,5 \text{ m}$,

$F = 2,4 \text{ kN}$,

$F_1 = 0,6 \text{ kN}$.

megengedett feszültség: húzásra:

$R_{\text{adm}} = 2,5 \text{ kN/cm}^2$,

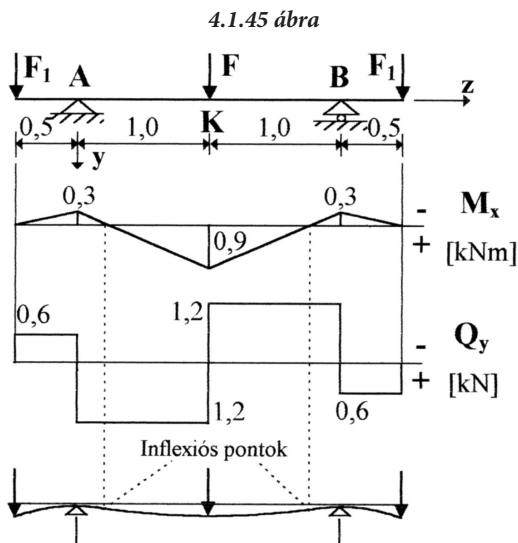
nyomásra

$R_{\text{adm}} = 6 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Ellenőrizzük hajlításra a tartót, és egyidejűleg döntsük el az aszimmetrikus keresztmetszet célszerű elrendezésének módját!

Megoldás:

A tartó igénybevételi ábrái és rugalmas alakja a 4.1.45 ábrán látható. A meggörbült tartóalak jól mutatja, hogy a támaszközből (az inflexió pontok között) a tartó alsó szála húzott, míg azokon kívül a felső szála.



Mivel öntöttvasnál – mint az adatok is mutatják – a megengedhető húzó, ill. nyomófeszültség eltérő, mindkét veszélyes keresztmetszetben (A és K) meg kell vizsgálnunk a pozitív és negatív feszültség maximumára a tartó szilárdsági megfelelőségét.

A középső keresztmetszetben kialakuló feszültségeloszlás a 4.1.46 a, ábrán látható.

A szélső szábeli feszültségek meghatározásához ismernünk kell a súlypont helyét kijelölő e_p ill. e_a értékét, valamint I_x -et.

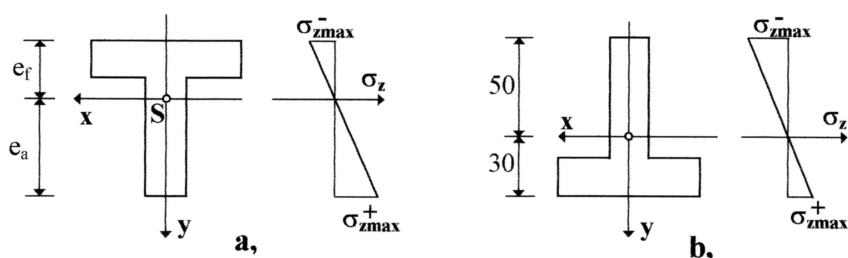
Az ismert módon számítva:

$$e_f = \frac{(2 \cdot 6) \cdot 1 + (2 \cdot 6) \cdot 5}{2 \cdot 6 + 2 \cdot 6} = 3 \text{ cm}$$

amiből $e_a = 5 \text{ cm}$ és

$$I_x = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + (6 \cdot 2) \cdot 2^2 + \frac{2 \cdot 6^3}{12} + (2 \cdot 6) \cdot 2^2 = 4 + 48 + 36 + 48 = 136 \text{ cm}^4$$

4.1.46 ábra



A maximális feszültségek a K keresztmetszet felső (nyomott) szálában:

$$\sigma_{z \max}^- = -\frac{M_x}{I_x} \cdot e_f = -\frac{0,9 \cdot 100}{136} \cdot 3 = -1,99 \text{ kN / cm}^2$$

az alsó (húzott) szálban:

$$\sigma_{z \max}^+ = \frac{M_x}{I_x} \cdot e_a = \frac{0,9 \cdot 100}{136} \cdot 5 = 3,31 \text{ kN / cm}^2 > R_{adm}^+ = 2,5 \text{ kN / cm}^2$$

a tartó nem felel meg szilárdságilag.

Látható, hogy a tartó elhelyezkedése kedvezőtlen volt fenti módon, mivel a hajlítás tengelyétől távolabb elhelyezkedő szálak kerültek a veszélyes keresztmetszet húzott szélső szálába. Fordítsuk meg a tartót! Ekkor (4.1.46.b ábra) $e'_f = 5 \text{ cm}$, és $e'_a = 3 \text{ cm}$ és a felső (nyomott) szálban:

$$\sigma_{z \max}^- = - \frac{0,9 \cdot 100}{136} \cdot 5 = 3,31 \text{ kN / cm}^2,$$

az alsó (húzott) szálban:

$$\sigma_{z \max}^+ = \frac{0,9 \cdot 100}{136} \cdot 3 = 1,99 \text{ kN / cm}^2,$$

amelyek mindegyike kisebb a megfelelő megengedett feszültségnél.

Az alátámasztások keresztmetszeténél (A, ill. B) a fellépő negatív nyomaték miatt a feszültségek előjele fordított a szélső szálakban, mint a támaszközben. Emiatt itt ellenőrzés szükséges annak ellenére, hogy itt a hajlítónyomaték értéke kisebb, mint K-ban.

Az A keresztmetszet:

felső (húzott) szálában:

$$\sigma_{z \max}^{+(A)} = \frac{M_A}{I_x} e'_f = \frac{0,3 \cdot 100}{136} \cdot 3 = 0,66 \text{ kN / cm}^2 \langle R_{adm}^+ = 2,5 \text{ kN / cm}^2$$

alsó (nyomott) szálában:

$$\sigma_{z \max}^{-(A)} = \frac{M_A}{I_x} e'_a = \frac{0,3 \cdot 100}{136} \cdot 5 = 1,10 \text{ kN / cm}^2 \langle R_{adm}^- = 6 \text{ kN / cm}^2$$

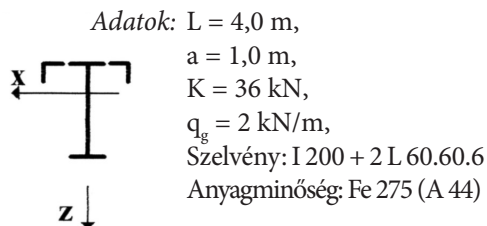
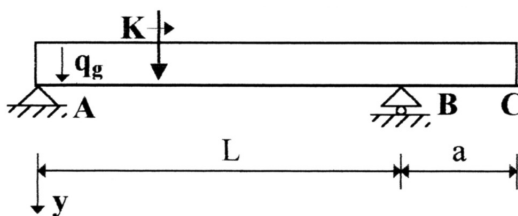
tehát a tartó hajlításra szilárdsági szempontból megfelel.

Megjegyzés: A hajlított gerendánál a szilárdsági vizsgálaton kívül egyéb határállapotra történő vizsgálatok is szükségesek, így pl. az egyensúlyi állapot stabilitásának vizsgálata, az úgynevezett kifordulásvizsgálat. Ettől itt eltekintünk.

4.1.2-6 Feladat

A 4.1.47 ábrán q_g fajlagos súlyú konzolos kéttámaszú tartót vázoltunk. A tartót önsúlyán kívül egy végigvonuló függőleges K erő (keréknyomás) terheli.

4.1.47 ábra



Feladat: Ellenőrizzük a tartót függőleges síkú hajlításra, ha húzófeszültségre R_u , nyomófeszültségre $0,6R_u$ engedhető meg!

Megoldás:

Vázoljuk elsőként a tartó nyomatéki ábráit, külön-külön a keréknyomásból és a megoszló terhelésből!

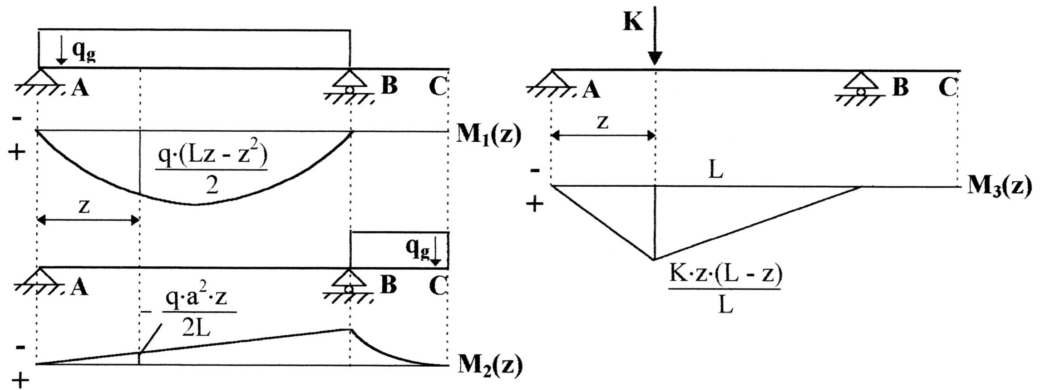
A mozgó terhelés miatt két terhelési esetet kell megvizsgálnunk:

1. eset: A keréknyomás a C helyen működik, ekkor lép fel a B támasz fölötti keresztmetszetben a legnagyobb negatív hajlítónyomaték, melynek nagysága:

$$M_{x \max}^{-} = -K \cdot a - \frac{q_g \cdot a^2}{2} = -36 \cdot 1,0 - \frac{2,0 \cdot 1,0^2}{2} = -37,0 \text{ kNm.}$$

2. eset: A keréknyomás az A-B támaszközön belül helyezkedik el, ekkor keletkezik a maximális pozitív hajlítónyomaték. Hogy a maximális nyomaték melyik z_m koordinátájú keresztmetszetben lép fel, azt külön analizálnunk kell.

4.1.48 ábra



Feltételezzük, hogy a maximális nyomaték a K erő alatti keresztmetszetben lép fel. Feltétel a nyíróerő függvény zérus értéke.

$$Q_y(z) = \frac{q_g}{2} \cdot (L - 2 \cdot z) - \frac{q_g \cdot a^2}{2 \cdot L} + K \cdot \frac{L - 2 \cdot z}{L} = 0.$$

Fenti egyenletből z_m meghatározható:

$$z_m = \frac{\frac{q_g \cdot L}{2} + K - \frac{q_g \cdot a^2}{2 \cdot L}}{q_g + \frac{2 \cdot K}{L}} = \frac{\frac{2,0 \cdot 4,0}{2} + 36,0 - \frac{2,0 \cdot 1,0^2}{2 \cdot 4,0}}{2,0 + \frac{2 \cdot 36,0}{4,0}} = 1,9875 \text{ m.}$$

A nyomatéki függvény:

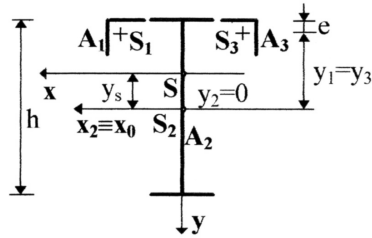
$$M(z) = \frac{q_g}{2} \cdot (L \cdot z - z^2) - \frac{q_g \cdot a^2}{2 \cdot L} \cdot z + K \cdot \frac{z \cdot (L - z)}{L}$$

A maximális nyomaték z_m -nek fenti függvénybe való behelyettesítésével adódik.

$$M_{x \max}^{+} = \frac{2,0}{2} \cdot (4,0 \cdot 1,9875 - 1,9875^2) - \frac{2,0 \cdot 1,0^2}{2 \cdot 4,0} \cdot 1,9875 + 36,0 \cdot \frac{1,9875 \cdot (4,0 - 1,9875)}{4,0}$$

$$M_{x \max}^{+} = 39,5 \text{ kNm.}$$

4.1.49 ábra



Keresztmetszeti jellemzők meghatározása:

$$y_1 = y_3 = -h/2 + e = -10 + 1,69 = -8,31 \text{ cm},$$

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 = 6,91 + 33,4 + 6,91 = 47,22 \text{ cm}^2.$$

$$y_s = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = -\frac{2 \cdot 6,91 \cdot 8,31}{47,22} = -2,432 \text{ cm}.$$

$$I_x = \sum I_{xi} + \sum (y_i - y_s)^2 \cdot A_i,$$

$$I_x = 2 \cdot 22,8 + 2 \cdot (-8,31 + 2,432)^2 \cdot 6,91 + 2140 + 2,432^2 \cdot 33,4$$

$$I_x = 2860 \text{ cm}^4.$$

Maximális pozitív feszültség a z_m koordinátájú keresztmetszet alsó szélső szálában keletkezik:

$$\sigma_{z \max}^+ = \frac{M_{x \max}^+}{I_x} \cdot \left(\frac{h}{2} - y_s \right) = \frac{3950}{2860} \cdot \left(\frac{20}{2} + 2,432 \right) = 17,17 \text{ kN / cm}^2 < R_u =$$

$$= 23 \text{ kN / cm}^2,$$

a tartó egyenes hajlításra húzófeszültségre megfelel.

Maximális negatív feszültség a B keresztmetszet alsó szélső szálában

$$\sigma_{z \max}^- = \frac{M_{x \max}^-}{I_x} \cdot \left(\frac{h}{2} - y_s \right) = \frac{3700}{2860} \cdot \left(\frac{20}{2} + 2,432 \right) = 16,08 \text{ kN / cm}^2 > 0,6 R_u =$$

$$= 13,8 \text{ kN / cm}^2,$$

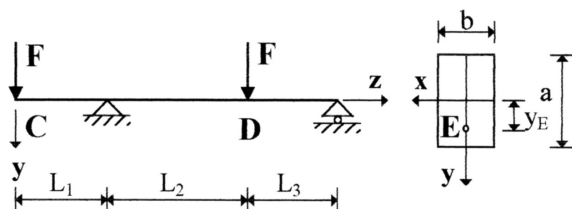
a tartó nyomófeszültség-korlátozásra a B keresztmetszetben nem felel meg, szükséges megerősíteni. A megerősítés részleteivel e feladat keretében nem foglalkozunk.

C. 4.1.2 GYAKORLÓ FELADATOK

4.1.2-7 Feladat

A 4.1.50 ábrán lévő kéttámaszú tartót a C és D keresztmetszetben F erő terheli.

4.1.50 ábra



Adatok: $F = 2 \text{ kN}$, $L_1 = 1 \text{ m}$,
 $L_2 = 2 \text{ m}$, $L_3 = 1 \text{ m}$,
 $a = 50 \text{ mm}$,
 $b = 40 \text{ mm}$,
 $y_E = 10 \text{ mm}$,
 $R_{adm} = 200 \text{ MPa}$.

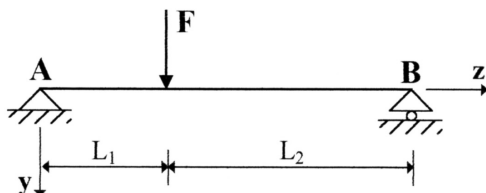
- Feladat: 1. Ellenőrizze az állandó keresztmetszetű tartót a hajlításból származó legnagyobb feszültségre!
 2. Számítsa ki a veszélyes keresztmetszet E pontjában ébredő feszültséget, ábrázolja a feszültségi állapotot!

Eredmények	$\sigma_{z, \max} = 120 \text{ MPa}$;	$\sigma_z(E) = 48 \text{ MPa}$.
------------	--	----------------------------------

4.1.2-8 Feladat

A vázolt kéttámaszú gerendára egy F koncentrált erő hat (4.1.51 ábra).

4.1.51 ábra



Adatok: $F = 3 \cdot 10^4 \text{ N}$,
 $L_1 = 300 \text{ mm}$,
 $L_2 = 600 \text{ mm}$,
 $R_{adm} = 140 \text{ MPa}$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

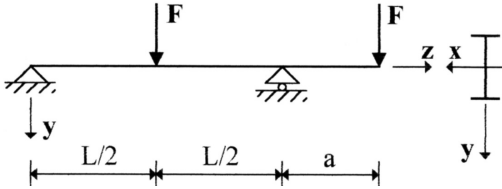
- Feladat: 1. Méretezze a rudat kör keresztmetszetűre! (A nyírásból származó feszültségeket elhanyagolhatjuk.)
 2. Mekkora a szélső szál megnyúlása a választott keresztmetszet esetén?

Eredmények:	$d \geq 75,86 \text{ mm}$,	$d_{\text{választott}} = 76 \text{ mm}$,	$\Delta L = 0,31 \text{ mm}$.
-------------	-----------------------------	---	--------------------------------

4.1.2-9 Feladat

A 4.1.52 ábrán egy konzolos kéttámaszú tartó látható.

4.1.52 ábra



Adatok: $L = 4 \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$,
 $F = 8 \text{ kN}$, $R_{\text{adm}} = 16 \text{ kN/cm}^2$.

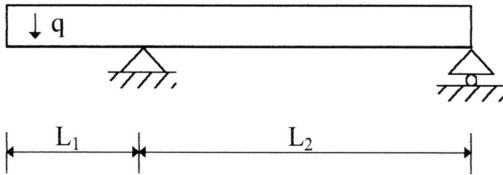
Feladat: 1. Méretezze a tartót szabványos melegen hengerelt I szelvényből!
 2. Határozza meg a választott szelvény kihasználtsági fokát %-osan!

Eredmények:	I 120 ($W_x = 54,7 \text{ cm}^3$),	kihasználtság: 91,4%.
-------------	--------------------------------------	-----------------------

4.1.2-10 Feladat

A 4.1.53 ábrán látható tartót q megoszló terhelés terheli.

4.1.53 ábra



Adatok: $q = 2 \text{ kN/m}$,
 $L_1 = 2 \text{ m}$,
 $L_2 = 4 \text{ m}$,
 $R_{\text{adm}} = 200 \text{ MPa}$.

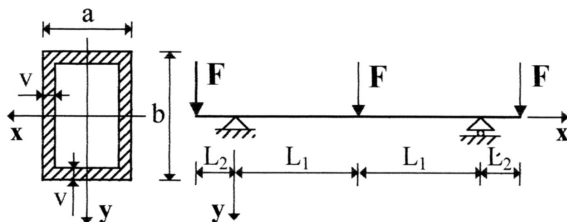
Feladat: Ellenőrizze, hogy I 80 melegen hengerelt szelvényből megfelelő-e hajlításra a tartó!

Eredmény:	$\sigma_{\text{max}} = 207 \text{ MPa} > R_{\text{adm}} = 200 \text{ MPa}$.
-----------	--

4.1.2-11 Feladat

A 4.1.54 ábrán látható módon három egyenlő nagyságú erővel terhelünk egy konzolos kéttámaszú tartót.

4.1.54 ábra



Adatok: $a = 8 \text{ cm}$,
 $b = 12 \text{ cm}$,
 $v = 0,5 \text{ cm}$,
 $L_1 = 2,0 \text{ m}$,
 $L_2 = 0,5 \text{ m}$,
 $R_{\text{adm}} = 18 \text{ kN/cm}^2$.

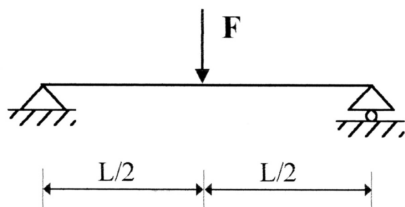
Feladat: Mekkora lehet maximálisan az F erő, hogy a hajlításból származó feszültség ne haladja meg az R_{adm} értékét?

Eredmény:	$F \leq 22,535 \text{ kN}$
-----------	----------------------------

4.1.2-12 Feladat

A 4.1.55 ábrán látható tartót közepén egy F koncentrált erő terheli.

4.1.55 ábra



Adatok: $F = 20 \text{ kN}$,
 $L = 4 \text{ m}$,
 $R_{\text{adm}} = 200 \text{ MPa}$.

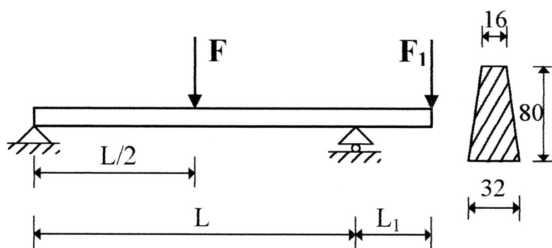
Feladat: Vizsgálja meg, hogy anyagfelhasználás szempontjából szabványos I vagy T keresztmetszetből célszerű elkészíteni a tartót?

Eredmények:	$W_{x \min} = 10 \text{ cm}^3$,	T 75 : $A_{T75} = 11,57 \text{ cm}^2$, $W_{x T75} = 11,3 \text{ cm}^3$,	I 80 : $A_{I80} = 7,57 \text{ cm}^2$, $W_{x I80} = 19,3 \text{ cm}^3$.
-------------	----------------------------------	--	---

4.1.2-13 Feladat

A 4.1.56 ábrán látható öntöttvas gerenda trapéz keresztmetszetű.

4.1.56 ábra



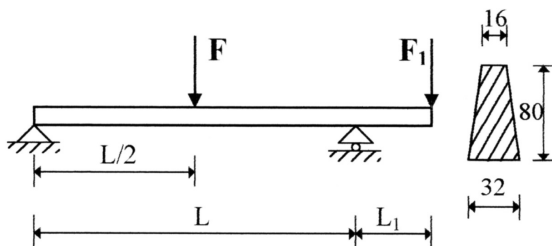
Adatok: $L = 2,0 \text{ m}$,
 $L_1 = 0,5 \text{ m}$,
 $F = 2,4 \text{ kN}$,
 $F_1 = 0,6 \text{ kN}$,
 megengedett feszültség:
 húzásra: $R_{\text{adm}}^+ = 2,5 \text{ kN/cm}^2$,
 nyomásra $R_{\text{adm}}^- = 6 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Ellenőrizze a tartót és egyidejűleg döntse el a tartó célszerű elrendezésének módját!

4.1.2-14 Feladat

A 4.1.57 ábrán vázoltunk egy megoszló erővel terhelt kéttámaszú és egy F erővel terhelt konzolos kéttámaszú tartót. A tartók keresztmetszete melegen hengerelt szelvény.

4.1.57 ábra



Adatok: $L = 4,0 \text{ m}$,
 Anyagminőség: Fe 235 (A 38)
 MSZ 500,
 $R = 20 \text{ kN/cm}^2$,
 $b = 120 \text{ mm}$,
 Keresztmetszet: I 300

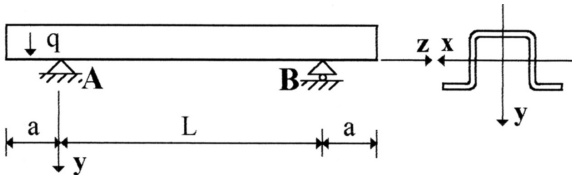
Feladat: Tervezzük meg a tartók öveinek megerősítését **b** szélességű lemezzel, ha a tartó hajlítási határteherbírását 20%-kal növelni kívánjuk!

Eredmények:	megerősítési hossz:	a,	b,
	B keresztmetszettől balra: L_b [mm]	816	667
	B keresztmetszettől jobbra: L_j [mm]	816	167
	megerősítési vastagság t [mm]	4 mm	

4.1.2-15 Feladat

A 4.1.58 ábrán mindkét végén konzolos tartó (vízszintes tetőgerenda) látható. Terhelése végig egyenletesen megoszló q intenzitású erőrendszer. Keresztmetszete az ábrán látható elrendezésben 2 db hidegen hajlított Z profil.

4.1.58 ábra



Adatok: $L = 3$ m,
 $a = 1$ m,
 A szelvények : Z 160/60x3
 $R_{adm} = 20$ kN/cm².

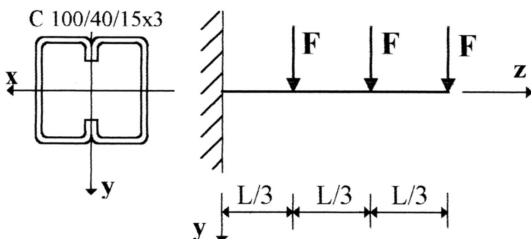
Feladat: Határozza meg a megoszló teher intenzitását (q), ha a nyírásból keletkező feszültséget elhanyagoljuk.

Eredmény:	$q \leq 24,3$ kN/m
------------------	--------------------

4.1.2-16 Feladat

A 4.1.59 ábra szerinti hidegen hajlított C profilból készített konzolra koncentrálnak tekinthető terhek adódnak át.

4.1.59 ábra



Adatok: $R_{adm} = 16$ kN/cm²,
 $E = 2.104$ kN/cm²,
 $F = 2$ kN,
 $L = 1,2$ m.

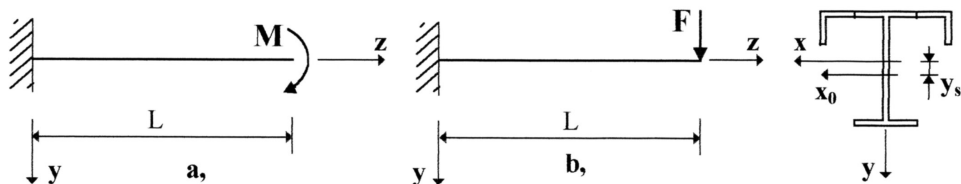
Feladat: Ellenőrizze a vázolt tartót hajlításra!

Eredmény:	$\sigma_{max} = 14,92$ kN/cm ² $< R_{adm} = 16$ kN/cm ² .
------------------	---

4.1.2-17 Feladat

A 4.1.60 ábrán egy befogott tartót láthatunk kétféle terheléssel.

4.1.60 ábra



4.1.60 ábra

Adatok: $L = 1,0 \text{ m}$, $M = 300 \text{ kNm}$, $F = 300 \text{ kN}$, $E = 20600 \text{ kN/cm}^2$,
 Anyagminőség: Fe 235 (A38) MSZ500, Keresztmetszet: 1400 2 L160-160-14.

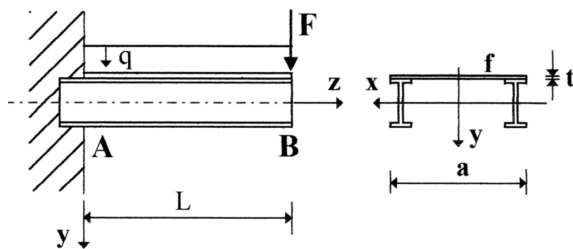
- Feladat:** 1. Határozza meg az összetett keresztmetszet súlypontját és x -tengelyre számított másodrendű nyomatékát!
 2. Határozza meg a maximális pozitív és negatív feszültséget!
 3. Határozza meg a húzott és nyomott szélső szál hosszváltozását!

Eredmények:	$y = -65,73 \text{ mm}$, $I = 43348 \text{ cm}^4$, $\sigma_{\max(-)} = -18,4 \text{ kN/cm}^2$, $\Delta L_a(-) = -0,893 \text{ mm}$,	$\Delta L_b(-) = -0,4465 \text{ mm}$, $\sigma_{\max(+)} = 9,29 \text{ kN/cm}^2$, $\Delta L_a(+) = 0,45 \text{ mm}$, $\Delta L_b(+) = 0,225 \text{ mm}$,
--------------------	--	--

4.1.2-18 Feladat

A 4.1.61 ábrán látható két melegen hengerelt I tartót a q intenzitású végig egyenletesen megoszló teher mellett a B keresztmetszetben F erővel is terheljük. A terhelés a két I tartóval együttdolgozónak tekinthető lapon (f) adódik át a tartókra.

4.1.61 ábra



Adatok: $L = 1,5 \text{ m}$,
 $q = 2 \text{ kN/m}$,
 $a = 1 \text{ m}$,
 $t = 10 \text{ mm}$,
 A szelvények: I 300
 $R_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2$.

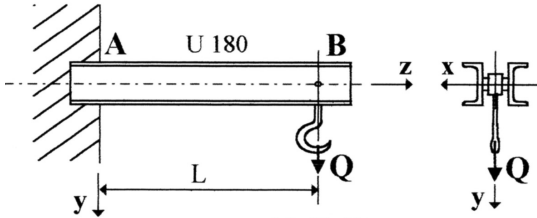
Feladat: Határozza meg, hogy mekkora lehet a B keresztmetszetben működő F erő, hogy a konzol hajlításra szilárdságilag megfeleljen. Számításainál a tartó önsúlyát, valamint az f lap súlyát elhanyagolhatja.

Eredmény:	$W_{xa} = 1560 \text{ cm}^3$, $F \leq 164,9 \text{ kN}$.
------------------	---

4.1.2-19 Feladat

A 4.1.62 ábrán látható 2 db melegen hengerelt U tartó a B keresztmetszetben felszerelt horgon Q terhet tart.

4.1.62 ábra



Adatok: $L = 1,8 \text{ m}$,

$R_{\text{adm}} = 12 \text{ kN/cm}^2$.

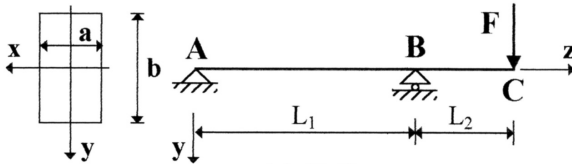
Feladat: Mekkora Q terhet bír el a két U tartó, ha az önsúlytól eltekintünk. A nyírásból keletkező feszültség elhanyagolható?

Eredmény:	$Q \leq 20 \text{ kN}$
-----------	------------------------

4.1.2-20 Feladat

A 4.1.63 ábrán látható konzolos kéttámaszú tartót a konzolon működő koncentrált erő terheli.

4.1.63 ábra



Adatok: $L_1 = 0,4 \text{ m}$,

$L_2 = 0,15 \text{ m}$,

$a = 2 \text{ cm}$,

$b = 3 \text{ cm}$,

$R_{\text{adm}} = 160 \text{ MPa}$.

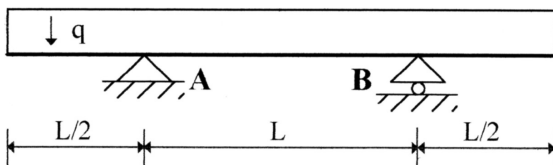
Feladat: Maximálisan mekkora erővel terhelhető a tartó, hogy a legnagyobb feszültség ne haladja meg R_{adm} értékét?

Eredmény:	$F_{\text{max}} = 3,2 \text{ kN}$.
-----------	-------------------------------------

4.1.2-21 Feladat

A 4.1.64 ábrán látható tartót q megoszló terhelés terheli.

4.1.64 ábra



Adatok: $L = 4 \text{ m}$,

$q = 4 \text{ kN/m}$,

$R_{\text{adm}} = 200 \text{ MPa}$.

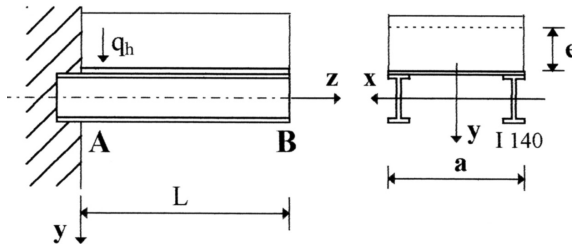
Feladat: Ellenőrizze az I 120 melegen hengerelt szelvényből készült tartót hajlításra!

Eredmény:	$\sigma_{\text{zmax}} = 146,25 \text{ MPa} < R_{\text{adm}} = 200 \text{ MPa}$.
-----------	--

4.1.2-22 Feladat

A 4.1.65 ábrán látható befogott tartót önsúlya és hasznos q megoszló terhelés terheli.

4.1.65 ábra



Adatok: $L = 2 \text{ m}$,
 $a = 0,6 \text{ m}$,
 $2q_l = 286 \text{ N/m}$,
 $q_k = 1 \text{ kN/m}$,
 $\gamma_h = 19 \text{ kN/m}^3$,
 $R_{adm} = 200 \text{ MPa}$.

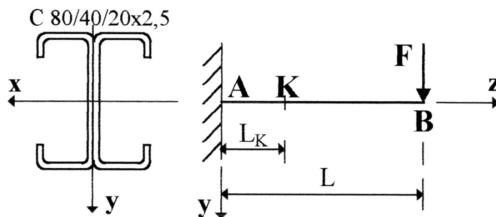
Feladat: Határozza meg a homokrét megengedhető magasságát, hogy a két I szelvény hajlításra megfeleljen.

Eredmény:	$e = 1,324 \text{ m}$.
-----------	-------------------------

4.1.2-23 Feladat

A 4.1.66 ábrán két hidegen hajlított profilból készített konzolt vázoltunk F terhelőerővel.

4.1.66 ábra



Adatok: $L = 1 \text{ m}$,
 $F = 3,2 \text{ kN}$,
 $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$,
 $R_{adm} = 14 \text{ kN/cm}^2$.

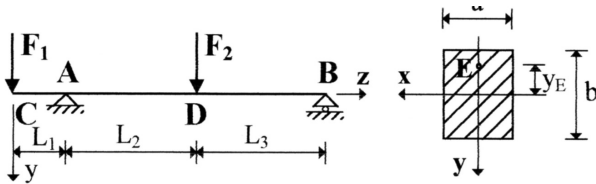
Feladat: 1. Ellenőrizze a tartót hajlításra az önsúly elhanyagolásával!
 2. Mekkora a tartó görbületi sugara az A keresztmetszetben?

Eredmények:	$\sigma_{zmax} = 15,43 \text{ kN/cm}^2 > R_{adm} = 14 \text{ kN/cm}^2$, nem felel meg. Megerősítés a szelvények nyitott oldalára felhegesztett 1-1 db 2,5 mm vastagságú $L_K=92,625 \text{ mm}$ hosszúságú lemezzel, ekkor $\sigma_{zmax} = 13,48 \text{ kN/cm}^2 < R_{adm} = 14 \text{ kN/cm}^2$.	Görbületi sugár: $R = 57,5 \text{ m}$.
-------------	---	--

4.1.2-24 Feladat

A 4.1.67 ábrán vázolt tartó anyagának folyási határa R_p , a folyás elkerülésével szembeni biztonság γ_b .

4.1.67 ábra



Adatok: $L_1 = 0,2\text{m}$,
 $L_2 = 0,4\text{ m}$,
 $L_3 = 0,5\text{ m}$,
 $a = 20\text{ mm}$,
 $b = 60\text{ mm}$,
 $y_E = 20\text{ mm}$,
 $F_1 = 3\text{ kN}$,
 $F_2 = 6\text{ kN}$,
 $R_p = 25\text{ kN/cm}^2$,
 $\gamma_b = 2$.

Feladat: 1. Ellenőrizze a tartót hajlításra!

2. Számítsa ki a veszélyes keresztmetszet E pontjában a feszültséget!

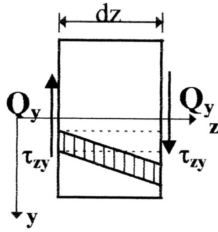
Eredmények:	$\sigma_{z\max} = 8,33\text{ kN/cm}^2 < R_{\text{adm}} = 12,0\text{ kN/cm}^2$	$\sigma_z^E = -5,55\text{ kN/cm}^2$.
-------------	---	---------------------------------------

4.2 Többtengelyű feszültségi állapotot létrehozó egyszerű igénybevételek

4.2.1 TISZTA NYÍRÁS

A. 4.2.1 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

4.2.1 ábra



Tiszta nyírásról beszélünk, ha a keresztmetszetet csak nyíróigénybevétel terheli (4.2.1 ábra).

A feszültség a keresztmetszet mentén állandó, nagysága:

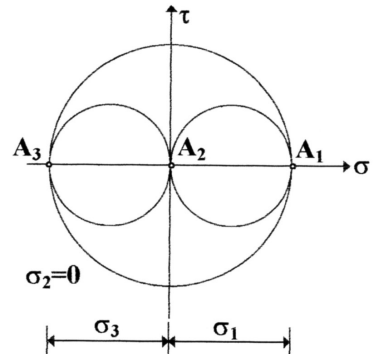
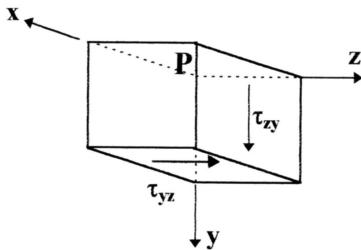
$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{A},$$

A szögváltozás:

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}$$

A feszültségi állapotot és a feszültségi Mohr-kört a 4.2.2 ábrán vázoltuk.

4.2.2 ábra



Az alakváltozási energia:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Q^2}{A \cdot G} dz$$

Tiszta nyírás a gyakorlatban többnyire csak közelítően fordul elő, mert általában fellép egyidejűleg hajlítás is. Így tiszta nyírásról beszélünk akkor is, ha az egyidejűleg fellépő hajlítónyomaték nem jelentős az elem teherbírása szempontjából.

Ilyen esetek a gyakorlatban:

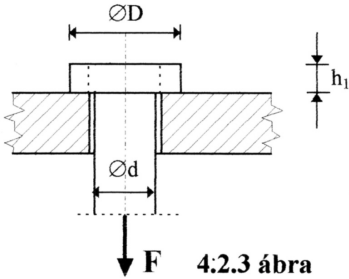
- kötőelemek nyírása,
- lemezdarabolás,
- llyukasztás.

B. 4.2.1 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.2.1-1 Feladat

Térjünk vissza a 4.1.1-4 feladatban szereplő függesztőcsap vizsgálatára! (4.1.11 ábra)

4.2.3 ábra



Adatok: $d = 20 \text{ mm}$,

$F = 15 \text{ kN}$,

$R_{qadm} = 14 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Határozzuk meg a csap szükséges h_1 fejmagasságát!

Megoldás:

Az F erő hatására a csap szára ki akar szakadni a csapfejből. Hogy ez ne történjen meg, a d átmérőjű, h_1 magasságú henger palástján ébredő τ feszültség nem haladhatja meg az R_{qadm} értékét. Képletszerűen:

$$\tau = \frac{F}{d \cdot \pi \cdot h_1} \leq R_{qadm}$$

Rendezés és behelyettesítés után kapjuk a tiszta nyírás esetén minimálisan szükséges méretet:

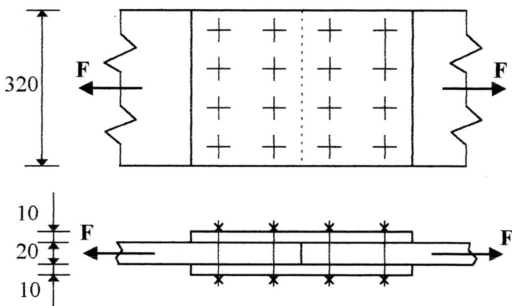
$$h_1 \geq \frac{F}{d \cdot \pi \cdot R_{qadm}} = \frac{15}{2 \cdot \pi \cdot 14} = 0,17 \text{ cm}.$$

Megjegyezzük, hogy a csapfejet hajlítás is igénybe veszi, ezért a magasság a fentinek 4–5-szöröse is lehet.

4.2.1-2 Feladat

Illesztendő kétszernyírt (hevederes) csavarozott kapcsolattal egy húzott lemez (4.2.4 ábra).

4.2.4 ábra



Adatok: Határfeszültségek:

alapanyag: $R_u = 26 \text{ kN/cm}^2$,

$R_{pu}^a = 46 \text{ kN/cm}^2$,

csavar: $R_{qu} = 16 \text{ kN/cm}^2$,

$R_{cs}^{pu} = 32 \text{ kN/cm}^2$.

Lyukátmérő: $d = 25 \text{ mm}$,

csavar: M 24.

Feladat: Határozzuk meg a szükséges csavarszámot egyenteherbírásra!

Megoldás:

Az alapanyag (a húzott lemez, vagy a két heveder) furatgyengítéssel adódó hasznos keresztmet-
szetének határereje:

$$F_u = R_u \cdot A_h = 26 \cdot [2,0 \cdot (32 - 4 \cdot 2,5)] = 26 \cdot 44 = 1144 \text{ kN}.$$

Egy csavar határereje:

nyírásra: $D_{ut} = 2 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot R_{qn} = 2 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \pi}{4} \cdot 16 = 144,8 \text{ kN}$

palástnyomásra:

$$D_{up} = d \cdot t \cdot R_{pu}^{cs} = 2,4 \cdot 2,0 \cdot 3,2 = 153,6 \text{ kN},$$

vagyis:

$$D_u = \min(D_{ut}, D_{up}) = 144,8 \text{ kN}.$$

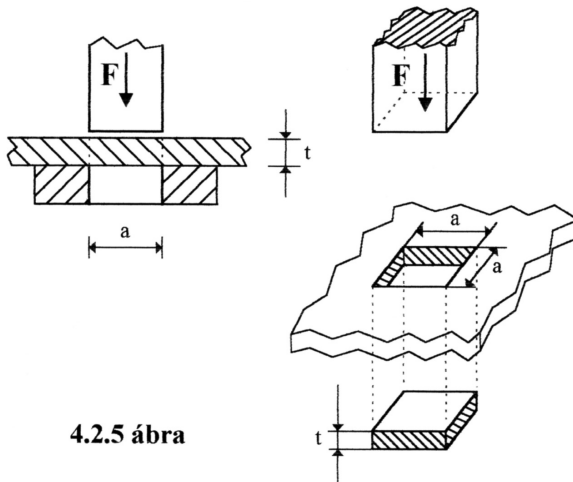
a szükséges csavarszám: $n_{sz} = \frac{F_u}{D_u} = \frac{1144}{144,8} = 7,9$.

Az alkalmazott csavarszám, mint ahogy azt a 4.2.4 ábrán vázoltuk: $n_{alk} = 8 \text{ db}$.

4.2.1-3 Feladat

A 4.2.5 ábrán lemez lyukasztásának elvi elrendezése látható.

4.2.5 ábra



4.2.5 ábra

Adatok: $F = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$,
 $a = 25 \text{ mm}$,
 $R_{qm} = 320 \text{ MPa}$.

Feladat: Maximálisan milyen vas-
tagságú lemez lyukasztható egy lé-
pésben F erővel, ha a lemez anyagá-
nak nyírószilárdsága R_{qm} ?

Megoldás:

Feladat, hogy a lemez anyagát a nyírt keresztmetszet mentén kettéválasszuk. Ehhez a nyíróerő-
nek le kell győzni az anyag nyírási ellenállását. Tehát írhatjuk, hogy a lyukasztáshoz szükséges
erő, ha tiszta nyírást feltételezünk:

$$Q_m = A \cdot R_{qm},$$

ahol: R_{qm} a lemez anyagának nyírószilárdsága,

$$A = 4 \cdot a \cdot t \quad \text{a nyírt keresztmetszet.}$$

Ebben az esetben ismert a nyíróerő:

$$Q_m = F,$$

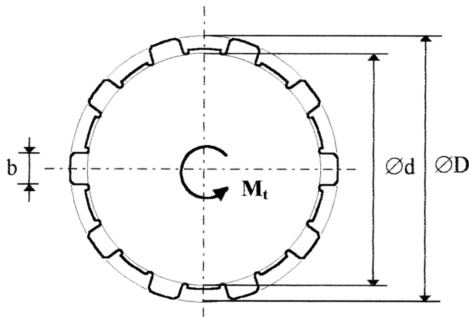
Tehát írhatjuk: $F = 4 \cdot a \cdot t \cdot R_{qm}$, ahonnan: $t = \frac{F}{4 \cdot a \cdot R_{qm}}$

Behelyettesítés után $t = \frac{6 \cdot 10^4}{4 \cdot 25 \cdot 320} = 1,875 \text{ mm}$ adódik.

4.2.1-4 Feladat

A 4.2.6 ábrán vázolt párhuzamos oldalú bordás tengely hossza L , anyaga **Fe 490** (A50) MSZ 500.

4.2.6 ábra



Adatok: $L = 100 \text{ mm}$,
 $d = 112 \text{ mm}$,
 $D = 125 \text{ mm}$,
 $b = 18 \text{ mm}$,
 $R_{qadm} = 70 \text{ MPa}$,
 $R_{padm} = 110 \text{ MPa}$.

Feladat: Mekkora csavarónyomaték (M_t) átvitelére alkalmas a fenti bordás tengely?

Megoldás:

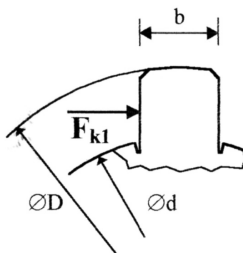
Az M_t csavarónyomatékból az egy bordafelületre jutó megoszló erőrendszer eredőjét (F_{kl}) a bordafelület magasságának felében feltételezzük (4.2.7 ábra). Ezeknek nyomatéka a forgástengelyre:

$$M_t = z \cdot F_{kl} \cdot r,$$

$$\text{ahol: } z \text{ a bordák száma, és}$$

$$r = \frac{D + d}{4}.$$

4.2.7 ábra



Másrészt az F_{kl} erőből számított nyírófeszültség nem haladhatja meg R_{qadm} értékét,

$$\tau = \frac{F_{kl}}{b \cdot L} \leq R_{qadm}$$

Innen $F_{kl} \leq R_{qadm} \cdot b \cdot L$

Behelyettesítve:

$$F_{kl} \leq 70 \cdot 18 \cdot 100 = 1,26 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Az átvihető csavarónyomaték pedig

$$M_t \leq 10 \cdot 1,26 \cdot 10^5 \cdot \frac{125 + 112}{4} = 7,4655 \cdot 10^8 \text{ Nmm} = 74,655 \text{ kNm}.$$

A fentiek mellett azt a feltételt is ki kell elégítenie a kötésnek, hogy felületi nyomás értéke sem haladhatja meg a megengedett értéket (R_{padm} - ot).

Tehát

$$\frac{F_{kl}}{L \cdot \frac{D-d}{2}} \leq R_{padm} .$$

Innen

$$F_{kl} \leq R_{padm} \cdot L \cdot \frac{D-d}{2} = 110 \cdot 100 \cdot \frac{125-112}{2} = 7,15 \cdot 10^4 \text{ N}$$

az átvihető csavarónyomaték pedig

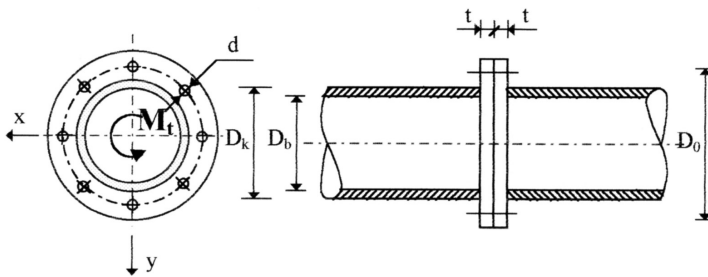
$$M_t \leq 10 \cdot 1,26 \cdot 10^5 \cdot \frac{125+112}{4} = 7,4655 \cdot 10^7 \text{ Nmm} = 74,655 \text{ kNm} .$$

Az átvihető nyomaték tehát a felületi nyomás korlátozásából kapott kisebb érték.

4.2.1-5 Feladat

A 4.2.8 ábrán egy csőtengely peremes kötését láthatjuk a D_0 átmérőjű kör területén m számú csavarral.

4.2.8 ábra



Adatok:

$$D_0 = 120 \text{ mm},$$

$$d = 10 \text{ mm},$$

$$t = 5 \text{ mm},$$

$$R_{adm} = 12 \text{ kN/cm}^2,$$

$$R_{padm} = 32 \text{ kN/cm}^2,$$

$$m = 8.$$

Feladat: Határozzuk meg, hogy mekkora csavarónyomatékot tudunk átvinni a fenti tengelykötéssel, a csavarok tiszta nyírásának és palástnyomásának határállapotára.

Megoldás:

Határozzuk meg az egy csavarral átvihető nyíróerőt!

– nyírásra: $Q_{1\tau} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot R_{qadm} = \frac{1^2 \cdot \pi}{4} \cdot 12 = 9,425 \text{ kN}$

– palástnyomásra: $Q_{1p} = d \cdot t \cdot R_{padm} = 1 \cdot 0,5 \cdot 32 = 16 \text{ kN} .$

Egy csavar megengedhető nyíróereje: $Q_{1 adm} = \min(Q_{1\tau}, Q_{1p}) = 9,425 \text{ kN}.$

A tengelykötéssel átvihető csavarónyomaték (megengedett csavarónyomaték):

$$M_{t adm} = \sum r_i \cdot Q_i = m \cdot \frac{D_0}{2} \cdot Q_{1 adm} .$$

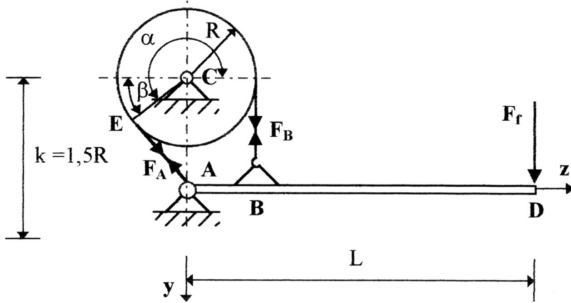
Behelyettesítés után:

$$M_{t adm} = 8 \cdot \frac{12}{2} \cdot 9,425 = 452,4 \text{ kNcm}.$$

4.2.1-6 Feladat

A 4.1.28 és 4.2.9 ábrán vázolt egykaros szalagfék szalagvégeit csappal rögzítjük a fékkarhoz.

4.2.9 ábra



Adatok: $R = 15 \text{ cm}$,
 $\mu = 0,2$,
 $F_f = 500 \text{ N}$,
 $L = 45 \text{ cm}$,
 $R_{\text{qadm}} = 18 \text{ kN/cm}^2$,
 $R_{\text{padm}} = 32 \text{ kN/cm}^2$.

- Feladat:** 1. Méretezzük az A, B és C jelű csapokat!
 2. Határozzuk meg a bekötőfűl szükséges vastagságát!

Megoldás:

1. A szalagágakban fellépő erőket a statikában tanultaknak megfelelően határozhatjuk meg. Az AD rúd (fékkar) egyensúlyát vizsgálva írjuk fel az A ponton átmenő síkra merőleges tengelyre a nyomatéki egyenletet!

$$\Sigma M_{ai} = 0 = F_B \cdot R - F_f \cdot L,$$

kifejezve:

$$F_B = \frac{F_f \cdot L}{R} = \frac{500 \cdot 45}{15} = 1500 \text{ N}$$

A másik „szalagágon” ennél nagyobb erő lép fel akkor, ha a fékdob az óra járásával egyezően forog.

Ekkor

$$F_A = F_B \cdot e^{\mu\alpha},$$

ahol

$$\alpha = 180^\circ + \beta = 180^\circ + \arcsin \frac{R}{1,5 \cdot R}.$$

$$\alpha = 180^\circ + \arcsin \frac{1}{1,5} = 221,8^\circ = 3,87 \text{ rad}$$

Behelyettesítés után

$$F_A = 1500 \cdot e^{0,2 \cdot 3,87} = 3253 \text{ N}.$$

A C csuklóban keletkező erő F_B és F_A erők vektori összege, melynek abszolút értéke:

ahol

$$F_C = \sqrt{(F_{Ay} + F_B)^2 + F_{Az}^2},$$

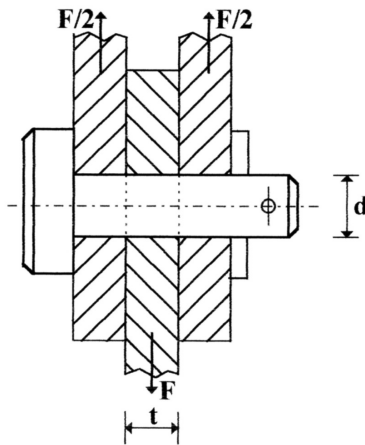
$$F_{Ay} = F_A \cdot \cos\beta = 3253 \cdot 0,745 = 2425 \text{ N},$$

$$F_{Az} = F_A \cdot \sin\beta = 3253 \cdot 0,6667 = 2169 \text{ N}.$$

$$F_C = \sqrt{(2425 + 1500)^2 + 2169^2} = 4484 \text{ N}.$$

Mindhárom csapot a 4.2.10 ábrán látható módon kétszernyírt elemként alakítjuk ki.

4.2.10 ábra



$$\tau = \frac{F}{2 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{2 \cdot F}{d^2 \cdot \pi} \leq R_{qadm}$$

A szükséges csapátmérők:

$$d_{Asz} = \sqrt{\frac{2 \cdot F_A}{\pi \cdot R_{qadm}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,253}{\pi \cdot 18}} = 0,339 \text{ cm} \approx 3,4 \text{ mm}$$

$$d_{Bsz} = \sqrt{\frac{2 \cdot F_B}{\pi \cdot R_{qadm}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,50}{\pi \cdot 18}} = 0,23 \text{ cm} \approx 2,3 \text{ mm} ,$$

$$d_{Csz} = \sqrt{\frac{2 \cdot F_C}{\pi \cdot R_{qadm}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,484}{\pi \cdot 18}} = 0,398 \text{ cm} \approx 4 \text{ mm} .$$

2. A bekötőfűl t vastagságát palástnyomásra határozhatjuk meg.

A $\sigma_p = \frac{F_A}{t \cdot d_A \cdot \pi} \leq R_{padm}$ határfeltételből

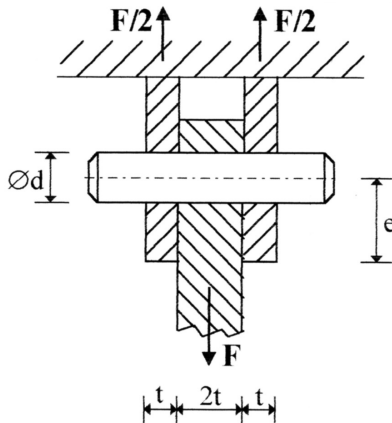
$$t_{sz} = \frac{F_A}{d_A \cdot \pi \cdot R_{padm}} = \frac{3,253}{0,34 \cdot \pi \cdot 32} = 0,095 \text{ cm} \approx 1 \text{ mm}$$

C. 4.2.1 GYAKORLÓ FELADATOK

4.2.1-7 Feladat

A 4.2.11 ábrán látható d átmérőjű csapot az F erő terheli.

4.2.11 ábra



Adatok: $t = 4 \text{ mm}$,
 $d = 10 \text{ mm}$,
 $e = 10 \text{ mm}$,
 $R_{qadm} = 140 \text{ MPa}$,
 $R_{adm} = 240 \text{ MPa}$,
 $R_{padm} = 300 \text{ MPa}$.

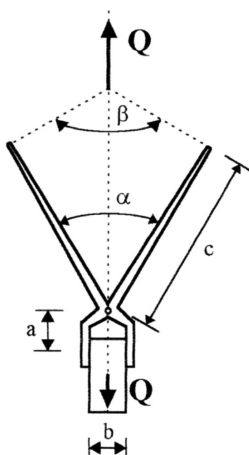
Feladat: Maximálisan mekkora F erővel terhelhető a kötés (a csap nyírására, a palástnyomásra, a fűlek kiszakadására vizsgálva).

Eredmények:	$F_1 \leq 21980 \text{ N}$ $F_2 \leq 24000 \text{ N}$ $F_3 \leq 22400 \text{ N}$ $F_{eng} \leq 21980 \text{ N}$	a csap nyírására, a palástnyomásra, a fűlek kiszakadására,
-------------	--	--

4.2.1-8 Feladat

A 4.2.12 ábrán egy bugaemelő látható. (lásd Műszaki mechanika 1/2 Példatár 6.2-3 feladat)

4.2.12 ábra



Adatok: $Q = 28,26 \text{ kN}$,
 $R_{qadin} = 16 \text{ kN/cm}^2$,
 $a = 150 \text{ mm}$,
 $b = 200 \text{ mm}$,
 $c = 600 \text{ mm}$,
 $\alpha = 60^\circ$,
 $\beta = 120^\circ$,

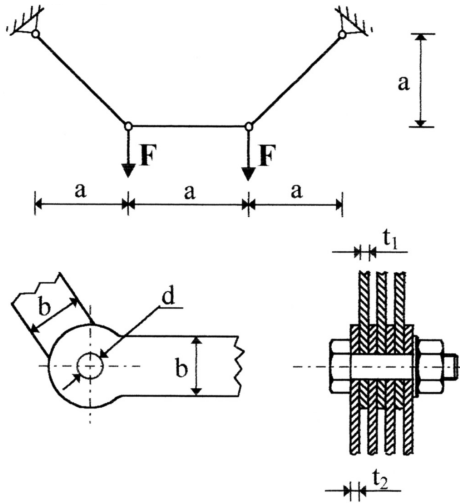
Feladat: Határozza meg a bugafogó C csapjának szükséges d átmérőjét!

Eredmények:	$d_{sz} = 34,2 \text{ mm}$, $d_{alk} = 35 \text{ mm}$.
-------------	--

4.2.1-9 Feladat

A 4.2.13 ábrán egy egyszerű láncszemekből álló függesztőmű látható, melynek csomópontjaiban két azonos erő működik.

4.2.13 ábra



Adatok: $t_1 = 20 \text{ mm}$,
 $t_2 = 15 \text{ mm}$,
 $b = 100 \text{ mm}$,
 $R_{qadm} = 18 \text{ kN/cm}^2$,
 $R_{qadmcsap} = 12 \text{ kN/cm}^2$,
 $R_{padm} = 34 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Határozza meg a láncszemeket rögzítő csap szükséges d átmérőjét a lánc húzási teherbírására!

Eredmények:	Nyírásra: $d = 43,7 \text{ mm}$,	Palástnyomásra: $d = 52,9 \text{ mm}$	$d_{alk} = 54 \text{ mm}$.
-------------	--------------------------------------	--	-----------------------------

4.2.1-10 Feladat

Megtervezendő egy húzott lemez egyszerűnyírt szegecselt kapcsolata.

Adatok: lemez mérete: $180 - 8 \text{ mm}$,
szegecslyuk átmérője: $d = 17 \text{ mm}$,
alapanyag határfeszültsége: $R_u = 20 \text{ kN/cm}^2$,
szegecs nyíró határfeszültsége: $R_{qu} = 15 \text{ kN/cm}^2$,
palástnyomási határfeszültség: $R_{pu} = 33 \text{ kN/cm}^2$.
(alapanyagra is)

Feladat: Határozza meg a szükséges szegecslek számát!

4.2.1-11 Feladat

Megtervezendő egy húzott lemez kétszernyírt csavarozott kapcsolata.

Adatok: lemez mérete: 300 - 16 mm,
 alapanyag határfeszültsége: $R_u = 20 \text{ kN/cm}^2$,
 palástnyomás: $R_{pu} = 33 \text{ kN/cm}^2$,
 csavar: M 20, 5.6 minőségű,
 csavar nyíró határfeszültsége: $R_{qu} = 16 \text{ kN/cm}^2$,
 palástnyomásra: $R_{pu} = 32 \text{ kN/cm}^2$.

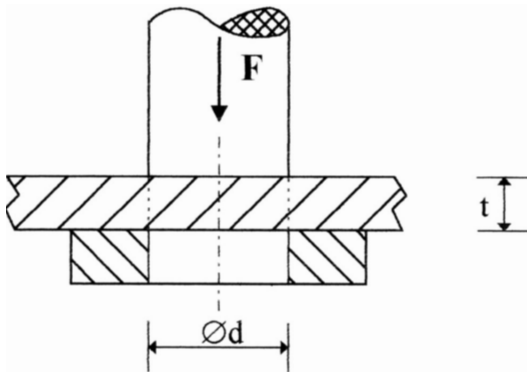
Feladat: Határozza meg a szükséges csavarszámot!

Eredmény:	n = 12 (kiosztás: 3 x 4), vagy	n = 10 (kiosztás: 2 x 5).
------------------	---------------------------------------	----------------------------------

4.2.1-12 Feladat

A 4.2.14 ábrán kör keresztmetszetű lyuk kivágásának elvi elrendezése látható.

4.2.14 ábra



Adatok: $F = 50 \text{ kN}$,
 $t = 2 \text{ mm}$,
 $R_{qm} = 32 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Maximálisan mekkora átmérőjű lyuk készíthető a t vastagságú lemezben F erővel, ha a lemez nyírószilárdsága R_{qm} ?

Eredmény:	d = 24,88 mm.
------------------	----------------------

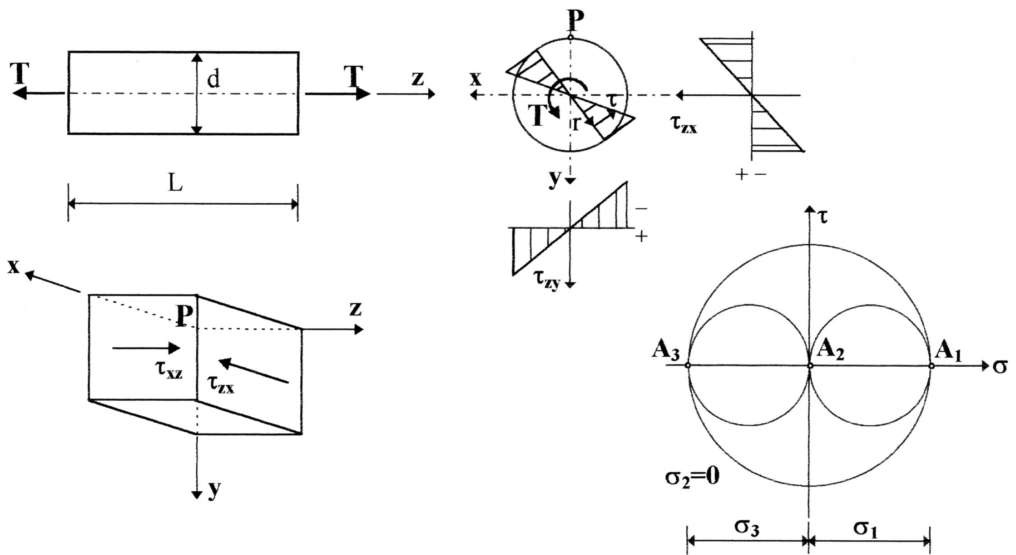
4.2.2. TISZTA CSAVARÁS

A.4.2.2 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Tiszta csavarásról beszélünk, ha a rúd keresztmetszetét csak annak normálisában működő nyomaték veszi igénybe (4.2.15 ábra). Szabad csavarás akkor lép fel, ha a csavarónyomaték nem okozza a keresztmetszet torzulását. A fenti feltételnek megfelel a kör és körgyűrű keresztmetszet. E fejezet ennek értelmében az ilyen típusú szelvények csavarásával, valamint a vékonyfalú zárt szelvények közelítő megoldásával foglalkozik.

Az ébredő feszültséget, a feszültségeloszlást és a feszültségi állapotot 4.2.15 ábrán rajzoltuk meg.

4.2.15 ábra



A maximális feszültség $\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \cdot r_{\max} = \frac{T}{W_p}$ összefüggéssel számítható.

A két véglap egymáshoz képesti szögelfordulása $\varphi_{AB} = \int_A^B \frac{T}{I_p \cdot G} dz$.

Ha T és I_p állandó, akkor: $\varphi_{AB} = \frac{T \cdot L}{I_p \cdot G}$.

Az alakváltozási energia: $U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{I_p \cdot G} dz$.

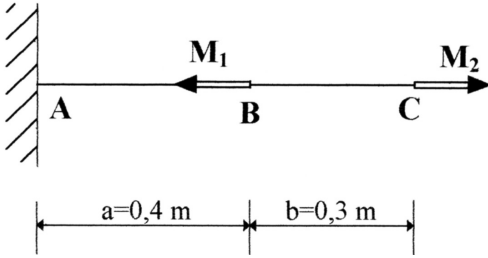
A csavaróigénybevétel leggyakoribb előfordulása a nyomatékátvitelre szolgáló géptengelyeknél van, de egyes acélszerkezeti elemek, mint például darupályatartók igénybevétele is hajlítással egyidejű csavarás.

B. 4.2.2 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.2.2-1 Feladat

A 4.2.16 ábrán látható állandó d átmérőjű kör keresztmetszetű befogott tartó terhelése a **B** keresztmetszet súlypontjába redukált M_1 és a **C** keresztmetszet súlypontjába redukált M_2 nyomatékú erőpár.

4.2.16 ábra



Adatok: $d = 2,8 \text{ cm}$,
 $d_1 = 2,5 \text{ cm}$,
 $M_1 = 45 \text{ kNcm}$,
 $M_2 = 18 \text{ kNcm}$,
 $R_{\text{qadm}} = 6,5 \text{ kN/cm}^2$,
 $G = 0,8 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

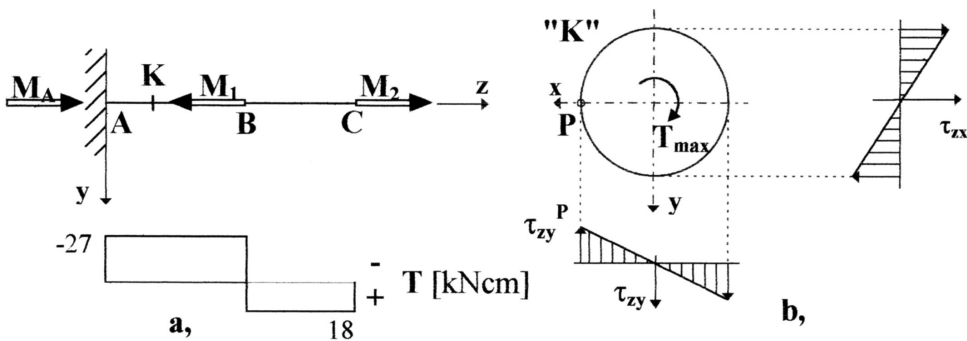
Feladat: 1. Ellenőrizzük a rúd maximális csúsztató feszültségét!

2. A BC tartószakasz mekkora legkisebb átmérővel készíthető, hogy feszültség-korlátozásra megfeleljen?
3. Számítsuk ki a tartó C keresztmetszetének az A keresztmetszethez képesti szögelfordulását, ha a BC szakasz átmérője d_1 , az AB szakaszé d !

Megoldás:

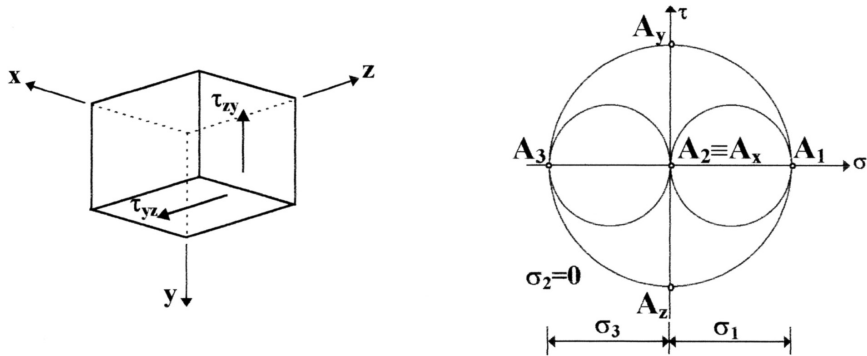
1. Az M_1 és M_2 nyomaték csavarásra veszi igénybe a tartót, rajzoljuk meg a csavarónyomatéki ábrát! (4.2.17 a, ábra)

4.2.17 ábra



Maximális csavarónyomaték $T_{\text{max}} = 27 \text{ kNcm}$ nyomaték hat a tartó **AB** szakaszán. Rajzoljuk rá ezt a nyomatékot a tartószakasz valamelyik tetszőleges **K** keresztmetszetére, és rajzoljuk fel ebből a feszültségeloszlási ábrákat (4.2.17 b, ábra)! Maximális feszültség ébred a kör keresztmetszet kerületi pontjaiban. Válasszuk ki ezek közül pl. a **P** pontot és ábrázoljuk a **P** pontbeli feszültség-állapotot az elemi hasábon és feszültségi Mohr-diagramon! (4.2.18 ábra).

4.2.18 ábra



Határozzuk meg ezek után a maximális τ feszültséget!

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p}, \text{ ahol}$$

$$W_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16} = \frac{2,8^3 \cdot \pi}{16} = 4,31 \text{ cm}^3.$$

Behelyettesítve: $\tau_{\max} = \frac{27}{4,31} = 6,26 \text{ kN / cm}^2 \leq R_{qadm} = 6,5 \text{ kN / cm}^2,$

tehát maximális feszültségre szilárdságilag megfelel.

2. A BC szakaszon az átmérőt egy olyan d' értékre lehet csökkentetni, hogy még fennálljon a

$$\frac{T^{(BC)}}{d'^3 \cdot \pi} \leq R_{qadm} \quad \text{egyenlőség}$$

Innen

$$d' \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T^{(BC)}}{\pi \cdot R_{qadm}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 18}{\pi \cdot 6,5}} = 2,42 \text{ cm}$$

3. A szögelfordulás számítását két szakaszra kell bontani, mivel a B keresztmetszetben a nyomaték is, és a keresztmetszet átmérője is megváltozik.

Tehát

$$\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = \frac{T^{(AB)} \cdot a}{I_p \cdot G} + \frac{T^{(BC)} \cdot b}{I_{p1} \cdot G}, \quad \text{ahol}$$

$$I_p = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 6,03 \text{ cm}^4 \quad \text{és} \quad I_{p1} = \frac{d_1^4 \cdot \pi}{32} = 3,83 \text{ cm}^4.$$

Behelyettesítve:

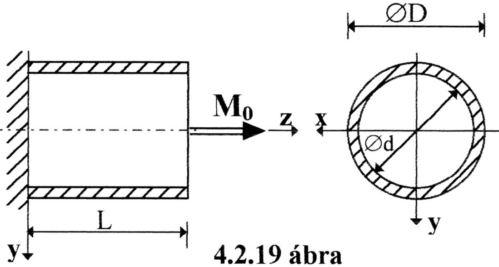
$$\varphi_{AC} = \frac{-27 \cdot 40}{6,03 \cdot 0,8 \cdot 10^4} + \frac{18 \cdot 30}{3,83 \cdot 0,8 \cdot 10^4} = -2,24 \cdot 10^{-2} + 1,76 \cdot 10^{-2} = -0,48 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = -0,275^\circ$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy az A keresztmetszethez képest a C az M_1 nyomaték irányába fog elfordulni.

4.2.2-2 Feladat

Egyik végén befogott csövet szabad végén M_0 nyomatékkal terhelünk. (4.2.19 ábra)

4.2.19 ábra



4.2.19 ábra

Adatok: $M_0 = 2 \text{ kNm}$,
 $L = 2 \text{ m}$,
 $\varphi = 1,0^\circ$,
 $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$,
 $\tau_{\max} = 3,5 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Határozzuk meg a cső külső és belső átmérőjét úgy, hogy a fellépő legnagyobb feszültség a megadott $\tau_{\max}$, a szabad rúdvég szögelfordulása pedig az ugyancsak megadott φ legyen!

Megoldás:

A cső igénybevétele csavarás. A csavarónyomaték végig a rúdon állandó, értéke:

$$T = M_0.$$

Ebből a legnagyobb feszültség a keresztmetszetek kerületi pontjaiban ébred. Számítása a

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \cdot \frac{D}{2}$$

összefüggéssel lehetséges.

Mivel a csavarónyomaték és a cső keresztmetszete egyaránt állandó, a szabad szögelfordulás a következőképpen írható fel:

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{I_p \cdot G}.$$

A felírt összefüggésekből I_p -t kifejezve:

$$I_p = \frac{T \cdot D}{2 \cdot \tau_{\max}} = \frac{T \cdot L}{\varphi \cdot G}$$

Ebből

$$D = \frac{2 \cdot L \cdot \tau_{\max}}{\varphi \cdot G}.$$

A kapott összefüggésekbe φ értékét radiánban kell behelyettesíteni, tehát $\varphi = \frac{\pi}{180}$ radián, így

$$D = \frac{2 \cdot L \cdot \tau_{\max} \cdot 180}{\pi \cdot G} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 3,5 \cdot 180}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^3} \approx 10 \text{ cm}.$$

Írjuk fel az I_p -re kapott korábbi összefüggést, majd helyettesítsünk be:

$$I_p = \frac{T \cdot L}{\varphi \cdot G} = \frac{200 \cdot 200 \cdot 180}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^3} = 286,62 \text{ cm}^4.$$

A körgyűrű poláris másodrendű nyomatéka az átmérőkkel kifejezve:

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{32}$$

Ebből

$$d = \sqrt[4]{D^4 - \frac{32 \cdot I_p}{\pi}} = \sqrt[4]{10^4 - \frac{32 \cdot 286,62}{3,14}} = 9,17 \text{ cm}$$

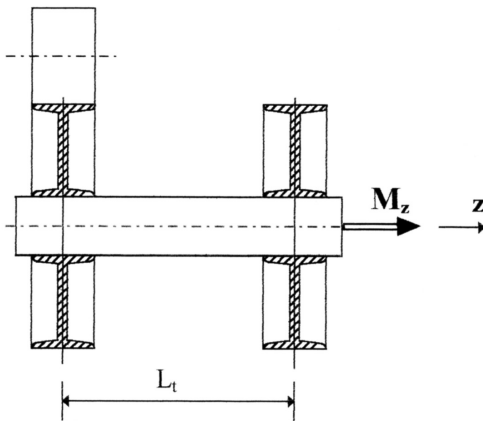
Vagyis az előírt mindkét feltételnek megfelelő cső keresztmetszeti adatai:

$$D = 10 \text{ cm}, \quad d = 9,17 \text{ cm}.$$

4.2.2-3 Feladat

A 4.2.20 ábrán egy meghajtótengely látható, melyet a meghajtómotor M_z nyomatékkal forgat. A nyomaték az ábrán látható fogaskerékpáron adódik tovább. A fogaskereket a tengelyre fészkes retesszel rögzítjük.

4.2.20 ábra



Adatok: $L_t = 30 \text{ cm}$,
 $M_z = 20 \text{ kNcm}$,
 a tengelyre:
 $R_{qadm} = 10 \text{ kN/cm}^2$,
 $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$,
 $\nu = 0,3$,
 $\Phi_{adm} = 0,075^\circ$,
 a reteszre:
 $R_{qadm} = 6 \text{ kN/cm}^2$,
 az agyra:
 $P_{adm} = 4,2 \text{ kN/cm}^2$.

- Feladat:**
1. Határozzuk meg a szükséges tengelyátmérőt szilárdsági- és alakváltozáskorlátozásra!
 2. Válasszunk a nyomaték átvitelére megfelelő reteszt!
 3. Ellenőrizzük a választott reteszkötést nyírásra és palástnyomásra!

Megoldás:

1. Határozzuk meg a szükséges tengelyátmérőt először a megengedett feszültség ismeretében. Mivel M_z nyomaték a tengelyt csavarásra veszi igénybe, írható:

$$T = M_z = 20 \text{ kNcm}.$$

A tengely csavarásra megfelel, ha

Ebből

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{T \cdot 16}{d^3 \cdot \pi} \leq R_{qadm}$$

adódik:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T \cdot 16}{\pi \cdot R_{qadm}}} = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot 16}{\pi \cdot 10}} = 2,16 \text{ cm}$$

Nézzük mekkora a szükséges tengelyátmérő, ha a szögelfordulás mértéke nem lehet nagyobb φ_{adm} -nél.

A csavarónyomaték hatására bekövetkező szögelfordulás:

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{I_p \cdot G},$$

ahol:

$$I_p = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} \text{ és } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

A tengely alakváltozásra megfelel, ha $\varphi \leq \varphi_{qadm}$, így írhatjuk

$$\frac{T \cdot L_t \cdot 32 \cdot 2 \cdot (1 + \nu)}{d^4 \cdot \pi \cdot E} \leq \varphi_{adm}$$

$$\text{Ebből } d \geq \sqrt[4]{\frac{T \cdot L_t \cdot 32 \cdot 2 \cdot (1 + \nu)}{\pi \cdot E \cdot \varphi_{adm}}} = \sqrt[4]{\frac{20 \cdot 30 \cdot 32 \cdot 2 \cdot (1 + 0,3)}{\pi \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 0,0013}} = 4,91 \text{ cm}$$

Mivel az alakváltozáskorlátozásra kapott $d \geq 4,91 \text{ cm}$ nagyobb, mint a szilárdsági előírásra adódó $d \geq 2,16 \text{ cm}$, így:

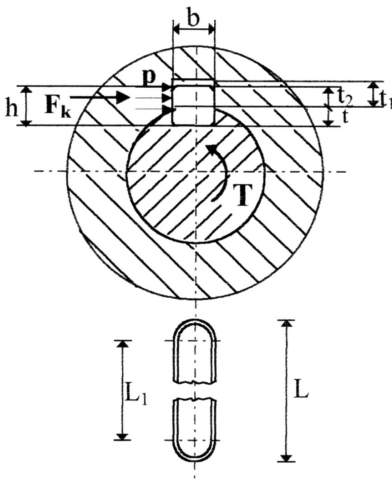
$$d = 5 \text{ cm}$$

tengelyátmérőt választunk.

2. Válasszunk fészkes reteszt a nyomaték átvitelére.

A vonatkozó kötőelemek szabvány szerint $d = 44\text{--}50 \text{ mm}$ esetén a fészkesretesz adatai a következők (4.2.21 ábra):

4.2.21 ábra



Adatok: $b = 14 \text{ mm}$,
 $t = 5 \text{ mm}$,
 $h = 9 \text{ mm}$,
 $t_1 = 4,2 \text{ mm}$.

Ezen retesz:

$M_1 = 0,4125 \text{ kNcm/mm}$
 nyomaték átvitelére alkalmas. Így a
 szükséges működő reteshossz:

$$L_1 = \frac{T}{M_1} = \frac{20}{0,4125} = 48,48 \text{ mm}$$

Válasszunk $L_1 = 50 \text{ mm}$,
 $L = L_1 + b = 50 + 14$, $L = 64 \text{ mm}$
 hosszúságú reteszt.

3. Ellenőrizzük a választott reteszkötést!

Először vizsgáljuk meg, hogy a retesz nyírásra megfelel-e! A nyíróerő:

$$Q = F_k = \frac{2 \cdot T}{d} = \frac{20 \cdot 2}{5} = 8 \text{ kN}.$$

A retesz nyírásra megfelel, ha

$$\tau_{ny} = \frac{Q}{A} \leq R_{qadm},$$

ahol $A = b \cdot L_1$ a nyírt keresztmetszet.

Behelyettesítve:

$$\tau_{ny} = \frac{8}{1,4 \cdot 5} = 1,14 \text{ kN / cm}^2$$

Mivel

$$\tau_{ny} = 1,14 \text{ kN / cm}^2 \ll R_{qadm} = 6 \text{ kN / cm}^2,$$

a retesz nyírásra megfelel.

Most ellenőrizzük a kötést felületi nyomásra! Az ellenőrzést az agyra kell elvégezni, mivel kisebb szilárdságú mint a tengely, és a nyomatékátvivő horonyoldal is az agyban kisebb, mint a tengelyben.

Az agy felületi nyomásra megfelel, ha

$$p = \frac{F_k}{t_2 \cdot L_1} \leq p_{adm}$$

ahol $F_k = \frac{2 \cdot T}{d}$, és $t_2 = h - t$. Behelyettesítve:

$$p = \frac{20 \cdot 2}{5 \cdot (0,9 - 0,5) \cdot 5} = 4 \text{ kN / cm}^2 < p_{adm} = 4,2 \text{ kN / cm}^2,$$

az agy felületi nyomásra megfelel.

A reteszkötés ellenőrzéséből jól látszik, hogy a kötést elegendő felületi nyomásra ellenőrizni (méretezni), mivel a felületi nyomásra éppen megfelelő reteszkötés esetén a reteszsze

$$\tau_{ny} \ll R_{qadm}.$$

A választott retesz szerkezeti kialakítás szempontjából is megfelel, mivel teljesül:

$$L = 64 \text{ mm} < 10 \cdot b = 10 \cdot 14 = 140 \text{ mm}$$

4.2.2-4 Feladat

Vizsgáljuk a 4.2.1-5 feladatban megadott csőtengelyt csavarásra!

Adatok: $D_k = 80 \text{ mm}$,

$R_{qadmcső} = 10 \text{ kN/cm}^2$,

$M_{tadm} = 452,4 \text{ kNcm}$.

Feladat: Méretezzük a 4.2.1-5 példában meghatározott, a kapcsolat szempontjából megengedett M_{tadm} csavarónyomatéokra a csőtengelyt!

Megoldás:

A csőtengely kerületi pontjaiban

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{tadm}}}{I_p} \cdot \frac{D_k}{2}$$

nagyságú feszültség keletkezik. Behelyettesítve az

$$I_p = \frac{(D_k^4 - D_b^4) \cdot \pi}{32}$$

poláris inercia képletét, majd kifejezve D_b -t.

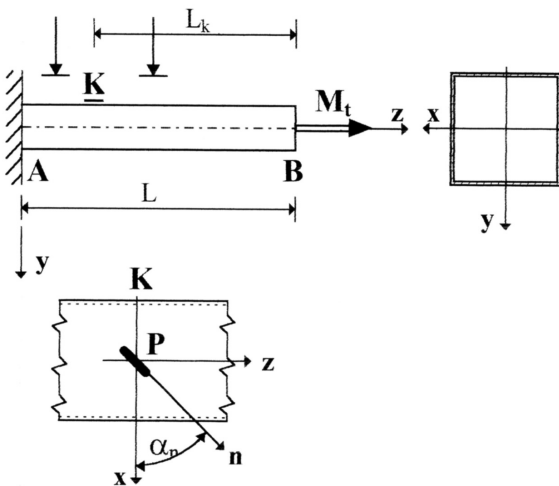
$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_{\text{tadm}} \cdot D_k}{(D_k^4 - D_b^4) \cdot \pi} \leq R_{\text{admcso}}$$

$$D_b = \sqrt[4]{D_k^4 - \frac{16 \cdot M_{\text{tadm}} \cdot D_k}{\pi \cdot R_{\text{admcso}}}} = \sqrt[4]{8^4 - \frac{16 \cdot 452,4 \cdot 8}{\pi \cdot 10}} = 6,9 \text{ cm} = 69 \text{ mm}.$$

4.2.2-5 Feladat

A 4.2.22 ábrán látható négyzet keresztmetszetű vékonyfalú zárt profilú befogott tartót ismeretlen M_t csavarónyomaték terheli. A mechanikai jellemzők meghatározásához a **K** keresztmetszet **P** pontjának környezetében **n** irányban mérünk fajlagos nyúlást.

4.2.22 ábra



Adatok: profil $\square$ 80/80 x 3

$L_k = 80 \text{ cm}$,

$L = 100 \text{ cm}$,

$E = 20600 \text{ kN/cm}^2$,

$\nu = 0,31$,

$\epsilon_n = 480 \text{ } \mu\text{m/m}$,

$\alpha_n = 45^\circ$,

Feladat: 1. Határozzuk meg a **P** pontbeli alakváltozási- és feszültségi állapotot!

2. Határozzuk meg az M_t csavarónyomatékot!

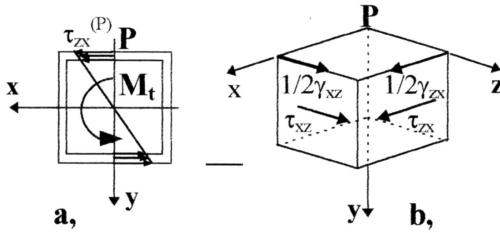
3. Határozzuk meg a **B** keresztmetszet szögelfordulását!

Megoldás:

1. A feladat feltevése szerint a rudat csupán csavarónyomaték terheli. A 4.2. 23 a, ábrán ábrázoltuk a **K** keresztmetszetbeli csavarófeszültség-eloszlást, amiből látható, hogy a **P** pontban $\tau_{zx}^{(P)}$ feszültség lép fel.

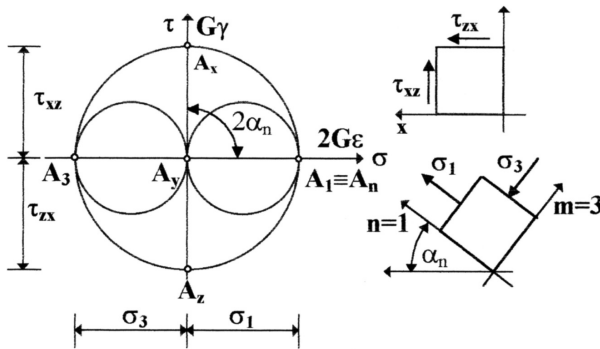
A feszültségi állapotnak megfelelően a 4.2.23 b, ábrán láthatóan γ_{zx} szögváltozás keletkezik.

4.2.23 ábra



Ábrázoljuk a feszültségi állapot Mohr-diagramját (4.2.24 ábra). Látható, hogy $\alpha_n = 45^\circ$ esetén az $\mathbf{n}$ irány azonos az 1-es feszültségi főiránnyal!

4.2.24 ábra



A feszültségi Mohr-körből következik az alakváltozási Mohr-kör $2G$ -szeres transzformációval.

Az $\alpha_n = 45^\circ$ -os irányban mért fajlagos nyúlásra fennáll

$$\varepsilon_n = \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx}$$

a fellépő feszültségre

$$\sigma_n = \sigma_1 = \tau_{zx} = \varepsilon_n \cdot 2G = \varepsilon_n \cdot \frac{E}{1 + \nu}$$

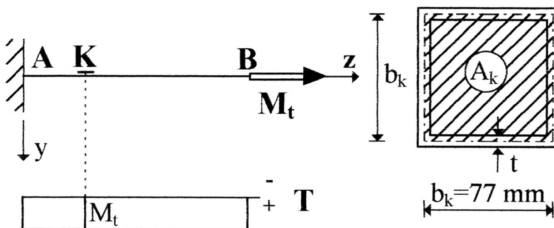
Számítsuk ki a szögváltozást és a csavarófeszültséget!

$$\gamma_{zx} = 2 \cdot \varepsilon_n = 2 \cdot 480 \cdot 10^{-6} = 960 \cdot 10^{-6} = 960 \mu\text{m/m},$$

$$\tau_{zx} = 4,8 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{20600}{1 + 0,31} = 7,6 \text{ kN / cm}^2.$$

2. A tartót a B keresztmetszetben terheli az M_t csavarónyomaték, ezért a csavaróigénybevétel konstans (4.2.25 ábra).

4.2.25 ábra



A vékonyfalú zárt szelvényeknél alkalmazható közelítő Bredt-formulával számíthatjuk a csavarófeszültséget

$$\tau_{zx} = \frac{M_t}{2 \cdot A_k \cdot t}$$

amiből az ismeretlen csavarónyomaték

$$M_t = 7,6 \cdot 2 \cdot 7,72 \cdot 0,3 = 270,4 \text{ kNcm}.$$

3. A B keresztmetszet elcsavarodása

$$\varphi_z^{(B)} = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_t} = 2 \cdot \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{M_t \cdot L}{I_t}$$

ahol I_t a csavarási inercia (táblázatból).

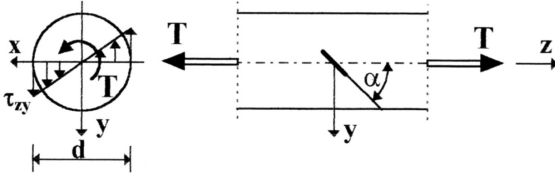
Behelyettesítés után

$$\varphi_z^{(B)} = 2 \cdot \frac{1 + 0,31}{20600} \cdot \frac{270,4 \cdot 80}{138,9} = 1,98 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,13^\circ$$

4.2.2-6 Feladat

Egy jármű kardántengelyén végzett nyúlásméréssel állapítjuk meg a hajtónyomaték értékét. A mért ε fajlagos nyúlást a tömör, kör keresztmetszetű tengely palástján, a tengellyel $\alpha = 45^\circ$ -os szöget bezáró irányban felragasztott nyúlásmérő ellenállás érzékeli.

4.2.26 ábra



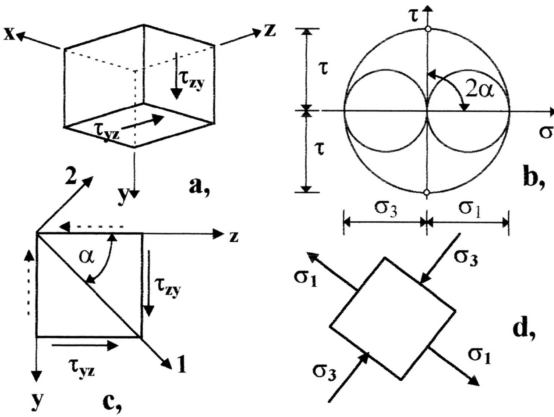
Adatok: $d = 60 \text{ mm}$,
 $E = 210000 \text{ MPa}$,
 $\nu = 0,3$,
 $\varepsilon = 522 \text{ }\mu\text{m/m}$.

Feladat: Mekkora a tengely által átvitt hajtó nyomaték (feltételezve, hogy a tengely igénybevétele tisztán csavarás)?

Megoldás:

A 4.2.26 ábrán vázoltuk a tengely keresztmetszetében fellépő τ csavarási feszültségek eloszlását a 4.2.27 ábrán pedig a **P** pontbeli feszültségi állapotot.

4.2.27 ábra



Látható, hogy a feszültségi főirányok a tengellyel 45° -os szöget zárnak be, ami indokolja a nyúlásmérés irányát.

A d. ábra alapján

$$\varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_3}{E},$$

a $\sigma_1 = \tau$ és $\sigma_3 = -\tau$ alapján

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\tau}{E} + \nu \cdot \frac{\tau}{E} = \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \nu)$$

Példánkban

$$\varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon = 522 \text{ }\mu\text{m/m} = 522 \cdot 10^{-6},$$

amelyet behelyettesítve:

$$\tau = \frac{E \cdot \varepsilon}{1 + \nu} = \frac{210000 \cdot 522 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,3} = 84,32 \text{ MPa} = 84,32 \text{ N/mm}^2$$

A csavaró igénybevétel értéke a

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

összefüggés felhasználásával

$$T = W_p \cdot \tau = \frac{d^3 \cdot \pi}{16} \cdot \tau = \frac{60^3 \cdot \pi}{16} \cdot 84,32 = 3574 \cdot 10^3 \text{ Nmm} = 3,574 \text{ kNm}$$

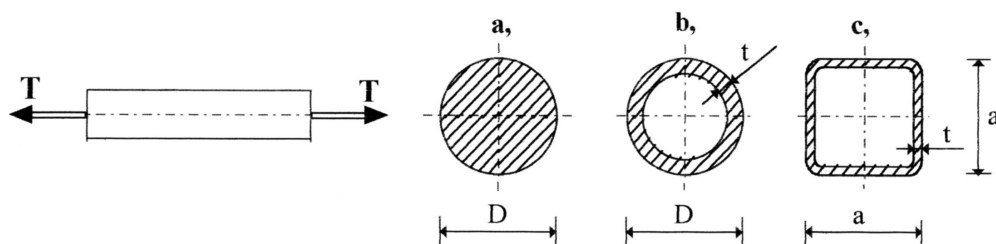
ami megegyezik a keresett csavarónyomatékkal.

Megjegyezzük – bár a példánk szerint egy mérési adatból a nyomaték meghatározható – mérés-technikai okok miatt ilyen típusú feladatoknál rendszerint 2, de inkább 4 mérőérzékelőt helyeznek fel a tengelyre, melyek célszerű elrendezésben kerülnek egy mérőhídba (Wheatstone-híd) kötésre.

4.2.2-7 Feladat

Valamely tiszta, szabad csavarásra igénybevett rúd T terhelése ismert. (4.2.28 ábra)

4.2.28 ábra



Adatok: $D = 50 \text{ mm}$, $a = 50 \text{ mm}$, $t = 5 \text{ mm}$. $T = 1,5 \text{ kNm}$, $R_{\text{qadm}} = 10 \text{ kN/cm}^2$.

- Feladat:** 1. Határozzuk meg kör, körgyűrű és négyzetcső keresztmetszet esetére a keletkező maximális feszültséget és ellenőrizzük a rudat!
2. Hasonlítsuk össze a három keresztmetszetet fajlagos csavarási teherbírás szempontjából!

Megoldás:

1. A keresztmetszeti jellemzők:

$$\text{a.}, \quad W_p = \frac{D^3 \cdot \pi}{16} = \frac{5^3 \cdot \pi}{16} = 24,54 \text{ cm}^3,$$

$$\text{b.}, \quad W_p = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{16 \cdot D} = \frac{(5^4 - 4^4) \cdot \pi}{16 \cdot 5} = 14,49 \text{ cm}^3,$$

$$\text{c.}, \quad 2 \cdot A_k \cdot t = 2 \cdot (a - t)^2 \cdot t = 2 \cdot (5 - 0,5)^2 \cdot 0,5 = 20,25 \text{ cm}^3.$$

Utóbbinál A_k a vékonyfalú zártszelvény középvonala által bezárt terület. A maximális feszültségek:

$$\text{a.}, \quad \tau_{\text{max}} = \frac{T}{W_p} = \frac{150}{24,54} = 6,11 \text{ kN / cm}^2,$$

$$\text{b.}, \quad \tau_{\text{max}} = \frac{T}{W_p} = \frac{150}{14,49} = 10,35 \text{ kN / cm}^2,$$

$$\text{c.}, \quad \tau = \frac{T}{2 \cdot A_k \cdot t} = \frac{150}{20,25} = 7,41 \text{ kN / cm}^2$$

Utóbbit a Bredt-féle formulával határoztuk meg, amely a vékonyfalú zárt szelvények szabad csavarására vonatkozó közelítő formula. Ez feltételezi, hogy a τ feszültségek a szelvény vastagsága mentén állandó értékűek.

Látható, hogy esetünkben **a**, és **c**, jelű keresztmetszetek a szilárdsági követelményt teljesítik, míg **b**, nem.

2. A szelvények csavarási teherbírása akkor adódik, ha a $\tau_{\max} = R_{qadm}$ teljesül.

Ekkor tehát a megengedett csavarónyomatékok:

$$T_{adm} = W_p \cdot R_{qadm}, \text{ illetve} \\ T_{adm} = 2 \cdot A_k \cdot t \cdot R_{qadm} \text{ összefüggésekkel kaphatók.}$$

A kérdésben megfogalmazott összehasonlítás alapja azonban csak az egységnyi keresztmetszet-területre vonatkoztatott csavarási teherbírás, vagyis a

$$\lambda = \frac{T_{adm}}{A}$$

tényező lehet.

Ha alapul választjuk az **a**, esetre adódó $\lambda^{(a)}$ tényezőt, ehhez viszonyítva a másik két keresztmetszet fenti jellemzője a következőképpen aránylik:

$$\frac{\lambda^{(b)}}{\lambda^{(a)}} = \frac{T_{adm}^{(b)}}{T_{adm}^{(a)}} \cdot \frac{A^{(a)}}{A^{(b)}} = \frac{W_p^{(b)}}{W_p^{(a)}} \cdot \frac{A^{(a)}}{A^{(b)}} = \frac{W_p^{(b)}}{A^{(b)}} \cdot \frac{A^{(a)}}{W_p^{(a)}}$$

Itt látható, hogy a fajlagos csavarási teherbírásra jellemző mennyiség a W_p/A tényező, amely keresztmetszettől függ. Behelyettesítve:

$$\frac{\lambda^{(b)}}{\lambda^{(a)}} = \frac{W_p^{(b)}}{W_p^{(a)}} \cdot \frac{A^{(a)}}{A^{(b)}} = \frac{14,49}{24,54} \cdot \frac{5^2}{5^2 - 4^2} = 1,64 ,$$

illetve

$$\frac{\lambda^{(c)}}{\lambda^{(a)}} = \frac{2 \cdot A_k \cdot t}{W_p^{(a)}} \cdot \frac{A^{(a)}}{A^{(c)}} = \frac{20,25}{24,54} \cdot \frac{5^2 \cdot \frac{\pi}{4}}{0,5 \cdot 4 \cdot 4,5} = 1,80$$

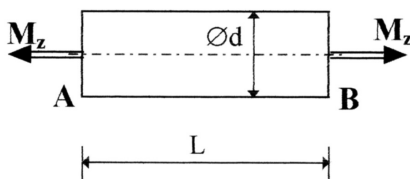
Ez azt jelenti, hogy a **b**, keresztmetszet 64%-kal, míg a Bredt-formulával vizsgált **c**, keresztmetszet 80%-kal nagyobb fajlagos csavarási teherbírással rendelkezik.

C. 4.2.2 GYAKORLÓ FELADATOK

4.2.2-8 Feladat

A 4.2.29 ábrán látható kör keresztmetszetű tengelyt M_z nyomaték terheli.

4.2.29 ábra



Adatok: $M_z = 20 \text{ kNm}$,
 $L = 0,5 \text{ m}$,
 $R_{qadm} = 10 \text{ kN/cm}^2$,
 $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$,
 $\varphi_{adm} = (1/8)^\circ$.

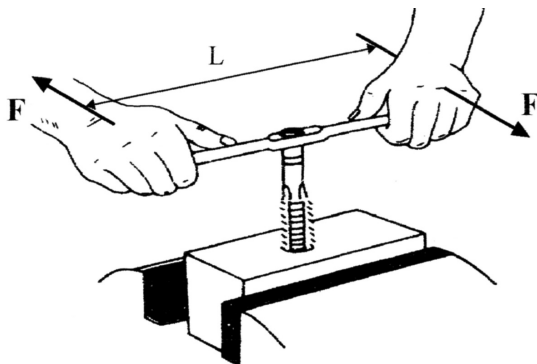
Feladat: Méretezze a tengelyt a szilárdsági és az alakváltozási korlátozás figyelembe vételével!

Eredmény:	$d \geq 15,54 \text{ cm}$
-----------	---------------------------

4.2.2-9 Feladat

Satuba befogott munkadarabba d átmérőjű menetfúróval menetet vágunk. A menetvágó szer-
szám karján (L) F alapú erőpárt fejtünk ki (4.2.30 ábra).

4.2.30 ábra



Adatok: $d = 16 \text{ mm}$,
 $L = 500 \text{ mm}$,
 $F = 50 \text{ N}$.

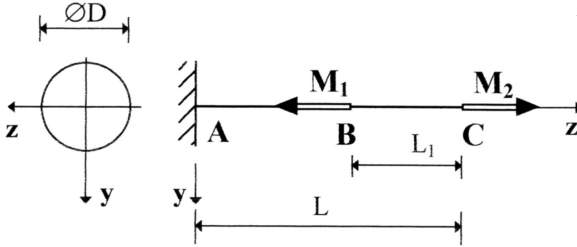
Feladat: Határozza meg a menetfúróban ébredő maximális csavarófe-
szültséget!

Eredmény:	$\tau_{\max} = 31,1 \text{ MPa}$
-----------	----------------------------------

4.2.2-10 Feladat

A 4.2.31 ábrán vázolt konzolt az M_1 és M_2 nyomatékú erőpárok terhelik.

4.2.31 ábra



Adatok: $M_1 = 40 \text{ kNm}$, $M_2 = 12 \text{ kNm}$,
 $R_{\text{qadm}} = 6 \text{ kN/cm}^2$,
 $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$,
 $L = 5 \text{ m}$, $L_1 = 2 \text{ m}$,
 $\varphi_{\text{adm}} = 2^\circ$.

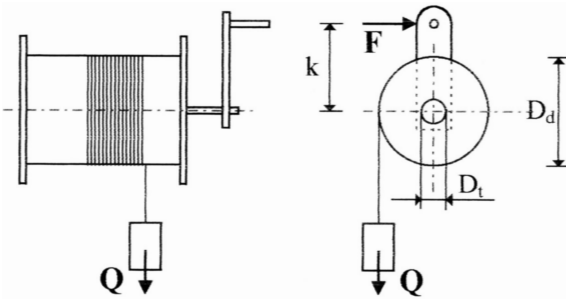
Feladat: 1. Méretezze a tartót a megengedett feszültségre kör keresztmetszetűre!
 2. Ellenőrizze alakváltozásra!

Eredmény:	$D_{\text{SZ}} = 133,45 \text{ mm}$,	$\varphi_{\text{AB}} = 1,932^\circ < \varphi_{\text{adm}} = 2^\circ$.
-----------	---------------------------------------	--

4.2.2-11 Feladat

A 4.2.32 ábrán látható csörlőt k hosszúságú karon kézi erővel mozgatva végezzük a Q teher emelését.

4.2.32 ábra



Adatok: $R_{\text{qadm}} = 12 \text{ kN/cm}^2$,
 $Q = 1,5 \text{ kN}$,
 $D_d = 20 \text{ cm}$.

Feladat: Méretezze a csörlőtengely D_t átmérőjét csavaróigénybevételre!

Eredmény:	$D_t = 18,9 \text{ mm}$,	$D_{\text{talp}} = 20 \text{ mm}$.
-----------	---------------------------	-------------------------------------

4.2.2-12 Feladat

Egy d átmérőjű tengelyen, a geometriai tengellyel 45° -os szöget bezáró irányban mért fajlagos nyúlás értéke ε .

Adatok: $d = 80 \text{ mm}$, $E = 206000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,3$, $\varepsilon = 462 \text{ } \mu\text{m/m}$.

Feladat: Mekkora a tengely által átvitt nyomaték értéke, ha feltételezhető, hogy csak csavaróigénybevétel lép föl?

Eredmény:	$M = 7,5 \text{ kNm}$.
-----------	-------------------------

4.2.2-13 Feladat

Egy tengellyel – első közelítésben statikusnak tekintett – M nyomaték átvitelét kell biztosítani. A méretezéskor tömör és csőtengely változatot vizsgálunk meg.

Adatok: $M = 20 \text{ kNm}$, $R_{\text{qadm}} = 120 \text{ N/mm}^2$, $E = 206000 \text{ N/mm}^2$,
a csőtengely átmérőaránya: $\frac{d}{D} = 0,8$

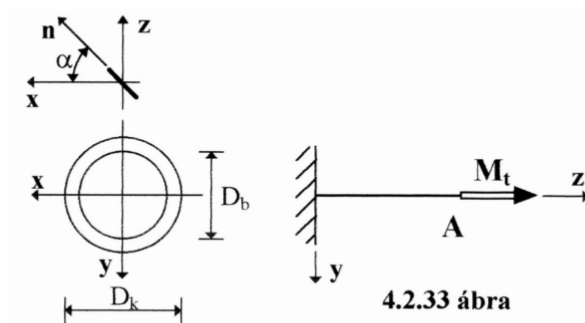
Feladat: 1. A szilárdsági vizsgálat alapján méretezze a tengelyt a kétféle keresztmetszetre!
2. Hasonlítsa össze anyagtakarékosság szempontjából a két esetet!

Eredmény:	1. a., $d = 95 \text{ mm}$,	b., $D = 113 \text{ mm}$, $d = 90,4 \text{ mm}$,
	2. A csőtengely 49,1% - kal kevesebb anyagfelhasználást igényel.	

4.2.2-14 Feladat

A 4.2.33 ábrán egy csavarásra igénybevett csőtengely látható.

4.2.33 ábra



Adatok: $D_b = 112 \text{ mm}$,
 $D_k = 120 \text{ mm}$,
 $R_{\text{qadm}} = 16 \text{ kN/cm}^2$,
 $\alpha = 45^\circ$,
 $G = 7800 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: 1. Határozza meg a csövet terhelő csavarónyomaték megengedhető maximális értékét!
2. Mekkora fajlagos nyúlás mérhető az A keresztmetszet P pontjának környezetében n irányban?

Eredmény:	$M_{t \text{ adm}} = 1309,2 \text{ kNcm}$,	$\varepsilon_n = 1026 \cdot 10^{-6}$.
-----------	---	--

4.3 Egytengelyű feszültségi állapotot létrehozó összetett igénybevételek

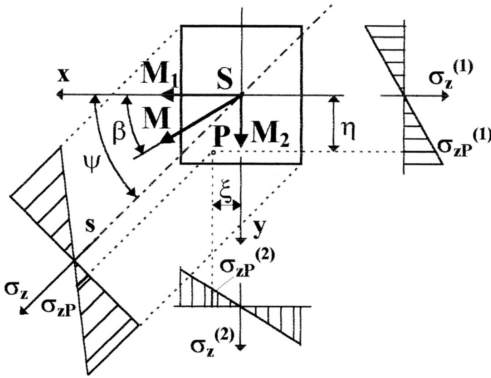
4.3.1 FERDE HAJLÍTÁS

A.4.3.1 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Ferde hajlításról akkor beszélünk, ha a keresztmetszet síkjában fellépő nyomatékvektor nem esik egybe a keresztmetszet valamelyik tehetetlenségi főtengelyével (4.3.1 ábra).

A feszültségeloszlás és a semleges tengely meghatározására leggyakrabban az egymásrahalmozás (szuperpozíció) módszerét alkalmazzuk, miszerint a hajlítónyomaték vektorát felbontjuk a két tehetlenségi főtengely irányába eső összetevőre, majd a belőlük meghatározott feszültségeloszlásokat szuperponáljuk.

4.3.1 ábra



$$\sigma_z^P = \frac{M_1}{I_1} \cdot \eta - \frac{M_2}{I_2} \cdot \xi.$$

A maximális feszültség a semleges tengelytől legtávolabbi pontban lép fel, ami egyszerű keresztmetszeteknél (pl. téglalap) a következőképpen számítható:

$$|\sigma_{z \max}| = \left| \frac{M_1}{W_1} \right| + \left| \frac{M_2}{W_2} \right|$$

A feszültségi- és alakváltozási állapot megegyezik a központosan húzott, vagy egyenes hajlításnak kitett rúddal.

A semleges tengely (s) átmegy a súlyponton és iránytangense:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_1}{I_2} \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

ahol ψ a semleges tengelynek az (1) jelű főtengellyel bezárt szöge. Az alakváltozási energia:

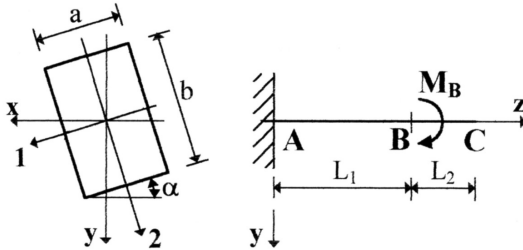
$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} \right] dz.$$

B. 4.3.1 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.3.1-1 Feladat

A 4.3.2 ábrán látható konzolt $\mathbf{M}_B$ nyomatékú erőpár terheli.

4.3.2 ábra



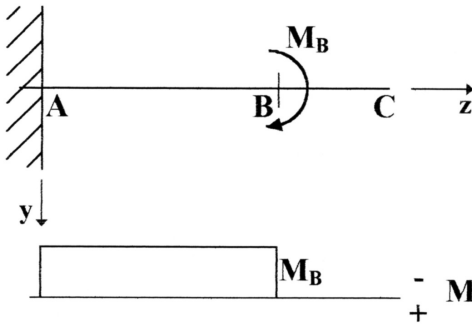
Adatok: $L_1 = 60 \text{ cm}$,
 $L_2 = 20 \text{ cm}$,
 $a = 7 \text{ cm}$,
 $b = 3 \text{ cm}$,
 $\alpha = 15^\circ$,
 $R_{adm} = 18 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Mekkora maximális M_b nyomatékkal terhelhető a konzol?

Megoldás:

Első lépésként rajzoljuk meg a konzol nyomatéki ábráját! (4.3.3 ábra). Ebből látható, hogy az AB szakasz minden keresztmetszete egyformán veszélyes.

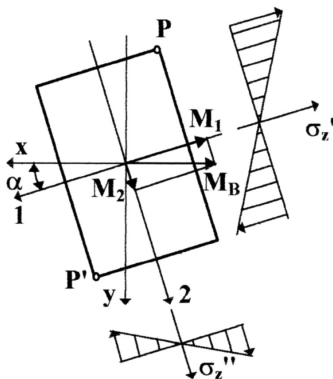
4.3.3 ábra



Rajzoljuk rá ezen keresztmetszetek valamelyikére a nyomatékvektort (4.3.4 ábra)! Jelöljük be ezután a keresztmetszet tehetetlenségi főtengelyeit! Tudjuk, hogy téglalap keresztmetszet esetén ezek egybeesnek a szimmetriatengelyekkel, és az az 1-es főtengely, amelyre a téglalap hosszabb oldala merőleges. (4.3.4 ábra).

Mivel a hajlítás tengelye (x) nem esik egybe egyik tehetetlenségi főtengellyel sem, a nyomatékvektort fel kell bontanunk az 1-es és 2-es főtengelyek irányába eső M_1 és M_2 összetevőkre,

4.3.4 ábra



$$M_1 = M_B \cdot \cos \alpha,$$

$$M_2 = M_B \cdot \sin \alpha.$$

Ezen komponensekből rajzoljuk fel a σ_z' és σ_z'' feszültségeloszlási ábrákat (4.3.4 ábra), amelyekből látható, hogy

$$\sigma_{z \max}^{(-)} = \sigma_z(P')$$

$$\sigma_{z \max}^{(+)} = \sigma_z(P).$$

A feszültségállapot minden pontban egytengelyű, tehát a konzol megfelel, ha

$$\sigma_{z \max}^{(+)} \leq R_{\text{adm}}$$

egyenlőtlenség fennáll. Részletezve:

$$\frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} = \frac{M_B \cdot \cos \alpha}{W_1} + \frac{M_B \cdot \sin \alpha}{W_2} \leq R_{\text{adm}}.$$

A keresztmetszeti tényezők:

$$W_1 = \frac{a \cdot b^2}{6} = \frac{2 \cdot 3^2}{6} = 3 \text{ cm}^3 \text{ és } W_2 = \frac{a^2 \cdot b}{6} = \frac{2^2 \cdot 3}{6} = 2 \text{ cm}^3.$$

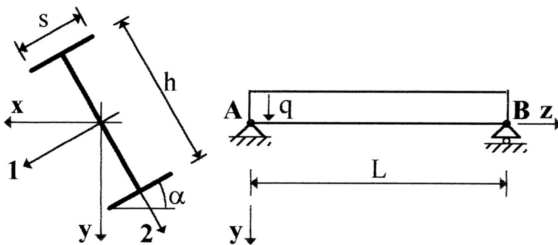
A terhelő nyomaték tehát:

$$M_B \leq \frac{R_{\text{adm}}}{\frac{\cos \alpha}{W_1} + \frac{\sin \alpha}{W_2}} = \frac{18}{\frac{\cos 15^\circ}{3} + \frac{\sin 15^\circ}{2}} = \frac{18}{0,32 + 0,129} = 40,1 \text{ kNcm lehet.}$$

4.3.1-2 Feladat

A 4.3.5 ábrán látható módon elhelyezett, v vastagságú lemezből hegesztett I tartó végig állandó intenzitású megoszló terhet visel.

4.3.5 ábra



Adatok: $h = 120v$,

$s = 30v$,

$L = 8 \text{ m}$,

$q = 50 \text{ kN/m}$,

$R_{\text{adm}} = 20 \text{ kN/cm}^2$,

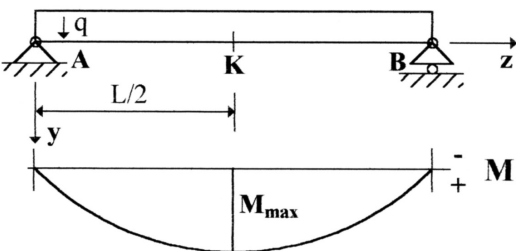
$\alpha = 20^\circ$.

Feladat: Méretezzük a vázolt tartót hajlításra!

Megoldás:

Az igénybevételi ábra megrajzolása után (4.3.6 ábra) keressük meg a legnagyobb nyomaték helyét és értékét!

4.3.6 ábra

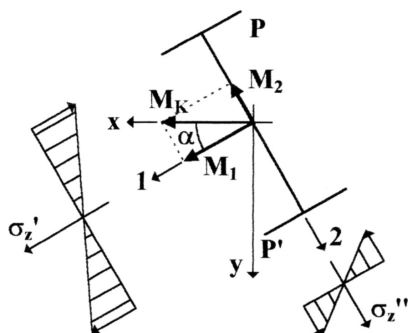


$$M_{\max} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{50 \cdot 8^2}{8} = 400 \text{ kNm}$$

Az $M_k = M_{\max}$ nyomaték vektorát rajzoljuk rá a K keresztmetszetre! (4.3.7 ábra) A szelvény szimmetrikus, így szimmetriatengelyei lesznek egyben a tehetetlenségi főtengelyek.

Mivel a nyomatékvektor nem esik egybe egyik tehetetlenségi főtengellyel sem, a keresztmetszet igénybevétele ferde hajlítás. Bontsuk fel a nyomatékvektort az 1-es és 2-es főtengelyek irányába eső összetevőkre, és rajzoljuk fel a feszültségeloszlási ábrákat (4.3.7 ábra)!

4.3.7 ábra



Ezek segítségével megállapíthatjuk, hogy a keresztmetszet P és P' pontjaiban ébred maximális a feszültség (abszolút értékük egyenlő).

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2}, \text{ ahol}$$

$$M_1 = M_k \cdot \cos \alpha = M_k \cdot \cos 20^\circ = 375,88 \text{ kNm},$$

$$M_2 = M_k \cdot \sin \alpha = M_k \cdot \sin 20^\circ = 136,81 \text{ kNm}.$$

A keresztmetszeti tényezőik pedig:

$$W_1 = \frac{I_1}{\frac{h}{2} + v} = \frac{\frac{v \cdot h^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{v^3 \cdot s}{12} + s \cdot v \cdot \left(\frac{h+v}{2} \right)^2 \right]}{61 \cdot v} =$$

$$= \frac{\frac{120^3 \cdot v^4}{12} + \frac{30 \cdot v^4}{6} + 2 \cdot 30 \cdot v^2 \cdot 60,5^2 \cdot v^2}{61 \cdot v} = 5961 \cdot v^3,$$

$$W_2 = \frac{I_2}{\frac{s}{2}} = \frac{\frac{v^3 \cdot h}{12} + 2 \cdot \frac{v \cdot s^3}{12}}{15 \cdot v} = \frac{10 \cdot v^4 + \frac{30^3 \cdot v^4}{6}}{15 \cdot v} = 300,67 \cdot v^3.$$

A tartó hajlításra megfelel, ha $\sigma_{z \max} \leq R_{\text{adm}}$ teljesül.

Behelyettesítve

$$\frac{M_1}{5961 \cdot v^3} + \frac{M_2}{300,67 \cdot v^3} \leq R_{\text{adm}}, \text{ innen}$$

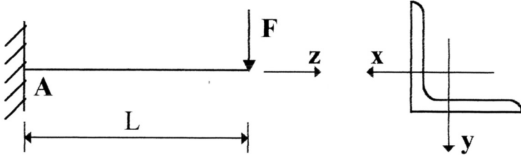
$$v \geq \sqrt[3]{\left(\frac{M_1}{5961} + \frac{M_2}{300,67} \right) \cdot \frac{1}{R_{\text{adm}}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{37588}{5961} + \frac{13681}{300,67} \right) \cdot \frac{1}{20}} = 1,37 \text{ cm}.$$

Legyen: $v = 14 \text{ mm}$, ekkor $s = 420 \text{ mm}$ és $h = 1680 \text{ mm}$.

4.3.1-3 Feladat

A 4.3.8 ábrán egy szabályos melegen hengerelt egyenlő szárú L szelvényű konzol látható.

4.3.8 ábra

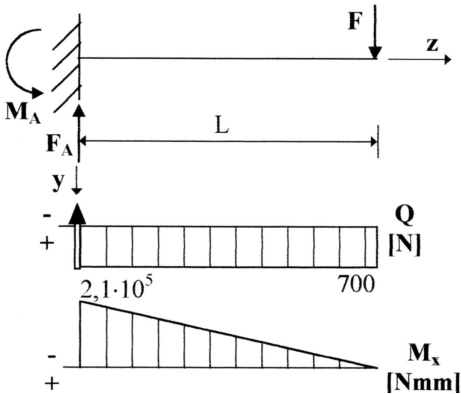


Adatok: $L = 0,3 \text{ m}$,
 $F = 700 \text{ N}$,
 A szelvény L 60.60.6

- Feladat:**
1. Határozzuk meg a konzol veszélyes keresztmetszetének helyét!
 2. Rajzoljuk meg a veszélyes keresztmetszetben keletkező hajlítófeszültségek eloszlását!
 3. Határozzuk meg a keresztmetszet semleges tengelyét!
 4. A semleges tengely felhasználásával felrajzolható eredő feszültségeloszlási ábra alapján jelöljük ki a keresztmetszet veszélyes pontját és számítsuk ki a maximális hajlítófeszültséget.

Megoldás:

4.3.9 ábra



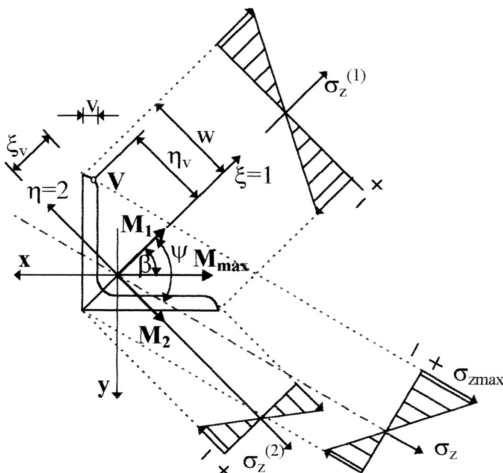
1. A veszélyes keresztmetszet helyének meghatározásához rajzoljuk meg a konzol igénybevételei ábráit (4.3.9 ábra)! Az igénybevételei ábrák alapján a konzol veszélyes keresztmetszete az A jelű befalazási

A mértékadó hajlítónyomaték:

$$M_{x \max} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Nmm.}$$

2. A hajlítófeszültségek eloszlásának ábrázolásához rajzoljuk be a keresztmetszet súlypontjába a mértékadó nyomatékot (4.3.10 ábra)!

4.3.10 ábra



Mivel az x tengely a keresztmetszetnek nem súlyponti tehetetlenségi főtengele, ferde hajlítás lép fel. Bontsuk fel a nyomatékvektort a főtengek irányába eső összetevőkre:

$$M_1 = M_{\max} \cdot \cos \beta,$$

ahol $\alpha = 45^\circ$ a nyomatékvektornak az 1-es főteneggel bezárt szöge. Így:

$$M_2 = M_1 = 2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 148492 \text{ Nmm.}$$

Ezután az egyenes hajlításnál tanultak szerint rajzolhatjuk a

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{M_1}{I_1} \cdot \eta \text{ és a } \sigma_z^{(2)} = \frac{M_2}{I_2} \cdot \xi$$

függvények képét, vagyis a hajlítófeszültségek eloszlását a főtengek mentén (4.3.10 ábra).

3. A keresztmetszet semleges tengelye azon pontok összessége, ahol az eredő σ feszültség zérus értékű. Ennek alapján a keresztmetszet súlypontján átmenő semleges tengely iránytangense:

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{I_1}{I_2} \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ahol: $I_1 = 36,1 \text{ cm}^4$ és $I_2 = 9,43$ a keresztmetszet fő másodrendű nyomatékai (táblázatból).

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{36,1}{9,43} \cdot 1 = 3,828, \text{ így } \Psi = 75,36^\circ,$$

Behelyettesítve:

amely Ψ szög a semleges tengelynek az 1. tehetetlenségi főtengellyel bezárt szögét jelenti – β -val azonos irányban (4.3.10 ábra).

4. Rajzoljuk be a keresztmetszet semleges tengelyét a keresztmetszet súlypontján keresztül Ψ szöggel (4.3.10 ábra).

M_1 és M_2 -ből megrajzolt feszültségeloszlás egyaránt lineáris, így az eredő feszültségeloszlás is lineáris lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy a semleges tengelytől legmesszebbre levő pontban lesz az eredő feszültség a legnagyobb. Vagyis a keresztmetszet veszélyes pontja a „V” jelű pont. A benne ébredő feszültség – M_1 és M_2 -ből adódó feszültségek szuperponálásával:

$$\sigma_{z(v)} = \sigma_{z \max} = \frac{M_1}{I_1} \cdot \eta_v + \frac{M_2}{I_2} \cdot \xi_v,$$

ahol ξ_v és η_v a „V” pont koordinátái a főtengelyek koordinátarendszerében. A 4.3.10 ábra alapján írhatjuk:

$$\xi_v = u_2, \quad \eta_v = w - \sqrt{\frac{v^2}{2}},$$

ahol: $u_2 = 2,11 \text{ cm}$,
 $w = 4,24 \text{ cm}$,
 $v = 6 \text{ mm}$ táblázatból vehető értékek.

Így:

$$\xi_v = 2,11 \text{ mm és } \eta_v = 42,4 - \sqrt{\frac{6^2}{2}} = 38,16 \text{ mm}$$

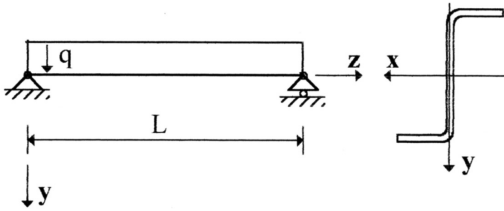
A keresztmetszetben ébredő legnagyobb hajlítófeszültség:

$$\sigma_{z \max} = \frac{148492}{361000} \cdot 38,16 + \frac{148492}{94300} \cdot 21,1 = 48,92 \text{ N/mm}^2.$$

4.3.1-4 Feladat

A 4.3.11 ábrán egy hidegen hajlított Z szelvényű tartó látható, mint vízszintes hossztartó.

4.3.11 ábra



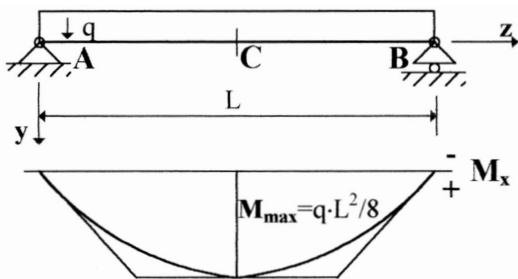
Adatok: $L = 3 \text{ m}$,
 $R_{\text{adm}} = 16 \text{ kN/cm}^2$,
 A keresztmetszet: Z 140/50x4.

- Feladat:**
1. Határozzuk meg a tartó veszélyes keresztmetszetének helyét!
 2. Rajzoljuk meg a veszélyes keresztmetszetben keletkező hajlító feszültségek eloszlását!
 3. Határozzuk meg a keresztmetszet semleges tengelyét!
 4. A semleges tengely felhasználásával felrajzolható eredő feszültségeloszlási ábra alapján jelöljük ki a keresztmetszet veszélyes pontját és határozzuk meg, hogy legfeljebb mekkora intenzitású végig egyenletesen megoszló erőrendszerrel terhelhető!
 5. A kapott q értéket hasonlítsuk össze a 4.1.2-4 feladatnál kapott értékkel, ahol ugyan-ezen gerenda igénybevétele a beépítés miatt egyenes hajlítás volt!
- Megjegyzés: A nyírásból keletkező feszültséget elhanyagoljuk.

Megoldás:

1. A veszélyes keresztmetszet helyének meghatározásához rajzoljuk meg a tartó nyomatéki ábráját (4.3.12 ábra)!

4.3.12 ábra



A megrajzolt nyomatéki ábrából jól látható, hogy a tartó veszélyes keresztmetszete a C jelű – középső – keresztmetszet.

A mértékadó hajlítónyomaték:

$$M_{\text{max}} = \frac{q \cdot L^2}{8} =$$

$$= \frac{q \cdot 300^2}{8} = 11250q \text{ kNcm}$$

2. A hajlítófeszültségek eloszlásának ábrázolásához rajzoljuk be a veszélyes keresztmetszet súlypontjába a mértékadó nyomatékot (4.3.13 ábra)!

Mivel a hajlítás tengelye (x) nem telhetetlenségi főtenget, az igénybevétel ferde hajlítás. A mértékadó nyomatékot bontsuk fel főtengetek irányába eső összetevőkre:

$$M_1 = M_{\text{max}} \cdot \cos\beta = 11250 \cdot q \cdot \cos 14,84^\circ = 11250 \cdot q \cdot 0,967,$$

$$M_1 = 10874,64 \cdot q \text{ [kNcm]},$$

$$M_2 = M_{\max} \cdot \sin \beta = 11250 \cdot q \cdot \sin 14,84^\circ = 11250 \cdot q \cdot 0,2561,$$

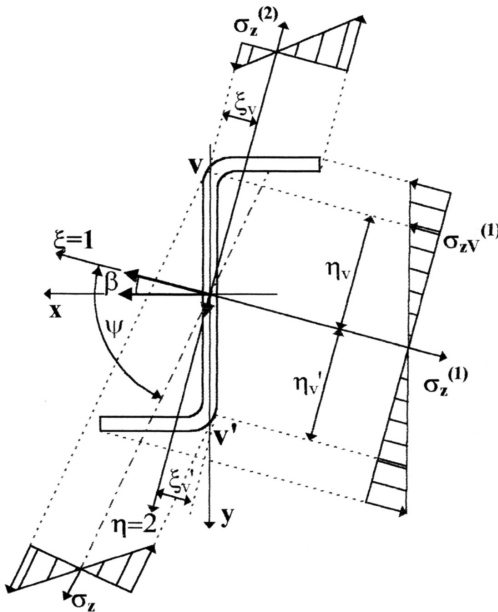
$$M_2 = 2881,78 \cdot q \text{ [kNcm]},$$

Majd az egyenes hajlításnál tanultak szerint megrajzolhatjuk a

$$\sigma_z(M_1) = \frac{M_1}{I_1} \cdot \eta \text{ és a } \sigma_z(M_2) = \frac{M_2}{I_2} \cdot \xi$$

összefüggések alapján a feszültségeloszlási ábrákat.

4.3.13 ábra



3. Mivel a keresztmetszet semleges tengelye azon pontok összessége, ahol az eredő σ feszültség zérus értékű, a semleges tengely át-megy a keresztmetszet súlypontján és irány-tangense:

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{I_1}{I_2} \cdot \operatorname{tg} \beta$$

Az összefüggésben szereplő $I_1 = 266,7 \text{ cm}^4$ és $I_2 = 13 \text{ cm}^4$ a keresztmetszet főmásodrendű nyomatékai táblázatból vehetők.

Behelyettesítve:

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{266,7}{13} \cdot \operatorname{tg} 14,48^\circ = \frac{266,7}{13} \cdot 0,265$$

$$\operatorname{tg} \Psi = 5,4366$$

Így $\Psi = 79,58^\circ$, a semleges tengelynek az 1. főtengellyel bezárt szöge.

4. Rajzoljuk be a keresztmetszet semleges tengelyét az előző pontban Ψ szöggel a keresztmetszet súlypontján keresztül (4.3.13 ábra)!

Mivel a főtengelyek mentén megrajzolt feszültségeloszlás lineáris, az eredő feszültségeloszlás is lineáris lesz. Így a legnagyobb feszültség a semleges tengelytől legtávolabb lévő pontban (-okban) ébred. Tehát a keresztmetszet veszélyes pontja: V és V'. Ezen pontokban ébredő feszültségek csak előjelben térnek el egymástól, tehát írható:

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_1}{I_1} \cdot \eta_v + \frac{M_2}{I_2} \cdot \xi_v.$$

Az összefüggésben szereplő ξ_v és η_v a V pont koordinátái a ξ - η koordinátarendszerben. Meghatározásuk a keresztmetszet geometriája alapján:

Behelyettesítve a $\sigma_{z \max}$ összefüggésbe:

$$\begin{aligned} \sigma_{z \max} &= \frac{10874,64q}{266,7} \cdot 6,25 + \frac{2881,78q}{13} \cdot 1,8 = (254,84 + 399,0) \cdot q = \\ &= 653,84 \cdot q \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Mivel a **V** pontban a feszültségi állapot egytengelyű, a tartó megfelel, ha

$$\sigma_{z \max} \leq R_{\text{adm}}, \text{ azaz } 653,84 \cdot q \leq 16.$$

Ebből:

$$q \leq \frac{16}{653,84} = 0,024 \text{ kN/cm} = 2,4 \text{ kN/m}$$

Vagyis a tartó legfeljebb $q = 2,4 \text{ kN/m}$ intenzitású végig egyenletesen megoszló erőrendszerrel terhelhető.

5. Ezen feladatban a **Z 140/50x4** profilú tartónál a hajlítás tengelye (**x**) nem főtengely. A 4.1.2.-4 feladatban ugyanezen tartónál a hajlítás tengelye ($\xi = 1$) a keresztmetszet súlyponti tehetetlenségi főtengelye.

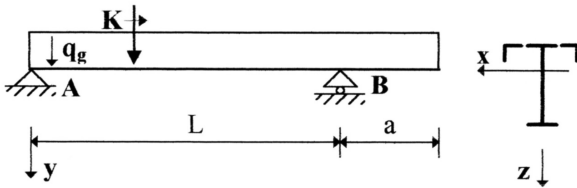
Hasonlítsuk össze a két feladatnál kapott **q** értékét: $\frac{2,4}{4,75} = 0,5$ hányados adódik.

Ez pedig annyit jelent, hogy ezen **Z** profilú tartó vízszintes beépítés esetén fele terhet bír el, mintha olyan ferde hossztartóként alkalmazzuk, ahol az **1. főtengely** a hajlítás tengelye.

4.3.1-5 Feladat

A 4.3.14 ábrán látható konzolos kéttámaszú futómacskapályát a függőleges terhelésen kívül egyidejűleg a **K** koncentrált erő 10%-a is terheli oldalirányban.

4.3.14 ábra



Adatok: $L = 4,0 \text{ m}$,

$a = 1,0 \text{ m}$,

$q_g = 2,0 \text{ kN/m}$,

$K = 36 \text{ kN}$,

$K_0 = 3,6 \text{ kN}$,

$R_m = 23 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Ellenőrizzük a tartót ferde hajlításra, ha a tartó anyaga Fe 275 (A44) minőségű szerkezeti acél!

Megoldás:

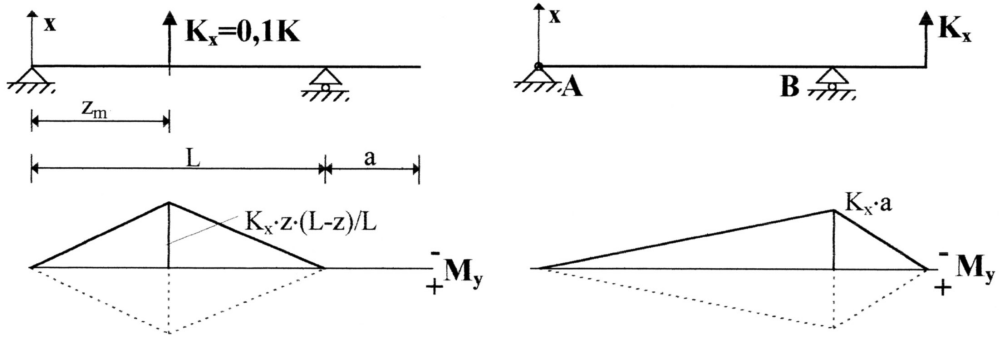
A 4.1.2-6 feladatban a függőleges erőkből már meghatároztuk az igénybevételeket. Ezeket az értékeket átvéve:

$$\begin{aligned} M_{x \max}^+ &= 39,5 \text{ kNm} & (z_m = 1,9875 \text{ m koordinátájú keresztmetszet}) \\ M_{x \max}^- &= -37,0 \text{ kNm} & (\text{B keresztmetszet}) \end{aligned}$$

A 4.3.15 ábrán csak a **0,1K** nagyságú oldalerőből származó igénybevételi ábrákat rajzoltuk meg. Szaggatott vonallal jelöltük a negatív K_x erőből származó nyomatéki ábrákat. A **K** keresztmetszet M_y hajlítóigénybevétele:

$$M_{y 1 \max} = \frac{K_x \cdot z \cdot (L - z)}{L} = \frac{0,1 \cdot 36 \cdot 1,9875 \cdot (4,0 - 1,9875)}{4,0} = 3,6 \text{ kNm}.$$

4.3.15 ábra



A B keresztmetszet M_y hajlítógénybevétele:

$$M_{y_{\max}} = 0,1 \cdot K \cdot a = 0,1 \cdot 36 \cdot 1 = 3,6 \text{ kNm.}$$

A tartó ellenőrzéséhez meg kell határoznunk az y tengelyre számított másodrendű nyomatékot.

A K keresztmetszet másodrendű nyomatéka:

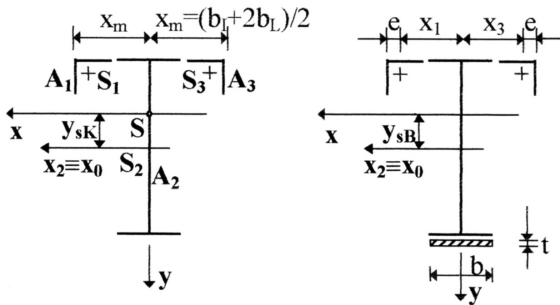
$$I_y^K = I_{y1} + X_1^2 \cdot A_1 + I_{y2} + I_{y3} + x_3^2 \cdot A_3, \text{ behelyettesítés után}$$

$$I_y^K = 22,8 + (10,5 - 1,69)^2 \cdot 6,91 + 117 + 22,8 + (10,5 - 1,69)^2 \cdot 6,91 = 1235 \text{ cm}^4.$$

A B keresztmetszet másodrendű nyomatéka:

$$I_y^B = I_y^K + \frac{t \cdot b^3}{12} = 1235 + \frac{1 \cdot 9^3}{12} = 1296 \text{ cm}^4$$

4.3.16 ábra



Szelvényadatok:

L 60.60.6

$$A_1 = A_3 = 6,91 \text{ cm}^2,$$

$$I_{x1} = I_{x3} = 22,8 \text{ cm}^4,$$

$$I_{y1} = I_{y3} = 22,8 \text{ cm}^4, \text{ v}$$

$$e = 1,69 \text{ cm,}$$

I 200

$$A_2 = 33,4 \text{ cm}^2,$$

$$I_{x2} = 935 \text{ cm}^4,$$

$$I_{y2} = 117 \text{ cm}^4,$$

$$x_m = 10,5 \text{ cm.}$$

Végezzük el a szilárdsági vizsgálatot a 4.3.17 ábra alapján. A K keresztmetszet ellenőrzése:

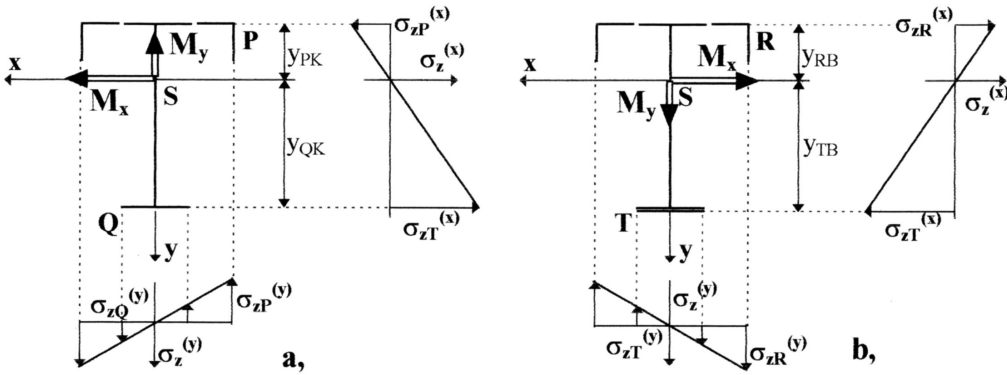
A legnagyobb nyomófeszültség a P pontban lép fel, nagysága:

$$\sigma_{z_{\max}}^- = s_z^{(p)} = \frac{M_{x_{\max}}}{I_x} \cdot y_{PK} - \frac{M_{y1}}{I_y} \cdot x_{PK} = \frac{3950}{2860} \cdot (-7.568) - \frac{-360}{1235} \cdot (-10,5) = -13,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$|\sigma_z^{(p)}| = 13,5 \text{ kN/cm}^2 < 0,6 \cdot R_m = 0,6 \cdot 23 = 13,8 \text{ kN/cm}^2,$$

a K keresztmetszet legnagyobb nyomófeszültségre szilárdságilag megfelel.

4.3.17 ábra



A legnagyobb húzófeszültség a Q pontban:

$$\sigma_z^{(Q)} = \frac{3950}{2860} \cdot 12,432 - \frac{-360}{1235} \cdot 4,5 = 18,48 \text{ kN / cm}^2 < R_m = 23 \text{ kN / cm}^2$$

a keresztmetszet maximális húzófeszültségre szilárdságilag megfelel.

A B keresztmetszet ellenőrzése:

A legnagyobb húzófeszültség az R pontban lép fel:

$$\sigma_z^{(R)} = \sigma_z^{(x)} + \sigma_z^{(y)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{RB} - \frac{M_y}{I_y} \cdot x_{RB},$$

$$\sigma_z^{(R)} = \frac{-3700}{3990} \cdot (-9,64) - \frac{360}{1296} \cdot (-10,5) = 11,86 \text{ kN / cm}^2 < R_m = 23 \text{ kN / cm}^2$$

a B keresztmetszet legnagyobb húzófeszültségre szilárdságilag megfelel.

A T pontban keletkező legnagyobb nyomófeszültség

$$\sigma_z^{(T)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{TB} - \frac{M_y}{I_y} \cdot x_{TB} = \frac{-3700}{3990} \cdot 10,36 - \frac{360}{1296} \cdot 4,5 = -10,86 \text{ kN / cm}^2$$

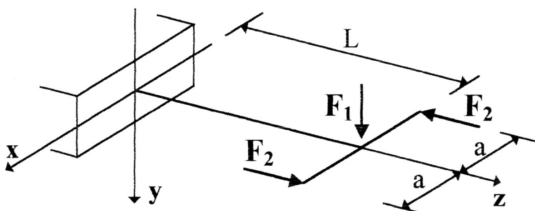
$$|\sigma_z^{(T)}| = 10,86 \text{ kN / cm}^2 < 0,6 R_u = 13,8 \text{ kN / cm}^2,$$

a B keresztmetszet legnagyobb nyomófeszültségre szilárdságilag megfelel.

4.3.1-6 Feladat

A 4.3.18 ábrán látható egyik végén befogott L hosszúságú, prizmatikus tartó T keresztmetszetű.

4.3.18 ábra



Adatok: $R_{adm} = 16 \text{ kN / cm}^2$,

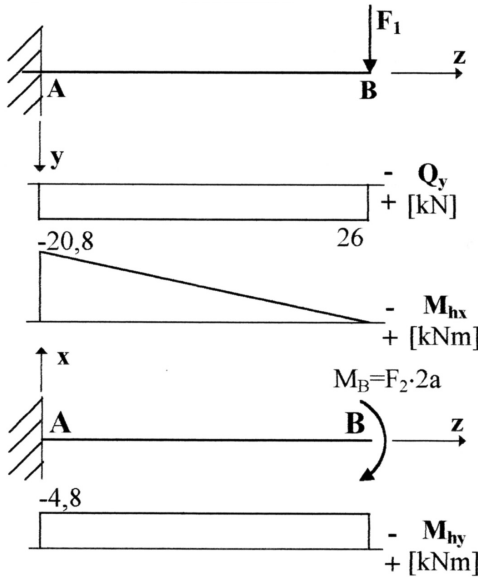
$L = 0,8 \text{ m}$, $a = 0,3 \text{ m}$,
 $F_1 = 26,0 \text{ kN}$, $F_2 = 8,0 \text{ kN}$,
 gerincmagasság: $h = 240 \text{ mm}$,
 gerincvastagság: $t_g = 8 \text{ mm}$,
 övszélesség: $b = 160 \text{ mm}$,
 övvastagság: $t_o = 12 \text{ mm}$,

- Feladat:** 1. Ellenőrizzük a tartót szilárdságilag! (A nyírófeszültséget elhanyagoljuk)
2. Határozzuk meg a semleges tengely helyét!

Megoldás

1. A tartó igénybevételi ábrái a 4.3.19 ábrán láthatók. Külön ábrázoltuk az yz és xz síkban fellépő igénybevételeket.

4.3.19 ábra



Mivel a keresztmetszet főtengelyei az x és y szimmetriatengelyek (4.3.20 ábra), az M_{hx} és M_{hy} hajlítónyomatékkal külön-külön egyenes hajlítást okoznak, együtt viszont

$$\vec{M}_h = M_{hx} \cdot \vec{i} + M_{hy} \cdot \vec{j}$$

nyomatékvektorral jellemezhető ferde hajlítást. A 4.3.20 ábrán a legnagyobb igénybevétellel terhelt befogási keresztmetszet viszonyait szemléltetjük, ahol

$$\vec{M}_h = -20,8 \cdot \vec{i} - 4,8 \cdot \vec{j} \text{ [kNm]}$$

A súlypont helye:

$$e_r = \frac{16 \cdot 1,2 \cdot 0,6 + 24 \cdot 0,8 \cdot 13,2}{16 \cdot 1,2 + 24 \cdot 0,8} = \frac{264,96}{38,4} = 6,9 \text{ cm}$$

A főmásodrendű nyomatékok:

$$\begin{aligned} I_1 = I_x &= \frac{16 \cdot 1,2^3}{12} + 16 \cdot 1,2 \cdot 6,3^2 + \frac{0,8 \cdot 24^3}{12} + 24 \cdot 0,8 \cdot 6,3^2 = \\ &= 2,3 + 762,0 + 921,6 + 762,0 \quad I_1 = I_x = 2448 \text{ cm}^4, \\ I_2 = I_y &= \frac{1,2 \cdot 16^3}{12} + \frac{24 \cdot 0,8^3}{12} = 409,6 + 1,0 = 410,6 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

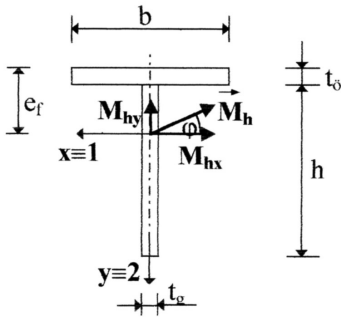
A 4.3.21 ábrán vázolt feszültségeloszlások alapján két veszélyes pont vizsgálandó meg: a legnagyobb pozitív σ_z feszültség a P_1 , a legnagyobb negatív a P_2 pontban ébred. Ezekre végrehajtva az ellenőrzést,

$$\begin{aligned} \sigma_{z \max}^+ = \sigma_{z(P_1)} &= \frac{M_{hx}}{I_x} \cdot y_{P1} - \frac{M_{hy}}{I_y} \cdot x_{P1} = \frac{2080}{2448} \cdot 6,9 + \frac{480}{410,6} \cdot 8 = 5,86 + 9,35 = \\ &= 15,21 \text{ kN/cm}^2 \quad (R_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2), \end{aligned}$$

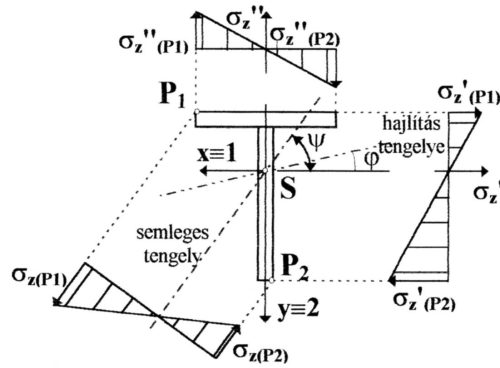
$$\begin{aligned} \sigma_{z \max}^- = \sigma_{z(P_2)} &= \frac{M_{hx}}{I_x} \cdot y_{P2} - \frac{M_{hy}}{I_y} \cdot x_{P2} = -\frac{2080}{2448} \cdot 18,3 - \frac{480}{410,6} \cdot 0,4 = \\ &= -16,02 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Mivel $|\sigma_{\max}^-| = 16,02 \text{ kN/cm}^2 \approx R_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2$ a tartó szilárdságilag megfelel.

4.3.20 ábra



4.3.21 ábra



2. A semleges tengely és az 1-es keresztmetszeti főtengely Ψ szögére fennáll a

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{M_{h2}}{M_{h1}} = \frac{I_1}{I_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

összefüggés, ahol φ az $\vec{M}_h$ szöge az 1-es főtengellyel.

Eszerint

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_{h2}}{M_{h1}} = \frac{M_{hy}}{M_{hx}} = \frac{4,8}{20,8} = 0,2308, \quad \varphi = 13^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{2448}{410,6} \cdot 0,2308 = 1,3758, \quad \Psi = 54^\circ.$$

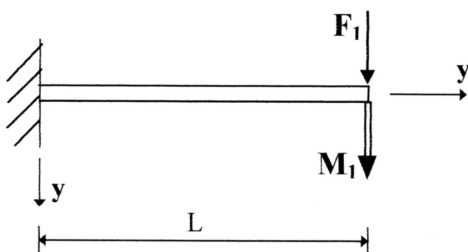
A 4.3.21 ábrán vázoltuk a φ hajásszögű hajlítási tengelyt és a Ψ hajlásszögű semleges tengelyt is. Utóbbtól távolodva az eredő σ_z feszültség lineárisan növekvő pozitív, ill. negatív értelemben, ahogyan ez az eredő feszültségeloszlási ábrán látható.

C. 4.3.1 GYAKORLÓ FELADATOK

4.3.1-7 Feladat

A 4.3.22 ábrán látható konzol prizmatikus, keresztmetszete téglalap, terhelése a konzol végén ható F_1 függőleges erő és M_1 függőleges tengelyű nyomaték.

4.3.22 ábra



Adatok: keresztmetszeti méretek:

$a = 50 \text{ mm}$,
 $b = 120 \text{ mm}$,
 $L = 2,0 \text{ m}$,
 $F_1 = 6 \text{ kN}$,
 $M_1 = 1,5 \text{ kN}$,
 $R_{adm} = 14 \text{ kN/cm}^2$.

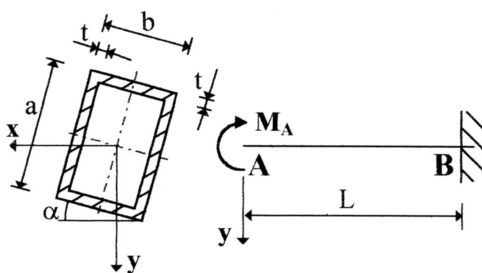
- Feladat:** 1. Ellenőrizze a tartót a téglalap keresztmetszet kétféle, egymásra merőleges és a koordinátatengelyekkel párhuzamos helyzetében ("állítva", ill. "fektetve")!
 2. Határozza meg a semleges tengely vízszintes tengellyel bezárt hajlítás szögét mindkét helyzetre!

Eredmények:	$\sigma_{max}^{(1)} = 13,0 \text{ kN/cm}^2$, $\Psi(1) = 35,75^\circ$,	$\sigma_{max}^{(2)} = 25,2 \text{ kN/cm}^2$, $\Psi(2) = 1,243^\circ$.
--------------------	--	--

4.3.1-8 Feladat

A téglalap alakú zárt szelvényből készített konzolra a 4.3.23 ábrán látható koncentrált nyomaték hat.

4.3.23 ábra



Adatok: $a = 70 \text{ mm}$,
 $b = 40 \text{ mm}$,
 $t = 4 \text{ mm}$,
 $L = 500 \text{ mm}$,
 $\alpha = 30^\circ$,
 $R_{adm} = 180 \text{ MPa}$.

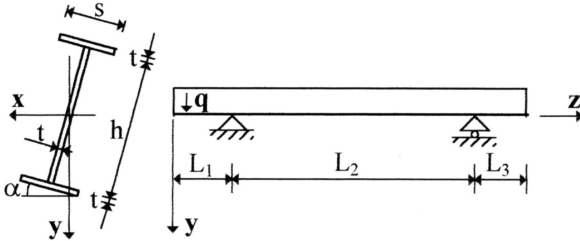
Feladat: Mekkora lehet M_A maximális értéke, hogy a legnagyobb feszültség se haladja meg R_{adm} értékét?

Eredmény:	$M_A \leq 1,66 \text{ kNm}$
------------------	-----------------------------

4.3.1-9 Feladat

Egy két végén konzolos kéttámaszú tartó keresztmetszete a 4.3.24 ábrán látható módon elhelyezett t vastagságú lemezből hegesztett I szelvény.

4.3.24 ábra



Adatok:

$$\begin{aligned}\alpha &= 15^\circ, \\ s &= 40t, \quad h = 110t, \\ L_1 &= 50 \text{ cm}, \\ L_2 &= 600 \text{ cm}, \\ L_3 &= 30 \text{ cm}, \\ q &= 4 \text{ kN/m}, \\ R_{\text{adm}} &= 20 \text{ kN/cm}^2.\end{aligned}$$

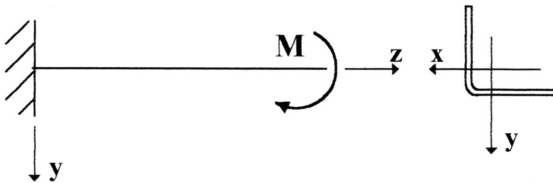
Feladat: Méretezze a vázolt tartót hajlításra!

Eredmények:	$t = 4 \text{ mm},$	$s = 160 \text{ mm},$	$h = 440 \text{ mm}.$
-------------	---------------------	-----------------------	-----------------------

4.3.1-10 Feladat

A 4.3.25 ábrán egy hidegen hajlított L profilú konzol látható.

4.3.25 ábra



Adatok: Szelvény: L 100.100.4
 $R_{\text{adm}} = 18 \text{ kN/cm}^2.$

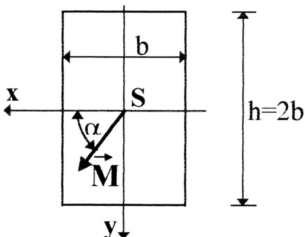
Feladat: Határozza meg a konzol terhelhetőségét!

Eredmény:	$M \leq 1,4 \text{ kNm}$
-----------	--------------------------

4.3.1-11 Feladat

A 4.3.26 ábrán látható téglalap keresztmetszet $\vec{M}_{(\alpha)}$ nyomatékvektorú hajlítás terheli.

4.3.26 ábra



Adatok: $|\vec{M}| = 10 \text{ kNm},$
 $\alpha_a = 30^\circ,$
 $\alpha_b = 45^\circ,$
 $R_{\text{adm}} = 20 \text{ kN/cm}^2.$

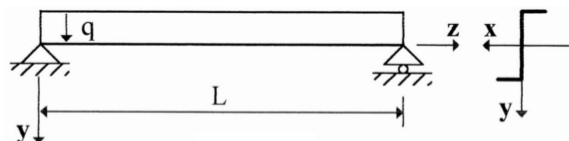
Feladat: Határozza meg a különböző esetekre a téglalap keresztmetszet hajlítás szempontjából szükséges méreteit!

Eredmények:	$\alpha = 30^\circ$,	$a = 5,19 \text{ cm}$,	$h = 10,38 \text{ cm}$,
	$\alpha = 45^\circ$,	$a = 5,42 \text{ cm}$,	$h = 10,84 \text{ cm}$.

4.3.1-12 Feladat

A 4.3.27 ábrán egy melegen hengerelt Z szelvényű vízszintes hossztartó látható.

4.3.27 ábra



Adatok: $L = 1 \text{ m}$,
 $q = 1 \text{ kN/m}$,
Szelvény: Z 35.

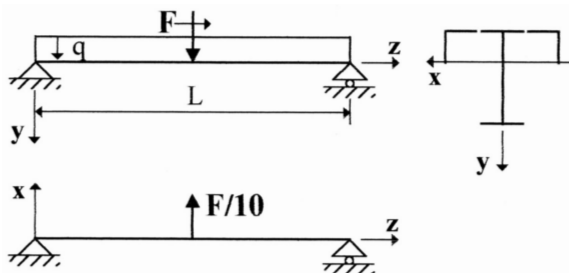
Feladat: Határozza meg a tartóban ébredő legnagyobb hajlítófeszültséget!

Eredmény:	$\sigma_{z \max} \cong 14,28 \text{ kN/cm}^2$.
-----------	---

4.3.1-13 Feladat

A 4.3.28 ábrán vázolt kéttámaszú tartót az yz síkban q állandó megoszló terhelés és F koncentrált mozgó teher, az xz síkban $F/10$ koncentrált erő terheli.

4.3.28 ábra



Adatok: $L = 4,0 \text{ m}$,
 $F = 250 \text{ kN}$,
 $q = 2,5 \text{ kN/m}$,
 $R_{adm} = 20 \text{ kN/cm}^2$.

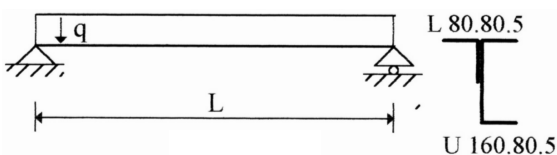
Feladat: Határozza meg az L szelvények szükséges méretét, hogy a tartó a ferde hajlításból származó maximális feszültségre megfeleljen!

Eredmény:	$L \ 80.80.8$
-----------	---------------

4.3.1-14 Feladat

A 4.3.29 ábrán látható kéttámaszú tartót q megoszló terhelés terheli. A tartó keresztmetszete egy L 80.80.5 szelvénnel megerősített U 160.80.5 szelvény.

4.3.29 ábra



Adatok: $q = 14 \text{ kN/m}$,
 $L = 2 \text{ m}$,
 $R_{adm} = 160 \text{ MPa}$.

Feladat: Ellenőrizze hajlításra a tartót!

Eredmény:	$\sigma_{z \max} = 96 \text{ MPa} < R_{adm} = 160 \text{ MPa}$.
-----------	--

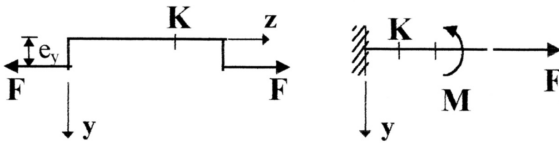
4.3.2 KÜLPONTOS HÚZÁS, -NYOMÁS

A. 4.3.2 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

A külpontos húzásnak és nyomásnak az alábbi két esetét különböztetjük meg:

- A keresztmetszetet terhelő normálerő a szilárdsági középponton kívül működik.
A szilárdsági középpont homogén anyagú rudak esetében egybeesik a keresztmetszet súlypontjával.
- A rudat egyidejűleg központos normálerő és hajlítónyomaték terheli (4.3.30 ábra).

4.3.30 ábra



A K keresztmetszet igénybevétele mindkét esetben húzással egyidejű hajlítás.

$$\begin{aligned} \text{a, } N &= F, & M_x &= F \cdot e_y. \\ \text{b, } N &= F, & M_x &= M. \end{aligned}$$

Megkülönböztetünk még: **a, Egyirányú külpontos húzást és nyomást.** Ez esetben a hajlítónyomaték és normálerő eredője valamelyik tehetetlenségi főtengelyen támad. (Normáligénybevétel és egyenes hajlítás).

- Kétirányú külpontos húzást és nyomást.** Ekkor a belső erők eredője a két tehetetlenségi tengelyen kívül támadja a keresztmetszetet. (Normáligénybevétel és ferde hajlítás).

Feszültségek számítása:

$$\sigma_z^{(N)} = \frac{N}{A}, \text{ illetve } \sigma_z^{(M_s)} = \frac{M_s}{I_s} \cdot r.$$

Ha ismertek a keresztmetszet tehetetlenségi főtengelyei, akkor két egyenes hajlítás és a húzás egymásra halmozásával nyerhető az eredő feszültségeloszlás. Valamely tetszőleges P pontban a feszültség:

$$\sigma_{zP} = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} \cdot \eta_P - \frac{M_2}{I_2} \cdot \xi_P.$$

A maximális feszültségek egyszerű keresztmetszetek esetén az alábbiak szerint számíthatók:

$$\sigma_{z \max}^+ = \sigma_{zA} = \frac{N}{A} + \frac{|M_1|}{W_1} + \frac{|M_2|}{W_2}, \text{ illetve } \sigma_{z \max}^- = \sigma_{zC} = \frac{N}{A} - \frac{|M_1|}{W_1} - \frac{|M_2|}{W_2}.$$

A semleges tengelynek (s) a tehetetlenségi főtengellyel való metszéspontjainak koordinátái:

$$\eta_0 = \frac{I_1 \cdot N}{A \cdot M_1}, \text{ illetve } \xi_0 = \frac{I_2 \cdot N}{A \cdot M_2}.$$

Az alakváltozási energia:

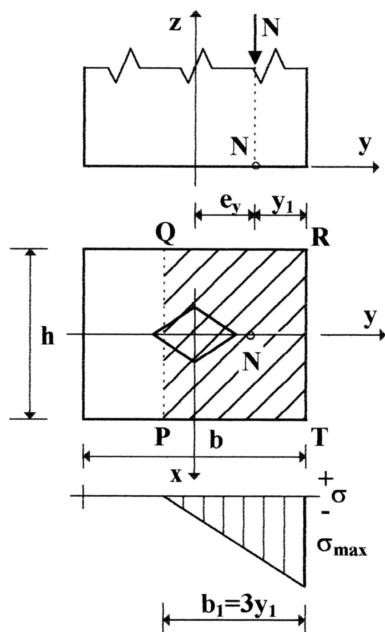
$$U = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_0^L \left[\frac{N^2}{A} + \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} \right] dz.$$

Külpontosan nyomott zömök rudak vizsgálata a külpontosan húzott rudaknál leírtak szerint történhet, az igénybevételek megfelelő előjellel való figyelembevételével.

Magidom fogalma:

A külpontosan húzott, vagy nyomott rúd keresztmetszetének súlypontja körüli azon terület, amelyen belül működtetve a normálerőt, a keresztmetszet minden pontjában azonos előjelű feszültség keletkezik. Meghatározása egyirányú teherviselő anyagoknál fontos, mint például: talaj, téglá, habarcs, melyek húzófeszültség felvételére nem alkalmasak.

4.3.32 ábra



Csak nyomásnak ellenálló anyagú rudak külpontos nyomásának vizsgálata a fentebb leírtaktól eltérő abban az esetben, ha a nyomóerő a magidomon kívül működik. A 4.4.33 ábrán vázolt esetenél a keresztmetszet dolgozó része a PQRT idom, melynek dolgozó mérete:

$$b_1 = 3 \cdot y_1.$$

Ezen érték abból adódik, hogy a feszültest súlypontja – az egyensúlyi feltételek alapján – egybe kell essen a terhelőerő támadáspontjával.

A fellépő legnagyobb nyomófeszültség:

$$\sigma_{\max}^{(-)} = \frac{2 \cdot N}{h \cdot b_1} = \frac{2 \cdot N}{3 \cdot h \cdot y_1}$$

A kétirányú külpontos nyomóerővel terhelt eset megoldását számpéldán mutatjuk be.

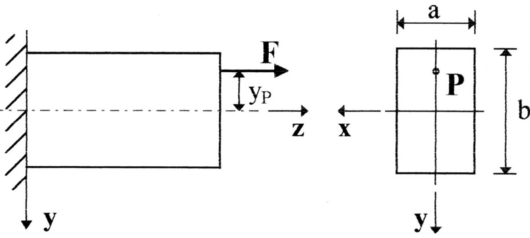
A külpontosan nyomott karcsú rudak vizsgálatával jelen példatárban nem foglalkozunk. Ezek vizsgálata II.-rendű elmélettel történik, mert a keletkező deformáció hatása nem elhanyagolható a fellépő hajlítógénybevitelre.

B. 4.3.2 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.3.2-1 Feladat

A 4.3.33 ábrán látható végig állandó téglalap keresztmetszetű befalazott rudat a szabad végén a keresztmetszetre merőleges F erő terheli a P pontban.

4.3.33 ábra



Adatok: $a = 4 \text{ cm}$,
 $b = 10 \text{ cm}$,
 $F = 200 \text{ kN}$,
 $y_P = 3 \text{ cm}$,
 $R_{adm} = 15 \text{ kN/cm}^2$.

- Feladat:**
1. Határozzuk meg a rúd igénybevételeit!
 2. Rajzoljuk meg a feszültségeloszlási ábrákat!
 3. Ellenőrizzük a rudat szilárdságilag!
 4. Határozzuk meg a semleges tengelynek az y tengellyel való metszéspontjait, majd rajzoljuk be a semleges tengelyt!

Megoldás:

1. A rúd igénybevétele külpontos húzás. A külpontos húzás visszavezethető:

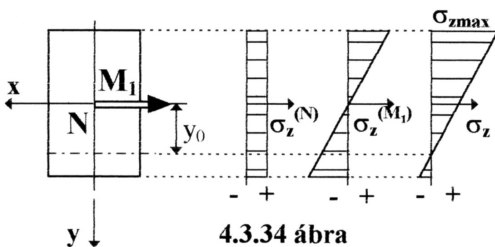
centrikus húzásra

$$N = F = 200 \text{ kN},$$

és az x tengely (1-es főtengely) körüli hajlításra

$$M_x = M_1 = y_P \cdot F = 3 \cdot 200 = 600 \text{ kNcm}.$$

4.3.34 ábra



4.3.34 ábra

2. A feszültségeloszlási ábrához rajzoljuk be a keresztmetszet súlypontjába az igénybevételeket (4.3.34 ábra), majd az igénybevételek mindegyikéből rajzoljuk meg a feszültségeloszlási ábrát!

3. A feszültségeloszlási ábrákból jól látható, hogy a legnagyobb feszültség a keresztmetszet felső szélső pontjaiban ébred, mivel a húzóerőből adódó pozitív σ_z a hajlítónyomaték által ébresztett maximális ugyancsak pozitív σ_z -vel adódik össze.

Írhatjuk:

$$\sigma_{z \max} = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{W_1},$$

ahol $A = a \cdot b = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}^2$, és $W_1 = \frac{a \cdot b^2}{6} = \frac{4 \cdot 10^2}{6} = 66,67 \text{ cm}^3$.

Így
$$\sigma_{z \max} = \frac{200}{40} + \frac{600}{66,67} = 14 \text{ kN / cm}^2$$

Mivel $\sigma_{z \max} = 14 \text{ kN/cm}^2 < R_{\text{adm}} = 15 \text{ kN/cm}^2$, a rúd szilárdságilag megfelel.

4. A keresztmetszet semleges tengelye azon pontok összessége, amelyekben az eredő σ feszültség zérus. Ha az egyidejű két igénybevétel hatására ébredő σ feszültségeket összegezzük, jól látható, hogy az eredő feszültségeloszlás lineáris lesz. A semleges tengely a keresztmetszet 1-es főtengelyével párhuzamos. Az y tengellyel. (2-es főtengellyel) való metszéspontjának y_0 koordinátája pedig az előzők alapján számítható.

$$\sigma_z = 0 = \frac{N}{A} - \frac{M_1}{I_1} \cdot y_0 .$$

ahol:

$$I_1 = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 333,33 \text{ cm}^4$$

Fentiekből kifejezve a semleges tengely koordinátáját:

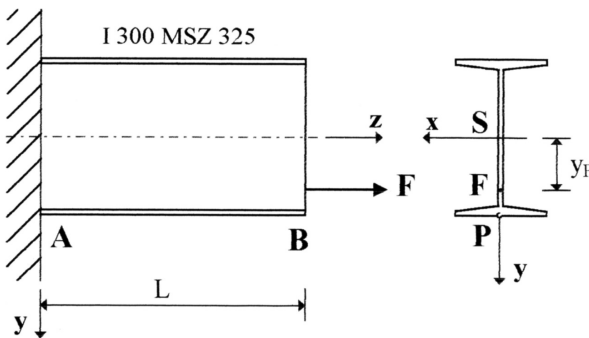
$$y_0 = \frac{N \cdot I_1}{A \cdot M_1} = \frac{200 \cdot 333,33}{40 \cdot 600} = 2,78 \text{ cm}$$

A semleges tengely visszarajzolása után (4.3.34 ábra) még rajzoljuk meg az eredő feszültségeloszlási ábrát is!

4.3.2-2 Feladat

A 4.3.35 ábrán egy külpontosan húzott I 300-as szelvényű rúd látható.

4.3.35 ábra



Adatok:

$$y_F = 10 \text{ cm}, \\ L = 3 \text{ m},$$

Táblázatból:

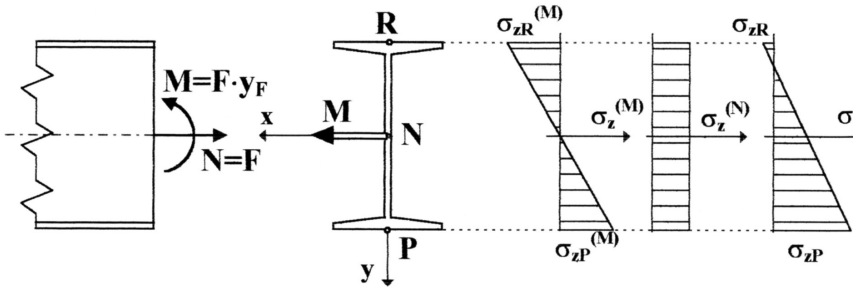
$$\sigma_m = 18 \text{ kN/cm}^2, \\ W_x = 653 \text{ cm}^3, \\ A = 69 \text{ cm}^2, \\ I_x = 9800 \text{ cm}^4, \\ E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

- Feladat:**
1. Határozzuk meg a terhelő erő megengedhető nagyságát, ha méretezési feszültsége σ_m !
 2. Határozzuk meg y_{F0} távolságot, mely esetén a terhelő erő pontjában sem hoz létre nyomófeszültséget!
 3. Határozzuk meg a rúdvégi (B) keresztmetszet súlypontjának és P pontjának v és w eltolódásait!

Megoldás:

1. A szelvény súlypontjába redukált vektorkettős $\mathbf{F} \cong (\mathbf{M}_x, N)$.

4.3.36 ábra



2. Feszültségek

$$\sigma_{zP}^{(M)} = |\sigma_{zR}^{(M)}| = \frac{M}{W_x} = \frac{F \cdot y_F}{W_x}$$

$$\sigma_z^{(N)} = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$$

(x tengely a hajlítási tengely, mivel ez tehetetlenségi főtenget, egyben a semleges tengellyel párhuzamos tengely)

$$\sigma_{zP} = \sigma_{zP}^{(M)} + \sigma_z^{(N)} = \frac{F \cdot y_F}{W_x} + \frac{F}{A} = F \cdot \left(\frac{y_F}{W_x} + \frac{1}{A} \right)$$

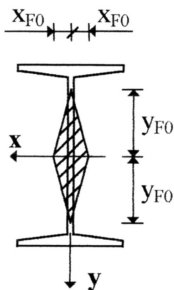
$$\sigma_{zR} = \sigma_{zR}^{(M)} + \sigma_z^{(N)} = -\frac{F \cdot y_F}{W_x} + \frac{F}{A} = F \cdot \left(-\frac{y_F}{W_x} + \frac{1}{A} \right)$$

A legnagyobb feszültség a P pontban, illetve az x tengelytől a P ponttal azonos távolságra levő szélső pontokban keletkezik (4.3.36 ábra).

A terhelhetőség a $\sigma_{zP} = \sigma_m$ feltételből számítható.

$$F_m \left[\frac{y_F}{W_x} + \frac{1}{A} \right] = \sigma_m \Rightarrow F_m = \frac{\sigma_m}{\frac{y_F}{W_x} + \frac{1}{A}} = \frac{18}{\frac{10}{653} + \frac{1}{69}} = 603,9 \text{ kN}$$

4.3.37 ábra



y_{F0} meghatározása $\sigma_{zR} = 0$ feltétel alapján

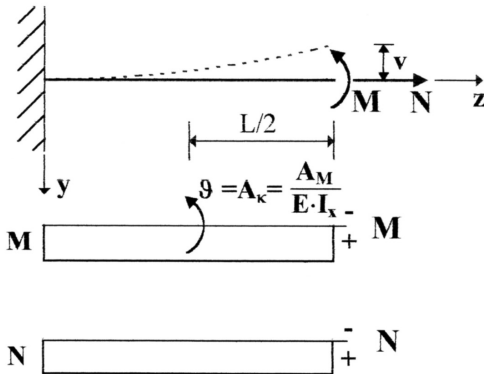
$$y_{F0} = \frac{W_x}{A} = \frac{653}{69} = 9,46 \text{ cm}$$

Hasonlóan határozható meg x irányú erőközpontosítás esetén x_{F0} is.

$$x_{F0} = \frac{W_y}{A} = \frac{72,2}{69} = 1,046 \text{ cm}$$

A magidom x_{F0} és y_{F0} ismeretében megrajzolható (4.3.37 ábra).

4.3.38 ábra



3. Rúdvégi elmozdulás meghatározása Mohr-eljárással.

A rúdvégi súlypont z irányú eltolódása:

$$w = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} = \frac{603,9 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 69} = 0,125 \text{ cm}$$

az y irányú eltolódás:

$$v = v_0 + \vartheta_0 \cdot L - \vartheta \cdot \frac{L}{2}, \quad v_0 = \vartheta_0 = 0,$$

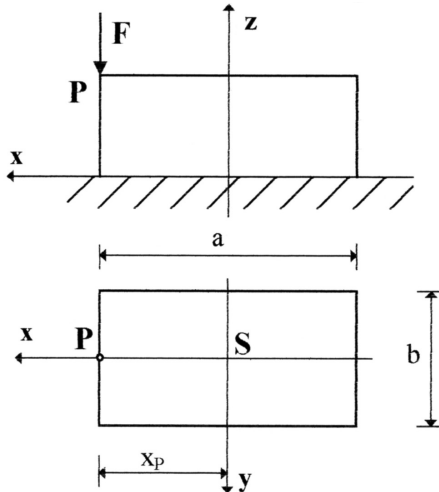
$$v = -\vartheta \cdot \frac{L}{2} = -\frac{A_M}{E \cdot I_x} \cdot \frac{L}{2} = -\frac{M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I_x},$$

$$v = -\frac{603,9 \cdot 10 \cdot 300^2}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 9800} = -1,32 \text{ cm}.$$

4.3.2-3 Feladat

Ismert a 4.3.39 ábrán vázolt külpontosan nyomott zömök oszlop.

4.3.39 ábra



Adatok: $a = 40 \text{ cm}$,
 $b = 30 \text{ cm}$,
 $F = 2800 \text{ kN}$.

Feladat: 1. Rajzoljuk fel az eredő feszültség-eloszlási ábrát!

2. Határozzuk meg a semleges tengely helyét!

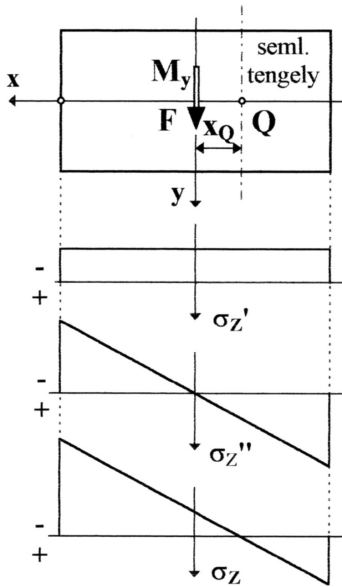
3. Mekkora lehet x_p , hogy a keresztmetszet egy pontjában se ébredjen pozitív σ feszültség?

Megoldás

1. Első lépésként redukáljuk az F erőt a keresztmetszet súlypontjába (3. ábra). A keresztmetszet igénybevétele egyenes hajlítás (M_y) és nyomás (F). Ezekből külön-külön rajzoljuk fel a feszültség-eloszlási ábrákat! A σ_z' az F -ből, a σ_z'' pedig az M_y -ből származik.

A két ábra összege adja az eredő feszültség-eloszlási ábrát (σ_z) (4.3.40. ábra).

4.3.40 ábra



2. Jelöljük Q -val a semleges tengely egy pontját! Ekkor

$$\sigma_z^{(Q)} = \sigma_z'^{(Q)} + \sigma_z''^{(Q)} = 0,$$

behelyettesítve:

$$-\frac{F}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_Q = 0$$

Innen

$$x_Q = \frac{F}{A} \cdot \frac{I_y}{M_y}, \text{ ahol}$$

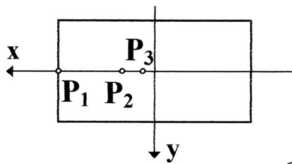
$$M_y = x_P \cdot F = \frac{a}{2} \cdot F, \text{ tehát}$$

$$x_Q = \frac{I_y}{A \cdot x_P} = \frac{\frac{a^3 \cdot b}{12}}{a \cdot b \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a}{6} = \frac{40}{6} = 6,66 \text{ cm}$$

Tehát a semleges tengely párhuzamos az y tengellyel, és tőle jobbra **6,66 cm** távolságban van.

3. A fentebb kapott $x_Q = \frac{I_y}{A \cdot x_P}$ összefüggésből látható, hogy ha az erő támadáspontja

4.3.41 ábra



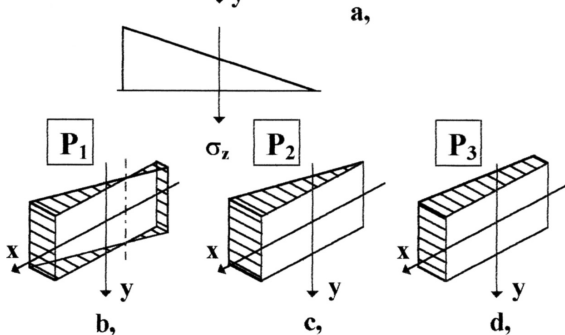
közeledik a súlyponthoz (x_P csökken), az x_Q értéke nő. Akkor nem ébred a keresztmetszet egy pontjában sem pozitív feszültség, ha a semleges tengely egybeesik a keresztmetszet jobb oldali élével, vagyis

$$x_Q = \frac{a}{2}$$

Az előző egyenletből

$$x_P = \frac{I_y}{A \cdot x_Q} = \frac{\frac{a^3 \cdot b}{12}}{a \cdot b \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a}{6} = 6,66 \text{ cm},$$

tehát ha az erő támadáspontja az y -tól balra $x_P = 6,66 \text{ cm}$ -re van, akkor minden pontban negatív σ feszültség ébred. (4.3.41 a, ábra).

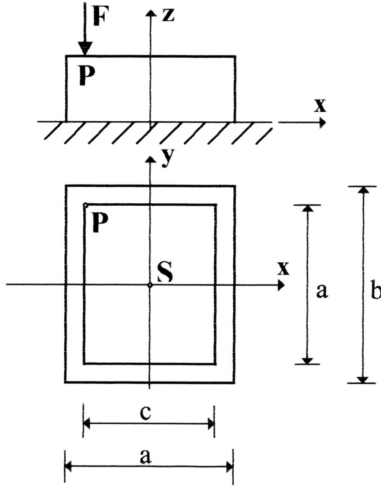


A 4.3.41 b, c, d. ábra az F erő különböző támadáspontjaihoz (P_1, P_2, P_3) tartozó feszültségeloszlási ábrákat mutatja térben.

4.3.2-4 Feladat

A 4.3.42 ábrán vázolt zárt négyszög keresztmetszetű oszlopra a P pontban működő, z tengellyel párhuzamos F erő hat.

4.3.42 ábra



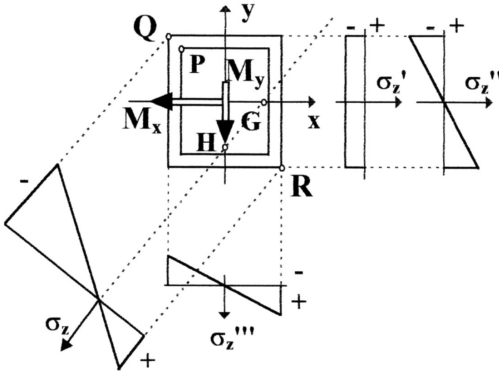
Adatok: $a = 30 \text{ cm}$,
 $b = 40 \text{ cm}$,
 $c = 20 \text{ cm}$,
 $F = 1500 \text{ kN}$,
 $R_{\text{adm}}^{(-)} = 10 \text{ kN/cm}^2$,
 $R_{\text{adm}}^{(+)} = 5 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: 1. Ellenőrizzük a tartót!
 2. Határozzuk meg a semleges tengely helyét!

Megoldás

1. Első lépésként redukáljuk az F erőt a keresztmetszet súlypontjába (4.3.43 ábra).

4.3.43 ábra



A redukált erőrendszer $F = 1500 \text{ kN}$ nagyságú erőből,

$$M_x = \frac{a}{2} \cdot F = 15 \cdot 1500 = 22500 \text{ kNcm}$$

és

$$M_y = \frac{c}{2} \cdot F = 10 \cdot 1500 = 15000 \text{ kNcm}$$

nagyságú nyomatékokból áll.

Tehát a külpontos nyomást megoldhatjuk egy központos nyomás és két egyenes hajlítás egymásrahalmozásával.

Rajzoljuk fel az egyes igénybevételekből a feszültségeloszlási ábrákat (4.3.43 ábra)! Az F erőből a σ_z' , az M_x -ből a σ_z'' és az M_y -ből a σ_z''' adódik. Keressük meg a keresztmetszet azon pontjait, amelyekben a legnagyobb pozitív ill. legnagyobb negatív feszültség ébred! Ezek az R és Q pontok.

$$\sigma_z^{(Q)} = \sigma_z^{(-)} = \sigma_z' + \sigma_z''^{(-)} + \sigma_z'''^{(-)} \quad ,$$

$$\sigma_z^{(R)} = \sigma_z^{(+)} = \sigma_z' + \sigma_z''^{(+)} + \sigma_z'''^{(+)} \quad .$$

Mivel a σ_z' minden pontban ugyanakkora negatív feszültség, a $|\sigma_z^{(-)}| > |\sigma_z^{(+)}|$ mégis mindkét helyen el kell végezni az ellenőrzést, mert az adott anyagnál a húzásra megengedett feszültség feleakkora, mint a nyomásra megengedett.

A feszültségek meghatározásához először is ki kell számolni a keresztmetszet területét, valamint a keresztmetszeti tényezőket.

$$\begin{aligned}
 A &= a \cdot b - a \cdot c = a (b - c) = 30 (40 - 20) = 600 \text{ cm}^2, \\
 I_x &= \frac{a \cdot b^3}{12} - \frac{c \cdot a^3}{12} = \frac{30 \cdot 40^3 - 20 \cdot 30^3}{12} = 115000 \text{ cm}^4 \\
 W_x &= \frac{I_x}{\frac{b}{2}} = \frac{115000}{20} = 5750 \text{ cm}^3, \\
 I_y &= \frac{b \cdot a^3}{12} - \frac{c^3 \cdot a}{12} = \frac{30^3 \cdot 40 - 20^3 \cdot 30}{12} = 70000 \text{ cm}^4 \\
 W_y &= \frac{I_y}{\frac{a}{2}} = \frac{70000}{15} = 4666,66 \text{ cm}^3.
 \end{aligned}$$

A legnagyobb negatív feszültség

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z \max}^{(-)} &= -\frac{F}{A} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{1500}{600} - \frac{22500}{5750} - \frac{15000}{4666,66} = -9,38 \text{ kN / cm}^2, \\
 \left| \sigma_{z \max}^{(-)} \right| &= 9,38 \text{ kN / cm}^2 < R_{\text{adm}}^{(-)} = 10 \text{ kN / cm}^2,
 \end{aligned}$$

tehát a vizsgált helyen megfelel a keresztmetszet szilárdságilag.

Nézzük a pozitív maximumot!

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z \max}^{(+)} &= -\frac{F}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{1500}{600} + \frac{22500}{5750} + \frac{15000}{4666,66} \\
 \sigma_{z \max}^{(+)} &= 4,62 \text{ kN / cm}^2 < R_{\text{adm}}^{(+)} = 5 \text{ kN / cm}^2,
 \end{aligned}$$

tehát szilárdságilag itt is megfelel.

2. A semleges tengely pontjaiban a feszültség nulla. Jelöljük a semleges tengely és az x tengely metszéspontját G -vel, az y tengellyel vett pedig H -val.

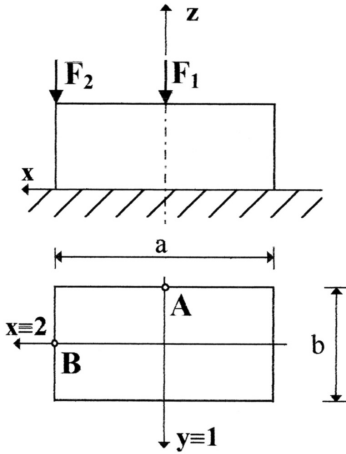
$$\begin{aligned}
 \sigma_z^{(H)} &= -\frac{F}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_H = 0, \text{ innen} \\
 y_H &= \frac{F \cdot I_x}{A \cdot M_x} = \frac{1500 \cdot 115000}{600 \cdot 22500} = 12,78 \text{ cm} . \\
 \sigma_z^{(G)} &= -\frac{F}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_G = 0, \text{ ahonnan} \\
 x_G &= \frac{F \cdot I_y}{A \cdot M_y} = \frac{1500 \cdot 70000}{600 \cdot 15000} = 11,67 \text{ cm} .
 \end{aligned}$$

A metszéspontok az x és y tengely azon oldalán helyezkednek el, ahol feltételeztük, tehát a pontok koordinátái: $H (0; - 12,78 \text{ cm})$, $G (11,67 \text{ cm}; 0)$.

4.3.2-5 Feladat

A 4.3.44 ábrán látható alaptestet az A pontban F_1 , a B pontban F_2 erő terheli.

4.3.44 ábra



Adatok: $a = 100 \text{ cm}$,
 $b = 60 \text{ cm}$,
 $F_1 = 80 \text{ kN}$,
 $F_2 = 120 \text{ kN}$.

Feladat: 1. Redukáljuk az F_1 és F_2 terheket a keresztmetszet súlypontjába!
 2. Az alap önsúlyát elhanyagolva rajzoljuk meg valamely tetszőleges keresztmetszet mentén keletkező feszültségeloszlási ábrákat!
 3. Hol ébred és mekkora a legnagyobb nyomó- és húzófeszültség?

4. Határozzuk meg a semleges tengely főténgelyekkel való metszéspontjait!
5. A semleges tengely berajzolása után rajzoljuk meg az eredő feszültségeloszlási ábrát!

Megoldás:

1. Az F_1 és F_2 erőknek a keresztmetszet súlypontjába való redukálása egy centrikus N nyomóerőt, és a főténgelyek körül forgató M_1 és M_2 hajlítónyomatékot ad.

A centrikus nyomóerő:

$$N = F_1 + F_2 = 80 + 120 = 200 \text{ kN}.$$

Az 1-es főténgely irányú hajlítónyomaték:

$$M_1 = \frac{a}{2} \cdot F_2 = \frac{100}{2} \cdot 120 = 6000 \text{ kNcm}$$

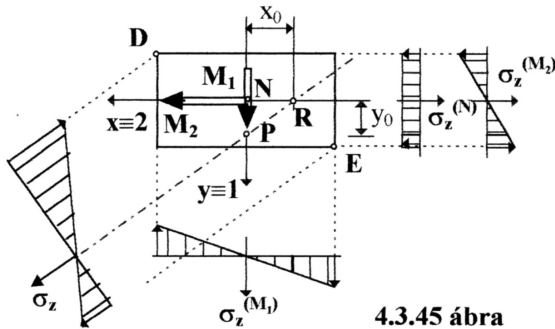
A 2-es főténgely irányú hajlítónyomaték:

$$M_2 = \frac{b}{2} \cdot F_1 = \frac{60}{2} \cdot 80 = 2400 \text{ kNcm}$$

2. Ha az oszlop önsúlyát elhanyagoljuk, akkor valamennyi keresztmetszet igénybevétele azonos, mégpedig az előző pontban meghatározott centrikus nyomás és a két főténgely irányú egyenes hajlítás. Rajzoljunk meg egy tetszőleges keresztmetszetet, és jelöljük az igénybevételeket (4.3.45 ábra)! Rajzoljuk meg az igénybevételek mindegyikéből a keletkező az feszültségek eloszlási ábráját!

3. A megrajzolt feszültségeloszlási ábrákból jól látszik, hogy a keresztmetszet D pontjában ébred a legnagyobb nyomófeszültség. A centrikus nyomóerőkből ébredő nyomófeszültség mellett mindkét egyenes hajlításból ebben a pontban keletkezik a legnagyobb negatív előjelű σ_z feszültség.

4.3.45 ábra



4.3.45 ábra

Egymáshalmozással írhatjuk:

$$\sigma_z^{(-)} \max = \sigma_z^{(b)} = - \left(\frac{N}{A} + \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} \right)$$

ahol

$$A = a \cdot b = 60 \cdot 100 = 6000 \text{ cm}^2,$$

$$W_1 = \frac{b \cdot a^2}{6} = \frac{60 \cdot 100^2}{6} = 10^5 \text{ cm}^3,$$

$$W_2 = \frac{a \cdot b^2}{6} = \frac{100 \cdot 60^2}{6} = 6 \cdot 10^4 \text{ cm}^3.$$

Így

$$\sigma_z^{(-)} \max = - \left(\frac{200}{6000} + \frac{6000}{10^5} + \frac{2400}{6 \cdot 10^4} \right) = -0,133 \text{ kN / cm}^2$$

A legnagyobb húzófeszültség a keresztmetszet E pontjában ébred. Az előzőkhöz hasonlóan írható:

$$\sigma_z^{(+)} \max = \sigma_z^{(E)} = - \frac{N}{A} + \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2}$$

Behelyettesítve

$$\sigma_z^{(+)} \max = - \frac{200}{6000} + \frac{6000}{10^5} + \frac{2400}{6 \cdot 10^4} = 0,0667 \text{ kN / cm}^2.$$

4. A semleges tengely valamennyi pontjában $\sigma_z = 0$.

Az 1-es főtengellyel való P metszéspontot az y_0 koordináta egyértelműen meghatározza.

Írható, hogy

$$\sigma_z^{(P)} = 0 = - \frac{N}{A} + \frac{M_2}{I_2} \cdot y_0.$$

Ebből

$$y_0 = \frac{N \cdot I_2}{A \cdot M_2},$$

ahol

$$I_2 = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{100 \cdot 60^3}{12} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ cm}^4.$$

Így

$$y_0 = \frac{200 \cdot 1,8 \cdot 10^6}{6000 \cdot 2400} = 25 \text{ cm}.$$

A 2-es főtengellyel való R metszéspontot az x_0 koordináta határozza meg. Tehát

$$\sigma_z^{(R)} = 0 = - \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} \cdot x_0$$

Ebből

$$x_0 = \frac{N \cdot I_1}{A \cdot M_1},$$

ahol

$$I_1 = \frac{b \cdot a^3}{12} = \frac{60 \cdot 100^3}{12} = 5 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Így

$$x_0 = 27,78 \text{ cm}.$$

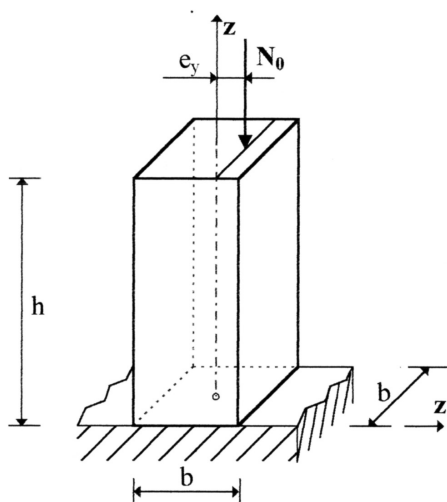
5. A semleges tengely két pontját (**P** és **R**) jelöljük be a 4.3.45 ábrán! Az igénybevételekből adódó feszültségeloszlási ábrák jól mutatják, hogy a **P** pont az **x** tengely alatt, **R** pont pedig az **y** tengelytől jobbra lehet, hiszen csak így lesz igaz, hogy $\sigma_z(\mathbf{P}) = 0$, ill $\sigma_z(\mathbf{R}) = 0$.

A kiszámított x_0 és y_0 értékek felhasználásával a semleges tengely berajzolható. Ezután már az eredő feszültségeloszlási ábra is megrajzolható. Ezen tengely feletti (**D** felé eső) pontokban negatív, míg az alatta levő (**E** felé eső) pontokban pozitív előjelű σ_z feszültség keletkezik.

4.3.2-6 Feladat

A 4.3.46 ábrán egy négyzet keresztmetszetű téglaoszlop látható, melyet az önsúlyán kívül N_0 nyomóerő terhel.

4.3.46 ábra



Adatok: $h = 3,0 \text{ m}$,
 $b = 0,4 \text{ m}$,
 $e_y = 15 \text{ mm}$,
 $R_{tal} = 0,01 \text{ kN/cm}^2$,
 $= 18 \text{ kN/m}^3$,
 $R_t = 0,14 \text{ kN/cm}^2$,
 $= 22 \text{ kN/m}^3$,
 $m = 0,8 \text{ m}$,
 $c = 0,8 \text{ m}$.

Feladat: Határozzuk meg a téglaoszlop teherbírását!

Megoldás

1. A téglaoszlop teherbírásának meghatározását a legfelső és legalsó keresztmetszet alapján végezzük el. Feltételezhető ugyanis, hogy az oszlop mértékadó keresztmetszete vagy a legnagyobb külpontosságú nyomóerő, vagy a legnagyobb nyomóerő helyén lesz. Ezek pedig a fentebb említett legfelső és legalsó keresztmetszetek.

Az oszlopot terhelő külpontos nyomóerő és külpontosság a felső keresztmetszetben

$$N_f = N_0, \quad y_f = e_y.$$

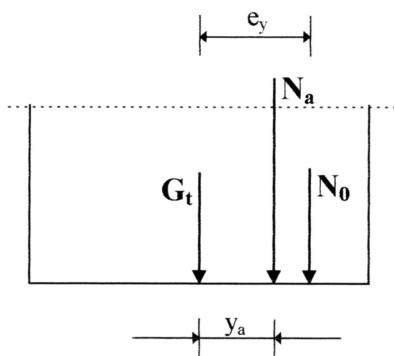
Az alsó keresztmetszet külpontos nyomóereje

$$N_a = N_0 + G_t = N_0 + \gamma_t \cdot b^2 \cdot h = N_0 + 18 \cdot 0,4^2 \cdot 3,0 = N_0 + 8,64 \text{ [kN]},$$

külpontossága a 4.3.47 ábra szerint

$$y_a = \frac{N_0}{N_0 + 8,64} \cdot e_y.$$

4.3.47 ábra

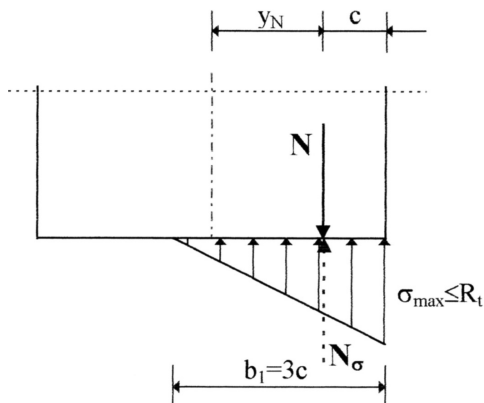


Mint ismeretes a csak nyomásnak ellenálló anyagú nyomott rudak keresztmetszeteiben a feszültségmozdulás háromszög alakú ábra szerint alakul, ha a normáló a magidomon kívül működik.

A felső keresztmetszetnél ez rövid számolással rögtön belátható, az alsó keresztmetszetre ugyanezt feltételezzük, amit majd a kiszámított eredmények birtokában a $\mathbf{b}_{1a} \leq \mathbf{b}_3$ nyenlőtlenség kimutatásával ellenőrizhetünk.

A feszültségeloszlást a 4.3.48 ábrán vázoltuk.

4.3.48 ábra



A σ feszültségek eredője egyensúlyozza ki az N normálért, és így két erő egyensúlyának egyik feltétele alapján – közös hatásvonal – mondhatjuk, hogy a keresztmetszet dolgozó szélessége:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{3} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{3} \cdot \left(\frac{\mathbf{b}}{2} - \mathbf{y}_N \right)$$

A b_1 értéket meghatározva a felső keresztmetszetre:

$$\mathbf{b_{lf}} = 3 \cdot \left(\frac{\mathbf{b}}{2} - \mathbf{e_y} \right) = 3 \cdot \left(\frac{0,4}{2} - 0,15 \right) = 0,15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$$

A felső keresztmetszet határteherbírása

$$N_f = R_t \cdot \frac{b_{lf} \cdot b}{2} = 0,14 \cdot \frac{15 \cdot 40}{2} = 42 \text{ kN}$$

Az alsó keresztmetszet határteherbírása

$$\mathbf{N}_a = \mathbf{R}_t \cdot \frac{\mathbf{b}_{1a} \cdot \mathbf{b}}{2}$$

Részletezés után:

$$\mathbf{N}_0 + \mathbf{G}_t = \frac{\mathbf{R}_t}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{\mathbf{N}_0}{\mathbf{N}_0 + \mathbf{G}_t} \cdot \mathbf{e}_y \right) \cdot b$$

Az egyenletet N_0 -ra rendezve a behelyettesítések után $N_0^2 - 24,72 \cdot N_0 - 1376,87 = 0$

másodfokú egyenletre jutunk, melynek megoldása $N_o = \frac{24,72 \pm \sqrt{24,72^2 + 4 \cdot 1376,87}}{2} =$

$$N_{01} = 51,47 \text{ kN}; \quad N_{02} = -26,75 \text{ kN}.$$

Fizikailag N_0 a lehetséges megoldás.

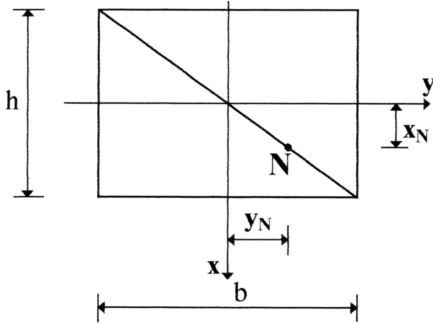
N_{01} értéke azonban meghaladja N_f -t, így az oszlop terhelhetősége:

$$N_u = N_f = 42 \text{ kN.}$$

4.3.2-7 Feladat

A 4.3.49 ábrán egy téglalap keresztmetszetű betonlaptest alsó síkját az átló negyedében külpontos nyomóerő terheli.

4.3.49 ábra



Adatok: $b = 2 \text{ m}$,
 $h = 1,5 \text{ m}$,
 $R_{\text{tal}} = 0,01 \text{ kN/cm}^2$.

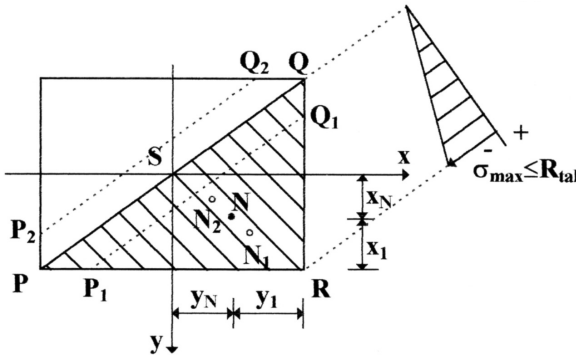
Feladat: 1. Határozzuk meg a keresztmetszet dolgozó részét!
 2. Határozzuk meg a nyomóerő határértékét!

Megoldás:

1. A betonlaptest alsó síkján fellépő feszültségek eredője kell, hogy kiegyensúlyozza az N erőt. Ezért fenn kell álljanak az alábbi egyenlőségek:

$$N_{\sigma} = N, \quad y_{\sigma} = y_N, \quad x_{\sigma} = x_N.$$

4.3.50 ábra



A feladatmegoldás első lépéseként megkeressük azt a feszültségtestet (tetraédert), melynek súlypontja N . A tetraéder súlypontja a súlyvonalának felezésénél van, vagyis

$$\overline{SN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SR}$$

amiből következik, hogy

$$b_1 = \overline{PR} = b = 4 \cdot y_1$$

$$\text{illetve } h_1 = \overline{QR} = h = 4 \cdot x_1$$

Az előzőek szerint megállapítást nyert, hogy a betonlaptest dolgozó része jelen feladatban az átlóval határolt PQR félkeresztmetszet (4.3.50 ábra).

Megjegyezzük, hogy az N erő nagyobb külpontossága esetén a dolgozó rész az előbbinél kisebb $P_1Q_1R\Delta$, kisebb külpontosságnál viszont a P_2Q_2QRP dolgozó keresztmetszetre nem tetraéder, hanem egy bonyolultabb feszültségtest illeszkedik, aminek megadásával nem foglalkozunk.

2. Az $N_{\sigma} = N$ egyenlőtlenséget alapul véve a feszültségtest térfogata:

$$N_{\sigma} = \frac{1}{6} \cdot \sigma_{\max} \cdot b_1 \cdot h_1 = \frac{1}{6} \cdot \sigma_{\max} \cdot b \cdot h$$

Az alaptest terhelhetősége a talaj határfeszültségét figyelembe véve,

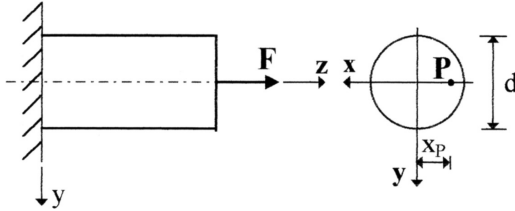
$$N_u = \frac{1}{6} \cdot R_{\text{tal}} \cdot b \cdot h = \frac{1}{6} \cdot 0,01 \cdot 200 \cdot 150 = 50 \text{ kN}$$

C. 4.3.2 GYAKORLÓ FELADATOK

4.3.2-8 Feladat

A 4.3.51 ábrán látható kör keresztmetszetű rudat szabad végén a **P** pontban **F** erő terheli.

4.3.51 ábra



Adatok: $d = 8 \text{ cm}$,
 $x_p = 3 \text{ cm}$,
 $F = 200 \text{ kN}$,
 $R_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2$.

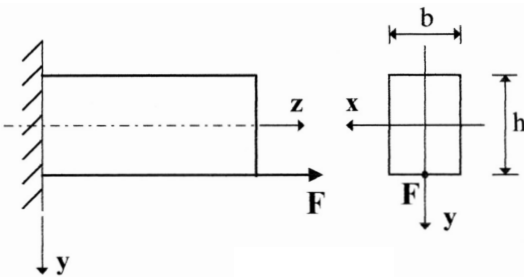
- Feladat:**
1. Redukálja az **F** terhelő erőt a keresztmetszet súlypontjába!
 2. Ellenőrizze a rudat szilárdságilag (a rúd megfelel, ha $\sigma_{max} \leq R_{adm}$)!
 3. Határozza meg az **y** tengellyel párhuzamos semleges tengely **x** tengellyel való metszéspontjának x_0 koordinátáját!

Eredmények:	1. $F_{(s)} = F = 200 \text{ kN}$, $M_y = 600 \text{ kNcm}$,
	2. $\sigma = 15,92 \text{ kN/cm}^2 < R_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2$ megfelel a rúd,
	3. $x_0 = 1,33 \text{ cm}$.

4.3.2-9 Feladat

A 4.3.52 ábrán vázolt téglalap keresztmetszetű tartót az **F** erő az ábrán látható módon terheli.

4.3.52 ábra



Adatok: $b = 4 \text{ cm}$,
 $F = 216 \text{ kN}$,
 $R_{adm} = 18 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Határozza meg a téglalap keresztmetsztű rúd szükséges **h** magasságát!

Eredmény:	$h = 12 \text{ cm}$
------------------	---------------------

4.3.2-10 Feladat

Egy kör keresztmetszetű zömök rudat a kör keresztmetszet kerületén támadó **F** erő terheli.

Adatok: $F = 407 \text{ kN}$,
 $R_{adm} = 18 \text{ kN/cm}^2$.

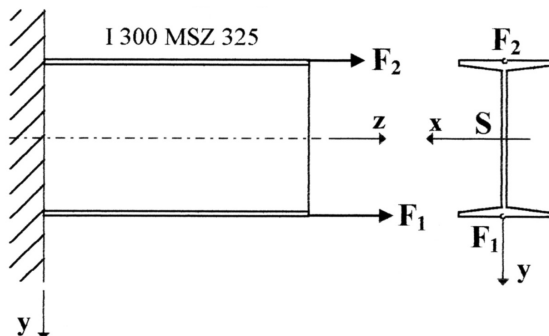
Feladat: Határozza meg, hogy mekkora legyen a kör keresztmetszet sugara, hogy a tartó teherbírása éppen **F** legyen!

Eredmény:	$r = 6 \text{ cm}$.
------------------	----------------------

4.3.2-11 Feladat

A 4.3.53 ábrán egy külpontosan húzott rudat vázoltunk, melyet $F_1 > F_2$ erő terhel.

4.3.53 ábra



Adott: Szelvény: I 300 - MSZ325

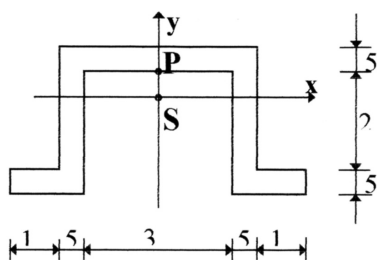
Feladat: Határozza meg, hogy F_2 hányadrésze legyen F_1 -nek ahhoz, hogy a nagyobb feszültségű szélső szálban kétszer akkora feszültség ébredjen mint a másik szélső szálban!

Eredmény:	1. megoldás: $F_2 = 0,6523 F_1$.	2. megoldás: $F_2 = -0,3086 F_1$.
-----------	-----------------------------------	------------------------------------

4.3.2-12 Feladat

A 4.3.54 ábrán vázolt keresztmetszetű tartóra a P pontban F nyomóerő hat.

4.3.54 ábra



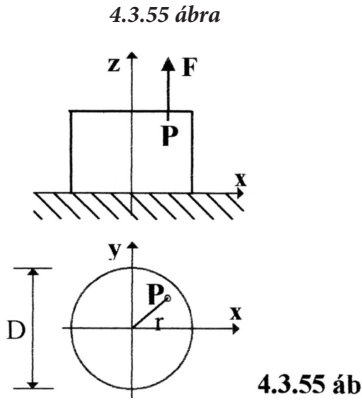
Adott: $F = 20 \text{ kN}$

Feladat: Határozza meg a maximális pozitív és negatív feszültséget, valamint a semleges tengely helyét!

Eredmények:	$\sigma_{\max}^{(+)} = 1,05 \text{ kN/cm}^2$,	$\sigma_{\max}^{(-)} = -7,6 \text{ kN/cm}^2$,	$y_0 = -1,29 \text{ cm}$.
-------------	--	--	----------------------------

4.3.2-13 Feladat

A 4.3.55 ábrán látható zömök oszlopra az F külpontos húzóerő hat.



Adatok: $D = 6 \text{ cm}$,
 $r = 2,25 \text{ cm}$,
 $F = 134,4 \text{ kN}$.

Feladat: Határozza meg a keresztmetszetben ébredő maximális feszültséget, és a semleges tengely súlyponttól mért távolságát (r_0)!

Eredmények:	$\sigma_{\max} = 19 \text{ kN/cm}^2$,	$r_0 = 1 \text{ cm}$.
-------------	--	------------------------

4.3.2-14 Feladat

Az U szelvényű, két végén csuklós megtámasztású rudat külpontos nyomóerő terheli a szelvény szimmetriatengelyén lévő Q pontban. A rúd zömöknek tekinthető.

Adatok: Szelvény: U 160.80.3.

Feladat: Mekkora külpontosság esetén lesz a maximális húzó- és nyomófeszültség azonos értékű a rúd keresztmetszetében?

Eredmény:	3,50 cm
-----------	---------

3.3.2-15 Feladat

Egy szerkezet Z szelvényű, zömöknek tekinthető rúdját külpontos nyomóerő terheli az öv és a gerinc találkozásánál, a középvonalak metszéspontjában.

Adatok: Szelvény: Z 160.60.4, $F = 24 \text{ kN}$.

Feladat: 1. Határozza meg a maximális feszültséget!
 2. Határozza meg a semleges tengely főtegyelmezeteit!

Eredmények:	1. $ \sigma_{\max} = 19,12 \text{ kN/cm}^2$,	2. 0,99 cm; 5,3 cm (abszolút értékek)
-------------	--	---------------------------------------

4.3.2-16 Feladat

Egy L_0 hosszúságú befogott oszlopot az F hossz tengely irányú nyomóerő terheli. Az oszlop T75 szelvényből készült.

Adatok: $L_0 = 2$, $F = 50$, $E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $R_{\text{adm}} = 180 \text{ MPa}$.

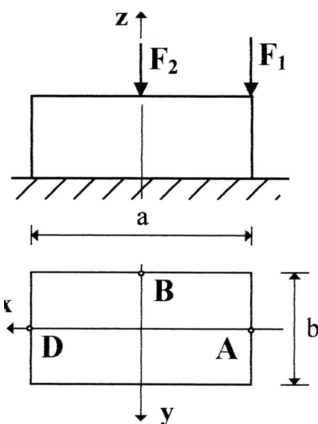
Feladat: Határozzuk meg a megengedhető külpontosság abszolútértékét!

Eredmény:	$ v_{\max} = 1,02 \text{ cm.}$
------------------	---------------------------------

3.3.2-17 Feladat

A 4.3.56 ábrán látható alaptestet az A pontban F_1 , a B pontban F_2 erő terheli.

4.3.56 ábra



Adatok: $a = 40 \text{ cm}$,
 $b = 30 \text{ cm}$,
 $F_1 = 360 \text{ kN}$,
 $F_2 = 240 \text{ kN}$.

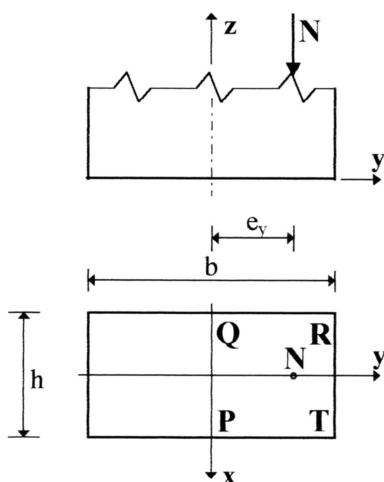
Feladat: 1. Határozza meg a keresztmetszetben ébredő legnagyobb nyomó- és húzófeszültség értékét (az önsúlyt elhanyagolva)!
 2. Számítsa ki a bejelölt A és D pontokban ébredő feszültséget!
 3. Határozza meg a szemleges tengelynek az x és y tengelyekkel való metszéspontjainak x_0 és y_0 koordinátáit!

Eredmények:	$\sigma_{\max}^{(-)} = -2 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_z^{(A)} = -1,4 \text{ kN/cm}^2$	$\sigma_{\max}^{(+)} = 1 \text{ kN/cm}^2$, $x_0 = 11,11 \text{ cm}$	$\sigma_z^{(D)} = 0,4 \text{ kN/cm}^2$, $y_0 = 12,5 \text{ cm}$
--------------------	---	---	---

4.3.2-18 Feladat

A 4.3.57 ábrán vázolt betonoszlopot külpontos nyomóerő terheli.

4.3.57 ábra



Adatok: $h = 60 \text{ cm}$,
 $b = 90 \text{ cm}$,
 $N = 675 \text{ kN}$.

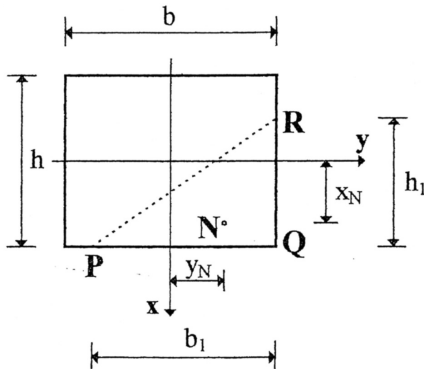
Feladat: 1. Határozza meg a nyomóerő maximális külpontosságát, hogy legalább a PQRT félkeresztmetszet legyen a dolgozó keresztmetszet!
 2. Számítsa ki a maximális feszültséget!

Eredmények:	$\sigma_{\max} = -0,5 \text{ kN/cm}^2$	$e_y = 30 \text{ cm}$
--------------------	--	-----------------------

4.3.2-19 Feladat

A 4.3.58 ábrán látható téglalap keresztmetszetű nyomott téglaoszlopot az N pontban támadja a nyomóerő.

4.3.58 ábra



Adatok: $h = 40 \text{ cm}$,
 $b = 60 \text{ cm}$,
 $N = 50 \text{ kN}$,
 $x_N = 15 \text{ cm}$,
 $y_N = 15 \text{ cm}$.

Feladat: 1. Határozza meg a nyomóerő maximális külpontosságát, hogy legalább a PQR részekeresztmetszet legyen a dolgozó keresztmetszet!
 2. Számítsa ki a maximális feszültséget!

Eredmények:	$b_1 = 60 \text{ cm}$,	$h_1 = 20 \text{ cm}$,	$\sigma_{\max} = -0,25 \text{ kN/cm}^2$.
-------------	-------------------------	-------------------------	---

4.4 Többtengelyű feszültségi állapotot okozó összetett igénybevétel

4.4.1. HAJLÍTÁSSAL EGYIDEJŰ NYÍRÁS

A.4.4.1 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Azt az esetet tárgyaljuk, amikor a terhelés síkja a keresztmetszet szimmetria tengelyére illeszkedik, tehát a nyíróerő egybeesik valamelyik tehetetlenségi főtengellyel.

A feszültségek számítása:

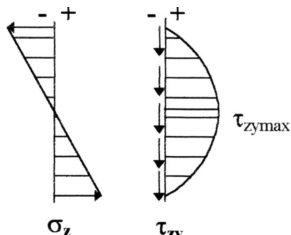
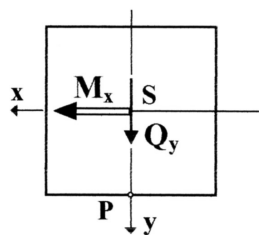
hajlításból: Navier-képlet szerint $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$ a feszültségeloszlás függvénye,

nyírásból: Zsuravszkij szerint $\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot c(y)}$, illetve $\tau_{zx} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot c(x)}$ feszültségek keletkeznek.

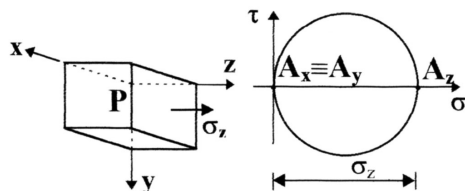
ahol: M_x és Q_y a hajlító- és nyíróigénybevételek,
 I_x a teljes szelvény másodrendű nyomatéka a hajlítás tengelyére,
 S_x az elcsúszni akaró keresztmetszetrész statikai nyomatéka a hajlítás tengelyére,
 $c(y)$, $c(x)$ az elcsúszni akaró keresztmetszetrész szélessége.

4.4.1 ábra

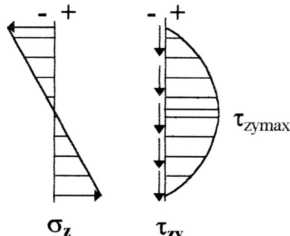
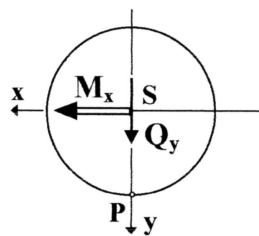
Téglalap keresztmetszet esetén. $\tau_{zy \max} = 1,5 \cdot \frac{Q_y}{A}$



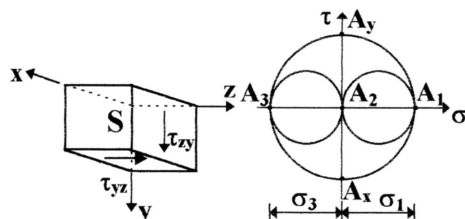
Feszültségi állapot:
P pontban



Kör keresztmet esetén: $\tau_{zy \max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{A}$



S pontban



Vékonyfalú körgyűrű keresztmetszet esetén közelítően: $\tau_{zy \max} = 2 \cdot \frac{Q_y}{A}$

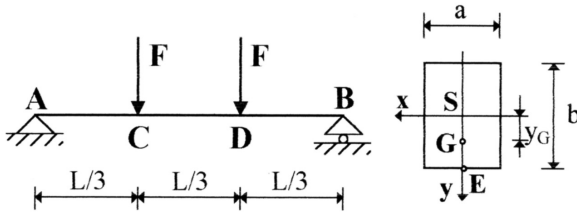
A gyakorlatban méretezést végzünk hajlításra, ellenőrzést hajlítással egyidejű nyírásra!

B.4.4.1 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.4.1-1 Feladat

A 4.4.2 ábrán látható állandó keresztmetszetű rövid kéttámaszú tartót a C és D jelű keresztmetszetében F erők terhelik.

4.4.2 ábra



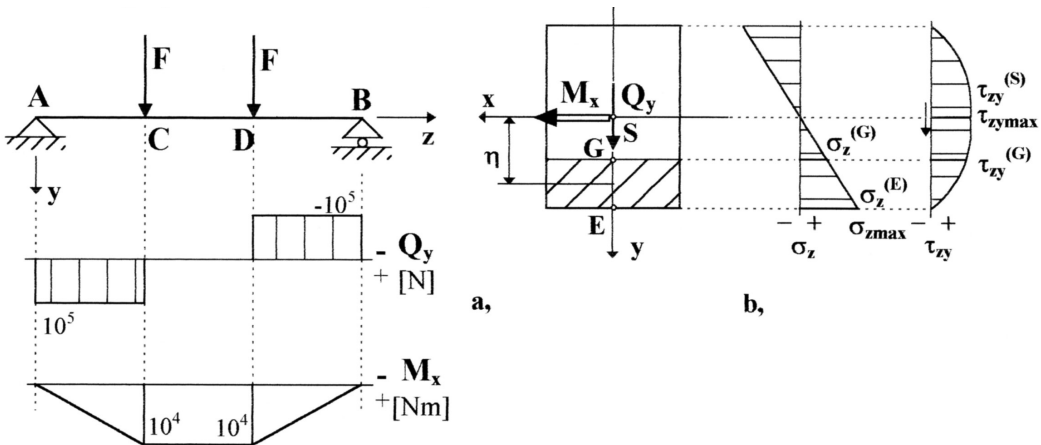
Adatok: $L = 300 \text{ mm}$,
 $F = 10^5 \text{ N}$,
 $a = 50 \text{ mm}$,
 $b = 100 \text{ mm}$,
 $y_G = 25 \text{ mm}$.

- Feladat:**
1. Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!
 2. Állapítsuk meg a veszélyes keresztmetszet (K) helyét, és a mértékadó igénybevételeket!
 3. Rajzoljuk meg valamelyik veszélyes keresztmetszet mentén a feszültségeloszlási ábrákat!
 4. Számítsuk ki a veszélyes keresztmetszet E, G és S pontjaiban ébredő feszültségösszetevőket!

Megoldás:

1. A tartó igénybevételi ábrái a 4.4.3 a, ábrán láthatók.

4.4.3 ábra



2. Az igénybevételi ábrákból láthatjuk, hogy a tartó veszélyes keresztmetszete a C és D keresztmetszet.

Mértékadó igénybevételek:

C keresztmetszetben: $M_x = 10^4 \text{ Nm}$ (↺-↻),

$Q_y = 10^5 \text{ N}$ ↑-↓,

D keresztmetszetben: $M_x = 10^4 \text{ Nm}$ (↺-↻),

$Q_y = 10^5 \text{ Nm}$ ↓-↑.

Tehát a tartó igénybevétele hajlítással egyidejű nyírás.

3. A feszültségeloszlási ábrákat rajzoljuk meg a C keresztmetszet mentén (4.4.3 b, ábra)!

4. Most számítsuk ki a keresztmetszet E, G és S pontjaiban ébredő feszültségösszetevőket!

E pontban:

– hajlításból:

$$\sigma_z^{(E)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_E,$$

$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{50 \cdot 100^3}{12} = 4,166 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

ahol

$$y_E = 50 \text{ mm}.$$

Behelyettesítve:

$$\sigma_z^{(E)} = \frac{10^4 \cdot 10^3}{4,166 \cdot 10^6} \cdot 50 = 120 \text{ MPa},$$

– nyírásból: $\tau_{zy} = 0$.

G pontban:

– hajlításból:

$$\sigma_z^{(G)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_G = \frac{10^7}{4,166 \cdot 10^6} \cdot 25 = 60 \text{ MPa}.$$

– nyírásból Zsuravszkij-formula szerint:

$$\tau_{zy}^{(G)} = \frac{Q \cdot S_x}{I_x \cdot a},$$

ahol:

$$S_x = a \cdot \frac{b}{4} \cdot \eta = 50 \cdot \frac{100}{4} \cdot 37,5 = 46875 \text{ mm}^3.$$

Behelyettesítve:

$$\tau_{zy}^{(G)} = \frac{10^5 \cdot 46875}{4,166 \cdot 10^6 \cdot 50} = 22,5 \text{ MPa}.$$

S pontban:

– hajlításból nem ébred feszültség, mivel az S pont rajta van a hajlítás tengelyén, vagyis

$$\sigma_z^{(S)} = 0.$$

– nyírásból maximális τ_{zy} ébred, mégpedig: $\tau_{zy}^{(S)} = \frac{Q \cdot S_{xfél}}{I_x \cdot a}$.

ahol:

$$S_{xfél} = a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{4}, \text{ és } I_x = \frac{a \cdot b^3}{12}.$$

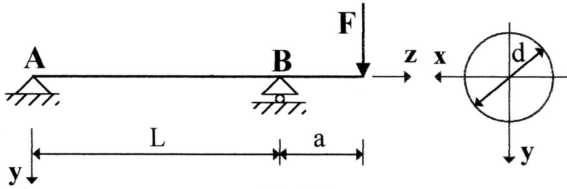
Így:

$$\tau_{zy}^{(S)} = \tau_{zy \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{a \cdot b} = \frac{3 \cdot 10^5}{2 \cdot 50 \cdot 100} = 30 \text{ MPa}.$$

4.4.1-2 Feladat

A 3.4.4 ábrán látható állandó keresztmetszetű rövid konzolos tartót F erő terheli.

4.4.4 ábra



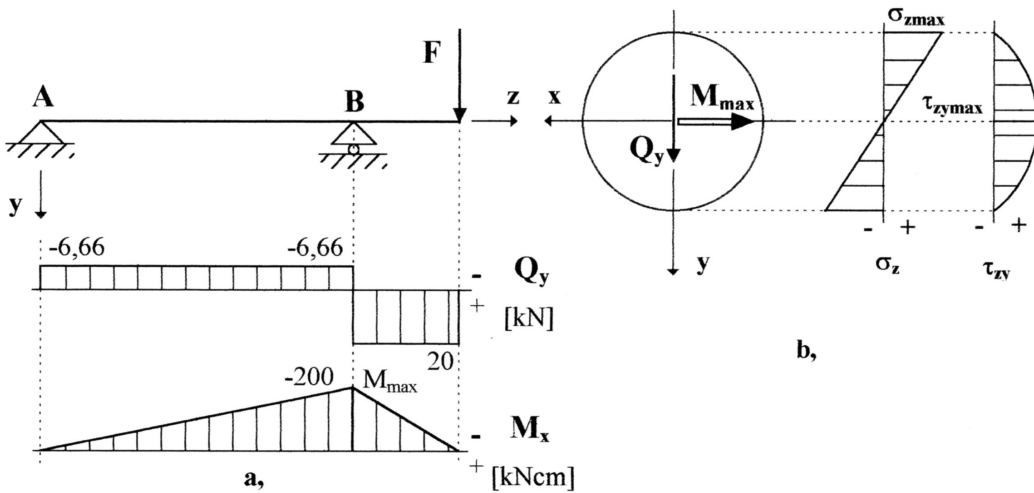
Adatok: $L = 30 \text{ cm}$,
 $a = 10 \text{ cm}$,
 $F = 20 \text{ kN}$,
 $R_{\text{adm}} = 20 \text{ kN/cm}^2$.

- Feladat:**
1. Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!
 2. Olvassuk le az igénybevételi ábrákról a mértékadó (legnagyobb) igénybevételeket!
 3. Rajzoljuk meg a mértékadó igénybevételek keresztmetszetében a feszültségeloszlási ábrákat!
 4. Méretezzük a tartót hajlításra!
 5. A hajlításra méretezett tartót ellenőrizzük nyírásra Mohr elmélete szerint!

Megoldás:

1. A tartó igénybevételi ábrái a 4.4.5 a, ábrán láthatók.

4.4.5 ábra



A tartó igénybevétele tehát egyidejű hajlítás és nyírás.

2. A legnagyobb igénybevételek a B keresztmetszetben ébrednek:

$$M_{\text{max}} = 200 \text{ kNcm}, \quad Q_y = 20 \text{ kN}.$$

3. A feszültségeloszlásokat a B keresztmetszet mentén a 4.4.5 b, ábra mutatja.

4. A legnagyobb hajlítófeszültség a keresztmetszet alsó- és felső szélső pontjában ébred, mégpedig:

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{M_{\max}}{\frac{d^3 \cdot \pi}{32}}.$$

A tartó hajlításra megfelel, ha

$$\sigma_{z \max} \leq R_{\text{adm}}.$$

Az előző összefüggésekből:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\max} \cdot 32}{R_{\text{adm}} \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{200 \cdot 32}{20 \cdot \pi}} = 4,67 \text{ cm}.$$

Válasszunk tényleges átmérőnek: $d = 5 \text{ cm}$ -t!

5. A legnagyobb nyírófeszültség az x tengelyre eső keresztmetszeti pontokban ébred, és

$$\tau_{zy \max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}$$

összefüggéssel számítható, mivel kör keresztmetszetű a tartó.

A tartó Mohr szerint hajlítással egyidejű nyírásra megfelel, ha

$$\sigma_{\text{eqv}} = 2 \tau_{zy \max} \leq R_{\text{adm}}.$$

Behelyettesítve

$$\sigma_{\text{eqv}} = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4}{5^2 \cdot \pi}.$$

Mivel

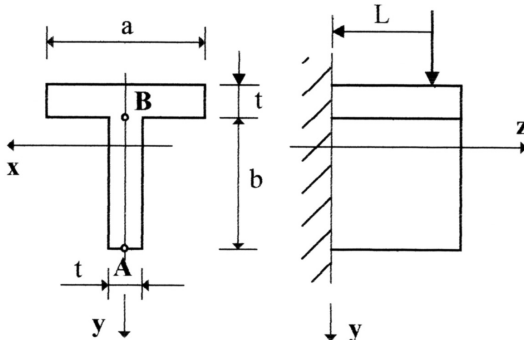
$$\sigma_{\text{eqv}} = 2,72 \text{ kN / cm}^2 < R_{\text{adm}} = 20 \text{ kN / cm}^2,$$

a hajlításra méretezett tartó nyírásra nagy biztonsággal felel meg.

4.4.1-3 Feladat

A 4.4.6 ábrán látható konzolt a befogástól L távolságra F koncentrált erő terheli.

4.4.6 ábra



Adatok: $a = 40 \text{ mm}$,
 $b = 50 \text{ mm}$,
 $t = 10 \text{ mm}$,
 $L = 4 \text{ cm}$,
 $F = 34 \text{ kN}$,
 $R_{\text{adm}} = 17 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: 1. Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!

2. Ábrázoljuk a feszültségeloszlásokat a legnagyobb igénybevételű keresztmetszetben!

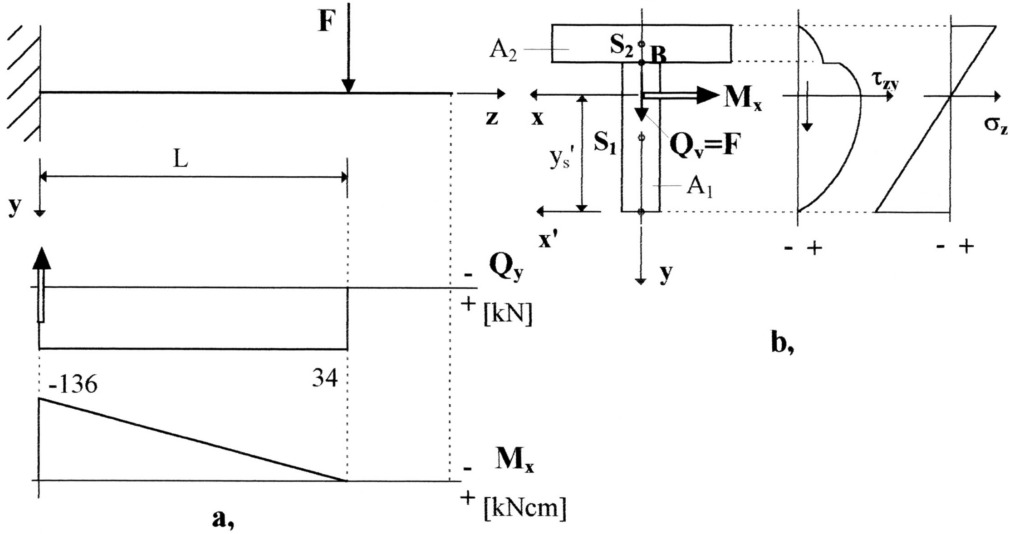
3. Számoljuk ki az ezen keresztmetszet A és (öv alatti) B pontjában ébredő feszültségeket!

4. Ellenőrizzük a konzolt!

Megoldás:

1. Az igénybevételi ábrákat a 4.4.7 a, ábrán rajzoltuk meg.

4.4.7 ábra



2. Maximális nyomaték és nyíróerő ébred a befogási keresztmetszetben. A feszültségeloszlási ábrákat a 4.4.7 b, ábrán láthatjuk.

3. A feszültség számításához meg kell határoznunk a súlypont helyét. Az x'y koordináta-rendszerben:

$$S_1 (0; -25 \text{ mm}), \quad A_1 = 500 \text{ mm}^2, \quad S_2 (0; -55 \text{ mm}), \quad A_2 = 400 \text{ mm}^2.$$

$$\text{Így: } y'_s = \frac{\sum y'_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{-25 \cdot 500 - 55 \cdot 400}{500 + 400} = -\frac{34500}{900} = -38,33 \text{ mm}.$$

Amint az a feszültségeloszlási ábráról látható (4.4.7 b, ábra), az A pontban csak a feszültség ébred, mely a Navier-összefüggés alapján:

$$\sigma_z^{(A)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A, \text{ ahol}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{t^3 \cdot a}{12} + t \cdot a \cdot \left(\frac{t}{2} + b - |y'_s| \right)^2 + \frac{b^3 \cdot t}{12} + t \cdot b \cdot \left(|y'_s| - \frac{b}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1^3 \cdot 4}{12} + 1 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + 5 - 3,83 \right)^2 + \frac{5^3 \cdot 1}{12} + 1 \cdot 5 \cdot \left(3,83 - \frac{5}{2} \right)^2 = 30,75 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

és

$$y_A = |y'_s| = 3,83 \text{ cm}.$$

Tehát
$$\sigma_z^{(A)} = \frac{-136}{30,75} \cdot 3,83 = -16,95 \text{ kN / cm}^2.$$

Számítsuk ki ezután a B pontban ébredő feszültségeket!

$$\sigma_z^{(B)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B = \frac{-136}{30,75} \cdot (-1,17) = 5,16 \text{ kN / cm}^2.$$

$$y_B = -(t - |y'_s|) = -(5 - 3,83) = -1,17 \text{ cm},$$

és
$$\tau_{zy}^{(B)} = \frac{F \cdot S_x^{(2)}}{I_x \cdot t}$$

ahol $S_x^{(2)}$ a B ponton átmenő, τ_{xy} -ra merőleges vonallal levágott felső rész statikai nyomatéka az x tengelyre.

$$S_x^{(2)} = a \cdot t \cdot \left(b + \frac{t}{2} - |y'_s| \right) = 4 \cdot 1 \cdot \left(5 + \frac{1}{2} - 3,83 \right) = 6,66 \text{ cm}^3$$

Ezt behelyettesítve

$$\tau_{zy}^{(B)} = \frac{34 \cdot 6,66}{30,75 \cdot 1} = 7,37 \text{ kN / cm}^2.$$

4. A konzolt az A, B és S pontokban kell ellenőrizni.

Az A pontban egytengelyű feszültségállapot ébred, és

$$|\sigma_z^{(A)}| = 16,95 \text{ kN / cm}^2 \langle R_{adm} = 17 \text{ kN / cm}^2$$

tehát itt megfelel a tartó.

A B és S pontokban a feszültségállapot többtengelyű, tehát itt meg kell határozni az egyenértékű feszültséget, amely a HMH-elmélet szerint:

$$\sigma_{eqv}^{(B)} = \sqrt{\sigma_z^{(B)2} + 3 \cdot \tau_{zy}^{(B)2}} = \sqrt{5,16^2 + 3 \cdot 7,37^2} = 13,77 \text{ kN / cm}^2$$

Ezt összehasonlítva a megengedett feszültséggel,

$$\sigma_z^{(B)} = 13,77 \text{ kN / cm}^2 \langle R_{adm} = 17 \text{ kN / cm}^2$$

tehát a B pontban is megfelel a tartó.

Az S pontban csak τ_{zy} feszültség ébred, ennek nagysága:

$$\tau_{zy}^{(S)} = \frac{T \cdot S_x}{I_x \cdot t} = \frac{T \cdot \left[S_x^{(2)} + t \cdot (b - |y'_s|) \cdot \frac{b - |y'_s|}{2} \right]}{I_x \cdot t}$$

ahol S_x számításához az S ponton átmenő vízszintes vonallal elvágjuk a keresztmetszetet, és vesszük a felső rész statikai nyomatékát a hajlítás tengelyére (x).

Behelyettesítve:

$$\tau_{zy}^{(S)} = \frac{34 \cdot \left[6,66 + 1 \cdot \frac{(5 - 3,83)^2}{2} \right]}{30,75 \cdot 1} = 8,12 \text{ kN / cm}^2$$

Az egyenértékű feszültség az S pontban

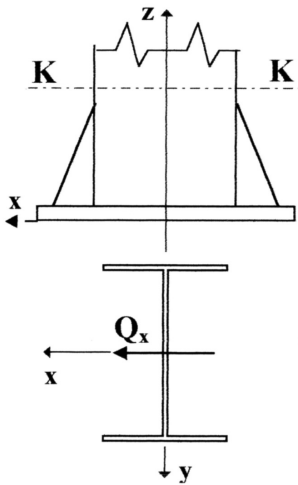
$$\sigma_{eqv}^{(S)} = \sqrt{3} \cdot \tau_{zy}^{(S)} = 14,06 \text{ kN / cm}^2 \langle R_{adm} = 17 \text{ kN / cm}^2$$

tehát az S pontban sem lépi túl az egyenértékű feszültség a megengedett értéket.

4.4.1-6 Feladat

Egy befogott, I szelvényű oszlop befogáshoz közeli, még merevítetlen K keresztmetszetére – a fő igénybevételén kívül – x tengellyel párhuzamosan Q_x nyíróerőkomponens is hat (4.4.8 ábra).

4.4.8 ábra



Adatok: szelvény:

övek: 240.12.

gerinc: 420.8. = 54 kN

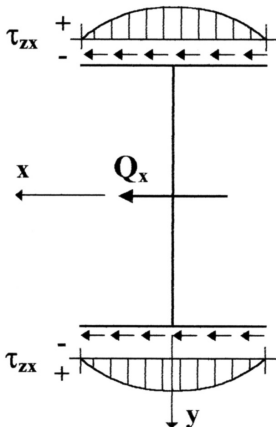
$$Q_x = 54 \text{ kN.}$$

Feladat: Határozzuk meg a Q_x nyíróerőkomponensből származó feszültségeket!

Megoldás: Ezen vékonyfalú keresztmetszet esetén a feszültségeloszlás meghatározásánál eltekintünk a gerinc jelenlététől, mivel az y tengely mentén helyezkedik el, valamint y-nal párhuzamos mérete igen nagy. Így a két öv veszi föl a nyíró igénybevételt, még hozzá – a szimmetria miatt – fele-fele arányban.

Egy övben a $\frac{Q_x}{2}$ nyíróerők hatására keletkező csúsztatófeszültség (4.4.9 ábra) a

4.4.9 ábra



$$\tau_{zx} = \frac{\frac{Q_x}{2} \cdot S_y^{\ddot{o}v}}{I_y^{\ddot{o}v} \cdot t_{\ddot{o}}}$$

összefüggés szerint adódik. Itt az öv y tengelyre számított inerciája:

$$I_y^{\ddot{o}v} = \frac{24^3 \cdot 1,2}{12} = 1382,4 \text{ cm}^4$$

az öv vastagsága $t_o = 1,2 \text{ cm}$, és az öv súlypontján számított maximális statikai nyomatéka:

$$S_y^{\ddot{o}v} = 12 \cdot 1,2 \cdot 6 = 86,4 \text{ cm}^3$$

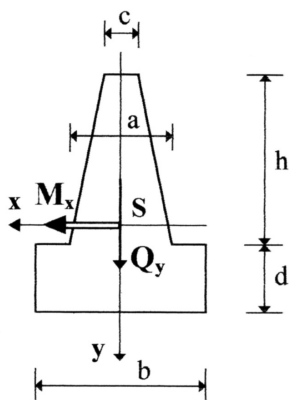
amelyekkel a fellépő maximális τ_{zx} nyírófeszültség:

$$\tau_{zx \text{ max}} = \frac{27 \cdot 86,4}{1382 \cdot 1,2} = 1,41 \text{ kN / cm}^2$$

4.4.1-7 Feladat

A 4.4.10 ábrán vázolt vasbeton keresztmetszetet Q_y nyíróerő és M_x hajlítónyomaték veszi igénybe.

4.4.10 ábra



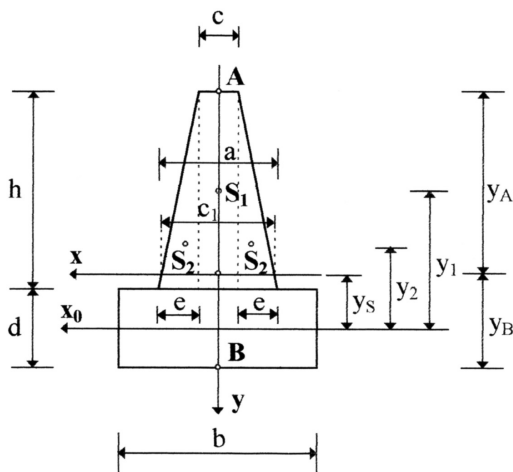
Adatok: $Q_y = 200 \text{ kN}$, $M_x = 20 \text{ kNm}$,
 $h = 24 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$,
 $c = 5 \text{ cm}$, $b = 25 \text{ cm}$,
 $a = 15 \text{ cm}$

Feladat: 1. Határozzuk meg a vázolt keresztmetszet súlypontját és másodrendű nyomatékát az x tengelyre!
2. Számítsuk ki a hajlításból adódó legnagyobb húzó- és nyomófeszültséget, rajzoljuk meg a feszültségeloszlást!
3. Határozzuk meg a legnagyobb nyírófeszültség helyét és nagyságát!

Megoldás:

1. A keresztmetszet geometriai adatait a 4.4.11 ábra alapján írhatjuk fel.

4.4.11 ábra



$$y_1 = -\left(\frac{h}{2} + \frac{d}{2}\right) = -\left(\frac{24}{2} + \frac{10}{2}\right) = -17,0 \text{ cm},$$

$$y_2 = -\left(\frac{h}{3} + \frac{d}{2}\right) = -\left(\frac{24}{3} + \frac{10}{2}\right) = -13,0 \text{ cm},$$

$$y_3 = 0, \\ e = 5 \text{ cm},$$

$$A_1 = c \cdot h = 5 \cdot 24 = 120 \text{ cm}^2,$$

$$A_2 = 2 \cdot e \cdot \frac{h}{2} = e \cdot h = 5 \cdot 24 = 120 \text{ cm}^2,$$

$$A_3 = b \cdot d = 25 \cdot 10 = 250 \text{ cm}^2.$$

Az előző adatok felhasználásával a súlyponti távolság az x_0 tengelytől:

$$y_S = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{-17 \cdot 120 - 13 \cdot 120}{120 + 120 + 250} = -7,35 \text{ cm}$$

A keresztmetszet x tengelyre számított másodrendű nyomatéka:

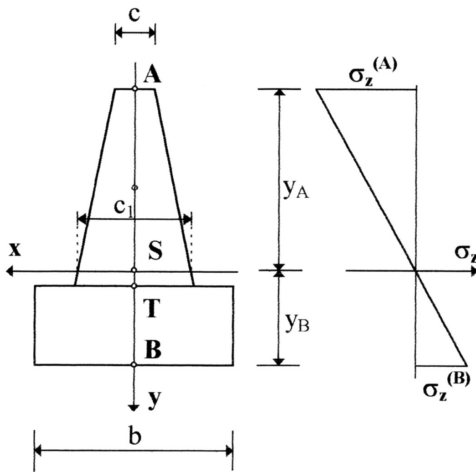
$$I_{x1} = \frac{c \cdot h^3}{12} = \frac{5 \cdot 24^3}{12} = 5760 \text{ cm}^4,$$

$$I_{x2} = 2 \cdot \frac{e \cdot h^3}{36} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 24^3}{36} = 3840 \text{ cm}^4,$$

$$I_{x3} = \frac{b \cdot d^3}{12} = \frac{25 \cdot 10^3}{12} = 2083,3 \text{ cm}^4.$$

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x1} + (y_1 - y_s)^2 \cdot A_1 + I_{x2} + (y_2 - y_s)^2 \cdot A_2 + I_{x3} + (y_3 - y_s)^2 \cdot A_3 = \\ &= 5760 + (-17 + 7,35)^2 \cdot 120 + 3840 + (-13 + 7,35)^2 \cdot 120 + 2083,3 + (0 + 7,35)^2 \cdot 250 \\ I_x &= 40194 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

4.4.12 ábra



2. A hajlításból származó feszültség a felső szélső szálban:

$$\sigma_{\max}^{(-)} = \sigma_z^{(A)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A,$$

$$\sigma_{\max}^{(-)} = \frac{2000}{40194} \cdot (-21,65) = -1,077 \text{ kN / cm}^2.$$

A legnagyobb húzófeszültség:

$$\sigma_{\max}^{(+)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B$$

$$\sigma_{\max}^{(+)} = \frac{2000}{40194} \cdot 12,35 = 0,615 \text{ kN / cm}^2$$

A feszültségeloszlás a 4.4.12 ábrán látható.

3. A nyírófeszültség meghatározása a súlyponti szálban (S) és a T pontban.

$$S_x^{(S)} = \frac{c \cdot y_A^2}{2} + \frac{(c_1 - c) \cdot y_A^2}{6} = \frac{5 \cdot 21,65^2}{2} + \frac{(14,02 - 5) \cdot 21,65^2}{6} = 1876,5 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xy}^{(S)} = \frac{Q_y \cdot S_x^{(S)}}{I_x \cdot c_1} = \frac{200 \cdot 1876,5}{40194 \cdot 14,02} = 0,67 \text{ kN / cm}^2,$$

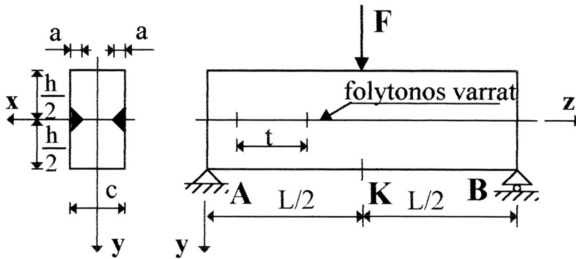
$$S_x^{(T)} = b \cdot d \cdot \left(y_B - \frac{d}{2} \right) = 25 \cdot 10 \cdot \left(12,35 - \frac{10}{2} \right) = 1837,5 \text{ cm}^3,$$

$$\tau_{xy}^{(T)} = \frac{Q_y \cdot S_x^{(T)}}{I_x \cdot a} = \frac{200 \cdot 1837,5}{40194 \cdot 15} = 0,61 \text{ kN / cm}^2.$$

4.4.1-8 Feladat

A 4.4.13 ábrán vázolt kéttámaszú tartó keresztmetszetét két téglalapból hegesztették össze.

4.4.13 ábra



Adatok: $c = 3 \text{ cm}$,
 $h = 8 \text{ cm}$,
 $L = 0,3 \text{ m}$,
 $F = 85 \text{ kN}$,
 $\tau_{vm} = 14 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Mekkora legyen a varrat gyökvastagsága (a), hogy a nyírófolyamatot át tudja vinni?

Megoldás:

A fajlagos csúsztatóerő, vagy nyírófolyam az y normálisú síkon:

$$q_h = Q \cdot \frac{S_x}{I_x}$$

A 4.4.13 ábrán bejelölt t hosszirányú szakaszra jutó csúsztatóerő:

$$H = q_h \cdot t = \frac{Q \cdot S_x}{I_x} \cdot t$$

mivel a nyíróerő abszolút értéke a tartón állandó:

$$|Q| = \frac{F}{2}$$

A varrat akkor tudja felvenni a vízszintes csúsztatóerőt, ha

$$\tau_v = \frac{H}{2 \cdot a \cdot t} \leq \tau_{vm}.$$

Innen

$$a \geq \frac{H}{2 \cdot t \cdot \tau_{vm}} = \frac{Q \cdot S_x \cdot t}{I_x \cdot 2 \cdot t \cdot \tau_{vm}} = \frac{Q \cdot S_x}{I_x \cdot 2 \cdot \tau_{vm}}$$

ahol:

$$I_x = \frac{c \cdot h^3}{12} = \frac{3 \cdot 8^3}{12} = 128 \text{ cm}^4,$$

a félkeresztmetszet statikai nyomatéka:

$$S_x = c \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = c \cdot \frac{h^2}{8} = 3 \cdot \frac{8^2}{8} = 24 \text{ cm}^3$$

Ezek után

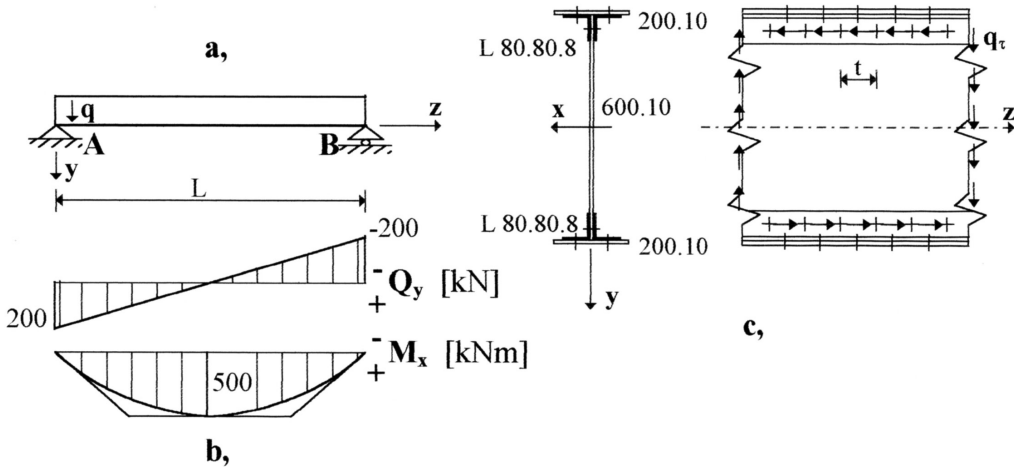
$$a \geq \frac{42,5 \cdot 24}{2 \cdot 128 \cdot 14} = 0,28 \text{ cm}.$$

Tehát a szükséges gyökvastagság: $a = 3 \text{ mm}$.

4.4.1-9 Feladat

A 4.4.14 a, ábrán egy megoszló teherrel terhelt kéttámaszú szegecselt I tartót látunk.

4.4.14 ábra



Adatok: $L = 10 \text{ m}$, $q = 40 \text{ kN/m}$, $\tau_m = 12 \text{ kN/cm}^2$, $e = 2,26 \text{ cm}$,
 $d_{sz} = 13 \text{ mm}$, $A_L = 12,3 \text{ cm}^2$, $I_L = 72,3 \text{ cm}^4$.

Feladat: Határozzuk meg az övszegecsék megengedhető maximális távolságát!

Megoldás:

A 4.4.14 b, ábrán megrajoltuk a tartó igénybevételi ábráit, a c, ábrán a tartó keresztmetszetét és oldalnézetének egy részletét. Az oldalnézeten berajoltuk a τ feszültségek középvonalra redukált eredőjét, a q_τ nyírófolyamatot, melynek nagysága:

$$q_\tau = \frac{Q_y \cdot S_{x\bar{o}v}}{I_x}$$

Az egy kötőelemre jutó vízszintes erő: $H_\tau = q_\tau \cdot t$,
 melyre fenn kell álljon az alábbi egyenlőtlenség:

$$H_\tau \leq F_m = 2 \cdot \frac{d_{sz}^2 \cdot \pi}{4} \cdot \tau_m$$

A fenti képletek egybevetéséből $\frac{Q_y \cdot S_{x\bar{o}v}}{I_x} \cdot t \leq \frac{d_{sz}^2 \cdot \pi}{2} \cdot \tau_m$

Kifejezve t értékét:

$$t \leq \frac{d_{sz}^2 \cdot \pi}{2} \cdot \tau_m \cdot \frac{I_x}{Q_y \cdot S_{x\bar{o}v}}$$

Határozzuk meg előbb I_x és $S_{x\bar{o}v}$ értékét!

$$I_x = \frac{1 \cdot 60^3}{12} + 2 \cdot 20 \cdot 1 \cdot 30,5^2 + 4 \cdot \left[72,3 + 12,3 \cdot 27,74^2 \right] = 93359 \text{ cm}^4$$

$$S_{\bar{y}} = 20 \cdot 1 \cdot 30,5 + 2 \cdot 12,3 \cdot 27,74 = 1292,4 \text{ cm}^3.$$

Behelyettesítve t képletébe:

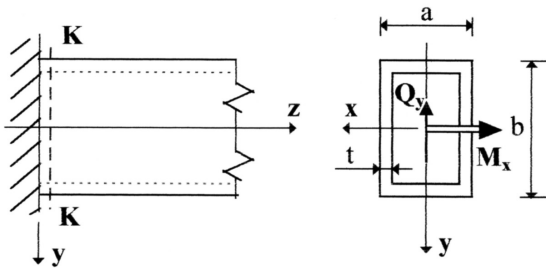
$$t_{\max 1} = \frac{1,3^2 \cdot \pi}{2} \cdot 12 \cdot \frac{93359}{200 \cdot 1292,4} = 11,5 \text{ cm} = 115 \text{ mm}$$

A szegecskék maximális távolságára kapott $t_{\max 1}$ érték a támaszok környezetében alkalmazandó, természetesen a tartó közepe felé haladva a távolság a nyíróerő csökkenése mértékének megfelelően növelhető.

4.4.1-10 Feladat

Egy műanyag szerkezeti elem valamely **K** keresztmetszetében hajlító és nyíró igénybevétel lép föl (4.4.15 ábra). A rúd zárt téglalap keresztmetszetű.

4.4.15 ábra



Adatok: szelvény: $a = 40 \text{ mm}$,
 $b = 60 \text{ mm}$,
 $t = 5 \text{ mm}$,
 nyíróerő: $Q_y = 960 \text{ N}$.

Feladat: Határozzuk meg a nyírásból származó feszültségek eloszlását és maximális értékét.

1. Zsuravszkij-formulával,
2. közelítő számítással!

(A megoldás során feltételezzük, hogy az adott feszültségtartományban az anyag lineárisan rugalmas viselkedésű.)

Megoldás:

1. A hajlításból származó σ_z feszültségeken (4.4.16 a, ábra) kívül a Q_y nyíróerőből τ_{zy} csúsztató feszültségek lépnek föl a Q_y irányában (b, ábra). Ezek

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot c}$$

összefüggés szerinti számításakor c értéke hirtelen változik, a P_1 pontban még $c_1 = a$, míg attól lentebb $c_2 = 2 \cdot t$ (lásd ábra).

Másrészt:

$$S_x(P_1) = a \cdot t \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{t}{2} \right) = 40 \cdot 5 \cdot 27,5 = 5500 \text{ mm}^3, \text{ illetve}$$

$$S_x(P_2) = S_x(P_1) + 2 \cdot \left(\frac{b}{2} - t \right) \cdot t \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} - t \right) = 5500 + (30 - 5)^2 \cdot 5 = 8625 \text{ mm}^3$$

Az inercianyomaték a hajlítás tengelyére:

$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12} - \frac{(a - 2 \cdot t) \cdot (b - 2 \cdot t)^3}{12} = \frac{40 \cdot 60^3}{12} - \frac{30 \cdot 50^3}{12} = 4,075 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

Ezekkel a P_1 ill. P_2 pontbeli csúsztató feszültségek:

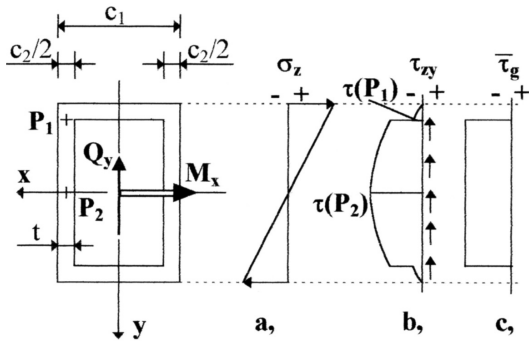
$$\tau_{zy}^{(P_1)} = \frac{960 \cdot 5500}{4,075 \cdot 10^5 \cdot 40} = 0,324 \text{ N / mm}^2$$

$$\tau_{zy}^{(P_2)} = \frac{960 \cdot 8625}{4,075 \cdot 10^5 \cdot 10} = 2,03 \text{ N / mm}^2.$$

A fenti számításainkban a szelvény övrészében fellépő τ_{zy} feszültség meghatározásától eltekintettünk.

b, A 4.4.16 ábra feszültségeloszlásából látható, hogy a nyíróerő döntő részét a két gerincrész veszi föl. Ez indokolja annak a gyakori közelítésnek a jogosságát, amely szerint az övek nyírási teherviselésétől eltekinthetünk és egyidejűleg a gerinc(ek) mentén egyenletes feszültségeloszlást tételezünk föl (c. ábra).

4.4.16 ábra



Az így adódó átlagfeszültség

$$\tau_g = \frac{Q_y}{2 \cdot A_g} = \frac{960}{2 \cdot 50 \cdot 5} = 1,92 \text{ N / mm}^2$$

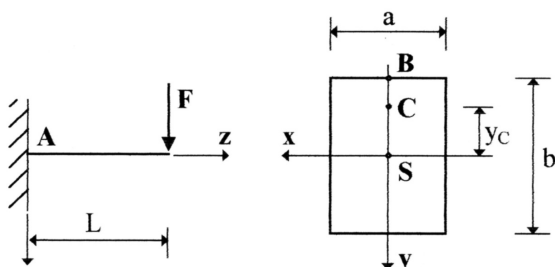
Láthatóan ez az érték kisebb – de mindössze 5,4%-kal – a Zsuravszkij-formulával számított $\tau_{zy}^{(P_2)}$ maximális feszültségnél, így a közelítés (ha csupán a nyírásra végezzük) a biztonság kárára történt.

C.4.4.1 GYAKORLÓ FELADATOK

4.4.1-11 Feladat

A 4.4.17 ábrán látható egyik végén befogott állandó keresztmetszetű rövid rudat a szabad végén F erő terheli.

4.4.17 ábra



Adatok: $L = 30 \text{ mm}$,
 $F = 50 \text{ kN}$,
 $a = 30 \text{ mm}$,
 $b = 50 \text{ mm}$,
 $y_C = 15 \text{ mm}$.

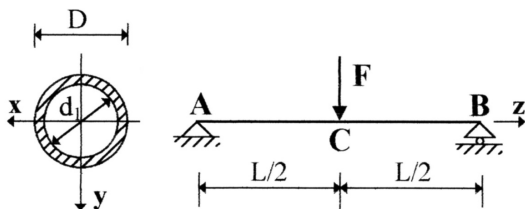
- Feladat: 1. Rajzolja meg a feszültségelosztási ábrákat a befogási keresztmetszet mentén!
 2. Számítsa ki a befogási keresztmetszet B, C és S pontjaiban ébredő feszültségeket!

Eredmények:	$\sigma_z^{(B)} = 120 \text{ MPa}$, $\tau_{zy}^{(B)} = 0$,	$\sigma_z^{(C)} = 72 \text{ MPa}$, $\tau_{zy}^{(C)} = 32 \text{ MPa}$,	$\sigma_z^{(S)} = 0$, $\tau_{zy}^{(S)} = 50 \text{ MPa}$.
-------------	---	---	--

4.4.1-12 Feladat

A 4.4.18 ábrán végig állandó keresztmetszetű közepén terhelt körgyűrű keresztmetszetű rövid kéttámaszú tartó látható.

4.4.18 ábra



Adatok: $L = 150 \text{ mm}$,
 $d = 46 \text{ mm}$,
 $D = 50 \text{ mm}$,
 $F = 15 \text{ kN}$.

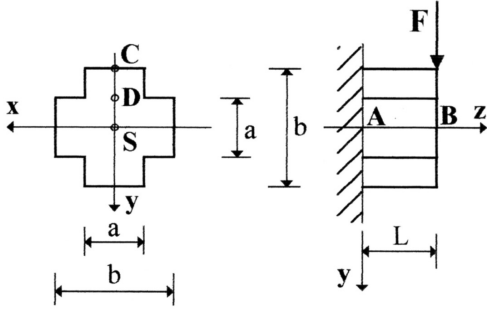
Feladat: Határozza meg a C keresztmetszetben ébredő legnagyobb hajlítófeszültséget, valamint a legnagyobb nyírófeszültséget!

Eredmények:	$\sigma_{z \max} = 161,6 \text{ MPa}$,	$\tau_{zy \max} = 49,8 \text{ MPa}$.
-------------	---	---------------------------------------

4.4.1-13 Feladat

A 4.4.19 ábrán vázolt állandó keresztmetszetű tartón F erő működik.

4.4.19 ábra



Adatok: $a = 1 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$,
 $L = 1,5 \text{ cm}$, $F = 10 \text{ kN}$, 20 kN/cm^2 ,
 $R_{\text{adm}} = 20 \text{ kN/cm}^2$.

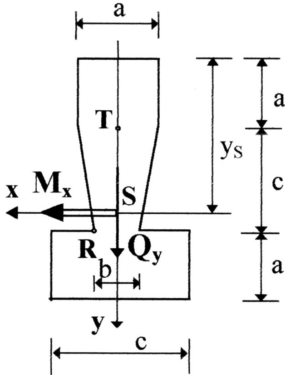
Feladat: 1. Rajzolja meg a befogási keresztmetszetben (A) ébredő feszültségek eloszlását!
 2. Mekkora feszültségek ébrednek az A keresztmetszet C, D és S pontjaiban?
 3. Ellenőrizze a tartót!

Eredmények:	$\sigma_z^{(C)} = 20 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_{zy}^{(D)} = 5 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_z^{(C)} = 20 \text{ kN/cm}^2 = R_{\text{adm}}$, megfelel.	$\tau_{zy}^{(C)} = 0$, $\sigma_z^{(S)} = 0$,	$\sigma_z^{(D)} = 10 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_{zy}^{(S)} = 4,17 \text{ kN/cm}^2$,
--------------------	--	---	---

4.4.1-14 Feladat

A 4.4.20 ábrán vázolt keresztmetszetet Q_y nyíróerő és M_x hajlítónyomaték terheli.

4.4.20 ábra



Adatok: $M_x = 50 \text{ kNm}$,
 $Q_y = 150 \text{ kN}$,
 $a = 10 \text{ cm}$,
 $b = 5 \text{ cm}$,
 $c = 20 \text{ cm}$.

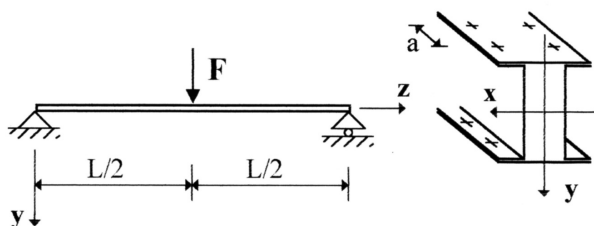
Feladat: 1. Határozza meg a vázolt keresztmetszet súlypontját és másodrendű nyomatékát az x tengelyre!
 2. Számítsa ki a hajlításból származó maximális pozitív és negatív feszültséget!
 3. Határozza meg a nyírófeszültséget az R, S pontokban és a redukált feszültséget a T pontban a fajlagos alaktorzulási munkaelmélet alapján!

Eredmények:	$y_s = 22,96 \text{ cm}$, $I_x = 71054 \text{ cm}^4$, $\sigma_{\text{eqv}}^{(T)} = 1,12 \text{ kN/cm}^2$.	$\sigma_{\text{max}}^{(+)} = 1,2 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{\text{max}}^{(-)} = -1,62 \text{ kN/cm}^2$,	$\tau_{zy}^{(R)} = 0,42 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_{zy}^{(S)} = 0,795 \text{ kN/cm}^2$.
--------------------	--	--	---

4.4.1-15 Feladat

A 4.4.21 ábrán egy csavarozott összetett keresztmetszetű hajlított, nyírt tartót ábrázoltunk.

4.4.21 ábra



Adatok: $F = 50 \text{ kN}$,
 $L = 7,0 \text{ m}$,
 $d = 10 \text{ mm}$
 $R_{qadm} = \text{ kN/cm}^2$,
 $R_{adm} = 18 \text{ kN/cm}^2$.
gerinc: 2xÜ 200.100.5,
övek: 300.5.

Feladat: 1. Ellenőrizze a tartót hajlításra!

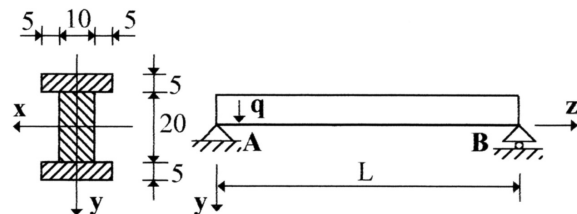
2. Tervezze meg az összetett keresztmetszet csavarkiosztását! ($a = ?$)

Eredmények:	Ellenőrzés:	$\sigma_{max} = 16,64 \text{ kN/cm}^2 < R_{adm} = 18 \text{ kN/cm}^2$.
	Maximális csavartávolság:	$a_{max} = 124 \text{ mm}$.

4.4.1-16 Feladat

A 4.4.22 ábrán látható ragasztott fagerendára q intenzitású megoszló teher hat, a ragasztóra megengedett nyírófeszültség R_{qadm} .

4.4.22 ábra



Adatok: $L = 6,5 \text{ m}$,
 $q = 6,8 \text{ kN/m}$,
 $R_{qadm} = 1,5 \text{ MPa}$.

Feladat: Ellenőrizze a ragasztást nyírásra!

Méretetek cm-ben adottak.

Eredmények:	$\tau_r = 0,72 \text{ MPa} < R_{qadm} = 1,5 \text{ MPa}$, a ragasztás megfelel.
-------------	--

4.4.1-17 Feladat

Egy szerkezeti elem vékonyfalú, I szelvényű keresztmetszetére az övekkel párhuzamos Q_x nyíróerő hat.

Adatok: $Q = 120 \text{ kN}$, szelvény: övek: 300.16, gerinc: 600.10.

Feladat: Határozza meg a Q_x nyíróerőből származó feszültségek maximális értékét!

Eredmény:	$\tau_{zx max} = 1,875 \text{ kN/cm}^2$.
-----------	---

4.4.1-18 Feladat

Egy alumínium szerkezeti elem valamely **K** keresztmetszetében nyíró igénybevétel lép föl. A rúd keresztmetszete zárt téglalap. A nyíróerő a hosszabbik oldallal párhuzamos.

Adatok: szelvény: $a = 20 \text{ mm}$, nyíróerő: $Q_y = 1400 \text{ N}$,
 $b = 30 \text{ mm}$,
 $t = 4 \text{ mm}$.

Feladat: Határozza meg a nyírásból származó feszültséget
a, maximális értékét Zsuravszkij-formulával,
b, közelítő átlagértékét a dolgozó gerinc feltételezésével!

Eredmények:	$\tau_{\max} = 7,76 \text{ N/mm}^2$.	$\bar{\tau} = 7,95 \text{ N/mm}^2$.
-------------	---------------------------------------	--------------------------------------

4.4.2 NORMÁLÉRŐVEL EGYIDEJŰ CSAVARÁS

A.4.4.2 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Kör keresztmetszetek egyidejű húzása (nyomása) és csavarása esetén a veszélyes pontok a kör keresztmetszet kerületi pontjaiban vannak. Változó normál- és csavaróigénybevételi ábra esetén a vizsgálatot ki kell terjeszteni a legnagyobb normál- és egyidejű csavarónyomaték, illetve a legnagyobb csavarónyomaték és egyidejű normál- és csavarónyomaték keresztmetszetére is.

A szilárdsági ellenőrzés az egyenértékű feszültség kimutatásából áll, vagyis fenn kell álljon:

$$\sigma_{\text{eqv}} = \sqrt{\sigma_N^2 + \beta \cdot \tau_T^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + \beta \cdot \left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \leq R_{\text{adm}}.$$

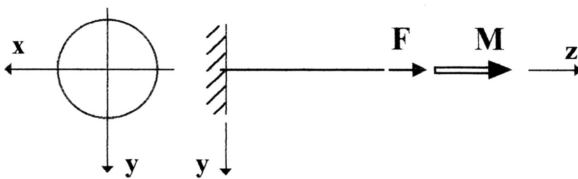
ahol: N a normál-igénybevétel,
 T a csavaróigénybevétel,
 A a keresztmetszet területe,
 W_p a keresztmetszet poláris keresztmetszeti tényezője,
 β az alkalmazott méretezéselmélettől függő tényező ($\beta = 3$, vagy $\beta = 4$).

B.4.4.2 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.4.2-1 Feladat

A 4.4.23 ábrán látható konzolt az F erő és az M nyomatékú erőpár terheli.

4.23 ábra



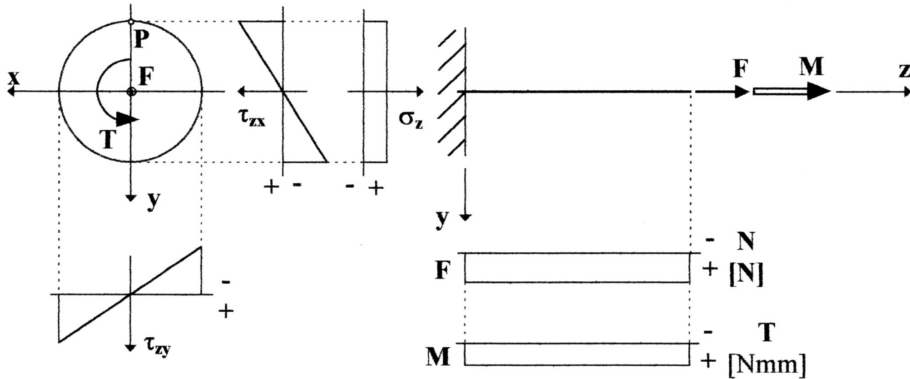
Adatok: $F = 10^5 \text{ N}$,
 $d = 50 \text{ mm}$
 $R_{\text{adm}} = 140 \text{ MPa}$.

Feladat: Legfeljebb mekkora nyomatékkal terhelhető a tartó a HMH-elmélet alapján?

Megoldás:

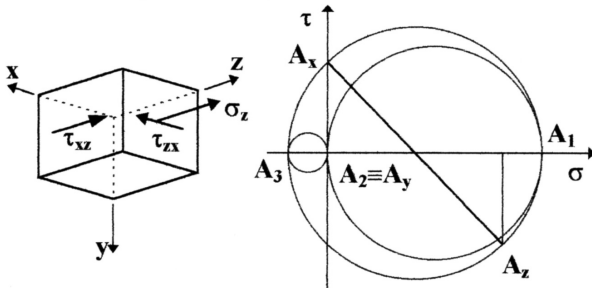
A 4.4.24 ábrán megrajzott igénybevételi ábrákból látható, hogy a konzol minden keresztmetszetének igénybevétele megegyezik.

4.4.24 ábra



Ugyanezen ábrán tüntettük fel a keresztmetszetek mentén a feszültségeloszlásokat is, amelyekből megállapítható, hogy a keresztmetszetek kerületi pontjaiban ébred maximális feszültség. Ábrázoljuk a **P** pontbeli feszültségállapotot az elemi hasábon és Mohr-diagramon! (4.4.25 ábra).

4.4.25 ábra



P pontban tehát olyan többtengelyű feszültségállapot van, hogy

$$\sigma_2 = 0,$$

ezért a HMM-féle egyenértékű feszültség

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3 \cdot \tau_{max}^2}$$

összefüggéssel számítható.

A rúd szilárdságilag megfelel, ha

$$\sigma_{eqv} \leq R_{adm}.$$

A normálerőből számítható a

$$\sigma_z = \frac{F}{A},$$

a pedig a csavarásból, a

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p},$$

összefüggéssel.

$$\sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \leq R_{adm}$$

Behelyettesítve a

egyenlőtlenséget kapjuk.

Rendezve:

$$T \leq \sqrt{\left[R_{adm}^2 - \left(\frac{F}{A}\right)^2\right] \cdot \frac{W_p^2}{3}},$$

ahol:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{50^2 \cdot \pi}{4} = 1963 \text{ mm}^2 \text{ és } W_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16} = \frac{50^3 \cdot \pi}{16} = 24544 \text{ mm}^3$$

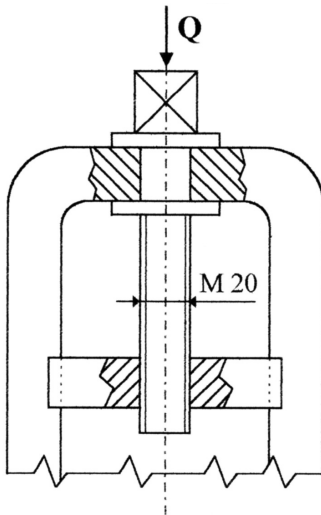
$$\text{Így} \quad T \leq \sqrt{\left[140^2 - \left(\frac{10^5}{1963} \right)^2 \right] \cdot \frac{24544^2}{3}} = 1,85 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 1,85 \text{ kNm}$$

Tehát a konzol az F erő mellett még maximum **1,85 kNm** nagyságú nyomatékkal terhelhető.

4.4.2-2 Feladat

A 4.4.26 ábrán vázolt egyszerű emelőorsóval Q terhet emelünk.

4.4.26 ábra



Adatok: $\mu = 0,14$,
 $m = 2,5 \text{ mm}$,
 $d_2 = 18,38 \text{ mm}$,
 $d_3 = 16,93 \text{ mm}$,
 $\sigma_m = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Határozzuk meg az emelhető Q terhelhetőségét!

Megoldás: A mozgatóorsó igénybevétele nyomással egyidejű csavarás, illetve karcsú mozgatóorsó esetén kihajlás. (Ezen utóbbi kérdést e feladatban nem vizsgáljuk.) Az emelőorsó forgatásához szükséges csavarónyomaték:

$$T = Q \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \operatorname{tg}(\alpha \pm \rho) = Q \cdot C$$

ahol d_2 = közepes átmérő,
 α = menetemelkedési szög,
 ρ = súrlódási szög.

A kiinduló adatokból számíthatóan:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{m}{d_2 \cdot \pi} = \operatorname{arctg} \frac{2,5}{18,38 \cdot \pi} = 2,48^\circ,$$

$$\rho = \operatorname{arctg} \mu = \operatorname{arctg} 0,14 = 7,97^\circ,$$

$$C = \frac{d_2}{2} \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho) = \frac{1,838}{2} \cdot \operatorname{tg}(2,48^\circ + 7,97^\circ) = 0,17 \text{ cm}.$$

A csavarorsó keresztmetszete:

$$A_3 = \frac{d_3^2 \cdot \pi}{4} = \frac{1,693^2 \cdot \pi}{4} = 2,25 \text{ cm}^2$$

csavarási keresztmetszeti tényezője:

$$W_p = \frac{d_3^2 \cdot \pi}{16} = \frac{1,693^2 \cdot \pi}{16} = 0,95 \text{ cm}^3$$

Az egyenértékű feszültségre felírható korlátozás:

$$\sigma_{\text{eqv}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A_3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{Q}{A_3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{Q \cdot C}{W_p}\right)^2} \leq \sigma_m$$

amiből a teher emelésekor megengedett erő

$$Q_m = \frac{\sigma_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{A_3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{C}{W_p}\right)^2}} = \frac{16}{\sqrt{\left(\frac{1}{2,25}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{0,17}{0,95}\right)^2}} = 29,5 \text{ kN}$$

Megjegyzés: A szilárdsági vizsgálat során még ellenőrizendő a meneteken fellépő felületi nyomás is, ezt ezen feladatban a kihajlásvizsgálattal együtt ugyancsak nem végezzük el.

C.4.4.2 GYAKORLÓ FELADAT

4.4.2-3 Feladat

Ellenőrizze a 4.4.23 ábrán vázolt húzott-csavart rudat szilárdságilag Mohr elmélete szerint!

Adatok: $F = 150 \text{ kN}$, $T = M = 4 \text{ kNm}$, $d = 60 \text{ mm}$, $R_{\text{adm}} = 180 \text{ MPa}$.

Eredmények:	$\sigma_{\text{eqv}} = 195,9 \text{ MPa} > R_{\text{adm}} = 180 \text{ MPa}$, nem felel meg.	Szükséges tengelyátmérő: $d_{\text{sz}} = 62 \text{ mm}$.
-------------	--	---

4.4.3 HAJLÍTÁSSAL EGYIDEJŰ CSAVARÁS

A.4.4.3 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Hajlítással egyidejű csavarás lép fel például a hajtóművek tengelyeinél, vagy emelőgépek egyes alkatrészeinél. Kör keresztmetszetű rudak egyidejű hajlításra és csavarásra történő szilárdsági vizsgálatát általában a legnagyobb hajlítói igénybevétel, illetve a legnagyobb csavarói igénybevétel keresztmetszeteiben kell elvégezni. Változó keresztmetszetű rudaknál tekintettel kell lenni további keresztmetszetekre is, ahol a szilárdsági vizsgálat szükségessé válhat.

A szilárdsági ellenőrzés az egyenértékű feszültség méretezési feszültséggel történő összehasonlításból áll, vagyis:

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma_M^2 + \beta \cdot \tau_T^2} = \sqrt{\left(\frac{M_h}{W}\right)^2 + \beta \cdot \left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_h}{W}\right)^2 + \beta \cdot \left(\frac{T}{2 \cdot W}\right)^2}$$

$$\sigma_{eqv} = \frac{\sqrt{M_h^2 + \frac{\beta}{4} \cdot T^2}}{W} = \frac{M_{red}}{W} \leq R_{adm}.$$

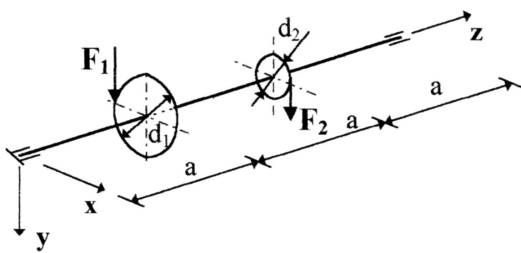
ahol: M_h a hajlítói igénybevétel,
 T a csavarói igénybevétel,
 W a keresztmetszeti tényező a hajlítás tengelyére,
 W_p a keresztmetszet poláris keresztmetszeti tényezője,
 β az alkalmazott méretezéselmélettől függő tényező ($\beta = 3$, vagy $\beta = 4$).
 M_{red} a redukált nyomaték (a hajlítónyomatékokra redukált csavarónyomaték és hajlítónyomaték „eredője”).

B.4.4.3 KIDOLGOZOTT FELADATOK

4.4.3-1 Feladat

Egy hajtómű valamely tengelyére ható erők láthatók a 4.4.27 ábrán.

4.4.27 ábra



Adatok: $F_1 = 1,2 \text{ kN}$,
 $F_2 = 2,4 \text{ kN}$,
 $d_1 = 280 \text{ mm}$,
 $d_2 = 140 \text{ mm}$,
 $a = 120 \text{ mm}$,
 $R_{adm} = 140 \text{ MPa}$.

Feladat: Méretezzük a prizmatikus, kör keresztmetszetű tengelyt!

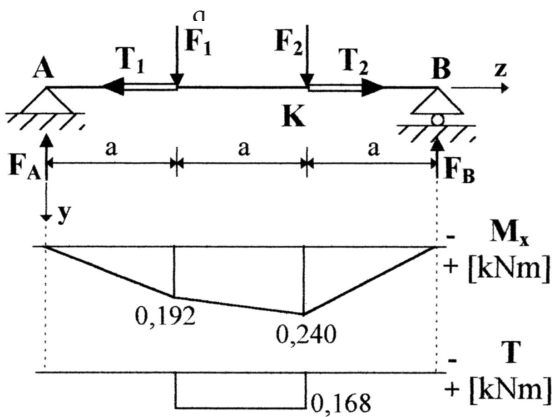
Megoldás:

A támasztóerők értékei: $F_A = 1,6 \text{ kN}$, $F_B = 2,0 \text{ kN}$, az igénybevételek a 4.4.28 ábrán láthatóak (a nyírásból származó feszültségeket elhanyagoljuk).

A hajlító igénybevételén kívül $T = T_1 = T_2 = F_1 \cdot \frac{d_1}{2} = 1,2 \cdot 0,14 = 0,168 \text{ kNm}$

értékű csavarónyomaték is föllép.

4.4.28 ábra



A tengely veszélyes keresztmetszete az F_2 erő támadáspontjától kissé balra lévő K keresztmetszet. Ennek veszélyes pontjában, az alsó (vagy felső) szélső pontban ébredő feszültségekre szabott feltétel:ű

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{M_{\text{red}}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_h^2 + \frac{\beta}{4} \cdot T^2}}{W_x} \leq R_{\text{adm}}$$

A HMMH-elmélet szerint $\beta = 3$ értékkel számolva, a szükséges keresztmetszeti tényező:

$$W_x \geq \frac{\sqrt{M_h^2 + \frac{\beta}{4} \cdot T^2}}{R_{\text{adm}}} = \frac{\sqrt{0,240^2 + \frac{3}{4} \cdot 0,168^2 \cdot 10^6}}{140} = 2005 \text{ mm}^3$$

amelyből $W_x = \frac{D^3 \cdot \pi}{32}$ összefüggés felhasználásával a szükséges átmérő:

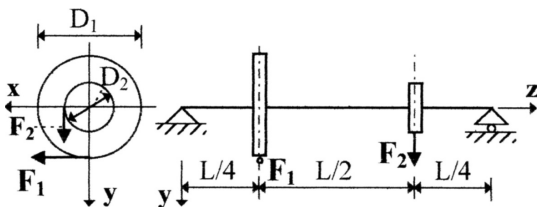
$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot 2005} = 27,3 \text{ mm}$$

Választott átmérő: $D = 30 \text{ mm}$.

4.4.3-2 Feladat

A 4.4.29 ábrán látható d átmérőjű tengelyre két tárcsa van felékelve. Ezen tárcsák kerületén F_1 , illetve F_2 erők hatnak.

4.4.29 ábra



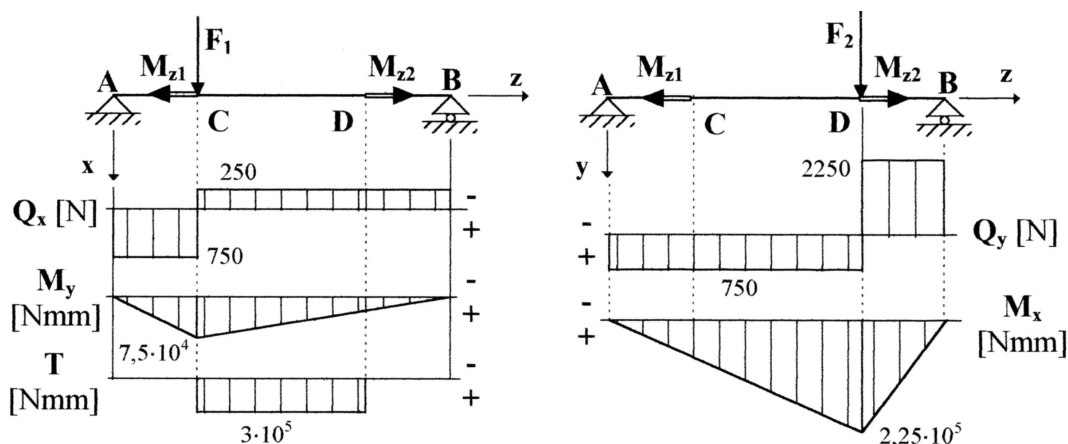
Adatok: $L = 400 \text{ mm}$,
 $D_1 = 600 \text{ mm}$,
 $D_2 = 200 \text{ mm}$,
 $F_1 = 103 \text{ N}$,
 $F_2 = 3 \cdot 10^3 \text{ N}$,
 $R_{\text{adm}} = 160 \text{ MPa}$.

Feladat: Végezzük el a tengely szilárdsági méretezését Mohr elmélete alapján!

Megoldás:

A méretezéshez először rajzoljuk meg a tengely igénybevételi ábráit (4.4.30 ábra).

4.4.30 ábra



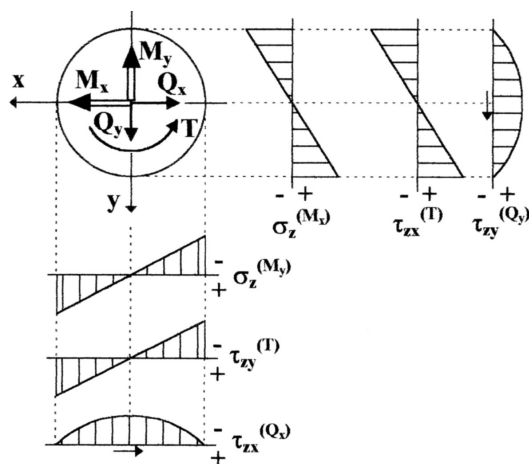
$$M_{z1} = M_{z2} = F_2 \cdot \frac{D_2}{2} = 3 \cdot 10^3 \cdot \frac{200}{2} = 3 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

Az igénybevételi ábrákból jól látható, hogy a tengely legnagyobb igénybevételű keresztmetszete a D jelű keresztmetszet. Egyidejű igénybevételei:

$$\begin{aligned} Q_x &= 250 \text{ N}, & M_y &= 2,5 \cdot 10^4 \text{ Nmm}, \\ Q_y &= 750 \text{ N}, & T &= 3 \cdot 10^5 \text{ Nmm}, \\ M_x &= 2,25 \cdot 10^5 \text{ Nmm}, \end{aligned}$$

Most rajzoljuk meg a keresztmetszet mentén az igénybevételekből keletkező feszültségek eloszlási ábráit (4.4.31 ábra).

4.4.31 ábra



Ha a nyíróigénybevételből keletkező feszültségeket elhanyagoljuk, akkor a legnagyobb σ_{eqv} – egyenértékű feszültséget – a keresztmetszet valamely kerületi pontjában (-iban) találjuk. Mivel csavarásból a kerület minden pontjában ugyanakkora (maximális) τ feszültség ébred, így azt a két kerületi pontot kell megkeresnünk, ahol a kétirányú hajlításból a legnagyobb a feszültség ébred.

A kör keresztmetszet valamennyi súlyponti tengelye főtengely, ezért számolhatunk a két hajlítónyomatek eredőjével.

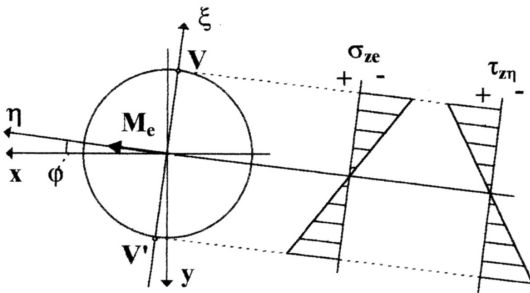
$$\mathbf{M}_e = \sqrt{\mathbf{M}_x^2 + \mathbf{M}_y^2} = \sqrt{22,5^2 + 2,5^2 \cdot 10^4} = 2,264 \cdot 10^5 \text{ Nmm},$$

amelynek az x tengellyel bezárt szöge:

$$\varphi = \arctg \frac{\mathbf{M}_y}{\mathbf{M}_x} = \arctg \frac{2,5 \cdot 10^4}{22,5 \cdot 10^4} = 6,34^\circ, \text{ a 4.4.32 ábrán látható.}$$

Rajzoljuk meg az $\mathbf{M}_e$ -ből ébredő σ_z feszültség és a T csavarónyomatékból származó $\tau_{z\eta}$ feszültség eloszlási ábráját!

4.4.32 ábra



A keresztmetszet veszélyes pontjai V és V' . A feszültségi állapotot ezen pontokban meghatározó feszültség-összetevők $\sigma_{\max}$ és $\tau_{\max}$.

Tehát a feszültségi állapot többtengelyű. Ezen feszültségi állapottal egyenértékű feszültség Mohr szerint:

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma_{zc \max}^2 + 4 \cdot \tau_{z\eta \max}^2},$$

ahol:

$$\sigma_{zc \max} = \frac{\mathbf{M}_e}{W}, \quad \tau_{z\eta \max} = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2 \cdot W}.$$

Így

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{\mathbf{M}_e^2}{W^2} + 4 \cdot \frac{T^2}{(2 \cdot W)^2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{M}_e^2 + T^2}}{W}.$$

A tengely szilárdságilag megfelel, ha $\sigma_{eqv} \leq R_{adm}$.

Tehát

$$W \geq \frac{\sqrt{\mathbf{M}_e^2 + T^2}}{R_{adm}} = \frac{\sqrt{(2,264 \cdot 10^5)^2 + (3 \cdot 10^5)^2}}{1,6 \cdot 10^2} = 2,35 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Mivel kör keresztmetszetnél

$$W = \frac{d^3 \cdot \pi}{32},$$

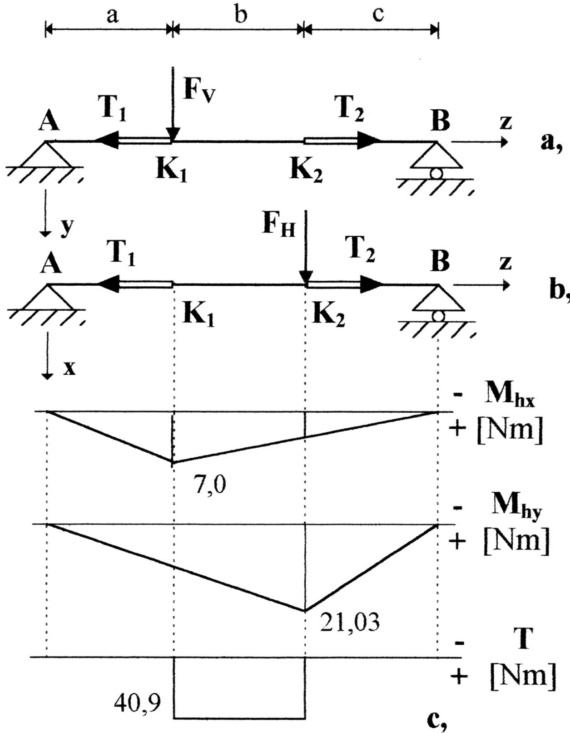
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2,35 \cdot 10^3}{\pi}} = 29 \text{ mm}.$$

Legyen a választott átmérő $d = 30 \text{ mm}$.

4.4.3-3 Feladat

A 4.4.33 ábrán vázolt fogaskerék-hajtómű-tengely n percnkénti fordulatszám mellett P teljesítményt visz át. A kapcsolódó fogaskerékről átadódó erők a vertikális F_V és a horizontális F_H (b. ábra).

4.4.33 ábra



Adatok: $P = 6 \text{ kW}$,
 $n = 1400/\text{min}$,
 $a = 28 \text{ mm}$,
 $b = 32 \text{ mm}$,
 $c = 45 \text{ mm}$,
 $d_{01} = 240 \text{ mm}$,
 $d_{02} = 100 \text{ mm}$,
 megengedett feszültség:
 $R_{\text{adm}} = 120 \text{ MPa}$.

Feladat: Méretezzük a D_1 és D_2 átmérőjű tengelyszakaszt HMH elmélete szerint!

Megoldás: A tengely terhelése térbeli, melyet a a, illetve b, ábrán síkokra bontva szemléltetünk, oly módon, hogy az

$$F_V \cdot \frac{d_{01}}{2} = F_H \cdot \frac{d_{02}}{2} = T$$

redukált nyomatókót, mint csavarónyomatókót mindkét ábrán feltüntettük.

A tengely igénybevétele hajlítás (két irányban) és csavarás, valamint járulékosan nyírás, amelynek hatását az adott esetben elhanyagolhatjuk. Az igénybevételei ábrák a c, ábrán láthatók.

A méretezést az F_V , ill. F_H erők hatásvonalában fellépő igénybevételekre hajtjuk végre (K_1 , illetve K_2 keresztmetszet). A T csavarónyomatókó megegyezik a hajtás nyomatókójával, amely

$$T = T_1 = T_2 = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot 60 = \frac{6000}{2 \cdot \pi \cdot 1400} \cdot 60 = 40,9 \text{ Nm}.$$

Ebből: $F_V = \frac{2 \cdot T}{d_{01}} = \frac{2 \cdot 40,9}{0,24} = 340,8 \text{ N}$, és $F_H = \frac{2 \cdot T}{d_{02}} = \frac{2 \cdot 40,9}{0,1} = 818 \text{ N}$.

A c, ábrán jelölt igénybevétel-értékek ezek figyelembevételével kerültek meghatározásra. A K_1 keresztmetszet igénybevételei tehát:

$$M_{hx} = 7,00 \text{ Nm}, \quad M_{hy} = 9,82 \text{ Nm}, \quad \text{amelyekből}$$

$$\mathbf{M}_h = \sqrt{\mathbf{M}_{hx}^2 + \mathbf{M}_{hy}^2} = \sqrt{7,00^2 + 9,82^2} = 12,06 \text{ Nm}$$

Ez a hajlítónyomaték – bár a koordinátatengelyekhez viszonyítva ferde vektorú – egyenes hajlítást okoz, hiszen a kör keresztmetszet esetén minden súlyponti tengely egyben főtengely is. Így alkalmazható a

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{\mathbf{M}_{\text{red}}}{\mathbf{W}_x} = \frac{\sqrt{\mathbf{M}_h^2 + \frac{\beta}{4} \cdot \mathbf{T}^2}}{\mathbf{W}_x}$$

összefüggés, ahol HMH elmélete szerint $\beta = 3$.

Ezzel a $\sigma_{\text{red}} \leq \mathbf{R}_{\text{adm}}$ feltételből

$$\mathbf{W}_{x1} \geq \frac{\sqrt{\mathbf{M}_h^2 + \frac{3}{4} \cdot \mathbf{T}^2}}{\mathbf{R}_{\text{adm}}} = \frac{\sqrt{12,06^2 + \frac{3}{4} \cdot 40,9^2 \cdot 10^3}}{120} = 311,8 \text{ mm}^3$$

ahonnan $\mathbf{W}_x = \frac{\mathbf{D}_1^3 \cdot \pi}{32}$ felhasználásával

$$\mathbf{D}_1 \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot 311,8} = 14,70 \text{ mm}$$

Választott átmérő: $\mathbf{D}_1 = 24 \text{ mm}$.

Hasonlóan a $\mathbf{K}_2$ keresztmetszetre:

$$\mathbf{W}_{x2} \geq 344,9 \text{ mm}^3, \quad \mathbf{D}_2 \geq 15,2 \text{ mm}.$$

A választott átmérő: $\mathbf{D}_2 = 30 \text{ mm}$.

(A nagyobb értékek választását a reteszek és váll elhelyezésének lehetősége kívánta meg.)

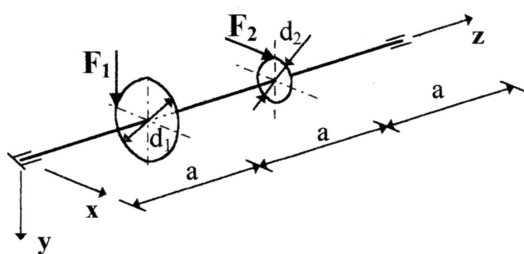
Megjegyezzük, hogy a tengelyszakaszok szomszédos váll-közeli keresztmetszetének ellenőrzése – a feszültséggyűjtő hatás figyelembevételével – még végrehajtható a gyakorlati tervezés során, illetve fáradási vizsgálat szükséges, ha a forgásból származó periodikus igénybevétel ismétlődési száma az élettartam folyamán nagy.

C.4.4.3 GYAKORLÓ FELADATOK

4.4.3-4 Feladat

Egy hajtómű tengelyét a 4.4.34 ábrán látható erők terhelik.

4.4.34 ábra



Adatok: $F_1 = 1,5 \text{ kN}$,
 $F_2 = 3,0 \text{ kN}$,
 $a = 80 \text{ mm}$,
 $d_1 = 240 \text{ mm}$,
 $d_2 = 120 \text{ mm}$,
 $R_{adm} = 140 \text{ MPa}$.

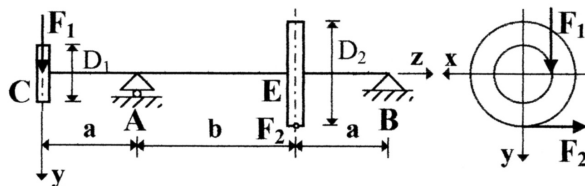
Feladat: Méretezze prizmatikus, kör keresztmetszetű tengelyt a HMH-elmélet szerint!

Eredmény:	Szükséges átmérő: $d_{sz} = 25,5 \text{ mm}$.
-----------	--

3.4.3-5 Feladat

A 4.4.35 ábrán A és B helyen csapágyazott tengely látható, amelyre a C és E keresztmetszetekben adódik terhelés egyenes fogazású fogaskeréken. A tengely anyaga ismert.

4.4.35 ábra



Adatok:

$a = 0,15 \text{ m}$, $F_1 = 15 \text{ kN}$,
 $b = 0,3 \text{ m}$, $F_2 = 10 \text{ kN}$,
 $D_1 = 0,1 \text{ m}$, $d = 60 \text{ mm}$,
 $D_2 = 0,15 \text{ m}$, $R_{adm} = 120 \text{ MPa}$.

Feladat: Ellenőrizze a tengelyt szilárdságilag HMH-elmélet szerint (a nyírásból keletkező feszültség elhanyagolható)!

Eredmény:	$\sigma_{eqv} = 110,4 \text{ MPa} < R_{adm} = 140 \text{ MPa}$, a tengely szilárdságilag megfelel.
-----------	---