

Vigh Sándor–Koppány Imre–Szlávik Béláné
–Szönyiné Passa Erzsébet

MŰSZAKI MECHANIKA II. PÉLDATÁR II/B

ALKALMAZOTT SZILÁRDSÁGTAN

Rúdszerkezetek elmozdulásai
Statikailag határozatlan rúdszerkezetek
Képlékenységtan
Síkbeli rúdkihajlás
Fáradásvizsgálat
Speciális szilárdságtani feladatok



Dunakavics
D•U•E PRESS

M
Ű
S
Z
A
K
I

K
Ö
N
Y
V
E
K

7.

Vigh Sándor–Koppány Imre–Szlávik Béláné–Szőnyiné Passa Erzsébet

MŰSZAKI MECHANIKA II.

PÉLDATÁR II/B

© Vigh Sándor–Koppány Imre–Szlávik Béláné–
Szőnyiné Passa Erzsébet, authors, 2017

Lektor Dr. Kegyes Csaba főiskolai tanár

DUNAÚJVÁROSI EGYETEM

www.uniduna.hu

D^UE PRESS

Kiadóvezető Németh István

Felelős kiadó Dr. habil András István

Felelős szerkesztő Nemeskéry Artúr

Tördelés Duma Attila

Készült a HTSART nyomdában

Felelős vezető Halász Iván

ISBN 978-963-9915-85-5

Vigh Sándor–Koppány Imre–Szlávik Béláné
–Szönyiné Passa Erzsébet

MŰSZAKI MECHANIKA II. PÉLDATÁR II/B

ALKALMAZOTT SZILÁRDSÁGTAN

Rúdszerkezetek elmozdulásai
Statikailag határozatlan rúdszerkezetek
Képlékenységtan
Síkbeli rúdkihajlás
Fáradásvizsgálat
Speciális szilárdságtani feladatok



Dunakavics
DUE PRESS

Dunaújváros, 2017

M
Ű
S
Z
A
K
I

K
Ö
N
Y
V
E
K

7.

TARTALOM

Előszó	7
1. Rúdszerkezetek elmozdulásai.....	9
A.1 Elméleti összefoglaló.....	9
B.1 Kidolgozott feladatok (1-1 ... 1-8).....	10
C.1 Gyakorló feladatok (1-9 ... 1-12).....	26
2. Statikailag határozatlan rúdszerkezetek.....	28
A.2 Elméleti összefoglaló.....	28
B.2 Kidolgozott feladatok (1-1 ... 2-5).....	30
C.2 Gyakorló feladat (2-6).....	44
3. Képlékenységtan.....	46
A.3 Elméleti összefoglaló.....	46
B.3 Kidolgozott feladatok (3-1 ... 3-2).....	47
C.3 Gyakorló feladatok (3-3 ... 3-5).....	50
4. Síkbeli rúdkihajlás.....	52
A.4 Elméleti összefoglaló.....	52
B.4 Kidolgozott feladatok (4-1 ... 4-3).....	53
C.4 Gyakorló feladat (4-4).....	58
5. Fáradásvizsgálat.....	59
A.5 Elméleti összefoglaló.....	59
B.5 Kidolgozott feladatok (5-1 ... 5-2).....	61
6. Speciális szilárdságtani feladatok.....	65
6.1 Hőmérsékletváltozás okozta igénybevételek	65
A.6.1 Elméleti összefoglaló.....	65
B.6.1 Kidolgozott feladatok (6.1-1 ... 6.1-3).....	66
C.6.1 Gyakorló feladatok (6.1-4 ... 6.1-7).....	69
6.2 Inhomogén rudak	71
A.6.2 Elméleti összefoglaló.....	71
B.6.2 Kidolgozott feladatok (6.2-1 ... 6.2-3).....	72
C.6.2 Gyakorló feladat (6.2-4).....	76
6.3 Változó keresztmetszetű és tengelyi rudak.....	77
A.6.3 Elméleti összefoglaló.....	77
6.3.1 Változó keresztmetszetű rudak.....	78
B.6.3.1 Kidolgozott feladatok (6.3.1-1 ... 6.3.1-4).....	78
C.6.3.1 Gyakorló feladatok (6.3.1-5 ... 6.3.1-7).....	84
6.3.2 Egyenszilárdságú rudak.....	85
B.6.3.2 Kidolgozott feladatok (6.3.2-1 ... 6.3.2-2).....	85
C.6.3.2 Gyakorló feladat (6.3.2-3).....	91
6.3.3 Síkgörbe rudak.....	92
A.6.3.3 Elméleti összefoglaló.....	92
B.6.3.3 Kidolgozott feladatok (6.3.3-1 ... 6.3.3-4).....	93
C.6.3.3 Gyakorló feladatok (6.3.3-5 ... 6.3.3-6).....	100

ELŐSZÓ

A Műszaki mechanika II. Példatár II/B az alkalmazott szilárdságtan tananyagának tanulmányozásához nyújt elméleti összefoglalót, kidolgozott és gyakorló példákat.

A példatársorozat külön kötetben megjelenő 1. része a szilárdságtani táblázatokat tartalmazza az alábbi pontokban:

- anyagminőségek és méretezési feszültségek,
- keresztmetszeti táblázatok,
- szilárdságtani segéd táblázatok.

A II/A rész témakörei:

- feszültségi és alakváltozási állapot,
- Hooke-törvény,
- alakváltozási munka,
- egyszerű igénybevételek okozta feszültségek, méretezés és ellenőrzés egyszerű igénybevételekre,
- összetett igénybevételek okozta feszültségek, méretezés és ellenőrzés összetett igénybevételekre.

A II/B rész témakörei:

- tartók alakváltozásai, elmozdulása,
- statikailag határozatlan szerkezetek,
- képlékenységtani feladatok,
- síkbeli rúdkihajlás,
- kifáradás,
- speciális szilárdságtani feladatok.

A példatár felépítése:

- A, Elméleti összefoglaló
- B, Kidolgozott feladatok
- C, Gyakorló feladatok

A példatársorozat jelenlegi II/B része az alkalmazott szilárdságtan elméleti összefoglalása, valamint kidolgozott és gyakorló feladatainak gyűjteménye. (Jelen példatáron kívül találhatók még feladatok a Mechanika III. Példatár-ban.)

A különböző szilárdságtani feladatok megoldási készségének kialakításához és a szerkezeti elemek teherbírási vizsgálatainak begyakorlásához az elméleti tananyag tanulmányozása után át kell tekinteni a kidolgozott feladatok megoldási módszerét, majd önállóan megoldani a gyakorló feladatokat. A gyakorló feladatok eredményeit közöltük, de ezek csak az önálló megoldás utáni ellenőrzésre szolgálnak.

Külön köszönet illeti Dr. Kegyes Csaba főiskolai tanárt a gondos lektorálásért. Kívánjuk, hogy a példatár használatával az alkalmazott szilárdságtan elméleti tananyagát mind alaposabban sikerüljön elsajátítani és a jó példamegoldó készséget kialakítani.

A Szerzők

1. RÚDSZERKEZETEK ELMOZDULÁSAI

A.1 Elméleti összefoglaló

- Külső munka:** A rugalmas anyagú szerkezetet terhelő külső erők által végzett munka.
 Saját munka A külső erők által a saját maguk okozta elmozdulások közben végzett munka.
 Idegen munka A külső erők által másik erőrendszer okozta elmozdulások közben végzett munka.
- Belső munka:** A rugalmas testben fellépő belső erők által a fellépő alakváltozások közben végzett munka.
 Saját munka A belső erők által a saját maguk okozta alakváltozások közben végzett munka.
 Idegen munka A belső erők által másik belső erőrendszer okozta alakváltozások közben végzett munka.

Saját munka	
Külső	$W_{11k} = \sum_i \frac{1}{2} F_{1i} f_{1i} + \sum_j \frac{1}{2} M_{1j} \varphi_{1j}$
Belső	$W_{11b} = U_{11} = \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{N^2}{EA} ds + \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{Q^2}{GA} ds + \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{T^2}{GI_p} ds$
Idegen munka	
Külső	$W_{12k} = \sum_i F_{1i} f_{2i} + \sum_j M_{1j} \varphi_{2j}$
Belső	$W_{12b} = U_{12} = \int_{(s)} \frac{N_1 N_2}{EA} ds + \int_{(s)} \frac{Q_1 Q_2}{GA} ds + \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{M_1 M_2}{EI} ds + \int_{(s)} \frac{T_1 T_2}{GI_p} ds$

- W_{11k} : első indexe a munkát végző erőrendszer jele, második indexe az alakváltozást okozó erőrendszer jele,
 a k index a „külső” munkára utal,
 F_{1i} : az „1”-es erőrendszer i-edik erője,
 f_{1i} : a támadáspontbeli rúdkeresztmetszet F_i erő irányába eső eltolódása az „1”-es erőrendszer hatására,
 M_{1j} : az „1”-es erőrendszer j-edik nyomatéka,
 φ_{1j} : a nyomaték támadáspontjában levő keresztmetszetnek a nyomaték tengelye körüli elfordulása az „1”-es erőrendszer hatására.

Munkatételek	
Első vagy általános munkatétel	$W_{21k} = W_{21b}$
Második munkatétel	$W_{11k} = W_{11b}$
Harmadik (Betti-féle) munkatétel	$W_{12k} = W_{21k}$
Betti-tétel gyakran alkalmazott formája	$W_{21k} = U_{12}$
Castigliano első tétele:	$f_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$, illetve $\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}$

A továbbiakban a Betti-tétel alkalmazására mutatunk be példákat. A két erőrendszer elnevezése természetesen tetszőleges. A megoldások során az eredeti erőrendszer lesz a „0” jelű, a képzelt erőrendszer pedig „1”, „2”, ..., „i”, mely a keresett eltolódás helyén és irányában felvett egységnyi erő vagy a számítandó elfordulás helyén és irányában felvett egységnyi nyomaték. A Betti-tétel jobb oldalán levő szorzatintegrál számítása egyszerűsíthető az

$$U_{01} = \int \frac{M_0 M_1}{EI} ds = \sum_i \frac{A_{Mi} M_{1i}}{EI_i}$$

formában, ahol

A_{Mi} : az egyik nyomatéki ábra i . szakaszának súlypontba helyezett területvektora,

M_{1i} : a másik nyomatéki ábra A_{mi} területvektor „alatti” metszéke.

A szakaszokra bontás szabálya, hogy egy szakaszon belül egyik ábrában sem lehet törés, ugrás vagy előjelváltás. Az az ábra, ahol a metszéket vesszük, legfeljebb lineárisan változhat.

B.1 Kidolgozott feladatok

1-1 Feladat

Az 1.1. ábrán vázolt kéttámaszú melegen hengerelt I 140 keresztmetszetű tartót az F koncentrált erő terheli.

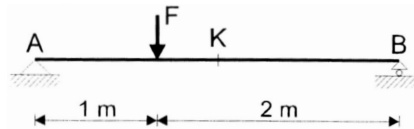
1.1. ábra

Adatok:

$F = 21 \text{ kN}$,

$I_x = 573 \text{ cm}^4$,

$E = 2 \cdot 10^4$.



Feladat: 1. Számítsa ki a középső (K) keresztmetszet függőleges eltolódását, és
2. a B keresztmetszet szögelfordulását!

Megoldás:

A feladatot a Betti-tétel segítségével oldjuk meg.

$$W_{10} = U_{01}, \text{ ahol a}$$

„0” jelű a tartóra ható eredeti erőrendszer (1.1.a ábra), az „1” jelű pedig vk számítása esetén a K keresztmetszetben felvett függőleges egységnyi erő (1.2.c ábra). Mindkét esetben meghatározzuk a támasztóerőrendszert, és megrajzoljuk az M_0 (1.2.b ábra) és az M_1 (1.2.d ábra) nyomatéki ábrát.

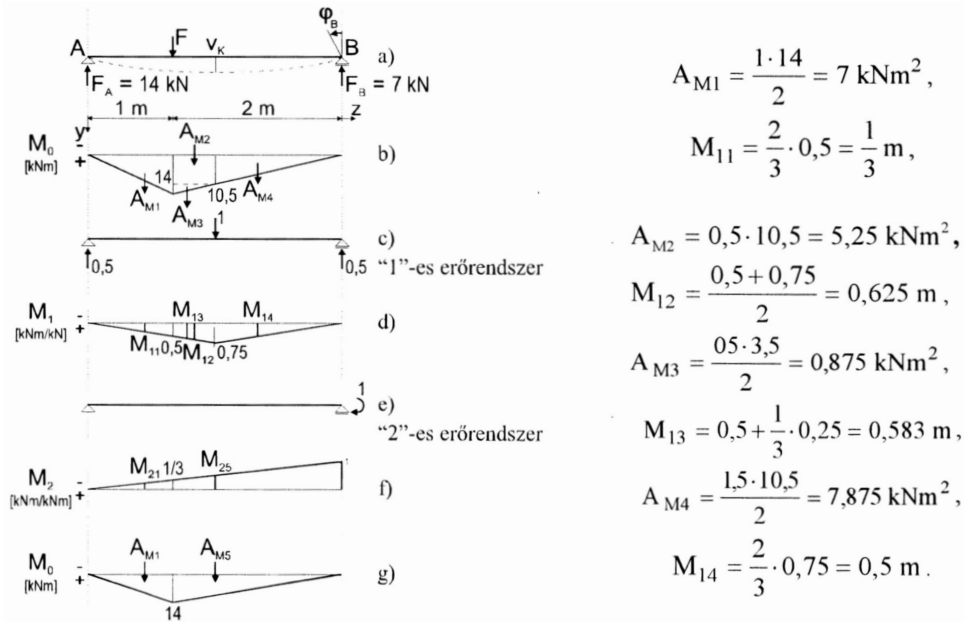
Fenti egyenlet részletezve:

$$1 \cdot v_K = \frac{1}{EI_x} \int_A^B M_0 M_1 ds.$$

Az integrál kiszámításához az M_0 és M_1 ábrát három szakaszra kell bontani (egy-egy szakaszon belül egyik ábrában sem lehet sem törés, sem ugrás, sem előjelváltás), majd az M_0 középső szakaszán levő trapéz alakú területet célszerű egy téglalapra és egy háromszögre. Az M_0 ábra szakaszonkénti területeit A_{mi} -vel jelöljük, és a terület súlypontjába helyezzük, majd kijelöljük az M_1 ábra ezen területvektorok alatti metszékeit M_{1i} .

Az 1.2.b és 1.2.d ábrák felhasználásával:

1.2. ábra



Behelyettesítve a Betti-tételbe (az EI_x -t kNm^2 -ben!)

$$v_K = \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^4 A_{Mi} M_{li} = \frac{7 \cdot 0,33 + 5,25 \cdot 0,625 + 0,875 \cdot 0,583 + 7,875 \cdot 0,5}{1146} = 0,00876 \text{ m} = 0,876 \text{ cm}.$$

A B keresztmetszet szögelfordulásának meghatározásához a „2”-es erőrendszer a B-ben felvett egységnyi nyomaték (1.2.e ábra), a hozzá tartozó nyomatéki ábra M_2 (1.2.f ábra). A könnyebb áttekinthetőség érdekében célszerű az M_0 ábrát még egyszer lerajzolni (1.2.g ábra). Ebben az esetben a Betti-tétel az

$$1 \cdot \varphi_B = \frac{1}{EI_x} (A_{M1} \cdot M_{21} + A_{M5} \cdot M_{25}).$$

A területek és metszések

$$A_{M1} = 7 \text{ kNm}^2, \quad M_{21} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{9},$$

$$A_{M5} = \frac{14 \cdot 2}{2} = 14 \text{ kNm}^2, \quad M_{25} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{9}.$$

Behelyettesítve

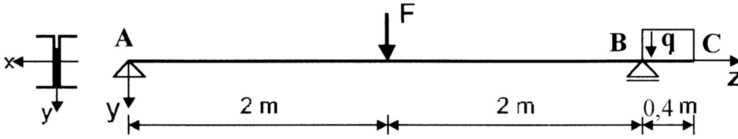
$$\varphi_B = \frac{7 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) + 14 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)}{1146} = -0,00814 \text{ rad} = -0,47^\circ.$$

A negatív érték azt mutatja, hogy a B keresztmetszet a felvett egységnyi nyomatékkal ellentétes irányba fordul el.

1-2 Feladat

Az 1.3. ábrán látható konzolos kéttámaszú tartó keresztmetszete két összehegesztett U szelvény.

1.3. ábra



Adatok:

$F = 2 \text{ kN}$,
 $q = 10 \text{ kN/m}$,
 Szelvény: U50,
 $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$

Feladat: Számolja ki a konzolvég (C) függőleges eltolódását !

Megoldás:

Írjuk fel a Betti-tételt!

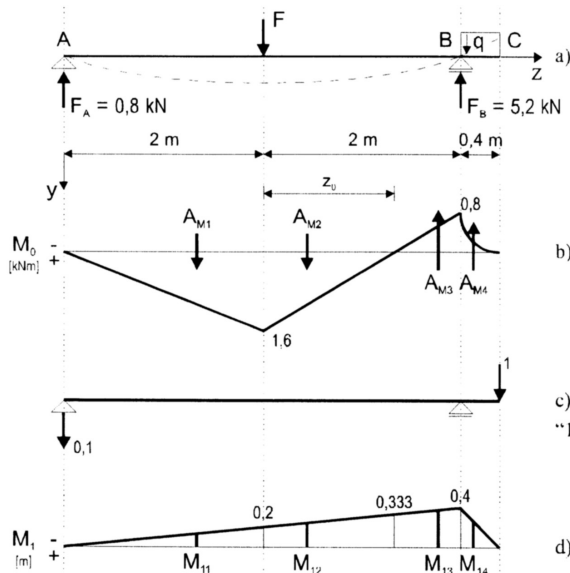
$$W_{10} = U_{01}, \text{ részletesebben}$$

$$1 \cdot v_C = \frac{1}{EI_x} \int_A^C M_0 M_1 ds, \quad \text{ahol}$$

M_0 a tartóra ható eredeti teherből megrajzolt nyomatéki ábra (1.4.b, ábra), az „1” erőrendszer a C keresztmetszetben felvett egységnyi erő (1.4.c ábra), M_1 pedig az ehhez tartozó nyomatéki ábra (1.4.d ábra).

Az M_0 és M_1 ábrát négy-négy szakaszra kell bontani, ehhez a z_0 távolságot pl. az M_0 nyomatéki ábra 2. és 3. szakaszának hasonlóságából meg tudjuk határozni

1.4 ábra



$$\frac{1,6}{z_0} = \frac{0,8}{2 - z_0}, \text{ ahonnan}$$

$$z_0 = \frac{4}{3} \text{ m}.$$

A tétel jobb oldalán levő integrál kiszámításához („terület-metszék”) csak az M_1 ábrában vehetjük a metszékeket, mert az M_0 ábrának van másodfokú szakasza is.

„1”-es erőrendszer

$$A_{M1} = \frac{2 \cdot 1,6}{2} = 1,6 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{11} = -\frac{2}{3} \cdot 0,2 = -0,133 \text{ m},$$

$$\begin{aligned}
 A_{M2} &= \frac{\frac{4}{3} \cdot 1,6}{2} = 1,067 \text{ kNm}^2, & M_{12} &= -\left(0,2 + \frac{1}{3} \cdot 0,133\right) = -0,244 \text{ m}, \\
 A_{M3} &= \frac{-\frac{2}{3} \cdot 0,8}{2} = -0,267 \text{ kNm}^2, & M_{13} &= -\left(0,333 + \frac{2}{3} \cdot 0,067\right) = -0,378 \text{ m}, \\
 A_{M4} &= -\frac{1}{3} \cdot 0,8 \cdot 0,4 = -0,107 \text{ kNm}^2, & M_{14} &= -\frac{3}{4} \cdot 0,4 = -0,3 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Táblázatból egy U50 szelvény esetén $I_x^{(1)} = 26 \text{ cm}^4$, ha az 1.3. ábrán látható módon kapcsolunk össze két szelvényt, $I_x = 2I_x^{(1)} = 52 \text{ cm}^4$. Így

$$EI_x = 52 \cdot 2 \cdot 10^4 = 1,104 \cdot 10^6 \text{ kNcm}^2 = 104 \text{ kNm}^2.$$

Behelyettesítve

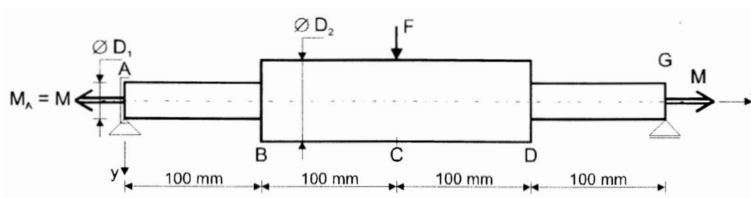
$$\begin{aligned}
 v_C &= \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^4 A_{Mi} M_{1i} = \\
 &= \frac{1,6 \cdot (-0,133) + 1,067 \cdot (-0,244) - 0,267 \cdot (-0,378) - 0,107 \cdot (-0,3)}{104} \\
 v_C &= -0,0033 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Tehát a C keresztmetszet 0,33 cm-t mozdul el függőlegesen felfelé.

1-3 Feladat

Az 1.5. ábrán látható változó keresztmetszetű tengely A keresztmetszetének elfordulását a meg-támasztás meggátolja.

1.5. ábra



Adatok:

$$\begin{aligned}
 E &= 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2, \\
 m &= 3, \\
 M &= 0,05 \text{ kNm}, \\
 F &= 0,5 \text{ kN}, \\
 D_1 &= 20 \text{ mm}, \\
 D_2 &= 30 \text{ mm}.
 \end{aligned}$$

- Feladat:** 1. Számítsa ki a C keresztmetszet függőleges eltolódását és
2. a G z tengely körüli elfordulását A-hoz képest.

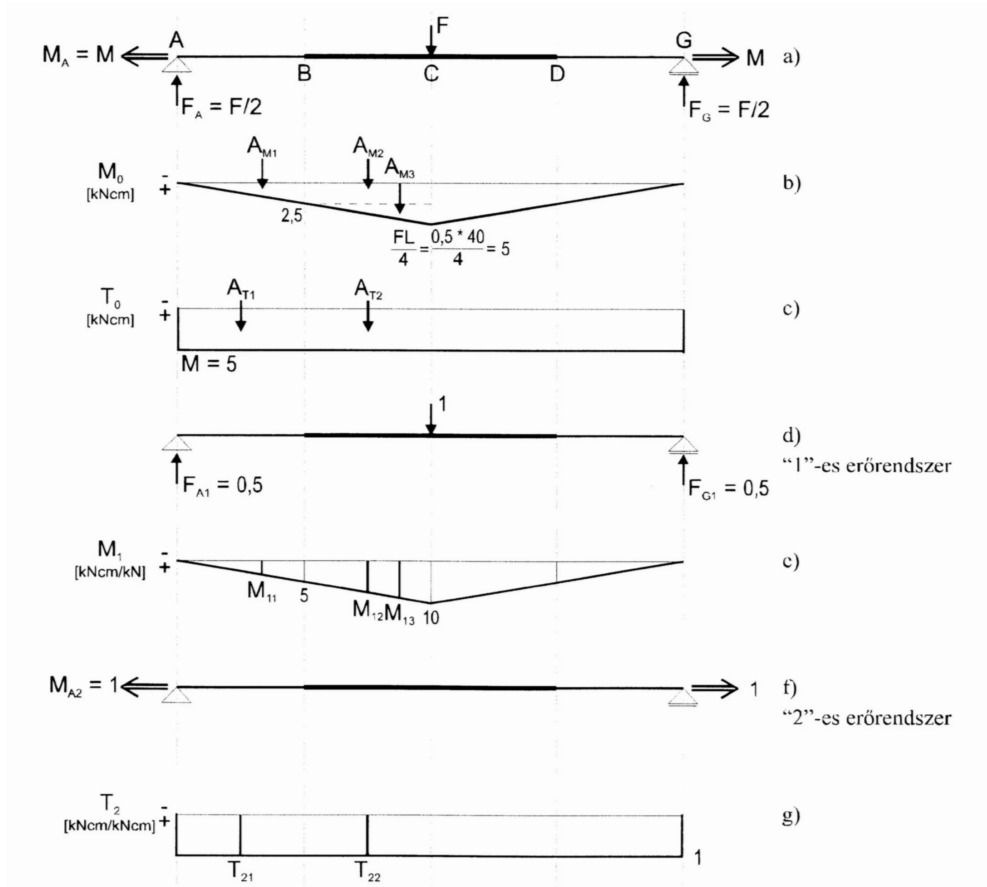
Megoldás:

Első lépésként rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit (1.6.b,c ábra)! A nyírásból származó elmozdulásokat elhanyagolhatjuk, ezért a Q ábrát nem is szükséges megrajolni. A hajlításból az egyes keresztmetszetek függőlegesen eltolódnak (v) és az x tengely körül elfordulnak (φ_x), a csavarónyomaték hatására pedig a z tengely körül fordulnak el (φ_z).

1. Számítsuk ki először a v_c -t!

Az ehhez szükséges „1”-es erőrendszer a C keresztmetszetben működő egységnyi függőleges erő (1.6.d ábra), a hozzá tartozó hajlítónyomatéki ábra M_1 (1.6.e ábra).

1.6. ábra



A Betti-tétel

$$W_{10} = U_{01}, \text{ kifejtve}$$

$$1 \cdot v_C = \int_A^G \frac{M_0 M_1}{EI_x} ds,$$

$$1 \cdot v_C = \sum_i \frac{A_{Mi} M_{1i}}{EI_{xi}}.$$

Az M_0 és M_1 ábrát a bennük levő törés miatt csak két részre, de a változó keresztmetszet miatt még további két-két szakaszra kell bontani. A második szakaszon az M_0 ábra trapéz területét célszerűen egy téglalappal és egy háromszöggel helyettesítjük. M_0 és M_1 az F hatásvonalára szimmetrikusak, ezért elegendő a szimmetriatengely egyik oldalára eső területek és metszések szorzatösszegét számítani és ezt kétszerezni.

$$A_{M1} = \frac{10 \cdot 2,5}{2} = 12,5 \text{ kNcm}^2,$$

$$M_{11} = \frac{2}{3} \cdot 5 = 3,33 \text{ cm},$$

$$A_{M2} = 10 \cdot 2,5 = 25,0 \text{ kNcm}^2,$$

$$M_{12} = \frac{10+5}{2} = 7,5 \text{ cm},$$

$$A_{M3} = \frac{10 \cdot 2,5}{2} = 12,5 \text{ kNcm}^2,$$

$$M_{13} = 5 + \frac{2}{3} \cdot 5 = 8,33 \text{ cm}.$$

A másodrendű nyomatékok:

$$I_{x1} = \frac{D_1^4 \pi}{64} = \frac{2^4 \pi}{64} = 0,785 \text{ cm}^4,$$

$$I_{x2} = \frac{D_2^4 \pi}{64} = \frac{3^4 \pi}{64} = 3,98 \text{ cm}^4.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} v_G &= \frac{1}{E} \left(\frac{A_{M1} \cdot M_{11}}{I_{x1}} + \frac{A_{M2} \cdot M_{12} + A_{M3} M_{13}}{I_{x2}} \right) \cdot 2 = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^4} \left(\frac{12,5 \cdot 3,33}{0,785} + \frac{25,0 \cdot 7,5 + 12,5 \cdot 8,33}{3,98} \right) \cdot 2 = 0,0126 \text{ cm}. \end{aligned}$$

2. A G keresztmetszet z tengely körüli elfordulásának meghatározásához a felvett „2”-es erőrendszer a G-ben működő egységnyi csavarónyomaték (1.6.f ábra), az ebből megrajzolt csavarónyomatéki ábra T_2 (1.6.g ábra).

Erre az esetre a Betti-tétel

$$W_{20} = U_{02}, \quad \text{azaz}$$

$$1 \cdot \varphi_{zG} = \int_A^G \frac{T_0 T_2}{G I_p} ds, \quad \text{a jobb oldal átírása után}$$

$$\varphi_{zG} = \left(\frac{A_{T1} \cdot T_{21}}{G \cdot I_{p1}} + \frac{A_{T2} \cdot T_{22}}{G \cdot I_{p2}} \right) \cdot 2.$$

A szakaszokra bontásra a változó inercia miatt van szükség, és ennél a felírásnál is felhasználtuk a szimmetriát.

A poláris másodrendű nyomatékok

$$I_{p1} = \frac{D_1^4 \pi}{32} = \frac{2^4 \pi}{32} = 1,57 \text{ cm}^4,$$

$$I_{p2} = \frac{D_2^4 \pi}{32} = \frac{3^4 \pi}{32} = 7,95 \text{ cm}^4,$$

a csúsztató rugalmassági modulus pedig

$$G = \frac{mE}{2(m+1)} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^4}{2(3+1)} = 7500 \text{ kN/cm}^2.$$

Az 1.6.c és g ábrákból a területek és a metszések:

$$\begin{aligned} A_{T1} &= 5 \cdot 10 = 50 \text{ kNcm}^2 & T_{21} &= 1, \\ A_{T2} &= 5 \cdot 10 = 50 \text{ kNcm}^2 & T_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

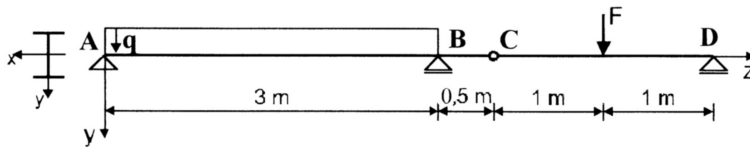
$$\varphi_{zG} = \frac{1}{7500} \left(\frac{50 \cdot 1}{1,57} + \frac{50 \cdot 1}{7,95} \right) = 5,08 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,29^\circ.$$

Tehát a C keresztmetszet 0,126 mm-t tolódik el függőlegesen lefelé, a G keresztmetszet pedig $0,29^\circ$ -ot fordul el a z tengely körül.

1-4 Feladat

Adott az 1.7. ábrán látható melegen hengerelt I szelvényből készült Gerber-tartó.

1.7. ábra



Adatok:

$F = 20 \text{ kN},$
 $q = 10 \text{ kN/m},$
 Szelvény: I 120

- Feladat:** 1. Számítsa ki a C keresztmetszet függőleges eltolódását (v_c) és
 2. relatív szögelfordulását ($\Delta\varphi_c$)!

Megoldás:

Mindkét esetben szükséges a tartó eredeti teherhez tartozó nyomatéki ábrája, amelyet célszerű szuperpozícióval előállítani. A megoszló teherből származik az M'_0 (1.8.b,c ábra), a koncentrált erőből pedig az M''_0 (1.8.d,e ábra). (Emlékeztetőül: a támasztóerőrendszer számításához a tartót C-ben szét kell szedni!)

1. A v_c számításához felvett segéderőrendszer az „1”-es (1.8.f ábra), ebből a nyomatéki ábra M_1 (1.8.g ábra). A Betti-tétel

$$W_{10} = U_{01}, \quad \text{részletesebben}$$

$$1 \cdot v_c = \frac{1}{EI_x} \left[\int_A^D M'_0 M_1 ds + \int_A^D M''_0 M_1 ds \right], \quad \text{másképp}$$

$$1 \cdot v_c = \frac{1}{EI_x} \left(\sum_i A_{Mi} M_{1i} \right).$$

Az M'_0 és M''_0 , területvektorai és ezek súlypontja alatti M_1 ábra metszékek az 1.8.c,e,g ábrák alapján a következők:

$$A_{M1} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 11,25 = 22,5 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{11} = -0,25 \text{ m},$$

$$A_{M2} = \frac{-3 \cdot 5}{2} = -7,5 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{12} = -\frac{2}{3} \cdot 0,5 = -0,33 \text{ m},$$

$$A_{M3} = -\frac{5 \cdot 0,5}{2} = -1,25 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{13} = -\frac{2}{3} \cdot 0,5 = -0,33 \text{ m}.$$

A hajlítási merevség számításához az I 120 inerciája táblázatból

$$I_x = 328 \text{ cm}^4, \quad \text{így}$$

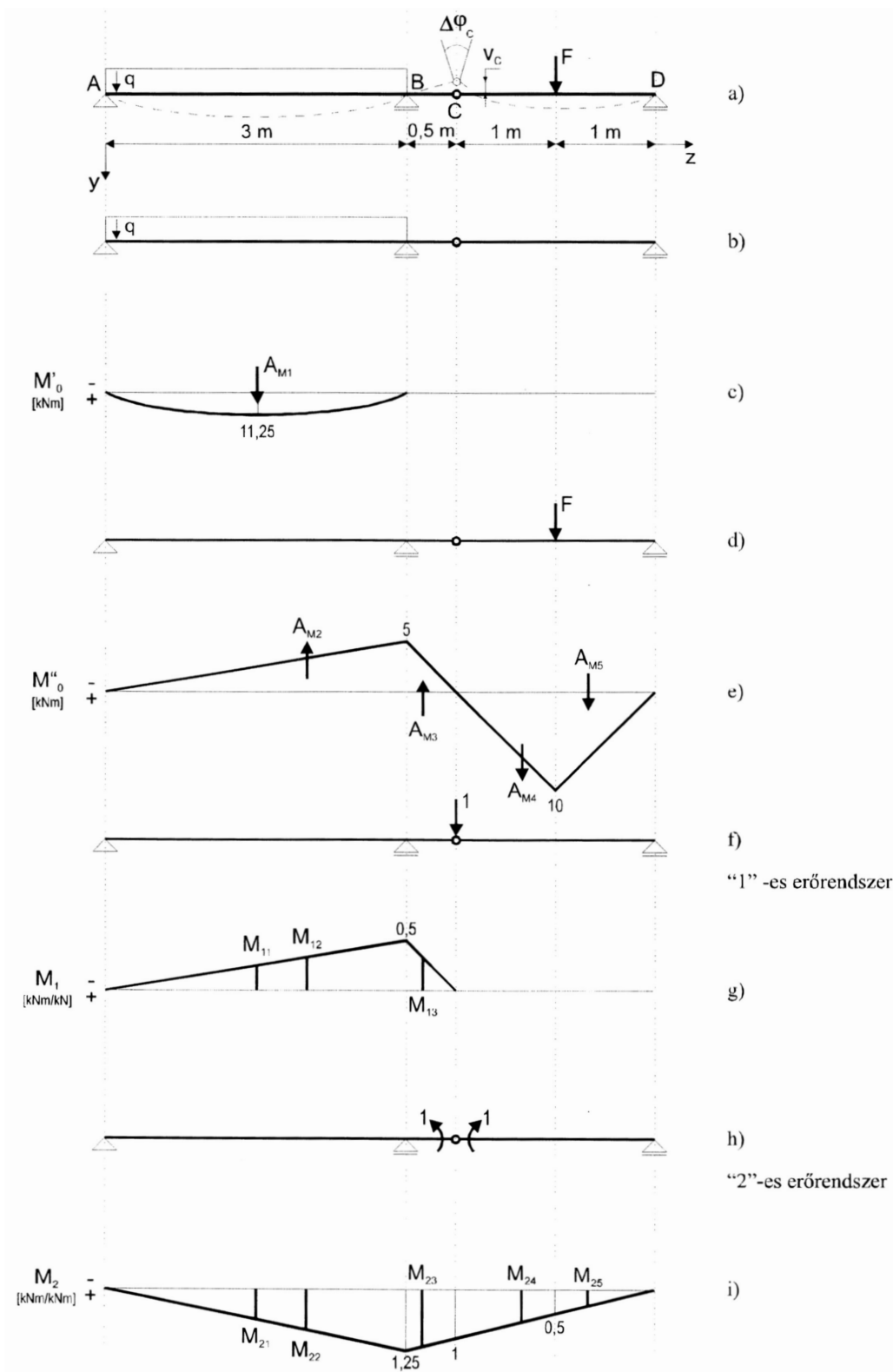
$$EI_x = 2 \cdot 10^4 \cdot 328 = 6,56 \cdot 10^6 \text{ kNcm}^2 = 656 \text{ kNm}^2.$$

Behelyettesítve:

$$v_C = \frac{22,5 \cdot (-0,25) - 7,5 \cdot (-0,33) - 1,25 \cdot (-0,33)}{656} = -0,00413 \text{ m}.$$

Tehát a C keresztmetszet a felvett egységerővel ellentétes irányban, felfelé mozdul el $\sim 4\text{mm}$ -t.

1.8 ábra



“1”-es erőrendszer

“2”-es erőrendszer

2. A relatív elfordulás számításához egy egységnyi nyomatékpárt kell a C keresztmetszetben működtetni (1.8.h ábra), ebből megrajzoljuk az M_2 nyomatéki ábrát (1.8.i ábra), majd alkalmazzuk a Betti-tételt

$$1 \cdot \Delta\varphi_c = \frac{1}{EI_x} \left[\int_A^D M'_0 M_2 ds + \int_A^D M''_0 M_2 ds \right],$$

$$\Delta\varphi_c = \frac{\sum_{i=1}^5 A_{Mi} \cdot M_{2i}}{EI_x}.$$

Az első három területet már meghatároztuk, a többi és a hozzájuk tartozó metszések a következők:

$$A_{M1} = 22,5 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{21} = \frac{1}{2} \cdot 1,25 = 0,625,$$

$$A_{M2} = -7,5 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{22} = \frac{2}{3} \cdot 1,25 = 0,833,$$

$$A_{M3} = -1,25 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{23} = 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,25 = 1,167,$$

$$A_{M4} = \frac{1 \cdot 10}{2} = 5 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{24} = 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 = 0,667,$$

$$A_{M5} = \frac{1 \cdot 10}{2} = 5 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{25} = \frac{2}{3} \cdot 0,5 = 0,33.$$

A relatív szögelfordulás C-ben

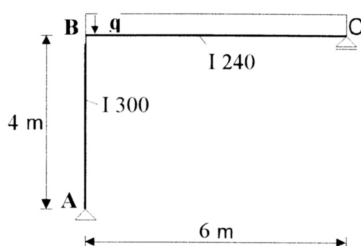
$$\Delta\varphi_c = \frac{(22,5 \cdot 0,625) + (-7,5) \cdot 0,833 + (-1,25) \cdot (1,167) + 5 \cdot 0,667 + 5 \cdot 0,33}{656} =$$

$$= 0,017 \text{ rad} = 0,99^\circ$$

1-5 Feladat

Az 1.9 ábrán látható félkeret oszlopának keresztmetszete I 300, a gerendáé I 240.

1.9 ábra



Adatok:

$$q = 10 \text{ kN/m},$$

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

Feladat: Számítsa ki a C keresztmetszet vízszintes eltolódását

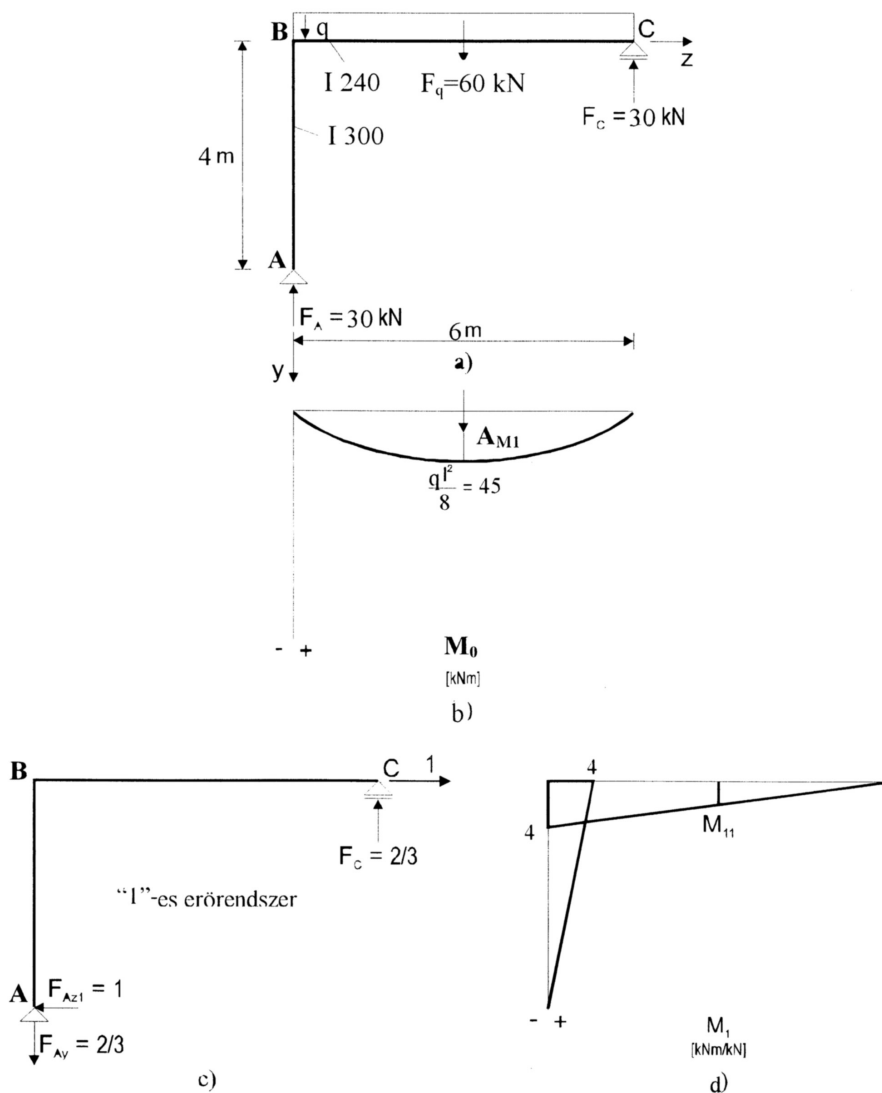
Megoldás:

Az 1.10.a ábrán látható terhekhez megrajzoljuk az M_0 nyomatéki ábrát (1.10.b ábra), majd felvesszük az „1”-es erőrendszert (1.10.c ábra), és a hozzá tartozó M_1 nyomatéki ábrát.

A Betti-tétel értelmében:

$$W_{10} = U_{01}, \quad \text{azaz}$$

1.10. ábra



$$1 \cdot w_C = \int_A^C \frac{M_0 M_1}{EI_x} ds,$$

$$w_C = \frac{A_{M1} \cdot M_{11}}{EI_x},$$

ahol $A_{M1} = 2/3 \cdot 6 \cdot 45 = 180 \text{ kNm}^2$, $M_{11} = 2 \text{ m}$ és táblázatból $I_x = 4250 \text{ cm}^4$, ahonnan

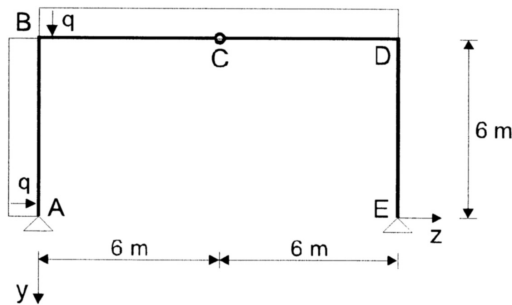
$$EI_x = 8500 \text{ kNm}^2$$

Behelyettesítve : $w_C = \frac{180 \cdot 2}{8500} = 0,0423 \text{ m} = 4,23 \text{ cm}.$

1-6 Feladat

Az 1.11 ábrán egy állandó keresztmetszetű (I 220) kétcsuklós keret látható.

1.11. ábra



Adatok:

Szelvény: I 220,
 $q = 2 \text{ kN/m}$,
 $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$

Feladat: Határozza meg a D keresztmetszet vízszintes eltolódását!
 (Csak a hajlításból származó belső energiát vegye figyelembe!)

Megoldás:

A feladatot Betti-tétellel oldjuk meg. Ehhez szükséges a tartó eredeti teherből rajzolt nyomatéki ábrája, amit két részben ábrázolunk, a vízszintes megoszló teherhez (1.12.a ábra) az M'_0 (1.12.c ábra), a függőlegeshez (1.12.d ábra) pedig az M''_0 (1.12.e ábra) tartozik. A felvett „1”-es erőrendszer a D keresztmetszetben működő egységnyi vízszintes erő (1.12.f ábra), a hozzá tartozó nyomatéki ábra az M_1 (1.12.g ábra).

A tétel:

$$W_{10} = U_{01}, \quad \text{részletesebben}$$

$$1 \cdot w_D = \frac{1}{EI_x} \int_A^E M_0 M_1 ds \quad \text{illetve}$$

$$w_D = \frac{1}{EI_x} \left[\int_A^E M'_0 M_1 ds + \int_A^E M''_0 M_1 ds \right] \quad \text{alakban írható.}$$

Tehát a jobb oldal számításához a M'_0 -t és az M''_0 -t is össze kell szorozni az M_1 -gyel. Az M''_0 a C-n átmenő függőlegesre szimmetrikus, az M_1 antimetrikus (ugyanazok az értékek ismétlődnek, de ellenkező előjellel), könnyen belátható, hogy e két függvény szorzatának integrálja nulla.

$$\int M'_0 M_1 \, ds = 0$$

Az M'_0 és M_1 szakaszokra bontása után (1.12.c és g ábra)i

$$A_{M1} = + \frac{2}{3} \cdot 20,25 \cdot 4,5 = 60,75 \, \text{kNm}^2,$$

$$A_{M2} = \frac{2}{3} \cdot 2,25 \cdot 1,5 = 2,25 \, \text{kNm}^2,$$

$$A_{M3} = 18 \cdot 1,5 = 27 \, \text{kNm}^2,$$

$$A_{M4} = \frac{18 \cdot 6}{2} = 54 \, \text{kNm}^2,$$

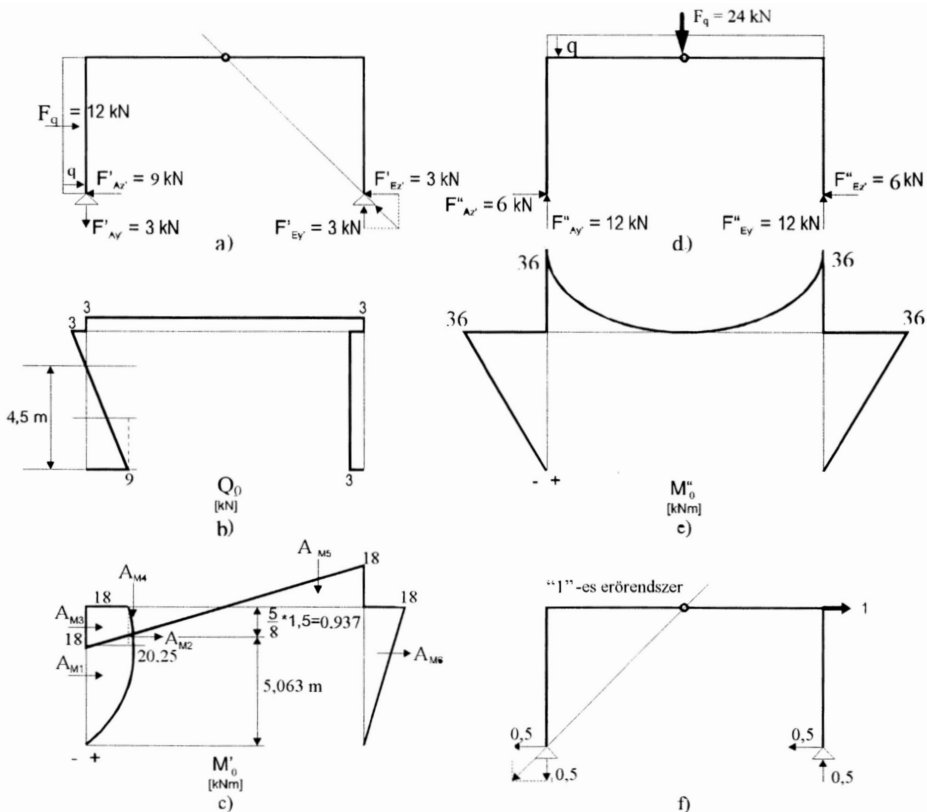
$$M_{11} = \frac{5}{8} \cdot 2,25 = 1,406 \, \text{m},$$

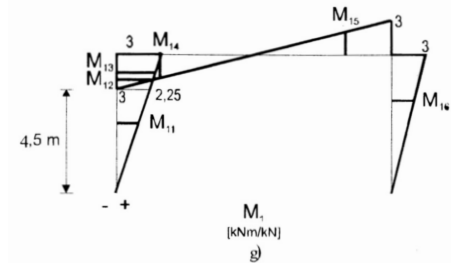
$$M_{12} = \frac{5,063}{6} \cdot 3 = 2,532 \, \text{m},$$

$$M_{13} = \frac{2,25 + 3}{2} = 2,625 \, \text{m},$$

$$M_{14} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \, \text{m},$$

1.12. ábra





$$A_{M5} = -A_{M4} = -54 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{15} = -M_{14} = -2 \text{ m},$$

$$A_{M6} = -\frac{18 \cdot 6}{2} = -54 \text{ kNm}^2,$$

$$M_{16} = -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2 \text{ m}.$$

Táblázatból $I_x = 3060 \text{ cm}^4$, így $EI_x = 6,12 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$

Helyettesítsünk be!

$$w_D = \frac{\sum_{i=1}^3 A_{Mi} M_{1i} + 3 \cdot A_{M4} \cdot M_{14}}{EI_x} =$$

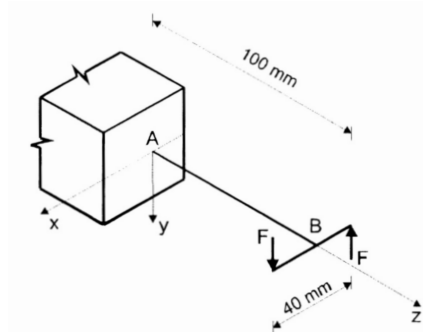
$$= \frac{60,75 \cdot 1,406 + 2,25 \cdot 2,532 + 27 \cdot 2,625 + 54 \cdot 2 \cdot 3}{6120} = 0,079 \text{ m}.$$

A D keresztmetszet tehát 7,9 cm-t tolódik el jobbra.

1-7 Feladat

A d átmérőjű egyik végén befogott tengelyt a szabad végén egy erőpár terheli.

1.13. ábra



Adatok: $d = 10 \text{ mm}$,

$F = 0,4 \text{ kN}$,

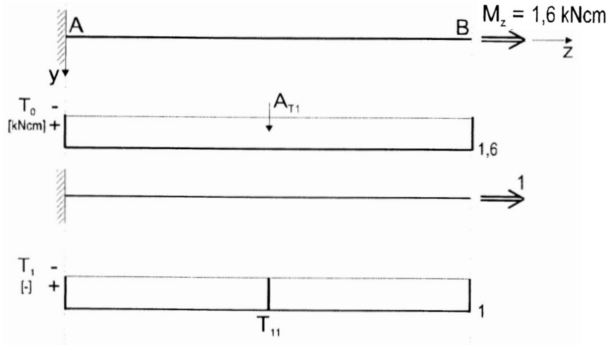
$G = 7500 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Határozza meg a B keresztmetszet elcsavarodását A-hoz képest!

Megoldás:

Az erőpárt redukáljuk a B keresztmetszetbe (1.14.a ábra), és megrajzoljuk a T_0 csavarónyomatéki ábrát. Az „1”-es erőrendszer a B keresztmetszetben felvett egységnyi z irányú nyomaték, melyből a T_1 ábrát kapjuk (1.14.c,d ábra).

1.14. ábra



a) A Betti-tétel:

$$W_{10} = U_{01}, \text{ illetve}$$

b)

$$1 \cdot \varphi_{zB} = \frac{1}{GI_p} \int_A^B T_0 T_1 ds,$$

mely

$$c) \varphi_{zB} = \frac{A_{T1} \cdot T_{11}}{GI_p}$$

alakban írható.

$$\text{Az } I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = \frac{10^4 \pi}{32} = 981,75 \text{ mm}^4 = 0,0982 \text{ cm}^4, \text{ így}$$

$$GI_p = 7500 \cdot 0,0982 = 736,5 \text{ kNcm}^2,$$

$$A_{T1} = 1,6 \cdot 10 = 16 \text{ kNcm}^2,$$

$$T_{11} = 1.$$

Behelyettesítve:

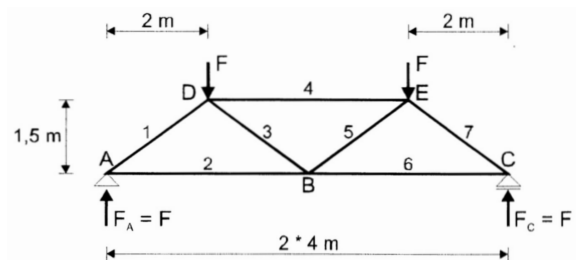
$$\varphi_{zB} = \frac{16 \cdot 1}{736,5} = 0,02 \text{ rad} = 1,15^\circ$$

a B keresztmetszet elcsavarodása A-hoz viszonyítva.

1-8 Feladat

Az 1.15 ábrán látható csomópontjain terhelt rácsos tartó keresztmetszeti területeit az 1.1 táblázat

1.14. ábra



Adatok:

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2,$$

$$F = 60 \text{ kN},$$

$$A_1 = A_7 = 9,5 \text{ cm}^2,$$

$$A_2 = A_6 = 4,29 \text{ cm}^2,$$

$$A_3 = A_5 = 2,48 \text{ cm}^2,$$

$$A_4 = 10,36 \text{ cm}^2.$$

Feladat: Számítsa ki a B csomópont függőleges eltolódását!

Megoldás:

Mivel a tartóra csak csomópontjain hat teher, az egyes rudakban csak rúderők ébrednek, tehát a belső energiát ebből kell számolni.

A Betti-tétel:

$$W_{10} = U_{01}, \text{ azaz}$$

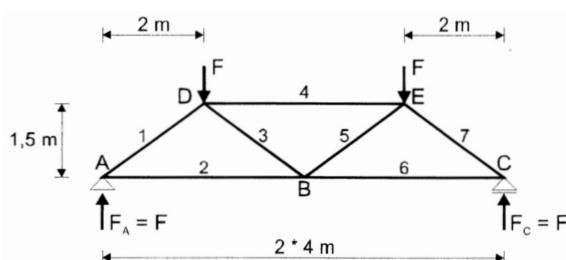
$$1 \cdot v_B = \sum_i \frac{S_{0i} S_{1i} \cdot L_i}{EA_i}$$

alakban írható fel, ahol

S_{0i} : az i . rúdban ébredő rúderő a rácsos tartóra ható eredeti teherből (1.15 ábra),

S_{1i} : az i . rúdban fellépő rúderő a rácsos tartóra működtetett „1”-es erőrendszerből (1.16 ábra).

1.16. ábra



A rúderők számítását nem részletezzük, a csomóponti, illetve az átmetsző módszer alkalmazásával kapjuk az 1.1 táblázatban található értékeket. A szimmetria felhasználásával elegendő 4–4 rúderőt meghatározni.

1.1 táblázat

i	S_{0i} [kN]	S_{1i} [kN/kN]	L_i [cm]	A_i [cm ²]	$\frac{S_{0i} \cdot S_{1i} \cdot L_i}{A_i} \left[\frac{\text{kN}}{\text{cm}} \right]$
1 7	-100	$-\frac{2,5}{3}$	250	9,5	+ 2192,98
2 6	+ 80	$+\frac{2}{3}$	400	4,29	+ 4972,8
3 5	0	$+\frac{2,5}{3}$	250	2,48	0
4	-80	$-\frac{4}{3}$	400	10,36	+ 4118,4

Felhasználva az 1.1 táblázat adatait,

$$v_B = \left(2 \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{S_{0i} \cdot S_{1i} \cdot l_i}{A_i} + \frac{S_{04} \cdot S_{14} \cdot l_4}{A_4} \right) \cdot \frac{1}{E} = \frac{14331,56 + 4118,4}{2 \cdot 10^4} = 0,922 \text{ cm}$$

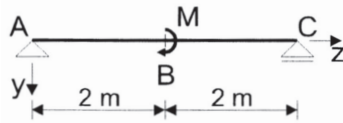
A B keresztmetszet 0,922 cm-t tolódik el függőlegesen lefelé.

C.1 Gyakorló feladatok

1-9 Feladat

Az 1.17-1.21 ábrákon látható tartók esetén számítsa ki a megjelölt elmozdulás-komponenseket!

1.17. ábra



$$M = 50 \text{ kNm}$$

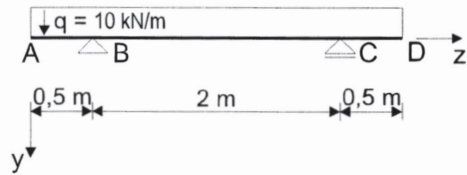
$$EI = 2,9 \cdot 10^7$$

$$v_B = ?, \varphi_C = ?$$

Eredmények:

$$v_B = 0 \quad \varphi_C = 2,85 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \curvearrowright$$

1.18. ábra



$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

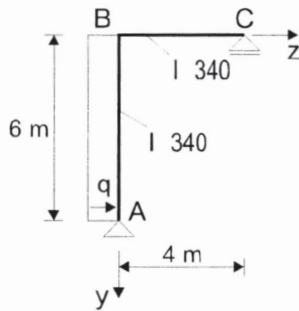
$$\text{Keresztmetszet: } I_{80}$$

$$v_A = ?, \varphi_B = ?$$

Eredmények:

$$v_A = 6,2 \text{ mm} \uparrow \quad \varphi_B = 0,0134 \text{ rad} \curvearrowright$$

1.19. ábra



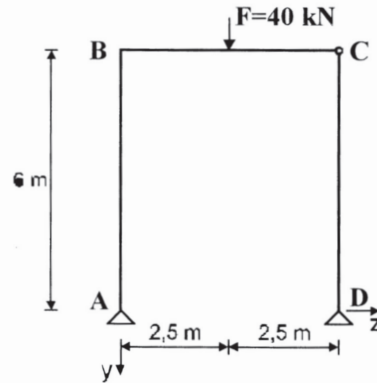
$$q = 2 \text{ kN/m}$$

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

$$W_C = ?$$

$$\text{Eredmény: } W_C = 2,6 \text{ cm}$$

1.20. ábra

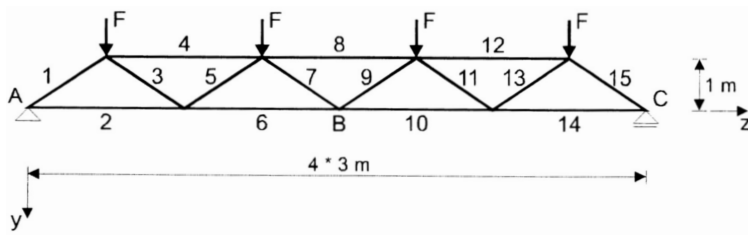


$$EI_x = 5400 \text{ kNm}^2$$

$$\Delta\varphi_C = ?$$

$$\text{Eredmény: } \Delta\varphi_C = 1,33^\circ$$

1.21. ábra



$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

$$F = 10 \text{ kN}$$

$$A_1 = A_{15} = 4,58 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = A_3 = A_7 = A_{14} =$$

$$A_{13} = A_9 = 1,33 \text{ cm}^2$$

$$A_4 = A_{12} = 6,58 \text{ cm}^2$$

$$A_5 = A_{11} = 4,08 \text{ cm}^2$$

$$A_6 = A_{10} = 3,08 \text{ cm}^2$$

$$V_B = ?$$

Eredmény: $V_B = 3,11 \text{ cm}$

[2] Vigh Sándor (Szerk.):
Műszaki mechanika II/B.
Alkalmazott szilárdságtan.
Dunaújváros:
ME DFK.

2. STATIKAILAG HATÁROZATLAN RÚDSZERKEZETEK

A.2 Elméleti összefoglaló

Statikailag határozatlan egy szerkezet, ha az ismeretlen reakció-, illetve belső erő és nyomatékkomponensek száma (N) nagyobb, mint a felírható egymástól független statikai egyensúlyi egyenletek száma (e).

A határozatlanság foka $h=N-e$,

ami lehet külső, illetve belső (részletesen ld. [2] 2. fejezetben).

A feladatmegoldás lépései:

- 1.) A határozatlanság fokának megállapítása.
- 2.) Törzstartó felvétele, vagyis a határozatlanság fokának megfelelő számú szabadságfoklekötés felszabadítása
 - a) külső határozatlanság esetén külső vagy belső,
 - b) belső határozatlanság esetén belső kapcsolatok megszüntetésével. A megszüntetett szabadságfok-lekötések helyén és irányában ismeretlen erő, illetve nyomaték működtetése.
- 3.) A feltételei egyenletek felírása. Ezek fejezik ki, hogy az ismeretlenek helyén és irányában az elmozdulás nulla vagy más ismert érték.

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n + a_{10} &= 0 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n + a_{20} &= 0 \\ a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \dots + a_{nn} X_n + a_{n0} &= 0 \end{aligned}$$

4.) A törzstartóra ható eredeti teherből M_0 , az $X_1=1$ -ből az M_1 , az $X_2=1$ -ből az M_2 , stb. megrajzolása.

5.) a_i terhelési éegységtényezők meghatározása.

Az a_i terhelési tényező a törzstartóra ható X_i támadáspontjának X_i irányú elmozdulása (erő esetén eltolódása, nyomaték esetén elfordulása) az eredeti teherből, az egységtényező pedig szintén a törzstartón az X_i támadáspontjának X_i irányú elmozdulása az $X_j = 1$ hatására.

$$\begin{aligned} \text{Hajlítás esetén} \quad a_{i0} &= \int \frac{M_i M_0}{E I} ds, & a_{ij} &= \int \frac{M_i M_j}{E I} ds, \\ & & i=j \text{ is lehet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{csavarásnál} \quad a_{i0} &= \int \frac{T_i T_0}{G I_p} ds, & a_{ij} &= \int \frac{T_i T_j}{G I_p} ds, \end{aligned}$$

normálerőnél (ha szakaszonként állandó, pl. csomópontjain terhelt rácsos tartó esetén)

$$a_{io} = \sum_k \frac{N_{ik} N_{ok} L_k}{E A_k}, \quad a_{ij} = \sum_k \frac{N_{ik} N_{jk} L_k}{E A_k},$$

a nyírásból származó belső energia általában elhanyagolható, így az ebből származó elmozdulásokkal a továbbiakban nem számolunk.

6.) Az egyenletrendszer megoldása.

7.) Az igénybevételi ábrák megrajzolása. Hajlított tartó esetén a nyomatéki ábra szuperpozícióval:

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + \dots + X_n M_n,$$

ebből deriválással vagy a

$$Q = Q_0 + X_1 Q_1 + X_2 Q_2 + \dots + X_n Q_n$$

összefüggés felhasználásával határozható meg a nyíróerő ábra. Az M és Q segítségével tisztázható a támasztóerőrendszer, és a hiányzó normálerő ábra.

Csavart rúd esetén a csavarónyomatéki ábra

$$T = T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 + \dots + X_n T_n.$$

Szakaszonként állandó normálerő esetén pedig a k szakaszon a normálerő

$$N_k = N_{0k} + X_1 N_{1k} + X_2 N_{2k} + \dots + X_n N_{nk}$$

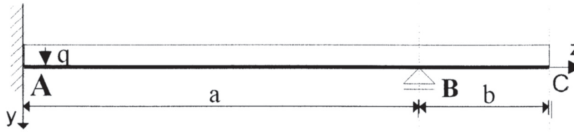
Az igénybevételek meghatározása nemcsak az előzőek szerint lehetséges, hanem úgy is, hogy a kiszámított $X_1, X_2 \dots X_n$ ismeretleneket az eredeti teherrel együtt külső terhelésként működtetjük a törzstartóra (ami statikailag határozott), és a statikában tanultak szerint egyensúlyi egyenletekből meghatározzuk a támasztóerőrendszert, majd megrajzoljuk az igénybevételi ábrákat.

B.2 Kidolgozott feladatok

2-1 Feladat

Az egyik végén befogott és B-ben görgővel megtámasztott tartót végig állandó intenzitású megoszló erőrendszer terheli. A tartó hajlítási merevsége állandó. (2.1.a ábra)

2.1.a ábra



Adatok:

$$a = 3 \text{ m},$$

$$b = 1 \text{ m},$$

$$q = 5 \text{ kN/m}$$

- Feladat:** 1. Rajzolja meg a tartó hajlítónyomatéki, majd nyíróerő ábráját !
2. Az igénybevételi ábrákból olvassa le a támasztóerőrendszert!

Megoldás :

Az A befogásnál 3, a B görgős támasznál 1 ismeretlen támasztóerő-, illetve nyomatékkomponens ébredhet, tehát a tartó megtámasztása egyszerűen statikailag határozatlan. A feladatot erőmódszerrel oldjuk meg, ennek első lépése a törzstartó felvétele. Egy lehetséges törzstartót mutat a 2.1. b ábra. Az A befogás helyett felvett csuklóban nyomaték nem ébredhet, ezért a törzstartó A keresztmetszetében egy ismeretlen X_1 nyomatékot kell működtetni. Ennek nagyságát az

$$a_{11} X_1 + a_{10} = 0$$

feltételi egyenletből számíthatjuk ki, amely azt fejezi ki, hogy a tartó A keresztmetszetének szögelfordulása 0.

Az a_{11} , egységtényező a törzstartó A keresztmetszetének elfordulása az $X_1 = 1$ nyomaték, az a_{10} terhelési tényező pedig a törzstartó A keresztmetszetének elfordulása az eredeti teher hatására. Ezek számításához meg kell rajzolni az M_0 nyomatéki ábrát a törzstartóra ható eredeti teherből és az M_1 ábrát a törzstartóra ható $X_1 = 1$ nyomatékból.

A könnyebb kezelhetőség érdekében az M_0 helyett a szuperpozíció alkalmazásával az M'_0 és az M''_0 ábrákat rajzoljuk fel

$$M'_0 + M''_0 = M_0.$$

M'_0 meghatározásánál csak az $\overline{AB}$ -on működtetjük a q megoszló terhet, majd a $\overline{BC}$ -on, és ehhez tartozik az M''_0 (2.1. c-h ábrák).

Mivel a feladatban az EI hajlítási merevség állandó, ezzel végigszorozva a feltételi egyenletet,

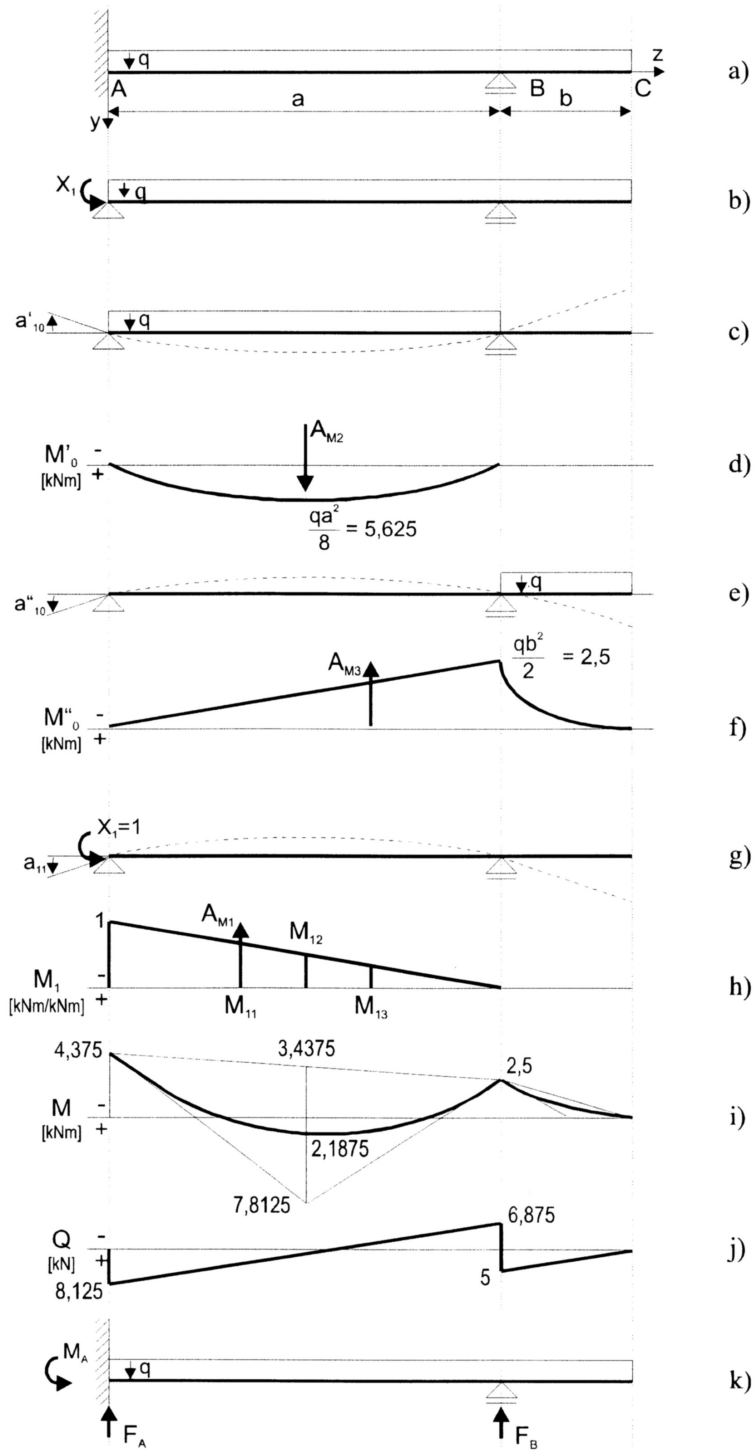
$$a'_{11} X_1 + a'_{10} = 0$$

kapjuk, ahol

$$a'_{11} = EI a_{11} = \int M_1^2 ds, \text{ és}$$

$$a'_{10} = EI a_{10} = \int M_1 M_0 ds.$$

2.1. ábra



Az integrálok értéke a Betti-tétel alkalmazásánál ismertetett szabályok szerint:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \int M_1^2 ds = A_{M1} M_{11} = -\frac{1 \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3}(-1) = \frac{a}{3} = 1 \text{ m}, \\ a'_{10} &= \int M_1 M_0 ds = \int M_1 M'_0 ds + \int M_1 M''_0 ds = \\ &= A_{M2} \cdot M_{12} + A_{M3} \cdot M_{13} = \frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{qb^2}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right) = \\ &= -\frac{qa^3}{24} + \frac{qb^2 a}{12} = -\frac{5 \cdot 3^3}{24} + \frac{5 \cdot 1^2 \cdot 3}{12} = -4,375 \text{ kNm}^2. \end{aligned}$$

A feltételi egyenletből X_1 -et kifejezve, és fenti értékeket behelyettesítve az

$$X_1 = -\frac{a'_{10}}{a'_{11}} = -\frac{-4,375}{1} = 4,375 \text{ kNm} \cdot \text{t} \quad \text{kapjuk.}$$

Az eredeti tartó nyomatéki ábrája ezután az $M = M_0 + M_1 X_1$ egyenlet felhasználásával a következőképp adódik. Először kiszámítjuk a nyomaték értékét a jellemző (A, B, C) keresztmetszetekben.

$$\begin{aligned} M_A &= M'_{0A} + M''_{0A} + M_{1A} \cdot X_1 = 0 + 0 - 1 \cdot 4,375 = -4,375 \text{ kNm}, \\ M_B &= M'_{0B} + M''_{0B} + M_{1B} \cdot X_1 = 0 - 2,5 + 0 = -2,5 \text{ kNm}, \\ M_C &= M'_{0C} + M''_{0C} + M_{1C} \cdot X_1 = 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Az AB -t q -áll. megoszló teher terheli, ezért az M_A -t és M_B -t összekötő szakasz közepén levő értékhez képest a nyomatéki ábra belógása

$$\frac{qa^2}{8} = \frac{5 \cdot 3^2}{8} = 5,625 \text{ kNm},$$

amit a középtértéktől egyszer felmérve megkapjuk a nyomaték értékét az AB közepén, még egyszer felmérve, és az így kapott pontot M_A -val és M_B -vel összekötve pedig a parabola érintőit kapjuk A-ban, illetve B-ben. Hasonlóan rajzolhatjuk meg a nyomatéki ábrát a tartó BC szakaszán is (feladatunkban ez megegyezik az M_0 ábra ezen szakaszával) (2.1.i. ábra).

A nyíróerőábra a statikában tanult

$$Q = \frac{dM}{dz}$$

összefüggés felhasználásával rajzolható meg. Mivel az $M(z)$ függvény másodfokú, $Q(z)$ lineárisan változó szakaszokból áll, és adott pontban az értékét a nyomatéki ábra azon pontbeli érintőjének iránytangense adja (2.1.j. ábra).

Az M ábráról leolvasható az

$$M_A = 4,375 \text{ kNm} (\curvearrowright)$$

támasztónyomaték, a Q ábráról pedig az A és B keresztmetszetek alatti ugrások nagysága, az

$$F_A = 8,125 \text{ kN} (\uparrow) \text{ és az}$$

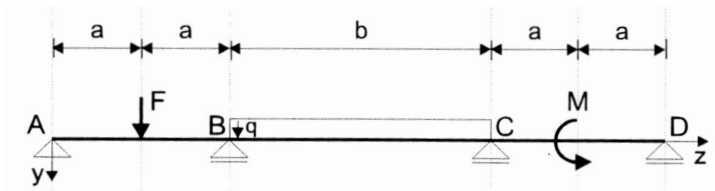
$$F_B = 11,875 \text{ kN} (\uparrow)$$

támasztóerők.

2-2 Feladat

Adott a 2.2.a ábrán látható vegyesterhelésű háromnyílású folytatólagos tartó, melynek hajlítási merevsége állandó.

2.2.a ábra



Adatok:

$$a = 2 \text{ m},$$

$$b = 6 \text{ m},$$

$$F = 20 \text{ kN},$$

$$q = 8 \text{ kN/m},$$

$$M = 16 \text{ kNm}.$$

Feladat: 1. Rajzolja meg a tartó hajlítónyomatéki, majd nyíróerő ábráját!

2. Olvassa le a támasztóerőrendszert a nyíróerő ábrából!

Megoldás:

A vázolt tartó statikailag kétszeresen határozatlan. A legcélszerűbb törzstartót akkor kapjuk, ha a B és C támaszok fölé beiktatunk egy-egy belső csuklót, és ismeretlenként egy-egy nyomatékpárt működtetünk (2.2.b ábra).

A feltételi egyenletek

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{10} = 0 \quad \text{és}$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{20} = 0$$

kifejezik, hogy a törzstartó B és C keresztmetszetében a relatív szögelfordulás nulla kell, hogy legyen. Az egység- és terhelési tényezők meghatározásához szükséges terheket a hozzájuk tartozó nyomatéki ábrákkal a 2.2.c-h ábrák mutatják.

Mivel az EI -áll., az egység- és terhelési tényezők EI -szeresét számoljuk a továbbiakban

$$(a'_{ij} = EI a_{ij}).$$

$$a'_{10} = \int M_1 M_0 ds = \sum_{i=1}^3 A_{Mi} M_{1i} =$$

$$= \frac{20 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{20 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 92 \text{ kNm}^2,$$

$$a'_{20} = \int M_2 M_0 ds = \sum_{i=3}^5 A_{Mi} M_{2i} = \frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{8 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{8 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 74 \frac{2}{3} \text{ kNm}^2,$$

$$a'_{11} = \int M_1^2 ds = A_{M6} \cdot M_{16} + A_{M7} \cdot M_{17} = \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ m}.$$

A szimmetria miatt

$$a'_{22} = a'_{11} = \frac{10}{3} \text{ m},$$

$$a'_{12} = a'_{21} = \int M_1 M_2 ds = A_{M7} \cdot M_{27} = \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1 \text{ m}.$$

A feltételi egyenletek ezek után:

$$\frac{10}{3} X_1 + X_2 + 92 = 0 \quad \text{és}$$

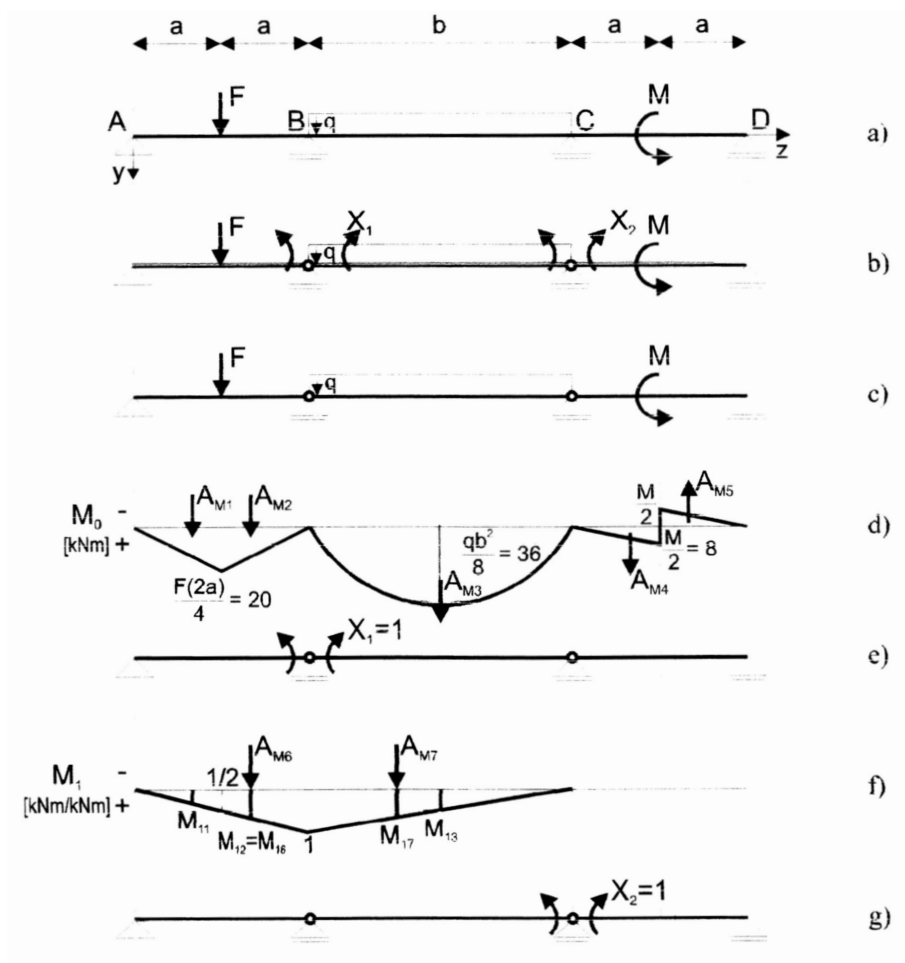
$$X_1 + \frac{10}{3} X_2 + 74 \frac{2}{3} = 0,$$

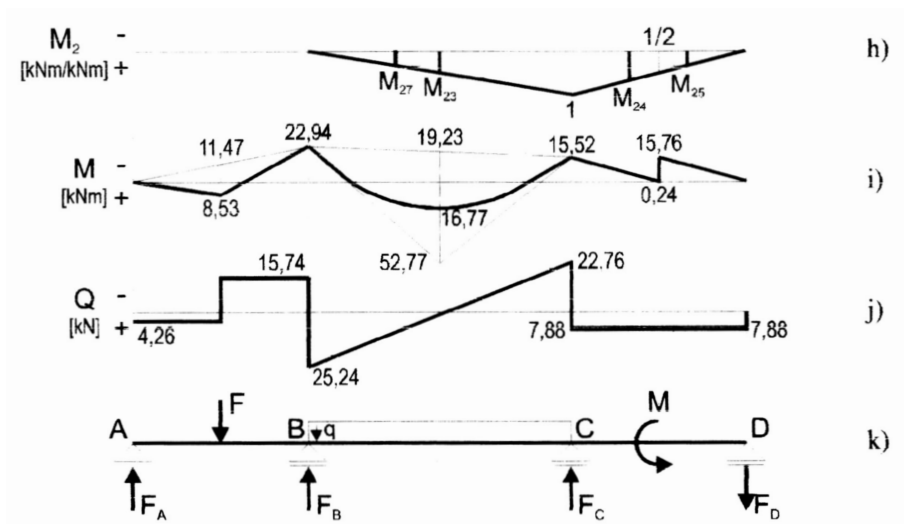
ahonnan

$$X_1 = -22,945 \text{ kNm} \quad \text{és}$$

$$X_2 = -15,516 \text{ kNm}.$$

2.2 ábra





Az eredeti tartó nyomatéki ábrája:

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \quad (2.2.i \text{ ábra})$$

Az M ábra megfelelő pontjaiban az érintők irántangense adja a nyíróerő értékét. Felhasználva még, hogy a nyíróerő függvény eggyel alacsonyabb fokú, mint a nyomatéki, a $Q(z)$ ábra megrajzolható (2.2.j ábra).

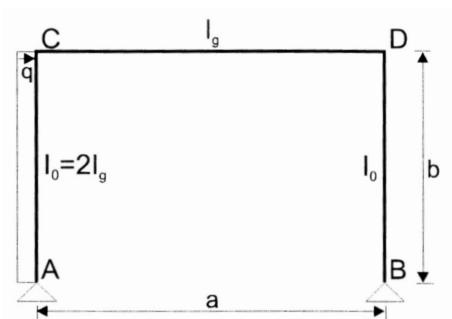
A megfelelő keresztmetszetekben a nyíróerő ábra ugrása előjelhelyesen adja a támasztóerőket.

$$\begin{aligned} F_A &= 4,26 \text{ kN } (\uparrow) \\ F_B &= 40,98 \text{ kN } (\uparrow) \\ F_C &= 30,64 \text{ kN } (\uparrow) \\ F_D &= 7,88 \text{ kN } (\downarrow) \end{aligned}$$

2-3 Feladat

A 2.3.a ábrán látható kéttámaszú keret oszlopainak hajlítási merevsége kétszerese a gerendáénak. A bal oldali oszlopot végig állandó intenzitású megoszló erő terheli.

2.3.a ábra



Adatok

$$a = 9 \text{ m,}$$

$$b = 6 \text{ m,}$$

$$q = 2 \text{ kN/m}$$

Feladat: Rajzolja meg a tartó igénybevételi ábráit, és határozza meg a támasztóerőrendszert!

Megoldás:

A tartó statikailag egyszeresen határozatlan. Egy lehetséges törzstartót mutat a 2.3.b ábra (választhatunk volna olyan törzstartót is, hogy a CD szakasz valamely pontján beiktatunk egy belső csuklót).

A feltételi egyenlet:

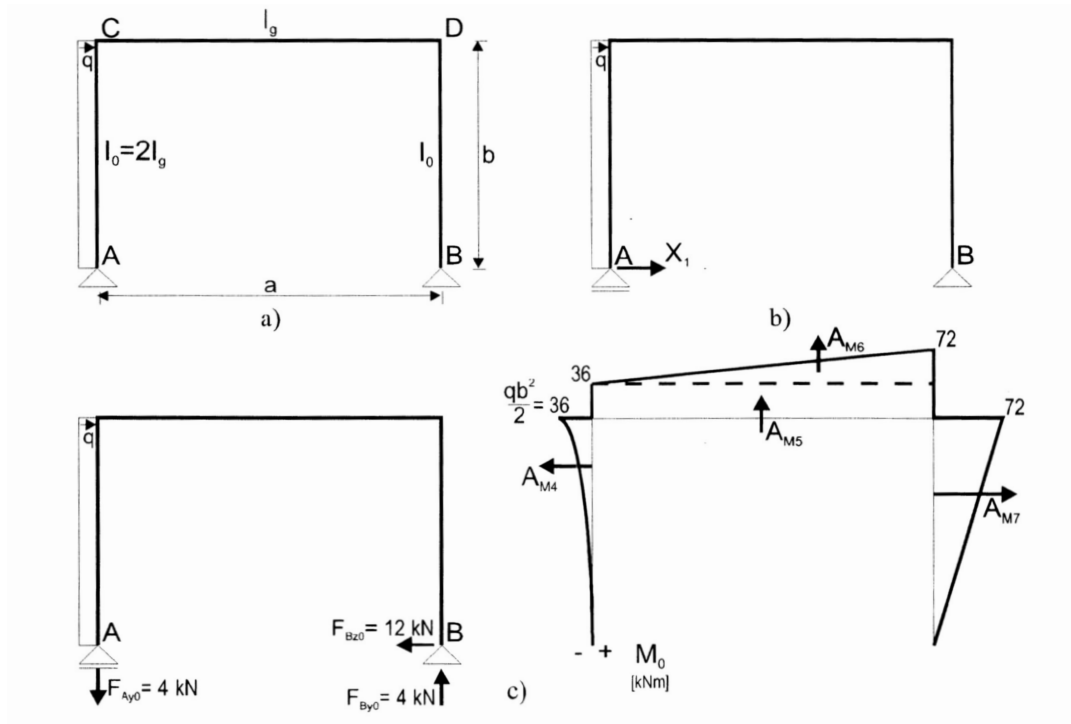
$$a_{11} X_1 + a_{10} = 0$$

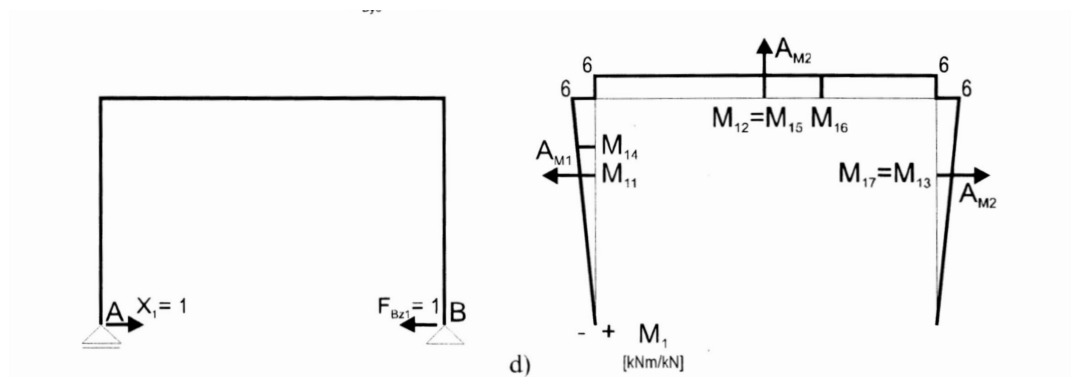
kifejezi, hogy a törzstartó A keresztmetszetének vízszintes eltolódása nulla kell hogy legyen, hiszen az eredeti tartó A keresztmetszete sem tolódhat el vízszintesen.

A 2.3.c ábra mutatja a törzstartót a ráható eredeti teherrel és a hozzá tartozó M_0 nyomatéki ábrát, míg a 2.3.d-n az $X_1 = 1$ teher és az ebből származó M_1 nyomatéki ábra látható.

Az egység- és terhelési tényező számításánál figyelni kell arra, hogy az oszlopok és a gerenda inerciája különböző!

2.3. ábra





A számításoknál mindenütt kN és m hatványait használjuk, így az eredményt is ennek megfelelően kapjuk.

$$a_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{A_{M1} \cdot M_{11} + A_{M3} \cdot M_{13}}{EI_0} + \frac{A_{M2} \cdot M_{12}}{EI_g} = \frac{\frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2}{2EI_g} + \frac{6 \cdot 9 \cdot 6}{EI_g} =$$

$$= \frac{72 + 324}{EI_g} = \frac{396}{EI_g}$$

$$a_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} ds = \frac{A_{M4} \cdot M_{14} + A_{M7} \cdot M_{17}}{EI_0} + \frac{A_{M5} \cdot M_{15} + A_{M6} \cdot M_{16}}{EI_g} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 + \frac{72 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6}{2EI_g} + \frac{36 \cdot 9 \cdot 6 + \frac{9 \cdot 36}{2} \cdot 6}{EI_g} = \frac{162 + 432 + 1944 + 972}{EI_g} = \frac{3510}{EI_g}$$

Behelyettesítve

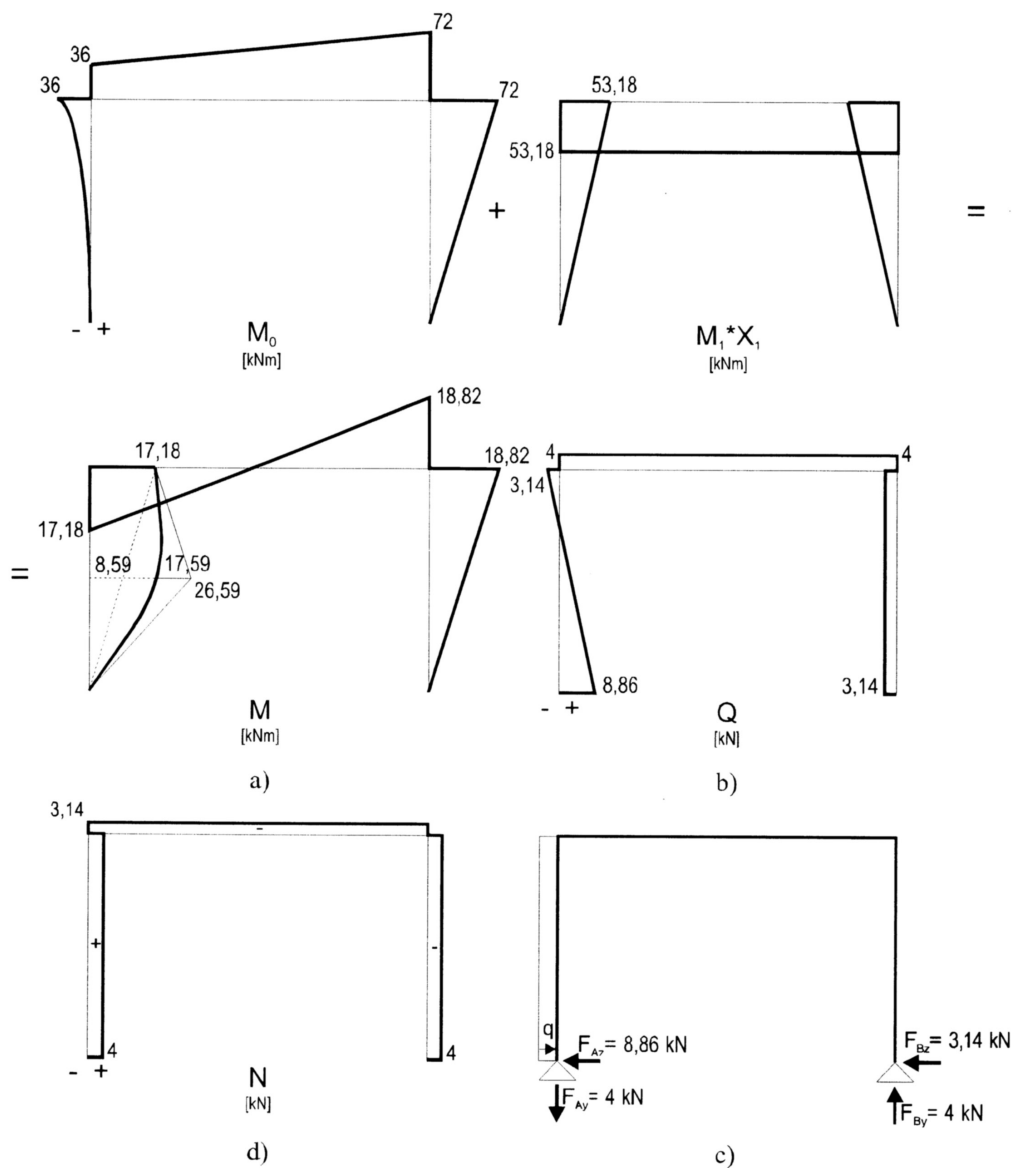
$$X_1 = -\frac{a_{10}}{a_{11}} = -\frac{3510 \cdot EI_g}{EI_g \cdot 396} = -8,86 \text{ kN} (\leftarrow)$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy az X_1 erő a feltételezettel ellentétes irányú. Az is látható a számításból, hogy a nyomatékok nagysága csak az inerciák arányától függ, a nagyságuk nem befolyásolja az eredményt.

A nyomatéki ábrák összegzését a 2.4.a ábra mutatja, ebből deriválással kapjuk a nyíróerő ábrát (2.4.b ábra, a módszer ugyanaz, mint a 2-1, 2-2 feladatoknál).

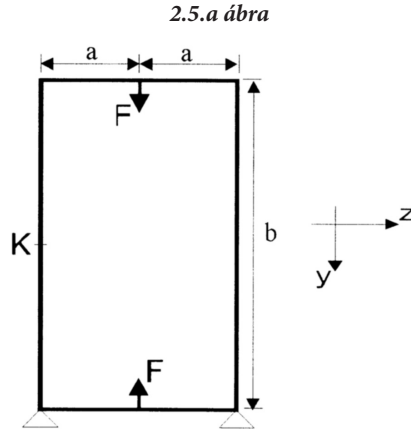
Ahhoz, hogy a normálerő ábrát meg tudjuk rajzolni, célszerű a támasztóerőrendszert leolvasni a Q ábráról (2.2.c ábra), ennek felhasználásával kapjuk a normálerő ábrát (2.4.d ábra).

2.4. ábra



2-4 Feladat

A 2.5.a ábra két koncentrált erővel terhelt zárt keretet mutat.



Adatok:

$$a = 0,3 \text{ m},$$

$$b = 1 \text{ m},$$

$$F = 2 \text{ kN},$$

$$EI = \text{állandó}.$$

Feladat: Rajzolja meg a keret igénybevételi ábráit! Csak a hajlításból származó belső energiával számoljon!

Megoldás:

A keret külső megtámasztása statikailag határozott, de mivel egyensúlyi erőrendszer terheli, a támasztóerők értéke nulla. A tartó belső felépítése statikailag háromszorosan határozatlan. Határozottá úgy tehetjük, ha valahol elvágjuk, és az elvágás helyén működtetjük az ismeretlen igénybevételeket.

A szimmetria nyújtotta előnyök kihasználására célszerű például valamelyik oszlop közepén elvágni. A választott törzstartót az ismeretlenekkel együtt a 2.5.b ábrán látjuk.

A feltételi egyenletek előírják, hogy a törzstartó K keresztmetszetében a relatív elmozdulások értéke nulla.

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{10} = 0 = \Delta w_k,$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{20} = 0 = \Delta v_k,$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{30} = 0 = \Delta \varphi_k.$$

Következő lépésként meg kell rajzolnunk az M_0 , M_1 , M_2 , M_3 ábrákat. A törzstartót a megfelelő terhekkel és a hozzá tartozó nyomatéki ábrával mutatják a 2.5.c-f ábrák. A terhelési és egységtegyezők számításánál felhasználjuk, hogy egy szimmetrikus és egy antimetrikus ábra szorzatának integrálja nulla, így

$$a_{10} = a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0.$$

Szimmetrikus ábrák „találkozásánál” vagy amikor az antimetrikus ábrát önmagával szorozzuk, kétszereződik az egyik félre kapott eredményt. Miután $EI = \text{állandó}$, a feltételi egyenleteket szorozzuk EI -vel, s az így kapott tényezőket ($a'_{ij} = EI a_{ij}$) számoljuk.

2.5. ábra

$$a'_{20} = \int M_2 M_0 ds = 2 \cdot (A_{M1} \cdot M_{21} + A_{M2} \cdot M_{22}) = 2 \cdot \left(\frac{0,6 \cdot 0,3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \right) = 0,45,$$

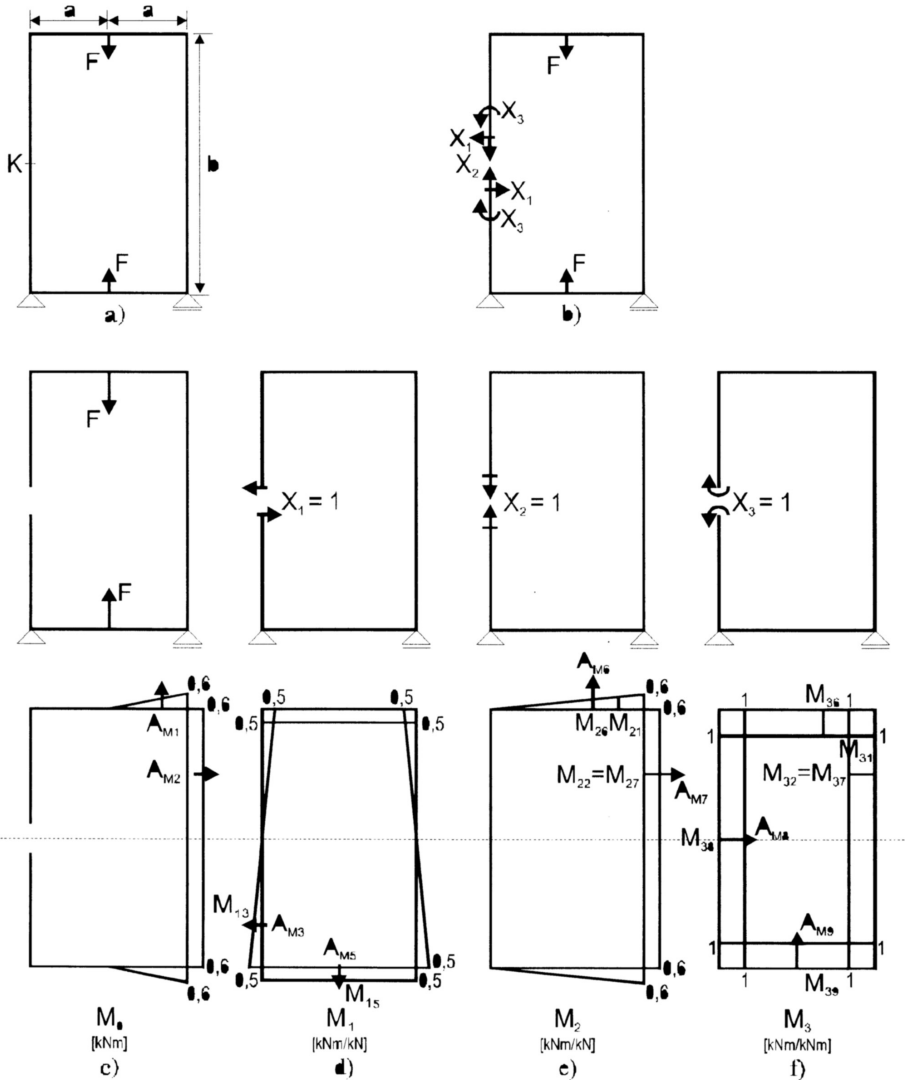
$$a'_{30} = \int M_3 M_0 ds = 2 \cdot (A_{M1} \cdot M_{31} + A_{M2} \cdot M_{32}) = 2 \cdot \left(\frac{-0,6 \cdot 0,3}{2} \cdot 1 - 0,6 \cdot 0,5 \cdot 1 \right) = -0,78,$$

$$a'_{11} = \int M_1^2 ds = 4 \cdot A_{M3} \cdot M_{13} + 2 \cdot A_{M5} \cdot M_{15} = 4 \cdot \frac{0,5 \cdot 0,5}{2} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,467,$$

$$a'_{22} = \int M_2^2 ds = 2 \cdot (A_{M6} \cdot M_{26} + A_{M7} \cdot M_{27}) = 2 \cdot \left(\frac{0,6 \cdot 0,6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \right) = 0,504,$$

$$a'_{23} = \int M_2 M_3 ds = 2 \cdot (A_{M6} \cdot M_{36} + A_{M7} \cdot M_{37}) = 2 \cdot \left(\frac{-0,6 \cdot 0,6}{2} \cdot 1 - 0,6 \cdot 0,5 \cdot 1 \right) = -0,96,$$

$$a'_{33} = \int M_3^2 ds = 2 \cdot (A_{M8} \cdot M_{38} + A_{M9} \cdot M_{39}) = 2 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0,6 \cdot 1) = 3,2.$$



Behelyettesítve az egyenletrendszerbe:

$$\begin{aligned} 0,467X_1 &= 0, \\ 0,504 X_2 - 0,96 X_3 + 0,45 &= 0, \\ -0,96 X_2 + 3,2 X_3 - 0,78 &= 0. \end{aligned}$$

Amiből

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \\ X_2 &= -1 \text{ kNm}, \\ X_3 &= -0,0563 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

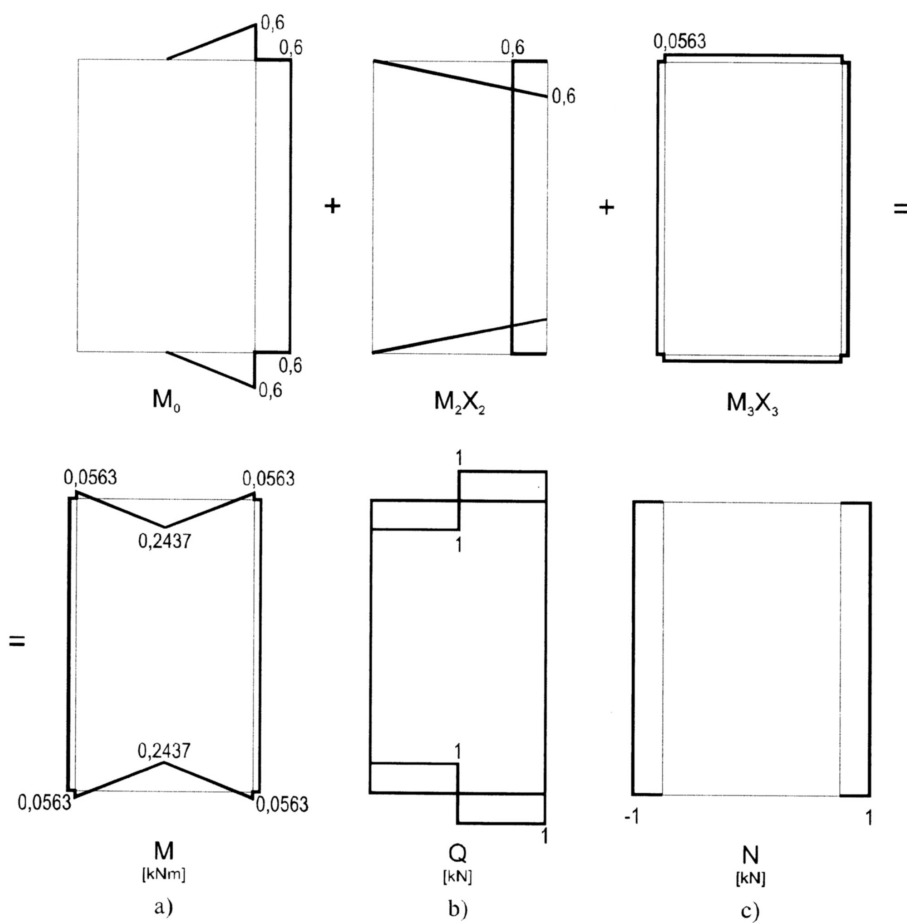
A zárt keret nyomatéki ábrája az

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 = M_0 - M_2 - 0,0563 \cdot M_3$$

összefüggés segítségével határozható meg (2.6.a ábra).

A nyomatéki ábrából deriválással kapjuk a nyíróerő ábrát /az előző feladatokhoz hasonlóan/, és ennek felhasználásával a normálerő ábrát. (2.6.b,c ábra).

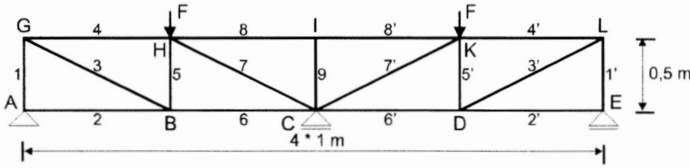
2.6 ábra



2-5 Feladat

Adott a két koncentrált erővel terhelte rácsos tartó. A keresztmetszetük hidegen hajlított téglalap alakú zárt szelvény, melyek területét a 2.1 táblázat tartalmazza.

2.7.a ábra



Adatok:

$$F = 15 \text{ kN},$$

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

Feladat: Határozza meg a rúderőket!

Megoldás:

A rácsos tartó belső felépítése stabil, statikailag határozott, a külső megtámasztás viszont statikailag egyszeresen határozatlan. A számításhoz választott törzstartót mutatja a 2.7.b ábra.

A feltételi egyenlet:

$$a_{11} X_1 + a_{10} = 0$$

kifejezi, hogy a törzstartó C keresztmetszetének függőleges eltolódása 0.

A csomópontjaiban terhelte rácsos tartó rúdjaiknak igénybevétele normálereő, így az egység- és terhelési tényezők a rúderőkből számíthatók a szimmetriát felhasználva:

$$a_{11} = \left(\sum_{i=1}^8 \frac{S_{1i}^2 \cdot L_i}{EA_i} \right) \cdot 2 + \frac{S_{19}^2 \cdot L_9}{EA_9}, \text{ illetve}$$

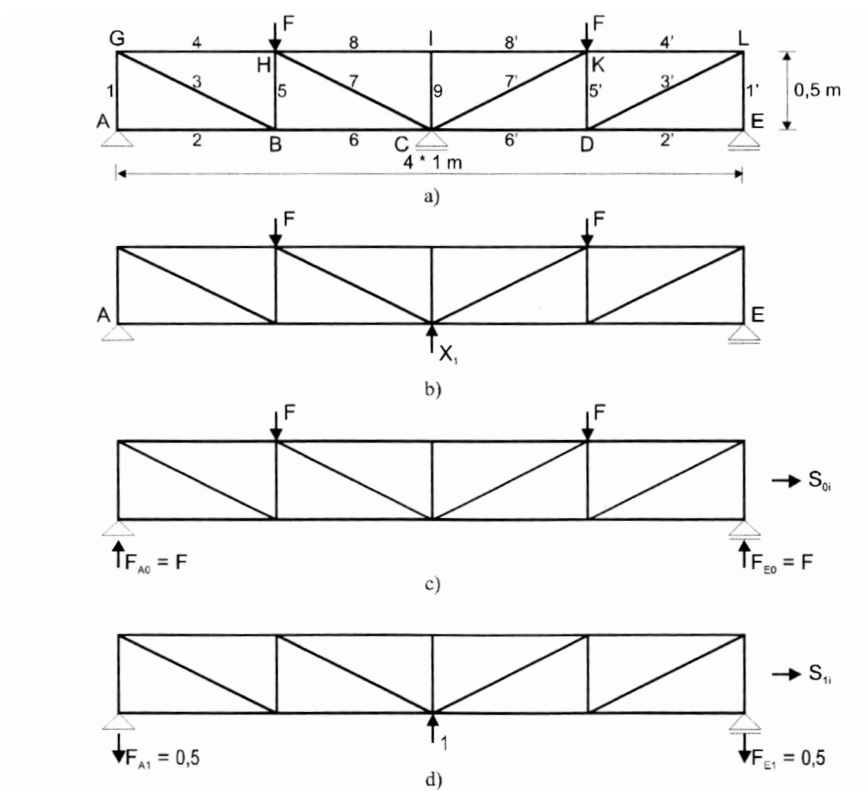
$$a_{10} = \left(\sum_{i=1}^8 \frac{S_{1i} \cdot S_{0i} \cdot L_i}{EA_i} \right) \cdot 2 + \frac{S_{19} \cdot S_{09} \cdot L_9}{EA_9} \quad \text{módon.}$$

A 2.7.c és d ábra mutatja, hogy a törzstartóra milyen terheket kell működtetni az S_{0i} illetve S_{1i} rúderők számításához, amit most nem részletezünk. /1d. Szerkezetek statikája modul/. Az eredményeket táblázatba foglalva mutatja a 2.1 táblázat.

2.1 táblázat

i	A_i	EA_i	L_i	S_{0i}	S_{1i}	$\frac{S_{0i} \cdot S_{1i} \cdot L_i}{EA_i}$	$\frac{S_{1i}^2 \cdot L_i}{EA_i}$
	cm^2	kN cm^2	cm	kN	-	$\frac{1}{\text{cm}}$	$\frac{1}{\text{kNcm}}$
1, 1'	1,73	$3,46 \cdot 10^4$	50	-15	+0,5	$-1,084 \cdot 10^{-2}$	$3,613 \cdot 10^{-4}$
2, 2'	1,73	$3,46 \cdot 10^4$	100	0	0	0	0
3, 3'	1,73	$3,46 \cdot 10^4$	111,8	+33,54	-1,118	$-12,11 \cdot 10^{-2}$	$40,39 \cdot 10^{-4}$
4, 4'	1,73	$3,46 \cdot 10^4$	100	-30	+1	$-8,67 \cdot 10^{-2}$	$28,90 \cdot 10^{-4}$
5, 5'	1,73	$3,46 \cdot 10^4$	50	-15	+0,5	$-1,084 \cdot 10^{-2}$	$3,613 \cdot 10^{-4}$
6, 6'	1,73	$3,46 \cdot 10^4$	100	+30	-1	$-8,67 \cdot 10^{-2}$	$28,90 \cdot 10^{-4}$
7, 7'	3,9	$7,8 \cdot 10^4$	111,8	0	-1,118	0	$17,92 \cdot 10^{-4}$
8, 8'	1,73	$3,46 \cdot 10^4$	100	-30	+2	$-17,34 \cdot 10^{-2}$	$115,6 \cdot 10^{-4}$
9	1,73	$3,46 \cdot 10^4$	50	0	0	0	0
						$\Sigma -48,96 \cdot 10^{-2}$	$\Sigma 2,39 \cdot 10^{-2}$

2.7 ábra



$$a_{10} = 2 \cdot (-48,96 \cdot 10^{-2}) = -97,92 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{cm}},$$

$$a_{11} = 2 \cdot 2,39 \cdot 10^{-2} = 4,78 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{kNcm}}.$$

A feltételi egyenletből

$$X_1 = -\frac{a_{10}}{a_{11}} = -\frac{-97,92}{4,78} = 20,49 \text{ kN}$$

X_1 ismeretében a rúderők

$$S_1 = S_{1'} = S_{01} + X_1 S_{11} = -15 + 20,49 \cdot 0,5 = -4,75 \text{ kN},$$

$$S_2 = S_{2'} = S_{02} + X_1 S_{12} = 0,$$

$$S_3 = S_{3'} = S_{03} + X_1 S_{13} = 33,54 + 20,49 \cdot (-1,118) = +10,63 \text{ kN},$$

$$S_4 = S_{4'} = S_{04} + X_1 S_{14} = -30 + 20,49 \cdot 1 = -9,51 \text{ kN},$$

$$S_5 = S_{5'} = S_{05} + X_1 S_{15} = -15 + 20,49 \cdot 0,5 = -4,75 \text{ kN},$$

$$S_6 = S_{6'} = S_{06} + X_1 S_{16} = 30 + 20,49 \cdot (-1) = +9,51 \text{ kN},$$

$$S_7 = S_{7'} = S_{07} + X_1 S_{17} = 0 + 20,49 \cdot (-1,118) = -22,91 \text{ kN},$$

$$S_8 = S_{8'} = S_{08} + X_1 S_{18} = -30 + 20,49 \cdot 2 = 10,98 \text{ kN},$$

$$S_9 = 0.$$

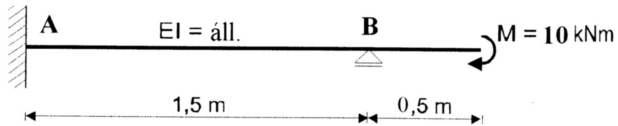
C.2 Gyakorló feladatok

2-6 Feladat

A 2.8.-2.12 ábrákon statikailag határozatlan tartók láthatóak.

Feladat: 1. Határozza meg a tartók igénybevételeit és
2. támasztóerőrendszerét!

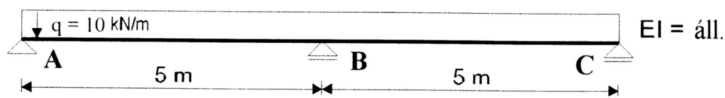
2.8. ábra



Eredmények a 2.8. ábrához

$$\begin{aligned} F_A &= 10 \text{ kN} \downarrow \\ F_B &= 10 \text{ kN} \uparrow \\ M_A &= 5 \text{ kNm} \curvearrowright \end{aligned}$$

2.9. ábra



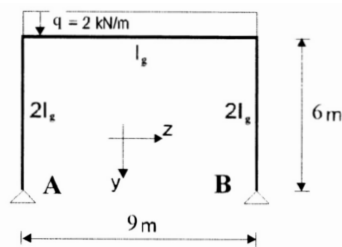
Eredmények a 2.9. ábrához

$$\begin{aligned} F_A &= 18,75 \text{ kN} \uparrow \\ F_B &= 62,5 \text{ kN} \uparrow \\ F_C &= 18,75 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

Eredmények a 2.10. ábrához

$$\begin{aligned} F_{Az} &= 1,841 \text{ kN} \rightarrow \\ F_{Ay} &= 9 \text{ kN} \uparrow \\ F_{Bz} &= 1,841 \text{ kN} \leftarrow \\ F_{By} &= 9 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

2.10. ábra



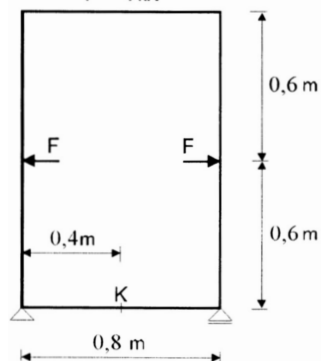
2.11. ábra

Eredmények a 2.11. ábrához

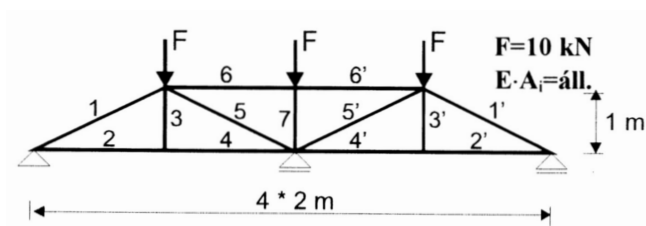
$$\begin{aligned} N_K &= 2 \text{ kN} \\ Q_K &= 0 \\ M_K &= 0,36 \text{ kNm} \end{aligned}$$

EI = áll.

F = 4 kN



2.12. ábra



Eredmények a 2.12. ábrához

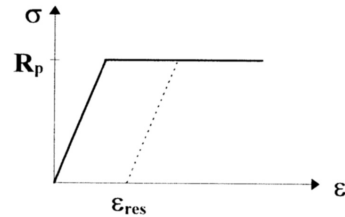
$$\begin{aligned} S_1 &= S_{1'} = -21,09 \text{ kN} \\ S_2 &= S_{2'} = S_4 = S_{4'} = 18,863 \text{ kN} \\ S_3 &= S_{3'} = 0 \\ S_5 &= S_{5'} = -1,271 \text{ kN} \\ S_6 &= S_{6'} = -17,726 \text{ kN} \\ S_7 &= -10 \text{ kN} \end{aligned}$$

3. KÉPLÉKENYSÉGTAN

A.3 Elméleti összefoglaló

A szilárd test képlékeny, illetve rugalmas-képlékeny viselkedésének vizsgálatát az ideálisan rugalmas-képlékeny anyagmodell alapján végezzük (3.1 ábra).

3.1 ábra



A képlékeny állapotba került anyagrészekben fellépő feszültség folyáshatár (R_p) nagyságú és állandó értékű, és ebből az állapotból való visszaterhelés után maradó fajlagos nyúlás tapasztalható (ϵ_{res}).

A szilárd test képlékeny viselkedésére az alábbi határállapotok jellemzők, melyeket röviden összefoglalunk.

Képlékenységi határállapotok:

1. Első folyás, vagy rugalmassági határállapot

A szilárd test valamely pontjában, vagy szélső szálában „elsőként” R_p feszültség lép fel, míg a további részek rugalmas állapotban maradnak.

A hajlított rúd keresztmetszetének rugalmas határnyomatéka: $M_{rug} = R_p \cdot W_x$,

ahol: W_x a (rugalmas) keresztmetszeti tényező.

2. A keresztmetszet teljes folyásának határállapota

A szilárd test valamely keresztmetszetének minden pontjában R_p nagyságú feszültség keletkezik. Ebben az állapotban a keresztmetszet hajlítómerevséggel nem rendelkezik és úgy viselkedik terhelés növekedésekor, mint egy csukló. Ehhez az állapothoz kötjük a képlékeny csukló (Kazinczy-csukló) fogalmát.

A hajlított rúd keresztmetszetének képlékeny határnyomatéka: $M_{pl} = R_p \cdot W_{pl} = R_p \cdot 2S_{xfél}$,

ahol: W_{pl} a plasztikus keresztmetszeti tényező,

$S_{xfél}$ a semleges tengely által felezett keresztmetszeti területrészek egyikének x tengelyre számított statikai nyomatéka.

3. Folyási mechanizmus határállapota

A stabil megtámasztású (statikailag határozott, vagy határozatlan) szerkezetben a labilis rúdlánc (folyási mechanizmus) akkor alakul ki, ha a statikai határozatlansági fok számánál eggyel több képlékeny csukló alakul ki.

Ez a határállapot statikailag határozott hajlított rúdnál egybeesik a keresztmetszet teljes folyásának határállapotával, statikailag határozott húzott rúdnál pedig az első folyás és a keresztmetszet teljes folyásának határállapotával is.

4. Képlékeny törés határállapota

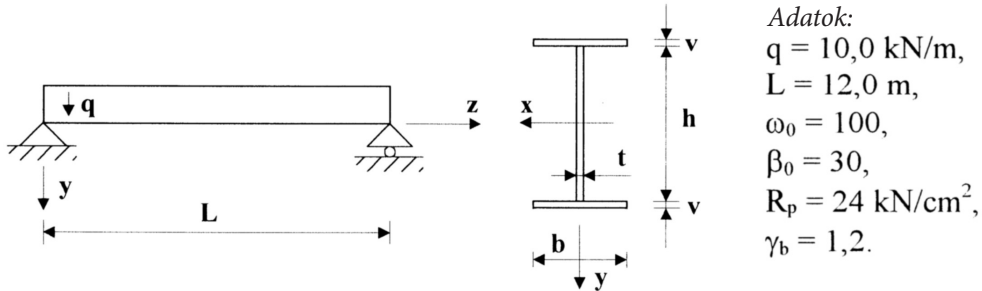
A keresztmetszet jelentős kontrahálás, valamint az anyag felkeményedése után szívós viselkedést mutatva törik el.

B.3 Kidolgozott feladatok

3-1 Feladat

Az 3.2 ábrán vázolt, állandó megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó I-keresztmetszetű hegesztett szelvényből készül

3.2 ábra



- Feladat:**
1. Méretezzük a tartót rugalmas határállapotra, súlyminimumra!
 2. Határozzuk meg a tartó képlékeny határteherbírását!
 3. Határozzuk meg a képlékeny teherbírási tartalékot!

Megoldás: 1. A tartó mértékadó hajlító igénybevétele a támaszok között keletkezik:

$$M_M = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{10 \cdot 12^2}{8} = 180,0 \text{ kNm}.$$

A szükséges keresztmetszeti tényező:

$$W_0 = \frac{M_M}{\sigma_H} = \frac{\gamma_b \cdot M_M}{R_p} = \frac{1,2 \cdot 18000}{24} = 900 \text{ cm}^3.$$

Az optimális gerinclemez-magasság:

$$h = h_{\text{opt}} = \sqrt[3]{1,5 \cdot w_0 \cdot \omega_0} = \sqrt[3]{1,5 \cdot 900 \cdot 100} = 51,3 \text{ cm} \Rightarrow h = 520 \text{ mm}.$$

Gerinclemez vastagsága:

$$t_{\text{opt}} = \frac{h_{\text{opt}}}{\omega_0} = \frac{51,3}{100} = 0,513 \text{ cm} \Rightarrow t = 6 \text{ mm}.$$

Övlemez vastagsága:

$$v_{\text{opt}} = \frac{h_{\text{opt}}}{\sqrt{2 \cdot \omega_0 \cdot \beta_0}} = \frac{51,3}{\sqrt{2 \cdot 100 \cdot 30}} = 0,662 \text{ cm} \Rightarrow v = 7 \text{ mm}.$$

Övlemez szélessége:

$$b_{\text{opt}} = v_{\text{opt}} \cdot \beta_0 = 0,662 \cdot 30 = 19,86 \text{ cm} \Rightarrow b = 200 \text{ mm}.$$

2. a, A keresztmetszeti jellemzők:

– másodrendű nyomaték a hajlítás tengelyére:

$$I_x = \frac{t \cdot h^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{b \cdot v^3}{12} + b \cdot v \cdot \left(\frac{h+v}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_x = \frac{0,6 \cdot 52^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{20 \cdot 0,7^3}{12} + 20 \cdot 0,7 \cdot \left(\frac{52 + 0,7}{2} \right)^2 \right] = 26472 \text{ cm}^4.$$

– keresztmetszeti tényező:

$$W_x = \frac{2 \cdot I_x}{h + 2v} = \frac{2 \cdot 26472}{52 + 2 \cdot 0,7} = 991,5 \text{ cm}^3.$$

– plasztikus keresztmetszeti tényező:

$$\begin{aligned} W_{pl} &= 2 \cdot S_{xfél} = 2 \cdot \left[\frac{t \cdot h^2}{8} + b \cdot v \cdot \frac{h+v}{2} \right] = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{0,6 \cdot 52^2}{8} + 20 \cdot 0,7 \cdot \frac{52 + 0,7}{2} \right] = 1143,4 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

b, A képlékeny határteherbírás:

$$M_{pl} = \frac{R_p}{\gamma_b} \cdot W_{pl} = \frac{24}{1,2} \cdot 1143,4 = 22868 \text{ kNcm} = 228,68 \text{ kNm}.$$

3. A képlékeny teherbírási tartalék:

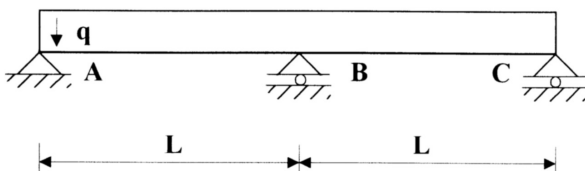
$$\gamma_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_x} = \frac{1143,4}{991,5} = 1,152.$$

A képlékeny teherbírási tartalék %-os értéke: 15,2 %.

3-2 Feladat

A 3.3 ábrán állandó megoszló erővel terhelt, melegen hengerelt I-szelvényű, háromtámaszú tartót vázoltunk.

3.3 ábra



Adatok:

$L = 8,0 \text{ m},$

$R_p = 24 \text{ kN/cm}^2,$

$\gamma_b = 1,2,$

Szelvények:

a, I 400 MSZ 325,

b, IPE 450.

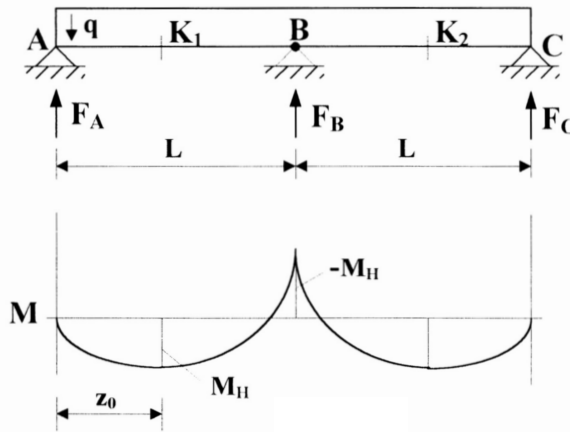
Feladat: 1. Határozzuk meg a tartó teherbírását mindkét szelvény esetén!

2. Végezzünk összehasonlító számítást a keresztmetszetek gazdaságosságára vonatkozóan, a gazdaságosság mértékéül a W_{pl}/A viszonyszámot választva!

Megoldás: 1. Rajzoljuk meg a tartó hajlítónyomatéki ábráját a folyási mechanizmus határállapotára!

A folyási mechanizmus akkor jön létre, mikor a statikai határozatlansági foknál eggyel több képlékeny csukló alakul ki. Jelen esetben a B keresztmetszetben elsőként kialakuló képlékeny csukló után – a szimmetria miatt – egyidőben alakul ki képlékeny csukló a K_1 és K_2 keresztmetszetekben, ezáltal válik a tartó labilis rúdlánccá (3.4 ábra).

3.4 ábra



A folyási mechanizmus határállapotában a K_1 és B keresztmetszetekben fellépő hajlítónyomaték a keresztmetszet képlékeny határnyomatéka:

$$|M_B| = |M_{K1}| = M_H = W_{pl} \cdot R_p$$

Az F_A támasztóerő a folyási mechanizmus határállapotában:

$$F_A = \frac{q \cdot L}{2} - \frac{M_H}{L}.$$

A nyíróerő a K_1 keresztmetszetben:

$$Q_{K1} = 0 = F_A - q \cdot z_0.$$

A K_1 keresztmetszet hajlítói igénybevétele:

$$M_{K1} = F_A \cdot z_0 - \frac{q \cdot z_0^2}{2} = \frac{F_A^2}{q} - \frac{F_A^2}{2q} = \frac{F_A^2}{2q} = M_H = \frac{q \cdot L^2}{8} - \frac{M_H}{2} + \frac{M_H^2}{2q \cdot L^2}.$$

Megoldva az egyenletet q -ra:

$$q_H = \frac{11,66 \cdot M_H}{\gamma_b \cdot L^2} = \frac{11,66 \cdot W_{pl} \cdot R_p}{\gamma_b \cdot L^2}.$$

[5] Vigh Sándor (Szerk.):
Műszaki mechanika
 III. Példatár.
 Budapest:
 Tankönyv-
 kiadó.
 Dunaújváros:
 ME DFK.

a, I 400 MSZ325 melegen hengerelt, lejtőstálpú I-szelvényre

$$W_{pl} = 2 \cdot S_x = 2 \cdot 857 = 1714 \text{ cm}^3, \quad A = 118 \text{ cm}^2,$$

$$q_H = \frac{11,66 \cdot 1714 \cdot 24}{1,2 \cdot 800^2} = 0,624 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 62,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

b, IPE 450 melegen hengerelt, párhuzamos övű I-szelvényre

$$W_{pl} = 2 \cdot S_x = 2 \cdot 851 = 1702 \text{ cm}^3, \quad A = 98,8 \text{ cm}^2,$$

$$q_H = \frac{11,66 \cdot 1702 \cdot 24}{1,2 \cdot 800^2} = 0,62 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 62,0 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

2. A szelvények gazdaságossági mérőszáma:

$$\text{a, I 400: } g = \frac{W_{pl}}{A} = \frac{1714}{118} = 14,525 \text{ (cm)},$$

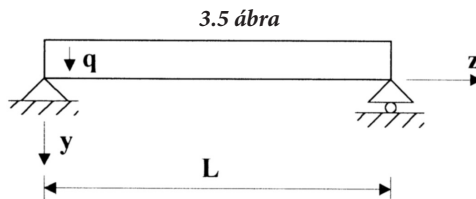
$$\text{b, IPE 450: } g = \frac{W_{pl}}{A} = \frac{1702}{98,8} = 17,226 \text{ (cm)}.$$

Az IPE 450 szelvény **18,6%-kal** kedvezőbb az I 400 szelvénynél.

Megjegyzés: További képlékenységtani feladatok találhatók még [5] II. pontjában.

C.4. Gyakorló feladatok

3-3 Feladat



Adatok:

$L = 1,0 \text{ M},$
 $R_p = 240 \text{ MPa},$
 $q = 2,0 \text{ kN/m},$
 $\gamma_b = 1,2.$

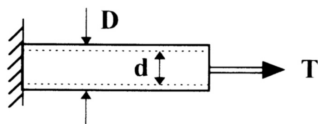
Feladat: Méretezze a vázolt kör keresztmetszetű rudat a képlékeny teherbírási tartalék figyelembevételével!

Eredmények:

$W_{pl} = 1,25 \text{ cm}^3$	$d = 19,6 \text{ mm}$
------------------------------	-----------------------

3-4 Feladat

3.6 ábra



Adatok:

 $D = 100 \text{ mm}$,

 $d = 90 \text{ mm}$,

 $R_{\text{qp}} = 120 \text{ MPa}$,

 $\gamma_b = 1,2$.

Feladat: Határozza meg a vázolt cső keresztmetszetű csavart rúd képlékeny határnyomatékát !

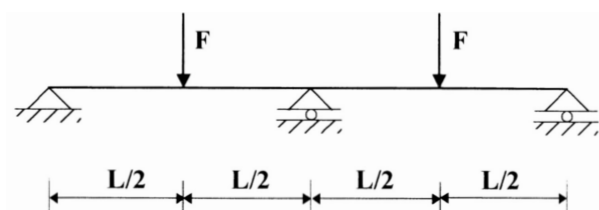
Eredmények:

$$W_{\text{pl}} = 70,88 \text{ cm}^3$$

$$T_{\text{pl}} = 7,08 \text{ kNm}$$

3-5 Feladat

3.7 ábra



Adatok:

 $L = 8,0 \text{ m}$,

Anyag: 37 B MSZ 6280,

Szelvény: IPE 400,

 $\gamma_b = 1,2$.

Feladat: Határozza meg a tartó képlékeny határteherbírását a folyási mechanizmus határállapottára!

Eredmények:

$$W_{\text{pl}} = 1238 \text{ cm}^3$$

$$F_{\text{pl}} = 185,75 \text{ kN}$$

4. SÍKBELI RÚDKIHAJLÁS

A.4. Elméleti összefoglaló

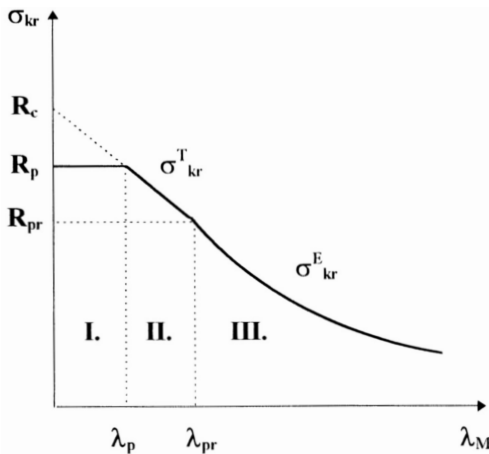
A központosan nyomott rúd stabilitásvizsgálatának összefüggése:

$$\sigma_n = \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{kr}}{\gamma_b} = \frac{\varphi \cdot R_p}{\gamma_b} = \varphi \cdot \sigma_m$$

ahol: σ_n a nyomóerőből származó feszültség,
 σ_{kr} a kritikus feszültség (használata a klasszikus eljárásoknál),
 γ_b a kihajlással szembeni biztonsági tényező,
 R_p folyáshatár,
 φ kihajlási csökkentő tényező.

1, Az ellenőrzés végrehajtása klasszikus módszerrel: Ezen eljárás az Euler és Tetmajer közelítő vizsgálatát foglalja magában.

4.1 ábra



I. Zömök rudak ($0 < \lambda_M \leq \lambda_p$)

$$\lambda_p = \frac{R_c - R_p}{R_c - R_{pr}} \cdot \lambda_{pr}$$

$$\sigma_n = \frac{N}{A} \leq \frac{R_p}{\gamma_b} = \sigma_m$$

A kihajlás nem mértékadó.

II. Közepes karcsúságú rudak.

$$(\lambda_p < \lambda_M \leq \lambda_{pr})$$

$$\lambda_{pr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_{pr}}}$$

$$\sigma_{kr}^T = R_c - \frac{R_c - R_{pr}}{\lambda_{pr}} \cdot \lambda_M$$

$$\sigma_n = \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{kr}^T}{\gamma_b}$$

III. Karcsú rudak ($\lambda_M > \lambda_{pr}$)

$$\sigma_{kr}^E = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_M^2}$$

$$\sigma_n = \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{kr}^E}{\gamma_b}$$

λ_M : a mértékadó rúd karcsúság $\lambda_M = \max(\lambda_x, \lambda_y)$

ahol:

$$\lambda_x = \frac{v_x \cdot L}{i_x}; \lambda_y = \frac{v_y \cdot L}{i_y}$$

v_x, v_y befogási tényezők,
 i_x, i_y inerciasugarak,
 L rúd hossz.

[3] Vigh Sándor–Farkas Beáta: *Műszaki mechanika II. Példatár II. Szilárdságtani táblázatok.*
Dunaújváros: ME DFK.

2, Az ellenőrzés szabványos (MSZ 15024/1) módszere.

Az eljárás figyelembe veszi a rúd kezdeti görbeségét és sajátfeszültségi állapotát, mely a nyomott rúd keresztmetszetének alakjával hozható kapcsolatba.

Az ellenőrzés képlete:

$$\sigma_n = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot \sigma_m$$

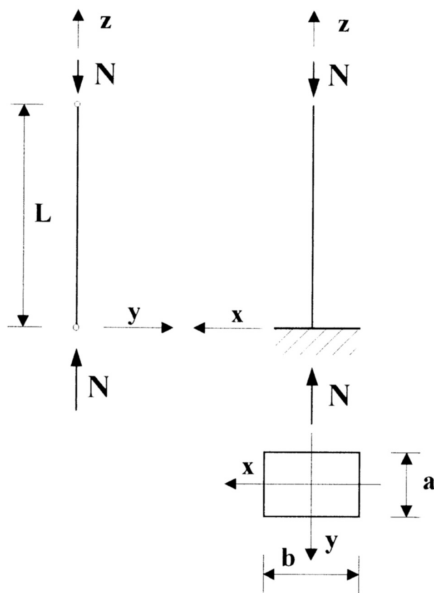
ahol: $\varphi = f(\lambda_M, \text{keresztmetszet, anyagminőség})$, értéke [3]-ból táblázatból vehető.

B.4 Kidolgozott feladatok

4-1 Feladat

A 4.2 ábrán egy téglalap keresztmetszetű kétirányban eltérő befogású központosan nyomott rudat vázoltunk.

4.2 ábra



Adatok:

$N=20 \text{ kN}$

$L=2,0 \text{ m}$

Anyagminőség: 37B MSZ 6280

$\gamma_b=1,2$

Feladat:

1, Méretezzük a téglalap keresztmetszetű rudat kihajlásra, a klasszikus módszerrel!

2, Határozzuk meg, hogy azonos terhelésű és befogású rúdhoz mekkora csőszelvényt kell alkalmazni!

Megoldás:

A kihajlásvizsgálat során általában csak ellenőrzés végezhető, az adott keresztmetszetnél méretezés is lehetséges.

A szelvény jó kihasználtságának feltétele: $\lambda_x = \lambda_y$

$$\lambda_x = \frac{v_x \cdot L}{i_x} = \frac{1 \cdot L}{i_x} = \lambda_y = \frac{v_y \cdot L}{i_y} = \frac{2 \cdot L}{i_y},$$

amiből az $i_y = 2 \cdot i_x = \frac{b}{\sqrt{12}} = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{12}}$ összefüggések alapján $b=2a$ adódik.

Az ellenőrzés összefüggése:

$$\sigma_n = \frac{N}{A} = \frac{N}{2a^2} \leq \frac{\sigma_{kr}}{\gamma_b} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_M^2 \cdot \gamma_b}$$

A mértékadó karcsúság $\lambda_M = \frac{L}{i_x} = \frac{L \cdot \sqrt{12}}{a}$, melynek behelyettesítése után

$$\frac{N}{2a^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot a^2}{12 \cdot L^2 \cdot \gamma_b}$$

összefüggés adódik, melyből a keresett geometriai méret

$$a = \sqrt[4]{\frac{6 \cdot L^2 \cdot \gamma_b \cdot N}{\pi^2 \cdot E}} = \sqrt[4]{\frac{6 \cdot 200^2 \cdot 1,2 \cdot 20}{\pi^2 \cdot 20600}} = 2,31 \text{ cm és } b = 4,62 \text{ cm}$$

A keresztmetszeti terület: $A = 2 \cdot a^2 = 2 \cdot 2,31^2 = 10,67 \text{ cm}^2$

A választott csőkeresztmetszet $\varnothing 70 \times 2$. ($A=4,273 \text{ cm}^2$, $i=2,4 \text{ cm}$)

Mértékadó rúdkarcsúság: $\lambda_M = \frac{v_y \cdot L}{i} = \frac{2 \cdot 200}{2,4} = 166,7$

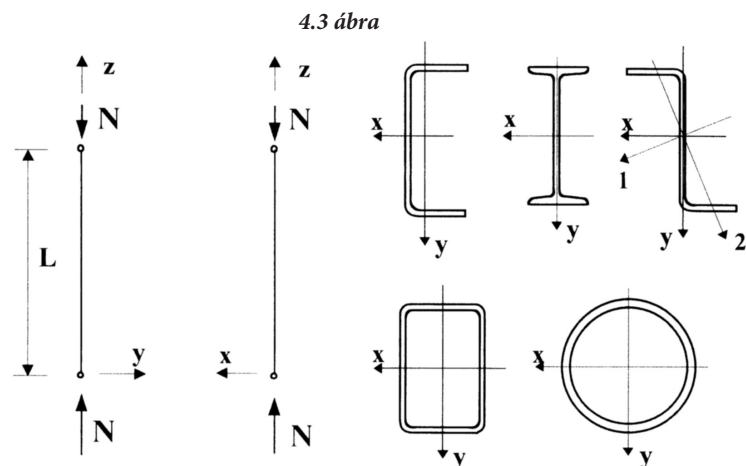
Kritikus feszültség: $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_M^2} = \frac{\pi^2 \cdot 20600}{166,7^2} = 7,32 \text{ kN/cm}^2$

$$\sigma_n = \frac{N}{A} = \frac{20}{4,273} = 4,68 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_{KM} = \frac{\sigma_{kr}}{\gamma_b} = \frac{7,32}{1,2} = 6,1 \text{ kN/cm}^2$$

A csőkeresztmetszet alkalmazása $\frac{10,67 - 4,273}{10,67} \cdot 100 \approx 60 \%$ -kal kisebb anyag-felhasználást eredményez.

4-2 Feladat

A 4.3 ábrán vázolt központosan nyomott rudat öt különböző keresztmetszettel alakítjuk ki.



Adatok:

$L = 3,0 \text{ m}$

Anyag: 37B MSZ 6280

$\sigma_M = 20 \text{ kN/cm}^2$

Feladat:

Végezzünk a szabvány szerint összehasonlító vizsgálatot a különböző keresztmetszetekre a nyomott rúd határteherbírását illetően!

Megoldás: Az 4.3 ábrán megadott szelvényeket táblázatból úgy választjuk ki, hogy közel azonos keresztmetszetűek legyenek. Az alábbi táblázatban összefoglaljuk a szelvények szükséges adatait és az eredményeket.

	Szelvény jele	A [cm ²]	i_x [cm]	i_y [cm]	λ_M	φ	σ_{KH} [kN/cm ²]	N_{KH} [kN]	k%
1	U 160/50×3	7,46	5,97	1,47	204,1	0,167	3,34	24,92	16,7
2	I 80	7,57	3,2	0,93	322,6	0,091	1,82	13,78	9,1
3	Z 140/60×3	7,50	5,74	1,49	201,3	0,171	3,42	25,65	17,1
4	□ 90/45×3	7,5	3,14	1,82	164,8	0,277	5,54	41,55	27,7
5	o 86×3	7,64	2,86		104,9	0,576	11,52	88,01	57,6

A táblázatban aláhúzással jelöltük azokat az inerciasugarakat ($i_{\min}$), melyekkel a mértékadó rúdkarcsúság adódik.

Mivel $\nu_x = \nu_y = \nu = 1$,

$$\lambda_M = \frac{\nu \cdot L}{i_{\min}}$$

φ értéke 5.4 táblázatából vehető lineáris interpolációval.

A kihajlási határerő:

$$N_{KH} = A \cdot \sigma_{KH} = A \cdot \varphi \cdot \sigma_H.$$

Az összehasonlítás során a viszonyítás alapjául a keresztmetszet tiszta nyomási határerejét tekintjük.

$$N_H = A \cdot \sigma_H$$

A kihasználtság tehát:

$$k\% = \frac{N_{KH}}{N_H} \cdot 100\% = \frac{\varphi \cdot A \cdot \sigma_H}{A \cdot \sigma_H} \cdot 100\% = \varphi \cdot 100\%$$

Az eredményekből megállapíthatjuk, hogy ilyen megtámasztási feltételek esetén legkedvezőtlenebb a melegen hengerelt I-szelvény és legkedvezőbb a körgyűrű (cső-) keresztmetszet. Megjegyezzük, hogy hasonlóan kedvező teherbírású a zárt négyzet-szelvény.

Mint látható a közel azonos cső keresztmetszet közel 6,5-szer akkora teherbírású, mint az I keresztmetszet.

Végül határozzuk meg, hogy milyen csőszelvényből készíthető a legkisebb teherbírású rúd. Válasszunk $\varnothing 51 \times 2$ méretű csövet ($A=3,08 \text{ cm}^2$, $i=1,73 \text{ cm}$)!

$$\sigma_n = \frac{13,78}{3,08} = 4,47 \text{ kN/cm}^2$$

$$\lambda = \frac{300}{1,73} = 173,4 \Rightarrow \varphi = 0,253 \Rightarrow \sigma_{KH} = 5,06 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_n = 4,47 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_{KH} = 5,06 \text{ kN/cm}^2, \text{ a csőszelvény megfelel a kihajlásra.}$$

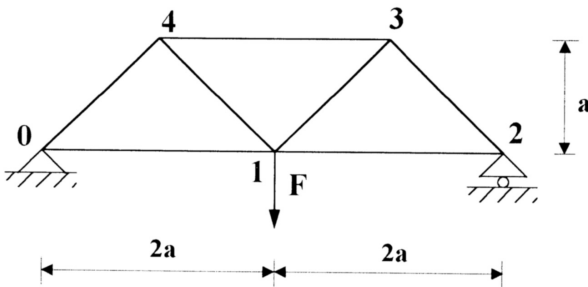
A csőszelvény alkalmazásakor a súlymegtakarítás az I szelvényhez képest:

$$\frac{7,57 - 3,08}{7,57} \cdot 100 = 59,31 \% \text{ - os.}$$

4-3 Feladat

A 4.4 ábrán látható kéttámaszú rácsos tartó rúdjai hidegen hajlított U-szelvényből készülnek. A szelvények szimmetriatengelye a rácsos tartó síkjában helyezkednek el.

4.4 ábra



Adatok:

$a=1,25 \text{ m}$,

$F=70 \text{ kN}$,

Anyagminőség:

Fe275B MSZ 500

Szelvény: U 60/60x3

Feladat: Ellenőrizzük a rácsos tartó nyomott rúdjaikat!

Megoldás: 1. Rúderők meghatározása.

A tartó 0-4, 2-3 és 3-4 jelű rúdjai nyomottak, a továbbiak húzottak.

Az S_{0-4} rúderőt a „0” jelű csomópont egyensúlyából határozzuk meg.

$$S_{0-4} = S_{2-3} = -\sqrt{2} \cdot \frac{F}{2} = -\sqrt{2} \cdot \frac{70}{2} = -49,5 \text{ kN.}$$

Az S_{3-4} rúderő számításához az átmetsző módszert alkalmazzuk.

$$\sum M_{li} = 0 = \frac{F}{2} \cdot 2a + S_{3-4} \cdot a \Rightarrow S_{3-4} = -F = -70 \text{ kN.}$$

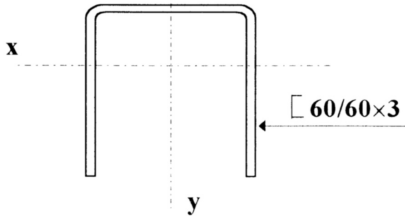
2. A nyomott rudak kihajlásvizsgálata.

a) Rúdhosszak:

$$L_{0-4} = \sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2} \cdot 1,25 = 1,768 \text{ m}$$

$$L_{3-4} = 2a = 2,5 \text{ m}$$

4.5 ábra



Keresztmetszeti adatok:

$$A = 5,1 \text{ cm}^2,$$

$$i_x = 1,95 \text{ cm},$$

$$i_y = 2,51 \text{ cm}.$$

b) Kihajlási határfeszültség meghatározása.

$$0-4 \text{ jelű rúd: } \lambda_x = \frac{v_x \cdot L_{0-4}}{i_x} = \frac{0,8 \cdot 1,768}{1,95} = 72,5 = \lambda_M$$

$$\lambda_y = \frac{v_y \cdot L_{0-4}}{i_y} = \frac{1,0 \cdot 1,768}{2,51} = 70,4.$$

$$\varphi = 0,635 - \frac{0,635 - 0,598}{5} \cdot (72,5 - 70) = 0,6165$$

$$\sigma_{KH} = \varphi \cdot \sigma_H = 0,6165 \cdot 23 = 14,18 \text{ kN/cm}^2$$

Megjegyzés: a rácsos tartó síkjában a rudak befogási tényezője közelítően $v_x = 0,8$ értékűnek vehető a csomópont részleges befogó hatása miatt.

$$3-4 \text{ jelű rúd: } \lambda_M = \lambda_x = \frac{0,8 \cdot 2,50}{1,95} = 102,6.$$

$$\varphi = 0,432 - \frac{0,432 - 0,404}{5} \cdot (102,6 - 100) = 0,4174$$

$$\sigma_{KH} = \varphi \cdot \sigma_H = 0,4174 \cdot 23 = 9,6 \text{ kN/cm}^2$$

c) Ellenőrzés kihajlásra

$$0-4 \text{ jelű rúd: } \sigma_n = \frac{S_{0-4}}{A} = \frac{49,5}{5,1} = 9,7 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_{KH} = 14,18 \text{ kN/cm}^2$$

a 0-4 és 2-3 jelű rúd megfelel kihajlásra.

$$3-4 \text{ jelű rúd: } \sigma_n = \frac{S_{3-4}}{A} = \frac{70}{5,1} = 13,7 \text{ kN/cm}^2 > \sigma_{KH} = 9,6 \text{ kN/cm}^2$$

a 3-4 jelű rúd nem felel meg kihajlásra.

d) Felső övrúd tervezése.

Válasszunk felső övrúdnak U 60/60x5 méretű szelvényt: $A=8,18 \text{ cm}^2$, $i_x=1,93 \text{ cm}$, $i_y=2,42 \text{ cm}$.

$$\lambda_M = \lambda_x = \frac{0,8 \cdot 250}{1,93} = 103,6 \Rightarrow \varphi = 0,412$$

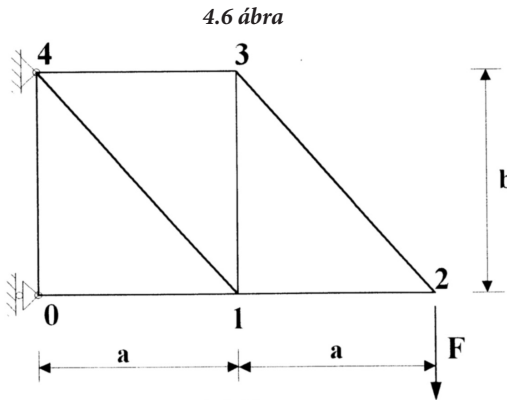
$$\varphi = 0,412 \Rightarrow \sigma_{KH} = 9,48 \text{ kN/cm}^2 > \sigma_n = \frac{70}{8,18} = 8,56 \text{ kN/cm}^2$$

a választott szelvény megfelel kihajlásra.

C.4. Gyakorló feladat

4-4 Feladat

A 4.6 ábrán vázolt rácsos konzoltartó alsó övrúdjai hidegen hajlított zárt téglalap-, további rúdjai zárt négyzetszelvényből készülnek. A zárt téglalapszelvény erős hajlítási tengelye a rácsos tartó síkjában helyezkedik el.



Adatok:

$a=1,5 \text{ m}$,

$b=1,75 \text{ m}$,

$F=50 \text{ kN}$,

Anyagminőség:

Fe235B MSZ 500

Szelvények: ☐ 60/40x3

☐ 40/40x3

Feladat: Ellenőrizzük a rácsos tartó nyomott rúdait kihajlásra!

Eredmények:

Nyomott rúd	S_{i-j} [kN]	λ_{i-j}	σ_{KH} [kN/cm ²]	σ_n [kN/cm ²]	Megjegyzés
0-1	-85,71	98,03	12,56	15,87	nem felel meg
1-2	-42,86	98,03	12,56	7,93	megfelel
1-3	-50	122,38	8,1	11,89	nem felel meg

5. FÁRADÁSVIZSGÁLAT

A.5 Elméleti összefoglaló

A gyakran ismétlődő terhelésnek kitett szerkezeti elemek tönkremenetele bekövetkezhet fáradt törés formájában is.

A fáradt törést befolyásoló tényezők:

- Az élettartam alatt fellépő feszültség maximális és minimális értéke ($\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$).
- Az élettartam alatt bekövetkező teherismétlődések száma (N).

A kifáradás bekövetkezését a teherismétlődési szám alapján az alábbi két csoportba sorolhatjuk:

a, Nagyciklusú kifáradásról akkor beszélünk, ha a maximális feszültség értéke a szerkezeti anyag folyáshatárát nem közelíti meg. Ebben az esetben az acélanyagok kifáradása 10^4 -nél nagyobb teherismétlődés esetén következik be. Ilyen fáradt törés elsősorban váltakozó igénybevételnek kitett gépelemeknél, acélszerkezetű daruknál, hidaknál jöhet létre.

b, Kisciklusú kifáradás esetével állunk szemben olyan esetekben, amikor a maximális feszültség értéke a szerkezeti anyag folyáshatára közelében van, vagy azt a feszültségcsúcsoknál el is éri. Ilyen esetben fáradt törés létrejöhét néhány száz, vagy néhány ezer teherismétlődés esetén is, mint például gyakran üritett folyadéktartályoknál.

– A szerkezeti elem kialakítása. Az éles sarkok, bemetszések, hirtelen keresztmetszétváltozások jelentősen fokozzák a szerkezeti elem fáradási érzékenységét.

– A szerkezeti elem felületi minősége és a közeg melyben a szerkezeti elem működik. Ezen befolyásoló tényezőnek elsősorban mozgó gépelemeknél van jelentősége. Acélszerkezeti elemeknél a felület általában hengerelt és az alkalmazott felületvédelem miatt a szerkezeti anyag közvetlenül nem érintkezik a közeggel.

– A szerkezeti anyag szilárdsága.

– A szerkezeti elem technológiai előélete.

– A szerkezeti elem mérete. A gépelemekre vonatkozó fáradási határgörbék próbatestek fárasztókísérletével készülnek, a szerkezeti elemek kifáradási határa méretüktől függően ettől eltérést mutat.

A.5.1 FÁRADÁSVIZSGÁLATI ALAPÖSSZEFÜÜÉSEK GÉPEMEKEKRE

A gépelemek fáradásvizsgálata során ki kell mutatni az alábbi egyenlőtlenség fennállását:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\lim} = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \sigma_f}{\beta_\sigma}, \text{ illetve } \tau_{\max} \leq \tau_{\lim} = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \tau_f}{\beta_\tau}.$$

ahol:

η_1 a mérettényező,

η_2 a felületminőségi tényező,

β a gátlási tényező,

σ_f , τ_f a kifáradási diagramból (Smith-diagram) leolvasható fáradási határfeszültség.

Az η_1 mérettényező közelítő értéke diagramból vehető a tengelyátmérő függvényében [3] 6.1 pontja szerint. A mérettényezőt állandó keresztmetszetű váltakozó normálerővel terhelt rudak vizsgálata során $\eta_1 = 1$ értékűnek lehet felvenni.

[3] Vigh Sándor–Farkas Beáta: *Műszaki mechanika II. Példatár II. Szilárdságtani táblázatok.* Dunajváros: ME DFK.

A felületminőségi tényező értékeit [3] 6.1 pontja alapján diagramból vehetjük a szakítószilárdság függvényében.

A gátlási tényező egyik közelítő meghatározására szolgál az alábbi összefüggés:

$$\beta = \eta_k \cdot (\alpha_{sc} - 1) + 1.$$

A képletben szereplő η_k érzékenységi tényező az acél szakítószilárdságának függvényében, az α_{sc} feszültségkoncentrációs tényező (alakítvány) az igénybevétel és konstrukciós kialakítás függvényében diagramból vehető [3] 6.1 pont szerint

A fáradásvizsgálathoz szükséges feszültségkoncentrációs tényezőket (alakítványokat) [3] 6.2 pontja a Smith-diagramokat 6.3 pontja tartalmazza.

A.5.2 FÁRADÁSVIZSGÁLATI ALAPÖSSZEFÜGGÉSEK ACÉLSZERKEZETI ELEMÉKRE

Acélszerkezeti elemek fáradásvizsgálatának alapösszefüggése egyszerű igénybevétel esetén:

$$\sigma_{\text{ümax}} - \sigma_{\text{ümin}} \leq \sigma_{\text{FH}}, \text{ illetve } \tau_{\text{ümax}} - \tau_{\text{ümin}} \leq \tau_{\text{FH}}.$$

ahol: σ_{FH} és τ_{FH} kifáradási határ, melyek az igénybevétel és a szerkezeti kialakítás függvényében besorolt fáradási osztály szerint alábbi táblázatból vehetők.

A feszültség		A kifáradási határfeszültség [MPa]						
típusa	jele	I	II	III	IV	V	VI	VII
Nyomó	σ_{FH}	42	58	78	91	104	124	143
Húzó								
Nyíró	τ_{FH}	39	52	65	78	91	104	117

Szerkezeti kialakítás egyszerű esetei	Feszültség típusa	Fáradási osztály
Alapanyag nem hegesztett szerkezeti megoldással	σ	VII
Alapanyag feszített csavaros kötésben	σ τ	VI III
Alapanyag csavarozott és szegecselt kötésben	σ τ	V III
Alapanyag hirtelen keresztmetszetváltozásnál	σ τ	III I

A fáradásvizsgálat képletében szereplő $\sigma_{\text{ümax}}$, $\sigma_{\text{ümin}}$ -ve és $\tau_{\text{ümax}}$ és $\tau_{\text{ümin}}$ teher maximumából, illetve minimumából származó feszültségeket jelentik.

Az üzemi teher a dinamikus terhelés alapértékéből számítható az alábbi összefüggéssel:

$$F_{\text{ü}} = \alpha \cdot \beta \cdot \mu \cdot F$$

ahol: α a mértékadó ismétlődési szám (N_M) függvényében az alábbi táblázatból vehető:

N_M	$10^4 < N_M \leq 10^5$	$10^5 < N_M \leq 6 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5 < N_M \leq 2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6 < N_M$
α	0,250	0,375	0,500	0,625

β a terhek relatív gyakoriságából számítható korrekciós tényező:

$$\beta = \sqrt[4]{11 \cdot \gamma_1 + 4 \cdot \gamma_2 + \gamma_3}$$

a képletben szereplő relatív gyakoriságok:

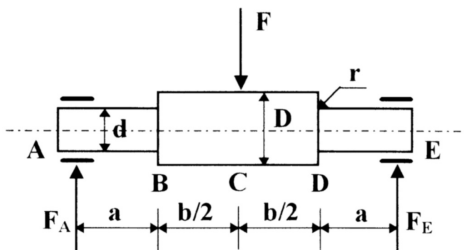
$$\gamma_1 = \frac{N_1}{N_M}, \quad \gamma_2 = \frac{N_2}{N_M}, \quad \gamma_3 = \frac{N_3}{N_M}.$$

B.5 Kidolgozott feladatok

5-1 Feladat

Az 5.1 ábrán egy géptengelyt ábrázoltunk, melyet középen egy koncentrált F erő terhel.

5.1 ábra



Adatok:

$a = 40 \text{ mm}$,

$b = 40 \text{ mm}$,

$d = 40 \text{ mm}$,

$D = 60 \text{ mm}$,

$r = 4 \text{ mm}$,

$F = 20 \text{ kN}$,

Anyagminőség:

Fe 590-2 (A 60)

Felület: finoman köszörült

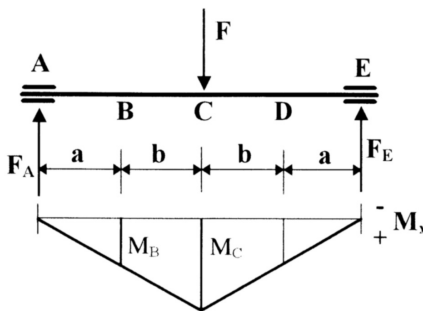
Biztonsági tényező: $\gamma_b = 2,0$.

Feladat: Végezzük el a géptengely fáradásvizsgálatát!

Megoldás: 1. Hajlítói igénybevételek meghatározása:

A géptengelyt forgása közben állandó függőleges F erő terheli, mely így tiszta lengőigénybevételnek teszi ki a tengelyt. A tengely önsúlyterhelése az F erőhöz képest elhanyagolhatóan kicsi. A B és C keresztmetszet hajlítói igénybevétele az 5.2 ábra alapján.

5.2 ábra



2. Maximális feszültségek meghatározása: A C keresztmetszetben a fellépő hajlítói igénybevétel maximális, a B keresztmetszetben pedig hirtelen keresztmetszetváltozás van, ezért a kifáradásra történő ellenőrzést a B és C keresztmetszetben végezzük el.

– B keresztmetszet:

$$W_B = \frac{d^3 \cdot \pi}{32} = \frac{4^3 \cdot \pi}{32} = 6,283 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_B = \frac{M_B}{W_B} = \frac{40}{6,283} = 6,366 \text{ kN / cm}^2 = 63,66 \text{ MPa}.$$

[3] Vigh Sándor–Farkas Beáta: *Műszaki mechanika II. Példatár II. Szilárdságtani táblázatok.* Dunaújváros: ME DFK.

– C keresztmetszet:

$$W_C = \frac{D^3 \cdot \pi}{32} = \frac{6^3 \cdot \pi}{32} = 21,2 \text{ cm}^3,$$

3. A fáradási határfeszültségek meghatározása:

A tengely forgómozgása miatt a tengelyt terhelő igénybevétel közelítően tiszta lengő hajlítói igénybevétel: $\sigma_K = 0$.

[3] 6.3 pontja alapján Smith-diagramból az $R_p = 370$ MPa folyáshatárú szerkezeti acélra a kifáradási határ:

$$\sigma_f = 240 \text{ MPa}.$$

A szerkezeti kialakítástól, a mérettől és a felületi minőségtől függően a korrigált kifáradási határ:

$$\sigma_{fm} = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2}{\beta_\sigma} \cdot \sigma_f.$$

B keresztmetszet:

– Mérettényező [3] 6.1 pont diagramjából: $\eta_1 = 0,875$.

– Felületminőségi tényező: $\eta_2 = 0,88$.

– Gátlási tényező:

$$\beta_\sigma = \eta_K \cdot (\alpha_{sc} - 1) + 1,$$

Az η_K tényező a D/d és r/d viszonyszámok függvényében vehető [3] 6.1 pontjának táblázataiból.

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1,5 \quad \text{és} \quad \frac{r}{d} = \frac{4}{40} = 0,1$$

$$\alpha_{sc} = 1,8 \quad \text{és} \quad \eta_K = 0,58$$

$$\beta_\sigma = \eta_K \cdot (\alpha_{sc} - 1) + 1 = 0,58 \cdot (1,8 - 1) + 1 = 1,464$$

$$\sigma_{fm} = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2}{\beta_\sigma} \cdot \sigma_f = \frac{0,875 \cdot 0,88}{1,464} \cdot 240 = 126,2 \text{ MPa}.$$

A kifáradással szembeni biztonságu, a B keresztmetszetben:

$$\gamma_f = \frac{\sigma_{fm}}{\sigma_{max}} = \frac{126,2}{63,66} = 1,982 < \gamma_b = 2,0,$$

A **B** keresztmetszet kifáradással szemben nem éri el a megkívánt biztonságot, ezért növel-jük meg a lekerekítési sugarat $r = 8$ mm-re.

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1,5 \quad \text{és} \quad \frac{r}{d} = \frac{8}{40} = 0,2$$

$$\alpha_{sc} = 1,4 \quad \text{és} \quad \eta_K = 0,43$$

$$\beta_\sigma = \eta_K \cdot (\alpha_{sc} - 1) + 1 = 0,43 \cdot (1,4 - 1) + 1 = 1,172$$

$$\sigma_{fm} = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2}{\beta_\sigma} \cdot \sigma_f = \frac{0,875 \cdot 0,88}{1,172} \cdot 240 = 157,68 \text{ MPa}.$$

A kifáradással szembeni biztonság:

$$\gamma_f = \frac{\sigma_{fm}}{\sigma_{max}} = \frac{157,68}{63,66} = 2,47 > \gamma_b = 2,0$$

a B keresztmetszet ezzel a szerkezeti megoldással megfelel kifáradásra.

– C keresztmetszet:

A mérettényező és felületminőségi tényező azonos a B keresztmetszetnél meghatározottakkal:

– Mérettényező: $\eta_1 = 0,875$.

– Felületminőségi tényező: $\eta_2 = 0,88$.

– Gátlási tényező, mivel a C keresztmetszetben nincs keresztmetszetváltás:

$$\beta_\sigma = 1, \\ \sigma_{fm} = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2}{\beta_\sigma} \cdot \sigma_f = \frac{0,875 \cdot 0,88}{1,0} \cdot 240 = 184,8 \text{ MPa.}$$

kifáradással szembeni biztonság:

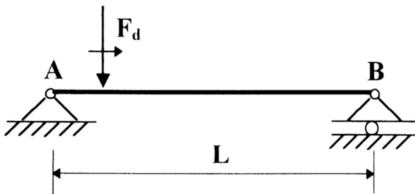
$$\gamma_f = \frac{\sigma_{fm}}{\sigma_{max}} = \frac{184,8}{37,8} = 4,89 > \gamma_b = 2,0$$

C keresztmetszet megfelel kifáradásra.

5-2 Feladat

Az 5.3 ábrán vázolt párhuzamos övű melegen hengerelt I-szelvényű kéttámaszú darupályatartót F_d dinamikus mozgó koncentrált erő (daruhíd keréknyomása) terheli.

5.3 ábra



Adatok:

$L = 6,0 \text{ m}$,

$F_d = 50 \text{ kN}$,

Szelvény: IPE 300,

($W_x = 557 \text{ cm}^3$).

Feladat: Végezzük el a darupályatartó fáradásvizsgálatát egyszerű hajlítógénybevételel!

Megoldás: 1. Az üzemi terhelés meghatározása

$$F_u = \alpha \cdot \beta \cdot F_d.$$

A tartó tervezett élettartama alatti terhelések előfordulását (teherspektrum) becsüljük, melyből a mértékadó ismétlődési számot és a relatív gyakoriságokat számíthatjuk:

Teher előfordulása	N_i	γ_i
80 - 100 %	$N_1 = 1\,000\,000$	$\gamma_1 = N_1 / N_M = 0,5714$
60 - 80 %	$N_2 = 500\,000$	$\gamma_2 = N_2 / N_M = 0,2857$
40 - 60 %	$N_3 = 250\,000$	$\gamma_3 = N_3 / N_M = 0,1429$

$$N_M = 1\,750\,000$$

[3] Vigh Sándor–Farkas Beáta: *Műszaki mechanika II. Példatár II. Szilárdságtani táblázatok.* Dunaújváros: ME DFK.

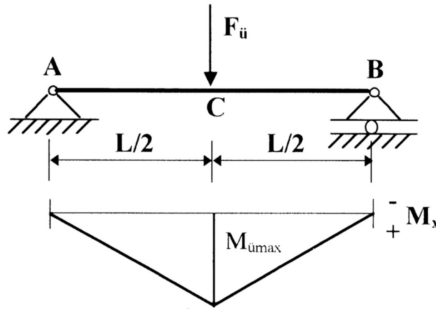
A mértékadó ismétlődési szám függvényében $\alpha = 0,5$ -re adódik.

$$\beta = \sqrt[4]{11 \cdot \gamma_1 + 4 \cdot \gamma_2 + \gamma_3} = \sqrt[4]{11 \cdot 0,5714 + 4 \cdot 0,2857 + 0,1429} = 1,6588.$$

Az üzemi terhelés: $F_{\bar{u}} = \alpha \cdot \beta \cdot F_d = 0,5 \cdot 1,6588 \cdot 50 = 41,47 \text{ kN}$.

2. A tartó középső keresztmetszetének fáradásvizsgálata hajlítói igénybevételre.

5.4 ábra



A feszültségek számításánál az önsúly okozta igénybevételek hatását nem kell figyelembe vennünk, mert az állandó teher mind a minimum, mind a maximum igénybevételnél ugyanazzal az értékkel szerepel, ezért a feszültségek különbségének képzésekor hatása kiesik.

A középső keresztmetszet szélső szálában fellépő maximális feszültség az üzemi teher okozta hajlításból (5.4 ábra alapján):

$$\sigma_{\bar{u} \max} = \frac{F_{\bar{u}} \cdot L}{4 \cdot W_x} = \frac{41,47 \cdot 600}{4 \cdot 557} = 11,17 \text{ kN / cm}^2 = 111,7 \text{ MPa}.$$

A IPE 300 szelvény keresztmetszeti tényezője [3] 4.1 pontjának táblázatából vett érték.

Az üzemi teher minimuma akkor lép fel, amikor a daru elhagyja a darupályatartó szakaszt, így

$$\sigma_{\bar{u} \min} = 0.$$

Kifáradási határfeszültség: feltételezve, hogy a vizsgált keresztmetszetben nincs hirtelen keresztmetszetváltozás, hegesztési varrat, furatgyengítés: így a fáradási osztály az A.5.2 pont szerint VII, melyből húzófeszültségre a kifáradási határ a táblázat utolsó oszlopából:

$$\sigma_{fH} = 117 \text{ MPa}.$$

Ellenőrzés fáradásra.

$$\sigma_{\bar{u} \max} - \sigma_{\bar{u} \min} = 111,7 - 0 = 111,7 \text{ MPa} < \sigma_{fH} = 117 \text{ MPa},$$

a darupályatartó középső keresztmetszete megfelel fáradásra.

6. SPECIÁLIS SZILÁRDSÁGTANI FELADATOK

6.1 Hőmérsékletváltozás okozta igénybevételek

A.6.1 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

A szilárd testeket ért hőmérsékletváltozás alakváltozást, akadályozott, vagy részben akadályozott alakváltozás esetén feszültséget okoz.

A hőmérsékletváltozás két egyszerű esete:

- egyenletes hőmérsékletváltozás,
- egyenletesen változó egyenlőtlen hőmérsékletváltozás.

1. Egyenletes hőmérsékletváltozás

Az egyenletes hőmérsékletváltozás során fellépő szabad alakváltozásokat és a teljesen gátolt alakváltozások esetén keletkező feszültségeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze.

Elem típusa	A teljesen szabadon létrejövő alakváltozások	A teljesen gátolt alakváltozásokkor fellépő feszültségek
a, Rúdszerű elemeknél	$\Delta L_z = \alpha_t \cdot L_{0z} \cdot \Delta T.$	$\sigma_z = -\alpha_t \cdot \Delta T \cdot E$
b, Lemezszerű elemeknél	$\Delta L_z = \alpha_t \cdot L_{0z} \cdot \Delta T,$ $\Delta L_y = \alpha_t \cdot L_{0y} \cdot \Delta T.$	$\sigma_z = \sigma_y = -\frac{\alpha_t \cdot \Delta T \cdot E}{1 - \nu}$
c, Tömbszerű elemeknél	$\Delta L_x = \alpha_t \cdot L_{0x} \cdot \Delta T,$ $\Delta L_y = \alpha_t \cdot L_{0y} \cdot \Delta T,$ $\Delta L_z = \alpha_t \cdot L_{0z} \cdot \Delta T.$	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ $\sigma_z = -\frac{\alpha_t \cdot \Delta T \cdot E}{1 - 2 \cdot \nu}$

2. Egyenletesen változó egyenlőtlen hőmérsékletváltozás

Rúdszerű elemek egyenlőtlen hőmérsékletváltozás hatására görbülettel rendelkeznek, melynek nagyságát az alábbi összefüggéssel számolhatjuk:

$$\kappa_t = \frac{\alpha_t \cdot (\Delta T_f - \Delta T_a)}{h},$$

ahol: ΔT_f illetve ΔT_a : rúd felső illetve alsó szélső szálának hőmérsékletváltozása,
h a rúd keresztmetszetének magassága.

A teljesen akadályozott görbületnél a rúdban fellépő hajlítói igénybevétel:

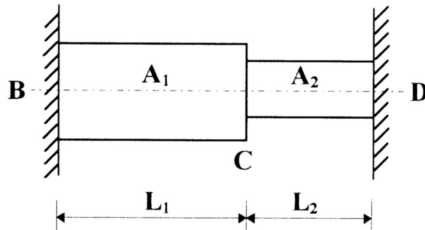
$$M_x = \kappa_t \cdot E \cdot I_x = -\frac{\alpha_t \cdot (\Delta T_f - \Delta T_a)}{h} \cdot E \cdot I_x.$$

B.6.1 KIDOLGOZOTT FELADATOK

6.1-1 Feladat

A 6.1 ábrán látható szakaszonként állandó keresztmetszetű rúd két végét T_1 hőmérsékleten rögzítik. A rúd ezen a hőmérsékleten feszültségmentes. Az üzemi hőmérséklet T_2 , a rúd anyagának rugalmassági modulusa E , lineáris hőtágulási együtthatója α_t .

6.1 ábra



Adatok:

$$L_1 = 0,6 \text{ m},$$

$$L_2 = 0,6 \text{ m},$$

$$A_1 = 1200 \text{ mm}^2,$$

$$A_2 = 600 \text{ mm}^2,$$

$$\alpha_t = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/C}^\circ,$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa},$$

$$t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$t_2 = 80 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Feladat: 1. Számítsuk ki üzemeléskor a befogásoknál ébredő F_B és F_D támasztóerőket.

2. Számítsuk ki az ébredő feszültségeket a rúd BC szakaszán ($\sigma_{7(1)}$) és CD szakaszán ($\sigma_{7(2)}$)

Megoldás:

1. A rúd megfogása háromszorosan statikailag határozatlan, de feltételezve, hogy a rúd egyenes marad, a rúdra merőleges erők nélkül csak rúdírányú támasztóerők ébredhetnek. Ezekre nézve egyszerűen határozatlan.

A sugárirányú támasztóerők a

$$\sum F_z = 0 = F_B + F_D$$

vetületi egyenletből egyenlő nagyságúak, de ellentétes irányúak lesznek. Nagyságuk az alakváltozási egyenletből számítható.

A $\Delta T = T_2 - T_1$ hőmérsékletváltozás hatására a rúd eredeti hossza megnőne

$$\Delta L_t = \alpha_t \cdot (L_1 + L_2) \cdot \Delta T$$

értékkel. Mivel a rúd hosszváltozása akadályozott, a rúdban akkora konstans rúderő (N) ébred, amely a rúdban az előbbi nagyságú, de ellentétes előjelű hosszváltozást – ΔL rövidülést – hozna létre.

Így írhatjuk:

$$\Delta L = \Delta L_t.$$

Részletesebben:

$$\frac{N \cdot L_1}{A_1 \cdot E} + \frac{N \cdot L_2}{A_2 \cdot E} = \alpha_t \cdot (L_1 + L_2) \cdot \Delta T$$

Ebből az N rúderő:

$$N = \frac{\alpha_t \cdot (L_1 + L_2) \cdot \Delta T \cdot E}{\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}} = \frac{11,5 \cdot 10^{-6} \cdot (600 + 600) \cdot 60 \cdot 2 \cdot 10^5}{\frac{600}{1200} + \frac{600}{600}}$$

Így: $N = 110400 \text{ N} = 110,4 \text{ kN}$ nyomóerő adódik.

Ebből a keresett támasztóerők:

$$F_B = 110,4 \text{ kN} \rightarrow,$$

$$F_D = 110,4 \text{ kN} \leftarrow,$$

(a rúd így lesz nyomott)

2. Most számítsuk ki az ébredő feszültségeket. A nyomóerő ismeretében írhatjuk:

$$\sigma_{z(1)} = \frac{N}{A_1}, \text{ és } \sigma_{z(2)} = \frac{N}{A_2}.$$

Behelyettesítve:

$$\sigma_{z(1)} = \frac{110400}{1200} = 92 \text{ MPa.}$$

és

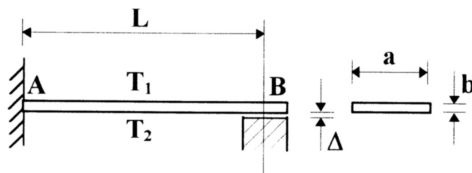
$$\sigma_{z(2)} = \frac{110400}{600} = 184 \text{ MPa.}$$

nyomófeszültség adódik.

6.1-2 Feladat

A 6.2 ábrán látható homogén anyagú, befogott, téglalap keresztmetszetű, prizmatikus elem vége Δ távolságban van a C jelű határoló elemtől. Hőmérsékletváltozás következtében a felső szál T_1 , az alsó szál $T_2 < T_1$ hőmérsékletű állapotba kerül, közben lineáris eloszlással.

6.2 ábra



Adatok:

$$L = 60 \text{ mm},$$

$$a = 10 \text{ mm},$$

$$b = 2 \text{ mm},$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa},$$

$$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^{\circ}\text{C},$$

$$\Delta = 0,5 \text{ mm}.$$

Feladat: Mekkora $|\Delta T| = T_1 - T_2$ hőmérsékletkülönbség esetén zárul a B és C pontok Δ távolsága?

Megoldás:

A hőmérsékletkülönbség hatására létrejövő görbület a rúd minden keresztmetszetében:

$$\kappa_t = \frac{2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta T}{b} = \frac{d\vartheta_t}{dz}$$

ahonnan valamely z keresztmetszetbeli szögelfordulás,

$$\vartheta_t = \vartheta_{t0} + \int_0^z \kappa_t \cdot dz = 0 + \int_0^z \frac{2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta T}{b} \cdot dz = \frac{2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta T}{b} \cdot \int_0^z dz = \frac{2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta T}{b} \cdot z ,$$

illetve a behajlás újabb integrálással:

$$v_t = v_{t0} - \int_0^z \vartheta_t \cdot dz = 0 - \int_0^z \frac{2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta T}{b} \cdot z \cdot dz = -\frac{2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta T}{b} \cdot \frac{z^2}{2} = -\frac{\alpha_t \cdot \Delta T}{b} \cdot z^2 .$$

Feltételünk szerint $v_{tB} = -\frac{\alpha_t \cdot \Delta T}{b} \cdot L^2 = \Delta$, ahonnan

$$\Delta T = -\frac{b \cdot \Delta}{\alpha_t \cdot L^2} = -\frac{2 \cdot 0,5}{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 60^2} = -23,1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

A negatív előjel a $T_1 > T_2$ állapotnak felel meg a Δt előjelének jegyzetbeli értelmezése szerint.

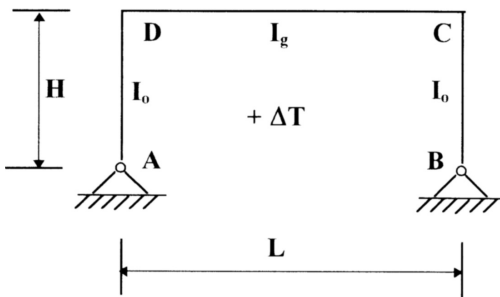
Megjegyzés:

Fentiekben feltételeztük, hogy a rúd felső és alsó szálai közötti hőmérsékletkülönbség nem egyenlőtlen ki hővezetés formájában. Nyilvánvaló, hogy ez csak rövid ideig állhat fenn jó hővezető anyag esetén.

6.1-3 Feladat

A 6.3 ábrán látható kétcsuklós keret egyenletes hőmérsékletváltozás éri.

6.3 ábra



Adatok:

$$L = 12,0$$

$$H = 4,0 \text{ m},$$

$$\Delta T = 30 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1},$$

$$E = 20600 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\text{Gerenda: IPE 300,}$$

$$\text{Oszlop: IPE 400,}$$

Feladat: Határozzuk meg, hogy mekkora hajlítói igénybevétel keletkezik az egyenletes hőmérsékletváltozás hatására!

Megoldás:

Az oszlopok egyenletes hőmérsékletváltozásból származó méretváltozása szabadon lejátszódhat, de a gerenda szabad megnyúlását a merev oszlop-gerenda kapcsolat akadályozza. A feladat megoldható erőmódszerrel, mint statikailag egyszerűen határozatlan.

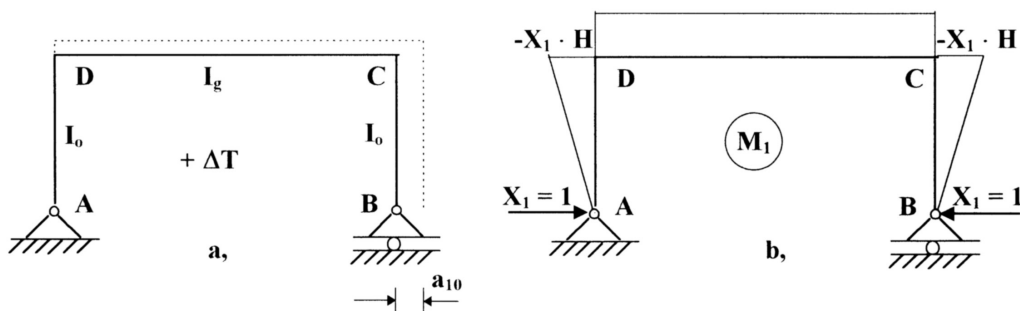
Törzstartót például a B csukló helyére helyezett görgős megtámasztással kaphatunk (6.4.a ábra).

A gerenda hőmérsékletváltozás hatására bekövetkező vízszintes elmozdulása eredményezi a terhelési tényezőt:

$$a_{10} = \alpha_t \cdot \Delta T \cdot L = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 1200 = 0,432 \text{ cm}.$$

Az egységtényezőt az ismert módon a B helyen vízszintesen működtetett egységnyi teherből határozhatjuk meg.

6.4 ábra



Az egységtényező értéke:

$$a_{11} = \int_s \frac{M_1^2}{E \cdot I} ds = \frac{H^2 \cdot L}{E \cdot I_g} + \frac{2 \cdot H^3}{3 \cdot E \cdot I_o} = \frac{400^2 \cdot 1200}{20600 \cdot 8360} + \frac{2 \cdot 400^3}{3 \cdot 20600 \cdot 23130} = 1,2044 \text{ cm / kN}.$$

Az ismeretlen X_1 erő értéke:

$$X_1 = -\frac{a_{10}}{a_{11}} = -\frac{-0,432}{1,2044} = 0,3586 \text{ kN}.$$

A keretsarkokban fellépő nyomatékok:

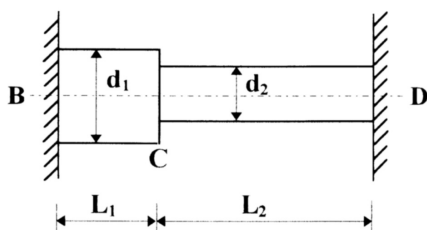
$$M_C = M_D = -X_1 \cdot H = -0,3586 \cdot 400 = -143,47 \text{ kNcm}$$

C.6.1 GYAKORLÓ FELADATOK

6.1-4 Feladat

A 6.5 ábrán látható hirtelen változó kör keresztmetszetű, mindkét végén befogott acélrúd beépítéskor (T_1 hőmérsékleten) feszültségmentes.

6.5 ábra



Adatok:

$L_1 = 0,3 \text{ m}$,
 $L_2 = 0,6 \text{ m}$,
 $d_2 = 6 \text{ cm}$,
 $d_1 = 10 \text{ cm}$,
 $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$,
 $T_2 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$,
 $\alpha_1 = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$,
 $E = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

Feladat: Számítsa ki a T_2 üzemi hőmérsékleten a befogásnál ébredő támasztóerőket és a rúdban ébredő feszültségeket!

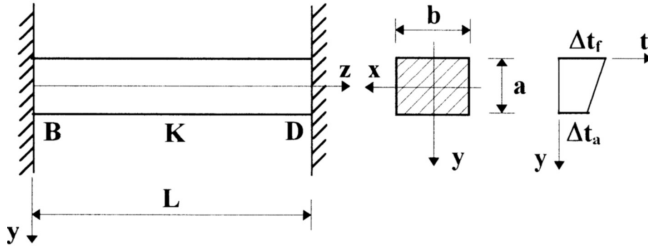
Eredmények:

$F_B = 166,8 \text{ kN} \leftarrow$,	$F_D = 166,8 \text{ kN} \rightarrow$,
$\sigma_{z(1)} = 2,12 \text{ kN/cm}^2$	$\sigma_{z(1)} = 5,9 \text{ kN/cm}^2$ húzófeszültség.

6.1-5 Feladat

A 6.4 ábrán látható téglalap keresztmetszetű mindkét végén befogott rúd alsó és felső részét eltérő hőhatás éri. Ennek következtében a felső szál a ΔT_f az alsó ΔT_a hőmérsékletre melegszik fel.

6.6 ábra



Adatok:

$a = 20 \text{ mm}$,
 $b = 30 \text{ mm}$,
 $\Delta T_f = 10^\circ \text{C}$,
 $\Delta T_a = 5^\circ \text{C}$,
 $\alpha_t = 1,23 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$,
 $E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.

Feladat: Határozza meg a K keresztmetszet feszültségeloszlását!

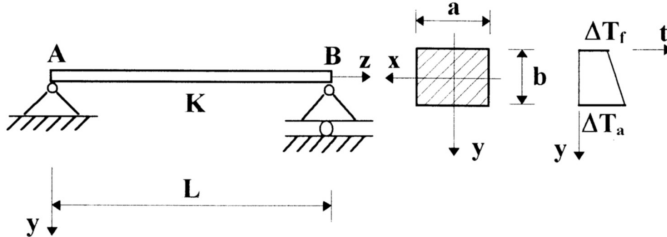
Eredmények:

$\sigma_{zf} = 12,67 \text{ MPa}$,	$\sigma_{za} = 25,33 \text{ MPa}$.
-------------------------------------	-------------------------------------

6.1-6 Feladat

Egy kéttámaszú, homogén anyagú, a szélességű és b magasságú, téglalap keresztmetszetű prizmatikus rúd alsó és felső szálai között ΔT hőmérsékletkülönbség jött létre.

6.7 ábra



Adatok:

$L = 400 \text{ mm}$,
 $a = 20 \text{ mm}$,
 $b = 10 \text{ mm}$,
 $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/C}^\circ$,
 $\Delta T_a - \Delta T_f = \Delta T = 60^\circ \text{C}$.

Feladat: Mekkora a tartó középső (K) keresztmetszetének lehajlása?

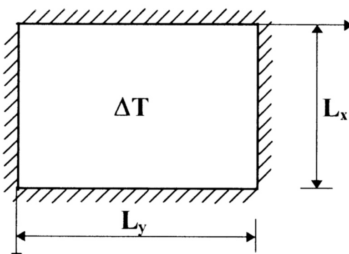
Eredmény:

$v_K = 2,88 \text{ mm}$.

6.1-7 Feladat

A 6.8 ábrán vázolt lemez – melyet egyenletes hőmérsékletváltozás ér – mereven befogott.

6.8 ábra



Adatok:

$L_x = 500 \text{ mm}$,
 $L_y = 400 \text{ mm}$,
 $t = 6 \text{ mm}$,
 $E = 206000 \text{ MPa}$,
 $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/C}^\circ$,
 $\Delta T = 60^\circ \text{C}$, $\nu = 0,33$.

- Feladat:* 1. Határozza meg a lemezben fellépő feszültségeket teljesen gátolt alakváltozáskor!
 2. Határozza meg, hogy mekkora erőt fejt ki a lemez x és y irányban az alakváltozást gátló szerkezetre!

Eredmények:	$\sigma_x = \sigma_y = - 221,37 \text{ MPa}$	$F_x = - 664 \text{ kN}$	$F_y = - 531,3 \text{ kN}$
-------------	--	--------------------------	----------------------------

6.2 Inhomogén rudak

A.6.2 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Az inhomogén keresztmetszetű rudak (kompozitok) szilárdságtani alapjainak tárgyalása során – a homogenitás és izotrópia kivételével – érvényesek a szilárdságtani alapfeltevések. Így a keresztmetszetben fellépő feszültségek számításához felhasználjuk a sík keresztmetszetek elvét.

Az inhomogén keresztmetszet redukált területe:

$$A_{\text{ired}} = \sum \omega_{ij} \cdot A_j,$$

ahol: $\omega_{ij} = \frac{E_i}{E_j}$, az i-edik és a j-edik elemrész rugalmassági modulusainak hányadosa, a

keresztmetszetrészek redukciós tényezői, $A_{\text{ired}} = \sum \omega_{ij} \cdot A_j$, az i-dik részre redukált keresztmetszet.

Az inhomogén keresztmetszet súlypontjának meghatározása:

$$y_{Si} = \frac{\sum \omega_{ij} \cdot y_j \cdot A_j}{\sum \omega_{ij} \cdot A_j},$$

A feszültségek számítása:

– Normáligénybevételnél:

$$\sigma_j = \omega_{ij} \cdot \frac{N}{A_{\text{ired}}},$$

– Hajlítói igénybevételnél:

$$\sigma_j = \omega_{ij} \cdot \frac{M_x}{I_{\text{ired}}} \cdot y_j$$

ahol: I_{ired} az i-edik részre redukált hajlítási tengelyre számított másodrendű nyomaték.

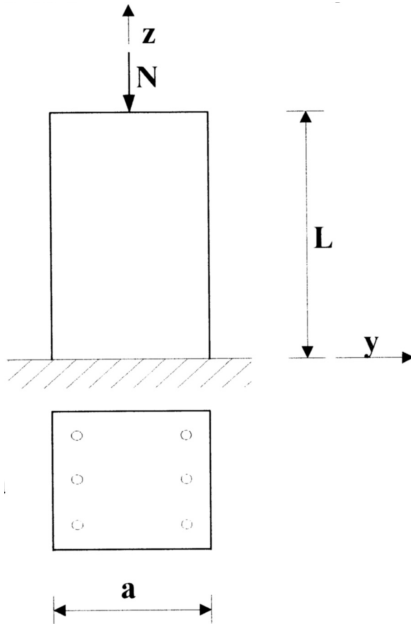
Mivel a képletekben szereplő ω_{ij} az eltérő anyagminőségű részekre eltérő értékű, ezért a feszültségeloszlási ábrák a különböző anyagrészek találkozásánál ugrást mutatnak.

B.6.2 KIDOLGOZOTT FELADATOK

6.2-1 Feladat

A 6.9 ábrán vázolt vasbeton oszlopot központos nyomóerővel terheljük.

6.9 ábra



Adatok:

$L = 2,0 \text{ m}$,

$a = 300 \text{ mm}$,

$d = 10 \text{ mm}$,

Beton minőség: C10,

$\sigma_{bH} = 0,5 \text{ kN/cm}^2$,

Acél minőség: Fe 235 B,

$\sigma_{aH} = 20 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: 1. Határozzuk meg az oszlop határteherbírását!

2. Határozzuk meg az oszlop összenyomódását a határerő működésekor!

Megoldás: 1. A redukált keresztmetszet meghatározása

$$\omega = \frac{E_b}{E_a} = \frac{3000}{20600} = 0,1456.$$

$$A_{\text{red}} = A_a + \omega \cdot A_b = 6 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} + \omega \cdot a^2 = 6 \cdot \frac{1^2 \cdot \pi}{4} + 0,1456 \cdot 30^2 = 135,75 \text{ cm}^2.$$

2. Határerő az acélbetétek határállapotára:

$$N_{Ha} = \sigma_{aH} \cdot A_{\text{red}} = 20 \cdot 135,75 = 2715 \text{ kN}.$$

3. Határerő a beton határállapotára:

$$N_{Hb} = \sigma_{bH} \cdot \frac{A_{\text{red}}}{\omega} = 0,5 \cdot \frac{135,75}{0,1456} = 466,17 \text{ kN}.$$

4. Az oszlop összenyomódása:

A beton fajlagos összenyomódása:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b} = -\frac{0,5}{3000} = -166,67 \cdot 10^{-6}$$

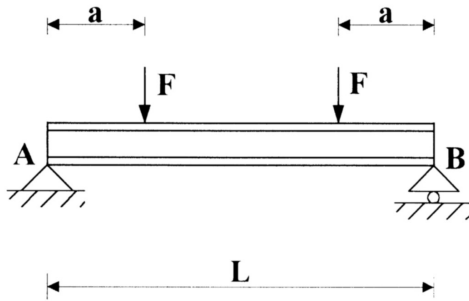
Az oszlop összenyomódása:

$$\Delta L = \varepsilon_b \cdot L = -166,67 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = -0,033 \text{ cm}.$$

6.2-2 Feladat

A 6.10 ábrán látható szendvicstartó két E_1 rugalmassági modulusú, merevebb külső rétegből (acél) és a jó hőszigetelő és rezgéscsillapító tulajdonságú, E_2 rugalmassági modulusú középső rétegből (keményfa) áll.

6.10 ábra



Adatok:

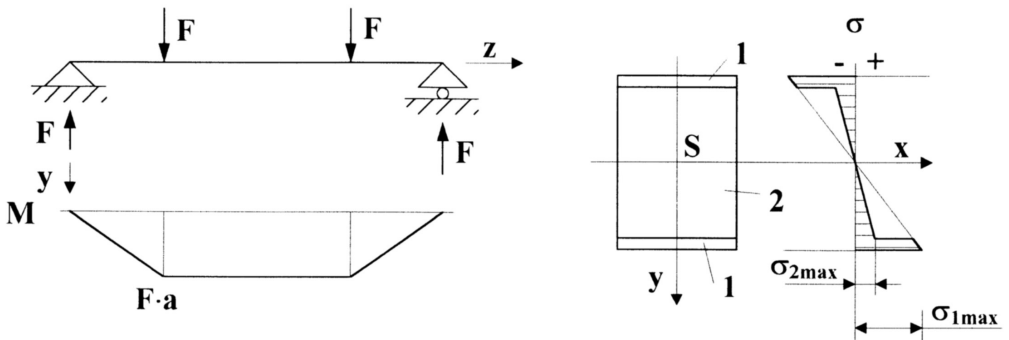
$L = 2,0 \text{ m}$,
 $a = 0,4 \text{ m}$,
 $b = 160 \text{ mm}$,
 $h = 280 \text{ mm}$,
 $t_1 = 8 \text{ mm}$,
 $E_1 = 20600 \text{ kN/cm}^2$,
 $E_2 = 1000 \text{ kN/cm}^2$,
 $R_{adm1} = 16 \text{ kN/cm}^2$,
 $R_{adm2} = 2 \text{ kN/cm}^2$.

Feladat: Mekkora F erőt visel el a tartó, ha a megengedett feszültségek értéke R_{adm1} és R_{adm2} ? (A szilárdsági vizsgálatot a sík keresztmetszet Bernoulli–Navier-féle feltételezésével a középső, tisztán hajlított szakaszra végezzük el!)

Megoldás:

Az inhomogén keresztmetszet szimmetrikus az x tengelyre, így az ideális súlypont egybeesik a geometriai idom súlypontjával. A tartó középső szakasza tisztán hajlított (6.11 ábra), méghozzá a súlyponti x főtengetly körüli egyenes hajlításról van szó.

6.11 ábra



A hajlított inhomogén tartó keresztmetszetének redukált inerciája:

$$I_{red} = 2 \cdot \left[\frac{b \cdot t_1^3}{12} + b \cdot t_1 \cdot \left(\frac{h - t_1}{2} \right)^2 \right] + \omega_{21} \cdot \frac{b \cdot (h - 2 \cdot t_1)^3}{12},$$

ahol:

$$\omega_{21} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1000}{20600} = 0,0485,$$

amelyet, valamint a többi adatot behelyettesítve:

$$I_{\text{red}} = 2 \cdot \left[\frac{16 \cdot 0,8^3}{12} + 16 \cdot 0,8 \cdot 13,6^2 \right] + 0,0485 \cdot \frac{16 \cdot 26,4^3}{12} = 4735 + 1190 = 5925 \text{ cm}^4,$$

(Érdemes megfigyelni az inerciatagok arányait!)

Ennek felhasználásával felírható az 1-jelű elemben fellépő feszültség maximuma:

$$\sigma_{\text{max}1} = \frac{M}{I_{\text{red}}} \cdot y_{1\text{max}} = \frac{F \cdot a}{I_{\text{red}}} \cdot \frac{h}{2},$$

illetve a 2-jelű elemben fellépő feszültség maximuma:

$$\sigma_{\text{max}2} = \omega_{21} \cdot \frac{M}{I_{\text{red}}} \cdot y_{2\text{max}} = \omega_{21} \cdot \frac{F \cdot a}{I_{\text{red}}} \cdot \left(\frac{h}{2} - t_1 \right)$$

Az 1-jelű elemre vonatkozó $\sigma_{\text{max}1} \leq R_{\text{adm}1}$ feszültségkorlátozási feltételből adódó megengedett erő:

$$F_{\text{adm}1} = \frac{2 \cdot I_{\text{red}}}{a \cdot h} \cdot R_{\text{adm}1} = \frac{2 \cdot 5925}{40 \cdot 28} \cdot 16 = 169,3 \text{ kN},$$

míg a 2-jelű elemre vonatkozó $\sigma_{\text{max}2} \leq R_{\text{adm}2}$ feszültségkorlátozási feltételből

$$F_{\text{adm}2} = \frac{I_{\text{red}}}{\omega_{21} \cdot a \cdot \left(\frac{h}{2} - t_1 \right)} \cdot R_{\text{adm}2} = \frac{5925}{0,0485 \cdot 40 \cdot 13,2} \cdot 2 = 462,8 \text{ kN}$$

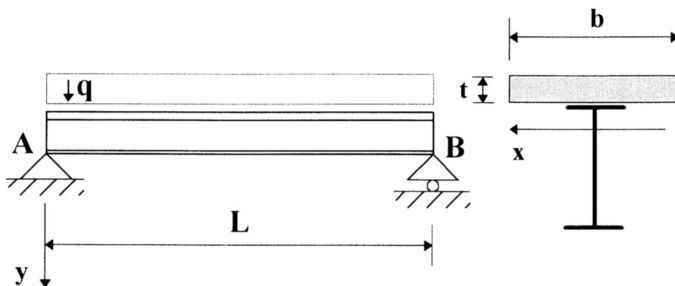
megengedett erő adódik.

Természetesen csak a kisebb F_{adm} érték engedhető meg, vagyis a teher nem haladhatja meg a megengedhető $F_{\text{adm}} = 169,3 \text{ kN}$ értéket. Látható, hogy most a szendvicstartó 1-jelű rétegére vonatkozó szilárdsági feltétel volt az aktív.

6.2-3 Feladat

A 6.12 ábrán kéttámaszú tartó keresztmetszete vasbetonlemezzel együttműködő acéltartó.

6.12 ábra



Adatok:

$L = 14,0 \text{ m}$

Acél szelvény: IPE 500

Beton méretek:

Szélesség: $b = 600 \text{ mm}$,

Vastagság: $t = 80 \text{ mm}$,

$R_{\text{au}} = 200 \text{ MPa}$,

$R_{\text{bu}} = 20 \text{ MPa}$,

$E_a = 206000 \text{ MPa}$,

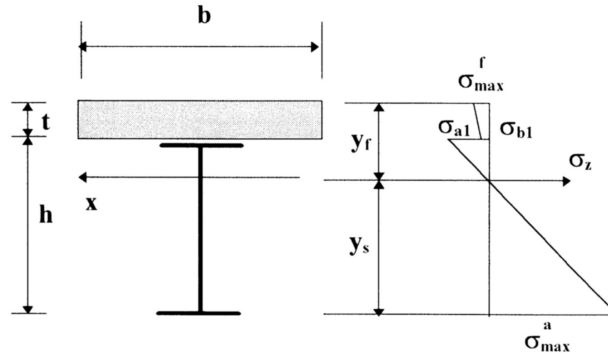
$E_b = 32000 \text{ MPa}$.

Feladat: 1. Határozzuk meg a keresztmetszet határteherbírását!

2. Határozzuk meg a keresztmetszet szélső szálaiban és a csatlakozásnál fellépő feszültségeket!

Megoldás: A vasbeton lemezzel együttműködő acéltartó (öszvértartó) határteherbírását hajlítás figyelembevételével határozzuk meg, az együttműködést biztosító nyírt kapcsolatokat e feladatban nem vizsgáljuk.

6.13 ábra



1. Keresztmetszeti jellemzők meghatározása $\omega_{ab} = \frac{E_b}{E_a} = \frac{32000}{206000} = 0,155$

Redukált keresztmetszet

$$A_{\text{red}} = A_a + \omega_{ab} \cdot A_b = 116 + 0,155 \cdot 60 \cdot 8 = 190,56 \text{ cm}^2$$

Súlypont koordinátája:

$$y_s = \frac{A_a \cdot h/2 + b \cdot t \cdot (h + t/2) \cdot \omega_{ab}}{A_{\text{red}}} = \frac{116 \cdot 25 + 60 \cdot 8 \cdot 54 \cdot 0,155}{190,56} = 36,35 \text{ cm}$$

Redukált másodrendű nyomaték az x hajlítási tengelyre:

$$I_{x\text{red}} = I_{xa} + A_a \cdot (y_s - h/2)^2 + \omega_{ab} \cdot \frac{b \cdot t^3}{12} + \omega_{ab} \cdot b \cdot t \cdot (h + t/2 - y_s)^2$$

$$I_{x\text{red}} = 48200 + 116 \cdot (36,35 - 25)^2 + 0,155 \cdot \frac{60 \cdot 8^3}{12} + 0,155 \cdot 60 \cdot 8 \cdot (50 + 4 - 36,35)^2$$

$$I_{x\text{red}} = 86769 \text{ cm}^4$$

2. Határteherbírás meghatározása:

A keresztmetszet szélső szálaire felírt feszültségkorlátozások:

$$\sigma_{\text{max}}^f = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot I_{x\text{red}}} \cdot \omega_{ab} \cdot y_f \leq R_{bu}, \text{ illetve } \sigma_{\text{max}}^a = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot I_{x\text{red}}} \cdot y_s \leq R_{au}$$

Kifejezve a határterheléseket.

$$q_{Hb} = \frac{8 \cdot I_{xred} \cdot R_{bu}}{\omega_{ab} \cdot L^2 \cdot y_f} = \frac{8 \cdot 86769 \cdot 2}{0,155 \cdot 800^2 \cdot (58 - 36,35)} = 0,645 \text{ kN / cm}$$

$$q_{Ha} = \frac{8 \cdot I_{xred} \cdot R_{au}}{L^2 \cdot y_s} = \frac{8 \cdot 86769 \cdot 20}{800^2 \cdot 36,35} = 0,597 \text{ kN / cm}.$$

Az eredmények alapján az acél szélső szál feszültsége a mértékadó, így a határteherbírás:

$$q_{Ha} = 0,597 \text{ kN / cm} = 59,7 \text{ kN / m}.$$

3. Feszültségek meghatározása:

Az alsó szélső szál feszültsége:

$$\sigma_{max}^a = R_{au} = 200 \text{ MPa}.$$

A beton felső szál feszültsége:

$$\sigma_{max}^f = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot I_{xred}} \cdot \omega_{ab} \cdot y_f = \frac{0,597 \cdot 800^2}{8 \cdot 86769} \cdot 0,155 \cdot (36,35 - 58) = -1,85 \text{ kN / cm}^2 \leq R_{bu}.$$

Az acél és beton csatlakozásánál keletkező feszültségek

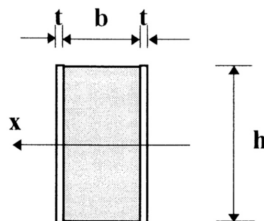
$$\begin{aligned} \sigma_{bl} &= \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot I_{xred}} \cdot \omega_{ab} \cdot (y_f - h) = \frac{0,597 \cdot 800^2}{8 \cdot 86769} \cdot 0,155 \cdot (36,35 - 50) = \\ &= -1,167 \text{ kN / cm}^2 \leq R_{bu} \quad \sigma_{al} = \frac{\sigma_{bl}}{\omega_{ab}} = \frac{-1,167}{0,155} = -7,513 \text{ kN / cm}^2 \leq R_{au}. \end{aligned}$$

C.6.2 GYAKORLÓ FELADAT

6.2-4 Feladat

A 6.14 ábrán egy műanyag-alumínium összetételű szendvics-keresztmetszetet ábrázoltunk.

6.14 ábra



Adatok:

$t = 2 \text{ mm},$
 $b = 40 \text{ mm},$
 $h = 80 \text{ mm},$
 $E_1 = 75000 \text{ MPa},$
 $E_2 = 12000 \text{ MPa},$
 $R_{u1} = 120 \text{ MPa},$
 $R_{u2} = 40 \text{ MPa}.$

Feladat: Határozza meg a keresztmetszet x tengelyre vonatkozó határnyomatékát!

Eredmények:

$I_{xred} = 44,373 \text{ cm}^4$	$M_H = 13,312 \text{ kNm}$	Mértékadó az alumínium
----------------------------------	----------------------------	------------------------

6.3 Változó keresztmetszetű és tengelyű rudak

A.6.3 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

A gyakorlatban a szerkezeti kialakítás gyakran megköveteli, hogy a tartószerkezeti elemek változó keresztmetszettel készüljenek. A változó keresztmetszet alkalmazását teszi indokolttá az is, ha a szerkezeteket gazdaságos anyagfelhasználás szempontjai szerint kívánjuk előállítani. A változó keresztmetszetű rudakat a keresztmetszetváltozás, vagy rúdtengely megváltozás jellegének megfelelően három nagy csoportba sorolhatjuk:

- A hirtelen keresztmetszetváltozású rudak, melyeknél valamely keresztmetszetben a keresztmetszet ugrásszerűen változik meg. Ekkor az addig szabályos elrendezéssel haladó erővonalak hirtelen torlódásra kényszerülnek, és ezeken a torlódási helyeken feszültségkoncentrációk (feszültségcsúcsok) lépnek fel.
- A fokozatosan változó keresztmetszetű rudak, melyeknél a keresztmetszet megváltozása az előzőtől eltérően nem hirtelen következik be. Ezeknél a szerkezeti kialakításoknál a feszültségi állapot fokozatos egyenletes (nem hirtelen) megváltozása következik be, jelentős feszültségkoncentráció nélkül, ha az átvezetés hosszúsága elegendően nagy. A fokozatosan változó keresztmetszetű rudak körén belül kiemelt jelentősége van az egyenszilárdságú rudaknak. Ezek sajátossága, hogy a keresztmetszet változása követi az igénybevételi ábrát, azon szempont szerint, hogy a keresztmetszetek mindegyikében azonos legyen a maximális feszültség, tehát a keresztmetszetek azonos kihasználtságúak legyenek.
- A változó tengelyű rudak esetén is iránytörésre kényszerítjük az erővonalakat, ezért a feszültségi állapot megzavarása miatt az iránytörés hirtelen, vagy egyenletes voltától függően jelentős, vagy kevésbé jelentős feszültségkoncentrációk alakulnak ki.

A csoportosítás során történő utalások is mutatják, hogy a feszültségi állapot jellege, a szokásos feszültségeloszlásoktól eltérő, a szerkezeti elem kialakításától függően. Az éles sarkok, bemetszések, hirtelen keresztmetszetváltozások és rúdtengely-irányváltozások jelentős feszültségkoncentrációkat okoznak, vagyis a fellépő maximális feszültségek lényegesen nagyobbak, mint azt az elemi szilárdságtan alapösszefüggéseiből számíthatnánk. A feszültség maximális értéke az alábbi összefüggésből számítható: $\sigma_{\max} = \alpha_{sc} \cdot \sigma_{\text{nom}}$

ahol: α_{sc} a feszültségkoncentrációs tényező, illetve az alaktényező (az elnevezés arra utal, hogy értékét döntően a szerkezeti kialakítás határozza meg),

σ_{nom} a névleges feszültség, vagyis az elemi szilárdságtani alapösszefüggésekkel meghatározható feszültség értéke.

A feszültségkoncentrációs tényezők meghatározása általában kísérleti, illetve az egyszerűbb esetekben elméleti úton történik. A gyakorlati tervezés számára a leggyakoribb szerkezeti megoldásokra rendelkezésre állnak táblázatok, illetve az egyszerűbb esetekre egzakt képletek. A [3] 6.2 pontjában néhány gyakori szerkezeti megoldásra és terhelési esetre diagramokat találunk, melyekből a feszültségkoncentrációs tényezők meghatározhatók. A feszültségkoncentráció hatása statikus terhelésű szívós viselkedésű anyagok esetében a méretezés során figyelmen kívül hagyható, mert a fellépő feszültségcsúcsok a képlékenységtan törvényei szerint képesek a leépülésre. Ridegen viselkedő anyagok esetén (nagyszilárdságú szerkezeti anyag, dinamikus terhelés, alacsony hőmérséklet) annál nagyobb a jelentősége.

[3] Vigh Sándor–Farkas Beáta: *Műszaki mechanika II. Példatár II. Szilárdságtani táblázatok*. Dunaújváros: ME DFK.

[4] Vigh Sándor (Szerk.):
Műszaki
mechanika II.
Példatár II/A.
A szilárdság-
tan alapjai.
Dunaújváros:
ME DFK.

6.3.1 Változó keresztmetszetű rudak

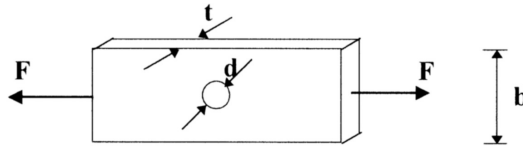
A változó keresztmetszetű húzott rudakra néhány feladatmegoldást találhatunk [4] 4.1.1 pontjában.

B.6.3.1 Kidolgozott feladatok

6.3.1-1 Feladat

A 6.15 ábrán egy furatgyengítéssel rendelkező téglalap keresztmetszetű húzott rudat vázoltunk, melyet központos F húzóerő terhel.

6.15 ábra



Adatok:

$b = 50 \text{ mm}$,

$t = 8 \text{ mm}$,

$d = 17 \text{ mm}$,

Anyagminőség:

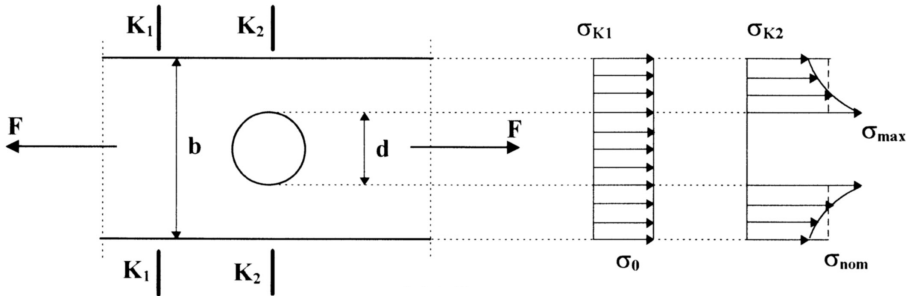
Fe 235 B MSz 500,

$\gamma_b = 2,2$

Feladat: Határozzuk meg a rúd húzó határerejét a feszültségcsúcs korlátozására!

Megoldás: A rudat terhelő húzóerőből származó feszültségek eloszlását tüntettük fel a rúd K_1 és K_2 keresztmetszetében.

6.16 ábra



A K_1 keresztmetszetben fellépő feszültség

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_t} = \frac{F}{b \cdot t} \leq R_{\text{adm}} = \frac{R_p}{\gamma_b},$$

A K_2 keresztmetszetben fellépő maximális feszültség

$$\sigma_{\max} = \alpha_{\text{sc}} \cdot \sigma_{\text{nom}} = \alpha_{\text{sc}} \cdot \frac{F}{A_h} = \alpha_{\text{sc}} \cdot \frac{F}{(b-d) \cdot t} \leq R_{\text{adm}} = \frac{R_p}{\gamma_b}$$

A feszültségek képletéből látható, hogy a K_2 keresztmetszet feszültségcsúcs korlátozási feltétele a mértékadó, ahonnan kifejezhetjük a keresett megengedett erőt.

$$F_{adm} = \frac{R_p \cdot (b - d) \cdot t}{\alpha_{sc} \cdot \gamma_b} = \frac{23,5 \cdot (5,0 - 1,7) \cdot 0,8}{1,6 \cdot 2,2} = 17,625 \text{ kN}.$$

A feszültségkoncentrációs tényező [1] 4.5 pontja alapján adódik.

Végezetül hasonlítsuk össze a gyengített és gyengítetlen teljes keresztmetszet teherbírását!

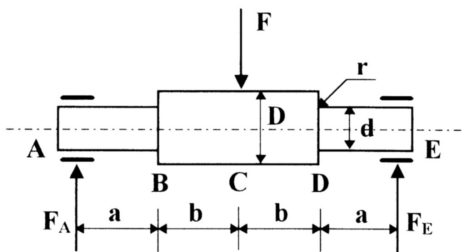
$$F_{0adm} = \frac{R_p \cdot b \cdot t}{\gamma_b} = \frac{23,5 \cdot 5,0 \cdot 0,8}{2,2} = 42,73 \text{ kN},$$

a teljes keresztmetszet húzási teherbírása 142 %-kal (2,42-ször) nagyobb mint a furatgyengítéssel ellátott keresztmetszeté.

6.3.1-2 Feladat

A 6.17 ábrán egy géptengelyt ábrázoltunk, melyet középen egy koncentrált F erő terhel. (Lásd még 5. pont)

6.17 ábra



Adatok:

$a = 40 \text{ mm}$,

$b = 40 \text{ mm}$,

$d = 40 \text{ mm}$,

$D = 60 \text{ mm}$,

$r = 4 \text{ mm}$,

$F = 20 \text{ kN}$,

$R_p \approx 370 \text{ MPa}$,

Anyagminőség:

Fe 590-2 (A 60),

Biztonsági tényező:

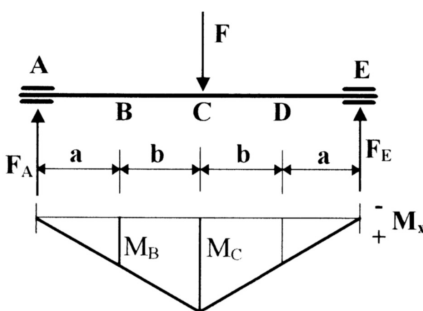
$\gamma_b = 2,0$.

Feladat: Ellenőrizzük a tengelyt szilárdsági szempontból!

Megoldás: 1. Hajlítói igénybevételek meghatározása:

A tengely önsúlyterhelése az F erőhöz képest elhanyagolhatóan kicsi. A B és C keresztmetszet hajlítói igénybevétele az 6.18 ábra alapján.

6.18 ábra



$$M_B = F_A \cdot a = 10 \cdot 4 = 40 \text{ kNcm},$$

$$M_C = F_A \cdot (a + b) = 10 \cdot (4 + 4) = 80 \text{ kNcm}.$$

2. Maximális feszültségek meghatározása:

A C keresztmetszetben a fellépő hajlítói igénybevétel maximális, a B keresztmetszetben pedig hirtelen keresztmetszetváltozás van, ezért a B keresztmetszetben a feszültségkoncentráció hatásával kell számolnunk.

[1] Vigh
Sándor– Kop-
pány Imre:
Műszaki
mechanika
II/A. Elemi
szilárdságtan.
Budapest:
Tankönyvki-
adó.

[3] Vigh Sándor–Farkas Beáta: *Műszaki mechanika II. Példatár II. Szilárdságtani táblázatok.* Dunaújváros: ME DFK.

– B keresztmetszet:

$$W_B = \frac{d^3 \cdot \pi}{32} = \frac{4^3 \cdot \pi}{32} = 6,283 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_B = \frac{M_B}{W_B} = \frac{40}{6,283} = 6,366 \text{ kN/cm}^2 = 63,66 \text{ MPa}.$$

A B keresztmetszetre vonatkozó feszültségkoncentrációs tényező [3] 6.2 pontja nyolcadik táblázata szerint

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1,5 \quad \text{és} \quad \frac{r}{d} = \frac{4}{40} = 0,1$$

$$\alpha_{sc} = 1,8$$

Maximális feszültség (feszültségcsúcs) a B keresztmetszetben

$$\sigma_{\max}^B = \alpha_{sc} \cdot \sigma_B = 1,8 \cdot 63,66 = 114,6 \text{ MPa} < R_{adm} = \frac{R_p}{\gamma_b} = \frac{370}{2,0} = 185 \text{ MPa},$$

a B keresztmetszet megfelel szilárdságilag az előírt biztonsággal.

Megjegyezzük, hogy a gyakori váltakozó terhelésnek kitett tengelyt kifaradásra is kell ellenőrizni, melyet ugyanerre a tengelyre az 5. pontban mutattunk be.

– C keresztmetszet.

$$W_C = \frac{D^3 \cdot \pi}{32} = \frac{6^3 \cdot \pi}{32} = 21,2 \text{ cm}^3,$$

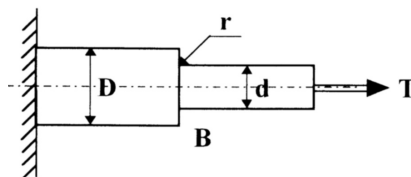
$$\sigma_C = \frac{M_C}{W_C} = \frac{80}{21,2} = 3,78 \text{ kN/cm}^2 = 37,8 \text{ MPa} < R_{adm} = 185 \text{ MPa},$$

A C keresztmetszetben nincs keresztmetszetváltozás, ezért feszültségkoncentrációs tényezővel nem kell számolni. A tengely a C keresztmetszetben gyengén van kihasználva, a nagyobb átmérő szerelési és konstrukciós okokkal magyarázható.

6.3.1-3 Feladat

A 6.19 ábrán egy állandó csavarónyomatékkal terhelt változó körkeresztmetszetű csavart rudat vázoltunk.

6.19 ábra



Adatok:

$D = 100 \text{ mm},$

$d = 60 \text{ mm},$

$r = 6 \text{ mm},$

$R_{adm} = 160 \text{ MPa}.$

Feladat: Határozzuk meg a tengely terhelhetőségét Mohr elmélete szerint!

Megoldás:

A csavart rúd veszélyes keresztmetszete a **B** keresztmetszet, ahol hirtelen keresztmetszetváltozás van. Az itt fellépő maximális csavarófeszültség számítása:

$$\tau_{\max} = \alpha_{sc} \cdot \frac{T}{W_p} = \alpha_{sc} \cdot \frac{T}{d^3 \cdot \pi} \cdot 16 \leq \frac{R_{adm}}{\sqrt{4}}$$

A feszültségkoncentrációs tényező [3] 6.2 pont utolsó táblázatából vehető:

$$\frac{D}{d} = \frac{100}{60} = 1,667, \quad \frac{r}{d} = \frac{6}{60} = 0,1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{sc} = 1,38$$

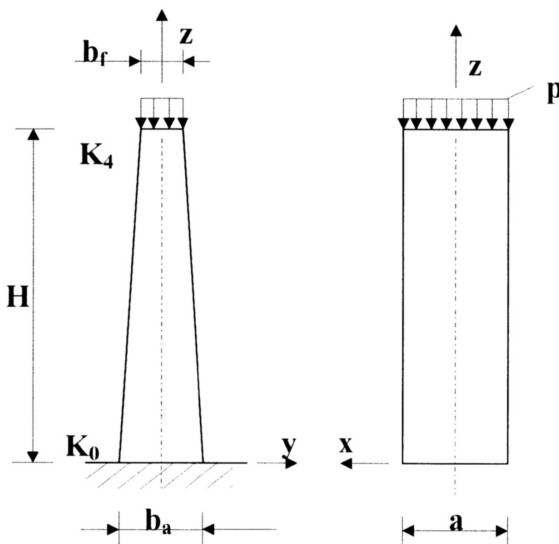
A megengedett csavarónyomaték:

$$T_{adm} = \frac{d^3 \cdot \pi \cdot R_{adm}}{\sqrt{4} \cdot 16 \cdot \alpha_{sc}} = \frac{6^3 \cdot \pi \cdot 16}{2 \cdot 16 \cdot 1,38} = 245,8 \text{ kNcm} = 2,458 \text{ kNm}.$$

6.3.1-4 Feladat

A 6.20 ábrán egy betonból készült változó keresztmetszetű felmenő fal látható. A falat önsúlyán kívül a legfelső keresztmetszetén p nyomás is terheli.

6.20 ábra



Adatok:

- $a = 1,0 \text{ m},$
- $b_f = 0,4 \text{ m},$
- $E_b = 2000 \text{ kN/cm}^2,$
- $H = 4,0 \text{ m},$
- $\gamma_b = 24 \text{ kN/m}^3,$
- $R_{bu} = 1,4 \text{ kN/cm}^2,$
- $p = 1 \text{ kN/cm}^2.$

- Feladat:*
1. Mekkora kell kiszélesíteni alul az oszlopot, ha az ott fellépő nyomófeszültség nem haladhatja meg az $R_{bu}/2$ értéket?
 2. Határozzuk meg és ábrázoljuk az $N(z)$ normálerőt, valamint a $\sigma_z(z)$ normálfeszültségi függvényt!
 3. Ellenőrizzük szilárdságilag az oszlopot!
 4. Határozzuk meg a rúd teljes összenyomódását!

Megoldás:

1. Az oszlop K_0 keresztmetszetében működő normálerő a p külső teher eredőjéből és az oszlop önsúlyából adódik.

$$N_0 = N_p + \gamma_b \cdot V = p \cdot a \cdot b_f + \gamma_b \cdot \frac{b_a + b_f}{2} \cdot a \cdot H$$

Az $A_0 = a \cdot b_a$ keresztmetszeti területen fellépő feszültségre fenn kell álljon a

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{A_0} = \frac{p \cdot a \cdot b_f + \gamma_b \cdot \frac{b_a + b_f}{2} \cdot a \cdot H}{a \cdot b_a} \leq \frac{R_{bu}}{2}$$

egyenlőtlenség, melyből kifejezve a fal alsó szélességi méretét:

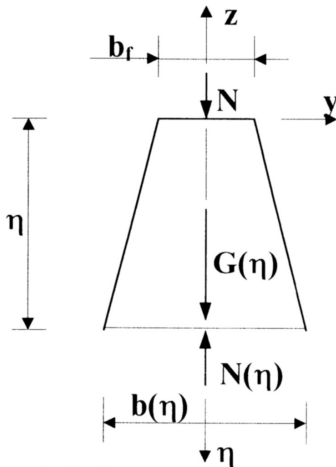
$$b_a \geq \frac{2 \cdot p \cdot b_f + \gamma_b \cdot H \cdot b_f}{R_{bu} - \gamma_b \cdot H} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 40 + 24 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 40}{1,4 - 24 \cdot 10^{-6} \cdot 400} = 57,81 \text{ cm.}$$

A kiszámított értéket kerekítve $b_a = 60 \text{ cm}$.

2. A továbbiakban megszerkesztjük az előző pontban meghatározott geometriájú oszlop igénybevételi ábráját. A 6.21 ábrán kirajzoltunk egy részt a változó keresztmetszetű tartóból. Az eredményt nem befolyásolja, pusztán célszerűségi okból a vizsgálatot az y - η koordináta-rendszerben végezzük el.

Írjuk fel az η koordinátájú helyen a geometriai összefüggéseket, valamint a belső erők függvényeit!

6.21 ábra



– a keresztmetszet szélessége:

$$b(\eta) = b_f + \frac{b_a - b_f}{H} \cdot \eta$$

– a keresztmetszeti terület:

$$A(\eta) = a \cdot b(\eta) = a \cdot b_f + \frac{a}{H} \cdot (b_a - b_f) \cdot \eta$$

– az η magasságú rész súlya:

$$G(\eta) = \gamma_b \cdot V(\eta) = \gamma_b \cdot \left[a \cdot b_f \cdot \eta + a \cdot \frac{b_a - b_f}{2 \cdot H} \cdot \eta^2 \right]$$

– a normálerő függvénye:

$$N(\eta) = p \cdot a \cdot b_f + G(\eta)$$

A normálerő és keresztmetszeti terület függvények felhasználásával írhatjuk a feszültség függvényét:

$$\sigma_z(z) = \frac{N(z)}{A(z)} = \frac{a \cdot p \cdot b_f + a \cdot \gamma_b \cdot \left[b_f \cdot \eta + \frac{b_a - b_f}{2 \cdot H} \cdot \eta^2 \right]}{a \cdot b_f + a \cdot \frac{b_a - b_f}{H} \cdot \eta}$$

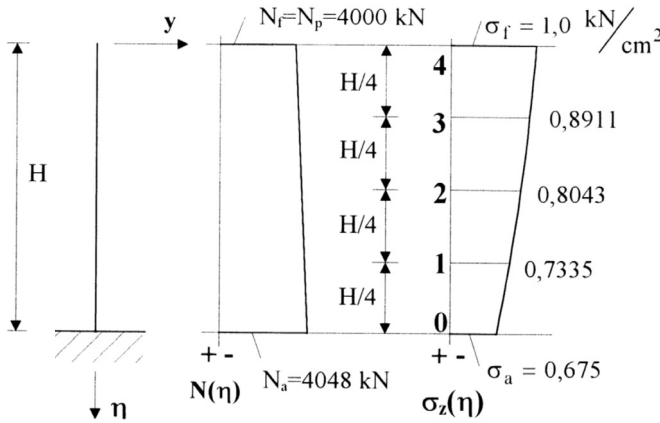
Behelyettesítés után a normálerő és feszültségi függvény az alábbiak szerint alakul:

$$N(\eta) = 4000 + 0,096 \cdot \eta + 6 \cdot 10^{-5} \cdot \eta^2 \quad [\text{kN}]$$

$$\sigma_z(z) = \frac{4000 + 0,096 \cdot \eta + 6 \cdot 10^{-5} \cdot \eta^2}{4000 + 5 \cdot \eta} \quad [\text{kN} / \text{cm}^2]$$

A fenti függvényeket ábrázoltuk a 6.22 ábrában a magasság negyedeiben a feszültségek feltüntetésével.

6.22 ábra



3. A normál feszültségi függvény az ábrából láthatóan monoton csökkenő, ezért a feszültség maximuma a K_4 keresztmetszetben lép fel.

$$\sigma_f = 1 \text{ kN} / \text{cm}^2 < R_{bu},$$

az oszlop szilárdságilag megfelel.

4. Mint ismeretes a változó keresztmetszetű nyomott rúd összenyomódása arányos a feszültségi ábra alatti területtel:

$$\Delta L = \frac{1}{E_b} \cdot \int_0^H \sigma_z(z) \cdot dz = \frac{A_\sigma}{E_b}$$

A feszültségi ábra alatti terület értékét numerikusan trapéz területekkel közelítően határozzuk meg. Példánkban $n = 4$ részre osztottuk fel az oszlopmagasságot.

$$A_\sigma = \left[\frac{\sigma_z(0) + \sigma_z(n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_z(i) \right] \cdot \frac{H}{n}$$

Behelyettesítés után $A_\sigma = 326,64 \text{ kN/cm}$ adódik, aminek felhasználásával a rúd összenyomódása:

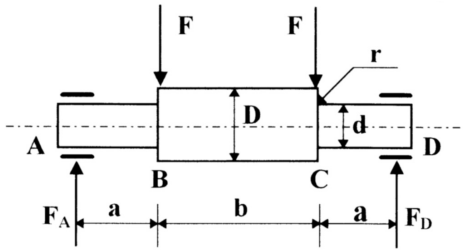
$$\Delta l = \frac{A_\sigma}{E_b} = \frac{326,64}{2000} = 0,163 \text{ cm}.$$

C.6.4.1 Gyakorló feladatok

6.3.1-5 Feladat

A 6.23 ábrán vázolt tengelyt két koncentrált erő terheli. A B és C helyeken a keresztmetszetváltozásoknál r lekerekítési sugárral biztosítjuk az átmenetet.

6.23 ábra



Adatok:

$$a = 200 \text{ mm},$$

$$b = 350 \text{ mm},$$

$$d = 42 \text{ mm},$$

$$D = 58 \text{ mm},$$

$$r = 6 \text{ mm},$$

$$R_{adm} = 120 \text{ MPa}.$$

Feladat: Határozza meg a tengely szilárdsági teherbírását feszültségcsúcsra!

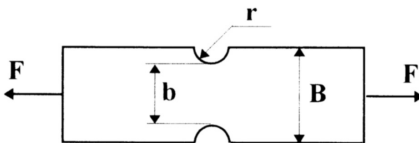
Eredmények:

$\alpha_{sc} \approx 1,65$	$F_{adm} = 2,645 \text{ kN}$
----------------------------	------------------------------

6.3.1-6 Feladat

Határozza meg a 6.24 ábrán vázolt t vastagságú húzott rúd maximális feszültségét!

6.24 ábra



Adatok:

$$F = 80 \text{ kN},$$

$$b = 120 \text{ mm},$$

$$B = 150 \text{ mm},$$

$$r = 24 \text{ mm},$$

$$t = 10 \text{ mm}.$$

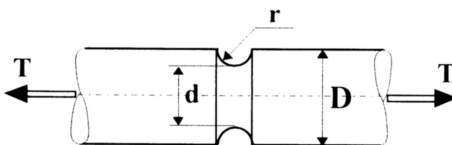
Eredmények:

$\alpha_{sc} = 2,05$	$\sigma_{max} = 136,7 \text{ MPa}$
----------------------	------------------------------------

6.3.1-7 Feladat

Ellenőrizze a 6.25 ábrán vázolt beszúrással rendelkező kör keresztmetszetű csavart rudat!

6.25 ábra



Adatok:

$$T = 25 \text{ kNm}$$

$$d = 120 \text{ mm},$$

$$D = 150 \text{ mm},$$

$$r = 6 \text{ mm},$$

Anyagminőség:

C 40 MSZ 61

Eredmények:

$\alpha_{sc} = 1,85$	$\sigma_{max} = 136,3 \text{ MPa} < R_{qadm} = 160 \text{ MPa}, \text{ megfelel}$
----------------------	---

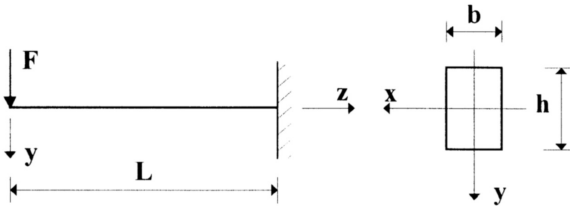
6.3.2 Egyenszilárdságú rudak

B.6.3.2 Kidolgozott feladatok

6.3.2-1 Feladat

Az egyik végén befogott, másik végén koncentrált erővel terhelt egyenszilárdságú rúd keresztmetszete derékszögű négyzög (6.26 ábra).

6.26 ábra



Feladat:

1. Hogyan változik a rúd keresztmetszet magassága, ha a b szélesség konstans?
2. Hogyan változik a rúd szélessége, ha a h magasság konstans?

3. Milyen függvény szerint változik a rúd átmérője, ha kör keresztmetszetű tengelyként méreteznénk?

Megoldás:

1. A hajlításra terhelt rudat akkor nevezzük egyenszilárdságúnak, ha minden keresztmetszetében ugyanakkora legnagyobb feszültség ébred, vagyis $\sigma_{\max} = \text{áll.}$ a hossz mentén.

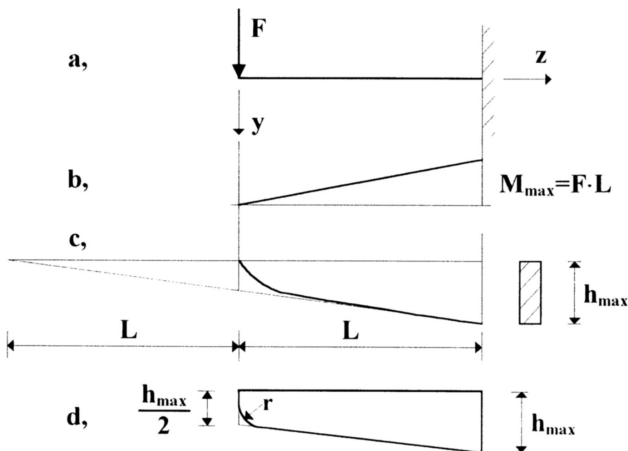
A leggazdaságosabban kihasznált tartót úgy kapjuk, ha ez az érték éppen megegyezik a megengedett feszültséggel, vagyis $\sigma_{\max} = R_{\text{adm}}$.

Mivel a Navier-összefüggés szerint

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x},$$

így a $\sigma_{\max} = \text{áll.}$ feltétel az $\frac{M_{(z)}}{W_{(z)}} = \text{áll.}$ feltétellel teljesíthető. (6.3.1)

6.27 ábra



Példánkban $M_{(z)} = F \cdot z$, és

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad (6.3.2.)$$

Mivel feltételünk szerint $b = \text{const}$, így a $h_{(z)}$ függvény olyan kell legyen, amely teljesíti a (6.3.1.) összefüggést. Mivel a befogásnál $M = M_{\max}$ és így $h = h_{\max}$, (3.1.) behelyettesítéssel és átalakításával írható, hogy

$$\frac{M_{(z)}}{W_{(z)}} = \frac{M_{\max}}{W_{\max}}, \text{ vagy } \frac{W_{(z)}}{W_{\max}} = \frac{M_{(z)}}{M_{\max}} = \frac{F \cdot z}{F \cdot L} = \frac{z}{L}, \quad (6.3.3.)$$

majd a keresztmetszeti tényezők behelyettesítésével

$$\frac{b \cdot h_{(z)}^2}{b \cdot h_{\max}^2} = \frac{z}{L}, \text{ ahonnan } h_{(z)}^2 = h_{\max}^2 \cdot \frac{z}{L} \quad \text{és}$$

ahonnan

$$h_{(z)} = h_{\max} \sqrt{\frac{z}{L}} \quad (6.3.4)$$

Láthatóan a $h(z)$ parabola, amelynek vázlata a 6.27 c ábrán látható.

A gyártási költségek csökkentése érdekében a magasság változtatását a következőképpen célszerű megoldani (d. ábra):

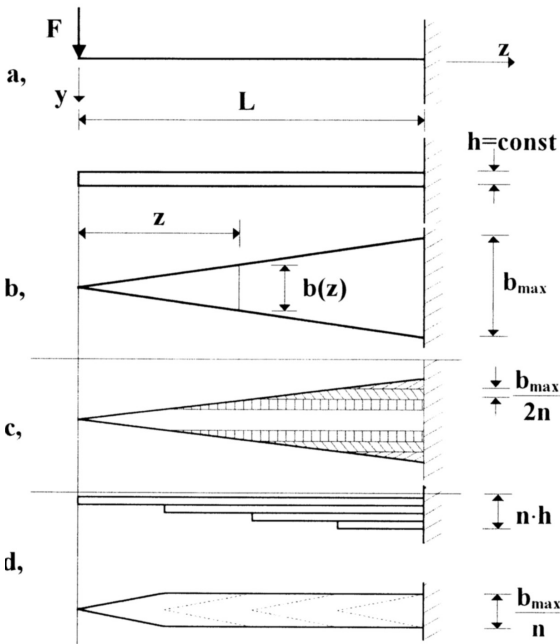
- az alsó határvonalat $h_{\max}/2$ értékről $h_{\max}$ értékre vezetjük,
- végén r lekerekítést alkalmazunk.

2. Állandó h magasságú szelvény esetén a (6.3.3.) összefüggésből a keresztmetszeti tényező (6.3.2.) szerinti mennyisége behelyettesítésével

$$\frac{b_{(z)} \cdot h^2}{b_{\max} \cdot h^2} = \frac{z}{L}, \text{ ahonnan } b_{(z)} = b_{\max} \cdot \frac{z}{L} \quad (6.3.5.)$$

vagyis a szélesség lineáris függvény szerint változik.

6.28 ábra

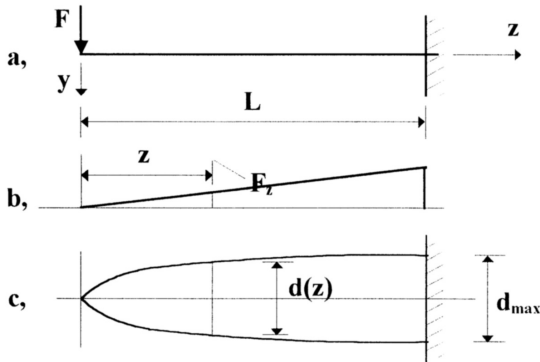


Ezt mutatja a 6.28 b ábra, amely a háromszög alakú laprugó klasszikus esete. Ha a háromszögrugót $2n$ darab, egyenlő $h = \text{const}$ szélességű részre felosztjuk, (c. ábra) majd a középső, $b_{\max}/n$ széles elemet megtartva, a mellette elhelyezkedő két szeletet „összefűzve” alája helyezzük és ezt a következő 2–2 szelettel is megtesszük, a d. ábrán vázolt n lapból álló $b_{\max}$ lemezrugóhoz jutunk. Természetesen az erőbevezetés gyakorlati kialakítása nem oldható meg csúcsban végződő rugón ($b = 0$). Ezért a szabad rugóvégen pl. az e. ábrán vázolt módon $b_{\max}$ rugószemet képeznek ki, amelyben egy csapon keresztül jut az erő a trapéz lap rugóra.

3. Körkeresztmetszet esetén a keresztmetszeti tényező:

$$W_x = \frac{d^3 \cdot \pi}{32} \quad ,$$

6.29 ábra



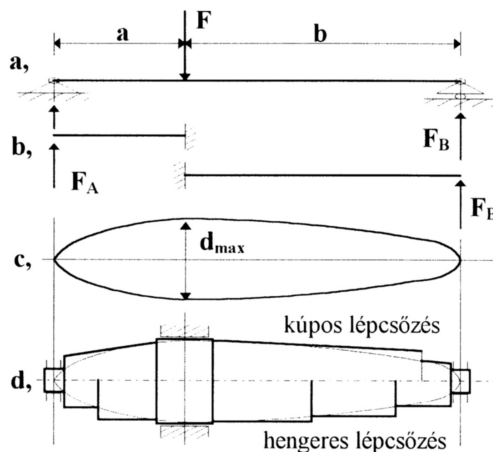
amelynek felhasználásával a (6.3.3.) alapján

$$\frac{d^3(z)}{d_{\max}^3} = \frac{z}{L} \quad ,$$

amiből $d(z) = d_{\max} \sqrt[3]{\frac{z}{L}}$

Vagyis az átmérő a szabad rúdvégtől kiindulva harmadfokú parabola szerint növekszik (6.29 c. ábra). Természetesen az erőbevezetés helyén az átmérő nem lehet zérus értékű, annál is inkább, mivel a fentiekben figyelembe vett hajlító igénybevétel mellett nyírás is fellép. Ezt, valamint a gyártási költségcsökkentés igényét tekintetbe véve rajzoltuk meg a 6.30 ábrán egy két végén csapágyazott lépcsős tengely célszerű gyakorlati kialakításának két változatát, közös ábrán. A szimmetriatengely fölött kúpos, alatta hengeres lépcsőzésű tengelykialakítást vázoltunk. Mint az a, és b, ábrák összevetéséből látható, a kéttámaszú tartóként modellezett tengely esete felfogható úgy is, mint az F_A , F_B támasztóerők által terhelt a illetve b hosszúságú konzolok, amelyek megfelelnek feladatunk eredeti modelljének.

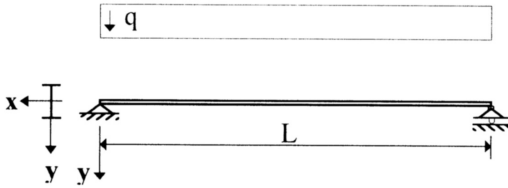
6.30 ábra



6.3.2-2 Feladat

A 6.31 ábrán egyenletesen megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartót ábrázoltunk.

6.31 ábra



Adatok:

$$L = 12 \text{ m}$$

$$q = 12 \text{ kN/m},$$

anyagminőség: Fe 235 B.

Feladat: Tervezzük meg a hegesztett I keresztmetszetű tartót hajlításra, változó övlemezvastagság alkalmazásával közelítve az egyenteherbírást!

Megoldás:

Az egyenszilárdságot közelítő I tartót e példában állandó gerinclemez-magasság mellett az övlemez vastagságának változtatásával érjük el. Az övlemez nyomatéki ábrához igazodó vastagság-változását övlemeztervnek nevezzük.

Az övlemezterv készítése egy olyan módszer, mellyel az egyenszilárdságot közelítő tartót nyerünk. Az egyenteherbírás fogalma szerint a hajlításból származó feszültség a tartó minden keresztmetszetében azonos:

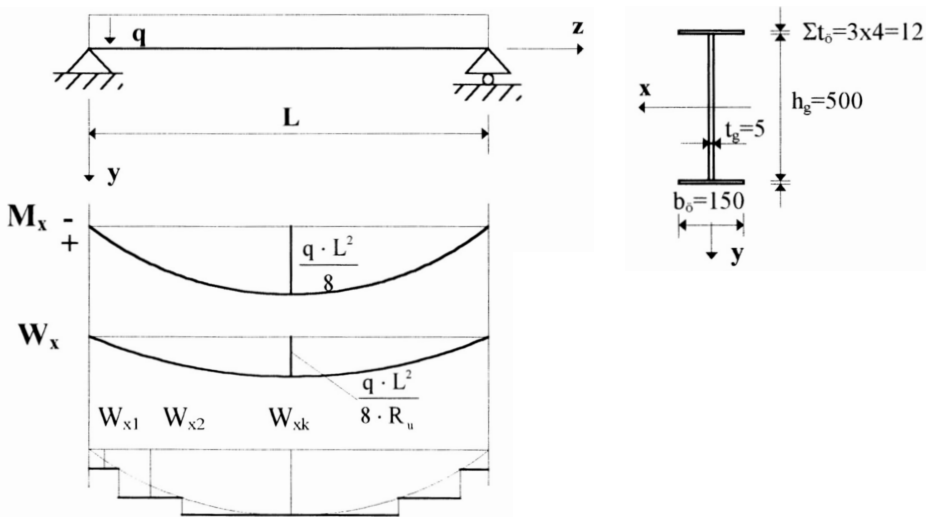
$$\sigma_z(z) = \frac{M_x(z)}{W_x(z)} = \text{állandó}.$$

Ez a feltétel azt jelenti, hogy a tartó keresztmetszetét fokozatosan kell változtatni a

$$W_x(z) = \frac{M_x(z)}{R_u}$$

összefüggés szerint. Ebből látható, hogy $W_x(z)$ a nyomatéki ábra R_u -ad része (6.22 ábra).

6.32 ábra



Közelítjük az egyenszilárdságot a gyakorlati lehetőségeknek megfelelő módon a

$$W_x(z) \geq \frac{M_x(z)}{R_u}$$

összefüggés alapján a folytonos $W_x(z)$ ábrát kívülről burkoló szakaszonként állandó keresztmetszet alkalmazásával.

A tartó középső keresztmetszetében működő hajlítónyomaték felvételére szükséges keresztmetszeti tényező:

$$W_{xk} = \frac{M_{xk}}{R_u} = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot R_u} = \frac{0,12 \cdot 1200^2}{8 \cdot 20} = 1080 \text{ cm}^3$$

A 6.32.b. ábrán látható keresztmetszet inercianyomatéka és keresztmetszeti tényezője:

$$I_x = \frac{t_g \cdot h_g^3}{12} + 2 \cdot b_{\delta} \cdot t_{\delta} \cdot \left(\frac{h_g + t_{\delta}}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{b_{\delta} \cdot t_{\delta}^3}{12} ,$$

$$I_x = \frac{0,5 \cdot 50^3}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 1,2 \cdot \left(\frac{50 + 1,2}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{15 \cdot 1,2^3}{12} = 28805 \text{ cm}^4 ,$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_m} = \frac{28805}{26,2} = 1099 \text{ cm}^3 .$$

A választott keresztmetszet megfelelő a maximális hajlítói igénybevétel felvételére, mert fennáll a

$$W_x = 1099 \text{ cm}^3 > W_{xk} = 1080 \text{ cm}^3$$

egyenlőtlenség.

Továbbiakban határozzuk meg az övlemezek hosszát. A hajlítónyomatéki függvényre fenn kell álljon az alábbi egyenlőtlenség:

$$M_x(z) = \frac{q}{2}(Lz - z^2) \leq W_{xi} \cdot R_u .$$

Átalakítás után a keresztmetszetváltás helyét a

$$z^2 - Lz + \frac{2 \cdot W_{xi} \cdot R_u}{q} = 0$$

egyenletből határozhatjuk meg.

A keresztmetszetváltozást úgy hozzuk létre, hogy elhagyunk egy, illetve két 4 mm vastag övlemezt. A K_1 illetve K_2 keresztmetszet inerciaja és keresztmetszeti tényezője:

$$I_{x1} = \frac{0,5 \cdot 50^3}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 0,4 \cdot \left(\frac{50 + 0,4}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{15 \cdot 0,4^3}{12} = 12829 \text{ cm}^4$$

$$W_{w1} = \frac{I_{x1}}{y_{m1}} = \frac{12829}{25,4} = 505 \text{ cm}^3 ,$$

$$I_{x2} = \frac{0,5 \cdot 50^3}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 0,8 \cdot \left(\frac{50 + 0,8}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{15 \cdot 0,8^3}{12} = 20693 \text{ cm}^4 ,$$

$$W_{w2} = \frac{I_{x2}}{y_{m2}} = \frac{20693}{25,8} = 802 \text{ cm}^3 .$$

A W_{x1} és W_{x2} keresztmetszeti tényezőt behelyettesítve a z -re felírt másodfokú egyenletbe, aminek megoldásával a z_1 és z_2 koordináták az övlemez vastagítás helyeit kapjuk.

Ezek a helyek az **A** és **B** támaszoktól egyaránt értendők. A W_{x1} behelyettesítésével kapott egyenlet:

$$z^2 - 1200 \cdot z + \frac{2 \cdot 505 \cdot 20}{0,12} = z^2 - 1200 \cdot z + 168333 = 0 .$$

$$z_{1,3} = \frac{1200 \pm \sqrt{1200^2 - 4 \cdot 168333}}{2}$$

kiszámításával az egy övlemez tartórész végének ($z_1 = 162,2 \text{ cm}$) és a **B** támasz felőli kezdetének ($z_3 = 1037,8 \text{ cm}$) koordinátáit határoztuk meg. (Megfigyelhető, hogy $z_1 + z_3 = L$.) Hasonlóan megoldva a két övlemez tartó keresztmetszet végének, illetve kezdetének koordinátáira a

$$z^2 - 1200 \cdot z + \frac{2 \cdot 802 \cdot 20}{0,12} = z^2 - 1200 \cdot z + 267333 = 0 \text{ egyenlet gyökei}$$

$$z_{2,4} = \frac{1200 \pm \sqrt{1200^2 - 4 \cdot 267333}}{2} , \text{ azaz } z_2 = 295,6 \text{ cm és } z_4 = 904,4 \text{ cm} .$$

A fenti megoldásokat a gyakorlati igényeknek megfelelően a biztonságos teherbírás érdekében kerekítsük az alábbi értékre:

$$z_1 = 1600 \text{ mm} , \quad z_3 = 10400 \text{ mm} ,$$

$$z_2 = 2900 \text{ mm} , \quad z_4 = 9100 \text{ mm} .$$

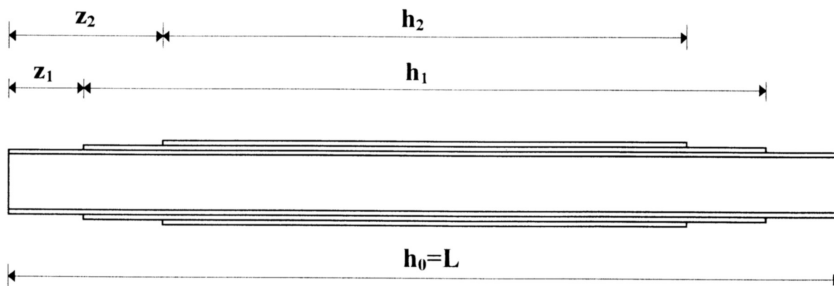
Az egyes övlemezek hossza:

$$h_0 = L = 12000 \text{ mm}$$

$$h_1 = z_3 - z_1 = 10400 - 1600 = 8800 \text{ mm}$$

$$h_2 = z_4 - z_2 = 9100 - 2900 = 6200 \text{ mm}$$

6.33 ábra



Végezetül határozzuk meg, hány %-os anyagmegtakarítást értünk el az övlemezterv alkalmazásával.

A változó övű tartó térfogata:

$$V_1 = 2 \cdot (A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot (z_2 - z_1)) + A_3 \cdot h_2,$$

ahol

$$A_1 = 0,5 \cdot 50 + 2 \cdot 0,4 \cdot 15 = 37 \text{ cm}^2,$$

$$A_2 = 0,5 \cdot 50 + 2 \cdot 0,8 \cdot 15 = 49 \text{ cm}^2,$$

$$A_3 = 0,5 \cdot 50 + 2 \cdot 1,2 \cdot 15 = 61 \text{ cm}^2.$$

A végigmenő maximális keresztmetszettel készülő tartó térfogata:

$$V_2 = A_3 \cdot L = 61 \cdot 1200 = 73200 \text{ cm}^3.$$

Az anyagmegtakarítás a legnagyobb keresztmetszet teljes hosszon való alkalmazásával szemben:

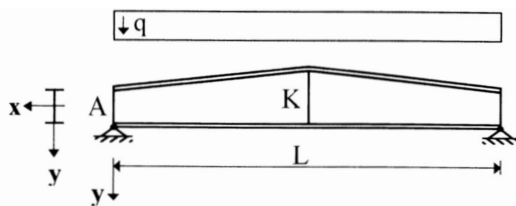
$$a_m \% = \frac{V_2 - V_1}{V_2} \cdot 100 = \frac{73200 - 62400}{73200} \cdot 100 = 14,75\%$$

C.6.3.2 Gyakorló feladat

6.3.2-3 Feladat

A 6.34 ábrán vázoltunk egy változó keresztmetszetű 1-tartót q megoszló terheléssel.

6.34 ábra



Adatok:

$L = 12 \text{ m}$, $q = 12 \text{ kN/m}$,
 $h_A = 340 \text{ mm}$,
 $h_K = 500 \text{ mm}$,
 $t_{\text{öv}} = 12 \text{ mm}$, $t_g = 5 \text{ mm}$,
 $b_{\text{öv}} = 150 \text{ mm}$, $R_u = 200 \text{ MPa}$,
 Anyagminőség:
 37 B MSZ 6280,

Feladat: 1. Ellenőrizze a tartó középső és a közepétől 500 mm-es lépésként adódó keresztmetszeteket a szélső szál normálfeszültségeire!

Eredmények:

$z \text{ [mm]}$	$M_x(z) \text{ [kNcm]}$	$h_g(z) \text{ [cm]}$	$I_x(z) \text{ [cm}^4\text{]}$	$W_x(z) \text{ [cm}^3\text{]}$	$\sigma_z(z) \text{ [kN/cm}^2\text{]}$
6000	21600	50,0	28805	1099	19,65
5500	21450	48,67	27191	1065	20,14
5000	21000	47,33	25618	1030	20,39
4500	20250	46,0	24110	996	20,32
4000	19200	44,67	22655	962,5	19,94
4850	20806,5	46,933	25159	1020	20,398

A maximális feszültség $z = 4850 \text{ mm}$ -nél, tehát **nem a maximális nyomaték helyén** lép fel, s mint látható a tartó nem felel meg.

[1] Vigh Sándor–Koppány Imre: *Műszaki mechanika II/A. Elemi szilárdságtan*. Budapest: Tankönyvkiadó.

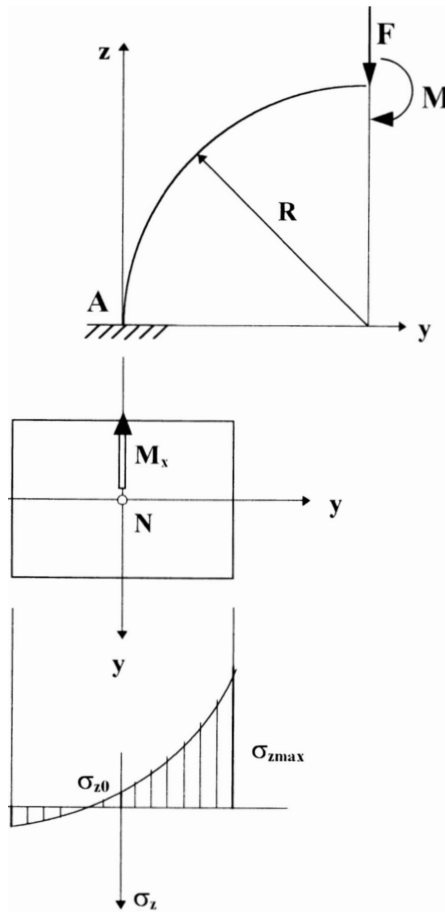
[3] Vigh Sándor–Farkas Beáta: *Műszaki mechanika II. Példatár II. Szilárdságtani táblázatok*. Dunaújváros: ME DFK.

6.3.3 Síkgörbe rudak

A 6.3.3 Elméleti összefoglaló

A 6.35 ábrán vázolt síkgörbe rudat F erő és M nyomaték terheli, ami az A keresztmetszetben normálérőt és hajlítói igénybevételt okoz.

6.35 ábra



A feszültségeloszlás meghatározására a Grashof-képletet alkalmazzuk, mely szerint a feszültség:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{R \cdot A} + \frac{M_x}{I_{red}} \cdot \frac{R}{R+y} \cdot y$$

ahol: A a keresztmetszeti terület,
 R a rúd görbületi sugara,
 I_{red} a redukált másodrendű nyomaték.

A redukált másodrendű nyomaték számítható az

$$I_{red} = \beta \cdot I_x$$

összefüggéssel, ahol a β tényező az [1] és [3]-ból vehető a rúd görbületi sugarának és a keresztmetszet szélső szál távolságának hányadosától függően (R/e).

A Grashof-képlet alkalmazására vonatkozóan az alábbi eseteket vehetjük figyelembe:

1. $R/e > 8$ a feszültség számítása a Navierképlettel történhet,
2. $8 > R/e > 3$ a feszültség számítása Grashof-képlettel, de $I_{red} \approx I_x$, azaz $\beta \approx 1$,
3. $R/e \leq 3$ alkalmazandó a Grashof-képlet és benne I_{red} használatos.

A Grashof-képletben M_x akkor tekintendő pozitívnak, ha a hajlítói igénybevétel a síkgörbe rúd további görbületnövekedését okozza.

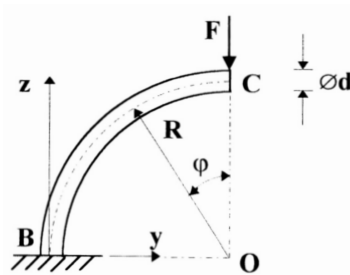
A síkgörbe rúd alkalmazási területei a gyakorlatban: daruhorgok, íves keretsarok-kialakítások, különböző finommechanikai alkatrészek, gépelemek stb. szilárdsági vizsgálata.

B.6.3.3 Kidolgozott feladatok

6.3.3-1 Feladat

A 6.36 ábrán szabad végén koncentrált erővel terhelt befogott síkgörbe rudat vázoltunk.

6.36 ábra



Adatok:

$$R = 300 \text{ mm},$$

$$d = 100 \text{ mm},$$

$$F = 5 \cdot 10^4 \text{ N},$$

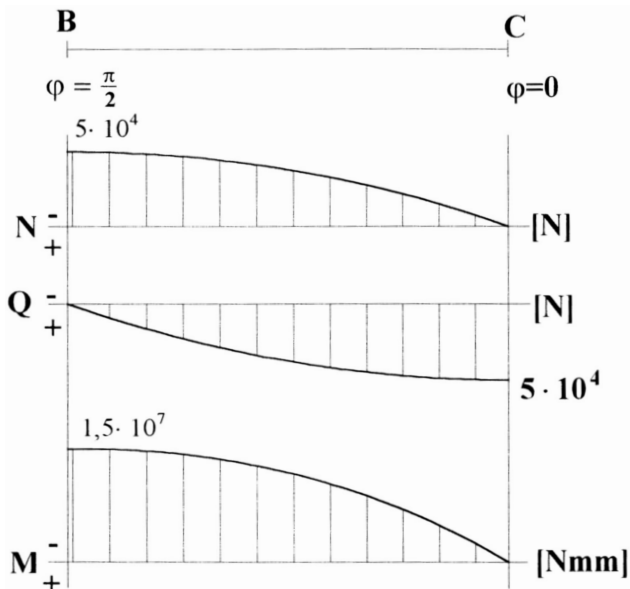
$$R_{\text{adm}} = 185 \text{ MPa}.$$

- Feladat: 1. Rajzoljuk meg a rúd igénybevételi ábráit!
2. Ellenőrizzük a rudat szilárdságilag!

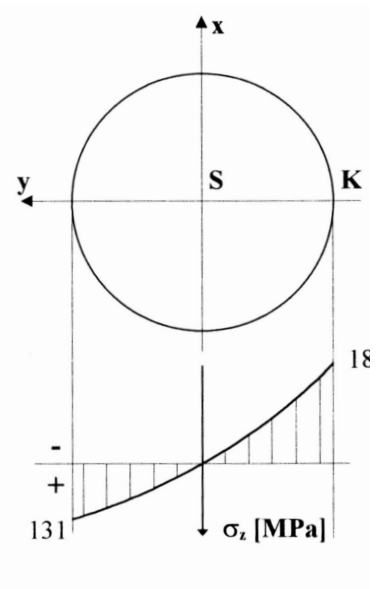
Megoldás:

L A rúd igénybevételi ábráit – a statikában tanultak alapján – az igénybevételeknek a rúd középvonala (ív) mentén való ábrázolásával kapjuk (6.37 ábra).

6.37 ábra



6.38 ábra



2. A rúd veszélyes keresztmetszete a befalazási (B jelű) keresztmetszet. A mértékadó igénybevételek:

$$N = -5 \cdot 10^4 \text{ [N]}$$

$$M_{\text{max}} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ [Nmm]}$$

Grashof-formula szerint a síkgörbe rúd valamely keresztmetszeti pontjában keletkező feszültséget csak rúderőből és hajlítónyomatékból számoljuk (a nyírást elhanyagolja) a következőképpen:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M}{R \cdot A} + \frac{M}{I_r} \cdot \frac{R}{R+y} \cdot y \quad .$$

A feszültségre előjelhelyes értéket az alábbi szabályok alkalmazásával kapunk:

- **N**, a rúderő. A húzóerő pozitív, a nyomóerő negatív.
- **M**, a hajlítónyomaték. A pozitív hajlítónyomaték a rudat jobban meggömbíteni, a negatív ki-egyenesíteni akarja.
- **y**, a keresztmetszeti pont **y** tengely irányú koordinátája. A koordináta-rendszer kezdőpontja a keresztmetszet súlypontja, **x** a hajlítás tengelye, **y** tengely az **S** súlypontot és az **O** görbületi középpontot összekötő egyenes. **y** a domború oldal felé pozitív, az **O** pont felé mutatóan negatív.
- **R**, a görbületi sugár. Az **S** súlypont és az **O** görbületi középpont távolsága.
- **I_r**, a keresztmetszet redukált másodrendű nyomatéka a (**x**) hajlítás tengelyére számítva.

Számítása bonyolult

$$\left(I_r = \int \frac{R}{R+y} \cdot y^2 dA \right) \quad .$$

Téglalap és kör keresztmetszetnél közelítő értéke:

$$I_r = \beta \cdot I_x,$$

ahol β az $\frac{R}{e}$ viszonyszám függvényében táblázatból vehető. Ha $\frac{R}{e}$ növekszik, $I_r \rightarrow I_x$ -hez (gyakorlatilag $\frac{R}{e} = 4$ esetén már $\beta = 1$ -nek vehető, vagyis $I_r = I_x$)

Grashof-formula szerint σ_z hiperbolikus feszültségeloszlást ad.

Nézzük különböző **y** koordinátájú pontokban a feszültség értékét (mivel $\frac{R}{e} = \frac{300}{50} = 6$, $\beta = 1$, vagyis $I_r = I_x$ -el számolhatunk):

y [mm]	-5	-2,5	0	2,5	5
σ_z [MPa]	-183	-83,3	0	70,5	131

Rajzoljuk is meg ezen értékekkel a (B) veszélyes keresztmetszet mentén a σ_z feszültségeloszlási ábrát (6.39 ábra).

A feszültségeloszlási ábra alapján látjuk, hogy a keresztmetszet veszélyes pontja a K pont.

A K pontban keletkező feszültség

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M}{R \cdot A} - \frac{M}{I_r} \cdot \frac{R}{R-r} \cdot r \quad .$$

A pontbeli feszültségállapotot a $\sigma_{\max}$ határozza meg, a feszültségeloszlás egytengelyű.

Mivel

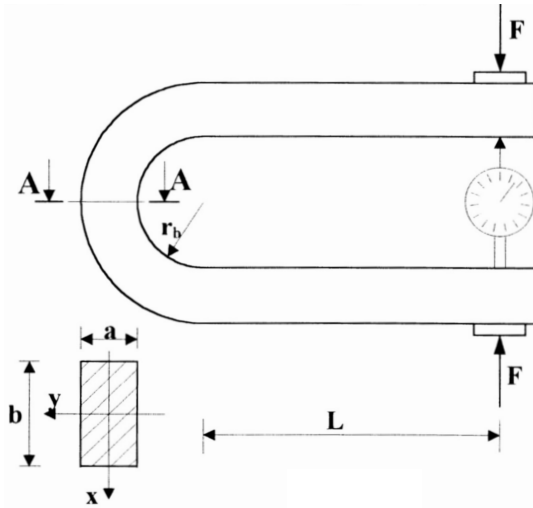
$$|\sigma_{z \max}| = 183 \text{ MPa} < R_{\text{adm}} = 185 \text{ MPa} \quad ,$$

a rúd szilárdságilag megfelel.

6.3.3-2 Feladat

Egy téglalap keresztmetszetű kengyeles (mechanikus) erőmérő vázlata látható a 6.38 ábrán.

6.39 ábra



Adatok:

$$L = 160 \text{ mm},$$

$$a = 24 \text{ mm},$$

$$b = 36 \text{ mm},$$

$$r_b = 30 \text{ mm},$$

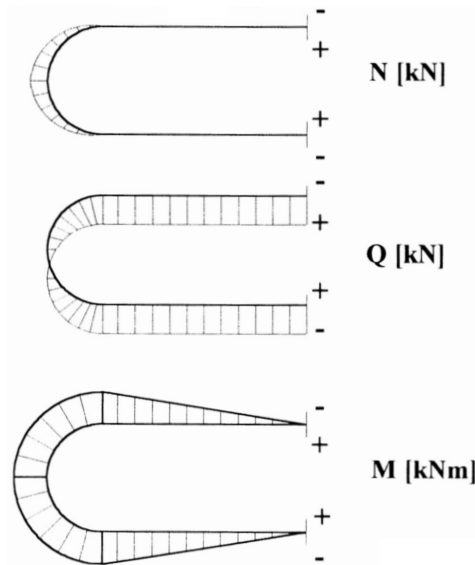
$$F_{\max} = 2000 \text{ N}.$$

Feladat: Mekkora maximális feszültség ébred a kengyel alakú erőmérő testben a mérési tartomány felső határaként megadott $F_{\max}$ működése esetén?

Megoldás:

Az erőmérőtest – mint síkgörbe rúd – igénybevételi ábrái a 6.39 ábrán láthatóak a rúd középvonala mentén felrajzolva.

6.40 ábra



Ezekből megállapítható, hogy a veszélyes keresztmetszet az A metszet, amelyben a hajlítónyomaték és a normálerő maximális,

$$M_A = -F \cdot \left(L + r_b + \frac{a}{2} \right) = -0,404 \text{ kNm}$$

$$N_A = -F = -2 \text{ kN}$$

Az A keresztmetszet görbe rúdszakaszon helyezkedik el. A görbére jellemző mérőszám:

$$\frac{R}{e} = \frac{r_b + \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{30+12}{12} = 3,5,$$

ahol R a rúd középvonalának görbületi sugara, e pedig a keresztmetszet szélső szálának távolsága az x hajlítási tengelytől (6.39 ábra)

Az R/e ilyen nagysága esetén a rúd görbének tekinthető a feszültség számításának során. Így a Grashof - formula szerint:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M}{R \cdot A} + \frac{M}{I_r} \cdot y \cdot \frac{R}{R + y}.$$

ahol jelen esetben a hajlítónyomaték pozitív előjelűnek tekintendő, mivel a rudat „tovább görbíteni igyekeznek”, vagyis $M = 0,404 \text{ kNm}$, másrészt a redukált másodrendű nyomatékra közelítően:

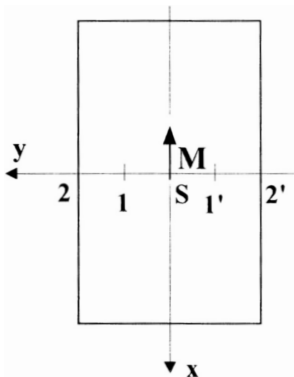
$$I_r \approx I_x = \frac{b \cdot a^3}{12} = \frac{36 \cdot 24^3}{12} = 41472 \text{ mm}^4.$$

A σ_z összefüggésének első két tagja konstans, amely az $y = 0$ helyen felvett értéket adja:

$$\sigma_{z0} = \frac{N}{A} + \frac{M}{R \cdot A} = -\frac{F}{A} + \frac{F \cdot (L + R)}{R \cdot A} = \frac{F \cdot L}{R \cdot A} = \frac{2000 \cdot 160}{42 \cdot 24 \cdot 36} = 8,82 \text{ MPa}.$$

A harmadik tag y függvényében változik, mégpedig hiperbola függvény szerint. A nagyobb értéket a tag az $y < 0$ helyeken, vagyis a belső szélső szál felé haladva adja. A harmadik tag, illetve az összegzett σ_z feszültség értékeit 5 pontban, y függvényében kiszámítva tartalmazza az alábbi táblázat.

6.41 ábra



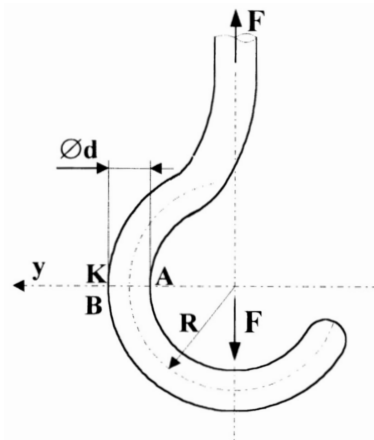
Pont jele	2	1	S	1'	2'
y [mm]	12	6	0	-6	-12
$\frac{M}{I_r} \cdot y \cdot \frac{R}{R + y} [\text{MPa}]$	90,9	51,1	0	-68,1	-163,5
$\sigma_z [\text{MPa}]$	99,7	59,9	8,8	-59,3	-154,7

A 6.41 ábra diagramjából jól látható, hogy a maximális feszültség az A keresztmetszet belső szélső szálában keletkezik.

6.3.3-3 Feladat

A 6.42 ábrán látható kis teherbírású horgot állandó d átmérőjű gömbvasból hajlították R görbületi sugárral. Az F teher hatásvonala a görbületi középponton megy keresztül.

6.42 ábra



Adatok:

$$F = 20 \text{ kN},$$

$$d = 5 \text{ cm},$$

$$R = 5 \text{ cm}.$$

Feladat:

Határozzuk meg a veszélyes **K** keresztmetszet **A** és **B** pontjában ébredő feszültség nagyságát!

Megoldás: Megvizsgálva a görbületi sugár és szélső szál távolság arányát:

$$\frac{R}{e} = \frac{R}{\frac{d}{2}} = \frac{5}{2,5} = 2,$$

tehát a redukált másodrendű nyomatékkal (I_r) és a Grashof-összefüggéssel kell számolnunk. A táblázatból körre:

$$\beta = 1,17, \text{ tehát}$$

$$I_r = \beta \cdot I_x = \beta \cdot \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = 1,17 \cdot \frac{5^4 \cdot \pi}{64} = 35,89 \text{ cm}^4.$$

A veszélyes (**K**) keresztmetszetben

$$N = F = 20 \text{ kN húzóerő és}$$

$$M = -R \cdot F = -100 \text{ kNcm hajlítónyomaték}$$

ébred.

Az **A** pontban (itt $y = -\frac{d}{2}$) ébredő feszültség:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(A)} &= \frac{N}{A} + \frac{M}{R \cdot A} + \frac{M}{I_r} \cdot y \cdot \frac{R}{R + y} = \frac{F}{A} - \frac{R \cdot F}{R \cdot A} - \frac{R \cdot F}{I_r} \cdot \left(-\frac{d}{2}\right) \cdot \frac{R}{R - \frac{d}{2}} = \\ &= \frac{F \cdot R^2 \cdot d}{2 \cdot I_r \cdot \left(R - \frac{d}{2}\right)} = \frac{20 \cdot 5^2 \cdot 5}{2 \cdot 35,89 \cdot (5 - 2,5)} = 13,93 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

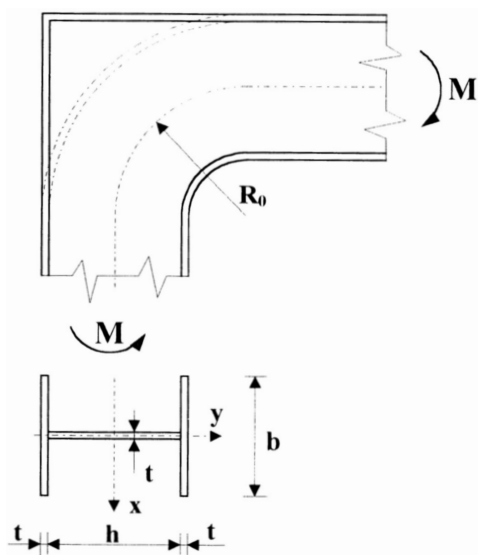
A B pontban ($y = \frac{d}{2}$) ébredő feszültség pedig

$$\sigma_z^{(B)} = -\frac{R \cdot F}{I_r} \cdot \left(\frac{d}{2}\right) \cdot \frac{R}{R + \frac{d}{2}} = \frac{F \cdot R^2 \cdot d}{2 \cdot I_r \cdot \left(R + \frac{d}{2}\right)} = -\frac{20 \cdot 5^2 \cdot 5}{2 \cdot 35,89 \cdot (5 + 2,5)} = -4,64 \text{ kN/cm}^2$$

6.3.3-4 Feladat

A 6.42 ábrán egy íves keretsarok kialakítása látható, melyet az M nyomatékpár terhel.

6.43 ábra



Adatok:

$t = 10 \text{ mm}$,
 $h = 500 \text{ mm}$,
 $b = 200 \text{ mm}$,
 $M = 150 \text{ kNm}$,
 $R_0 = 600 \text{ mm}$.

Feladat:

1. Határozzuk meg a keretsarokban fellépő rúdtengely irányú feszültségek eloszlását!
2. Határozzuk meg a legnagyobb sugárirányú feszültséget!

Megoldás:

1. A keretsarok bal felső sarka elhanyagolható terhelésű, ugyanis az erővonalak gerendából oszlopra való áthaladása a szaggatottal jelzett vonaltól jobbra történik. A további számításokban feltételezzük, hogy az I tartó keresztmetszete azonos görbületi középvonallal a szaggatottan jelölt módon halad.

A keresztmetszeti terület:

$$A = h \cdot t + 2 \cdot b \cdot t = 50 \cdot 1 + 2 \cdot 20 \cdot 1 = 90 \text{ cm}^2$$

A keresztmetszet redukált másodrendű nyomatéka részletes levezetés nélkül:

$$I_r = h \cdot t \cdot R_0^2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{2 \cdot R_0} \right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{h}{2 \cdot R_0} \right)^4 \right] + 2 \cdot \frac{R_0 \cdot h_1^2}{4 \cdot R_0 + 2 \cdot h_1} \cdot b \cdot t$$

$$I_r = 50 \cdot 1 \cdot 60^2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{50}{2 \cdot 60} \right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{50}{2 \cdot 60} \right)^4 \right] + 2 \cdot \frac{60 \cdot 51^2}{4 \cdot 60 + 2 \cdot 51} \cdot 20 \cdot 1$$

$$I_r = 29754 \text{ cm}^4$$

A feszültségeloszlás meghatározására a Grashof-képlet szolgál.

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{R_o \cdot A} + \frac{M}{I_r} \cdot \frac{R}{R_o + r} \cdot r, \quad \sigma_t^- = \frac{M}{R_o \cdot A} - \frac{M}{I_r} \cdot \frac{R_o}{R_o - r_m} \cdot r_m,$$

ahol

$$r_m = \frac{h}{2} + t = \frac{50}{2} + 1 = 26 \text{ cm}.$$

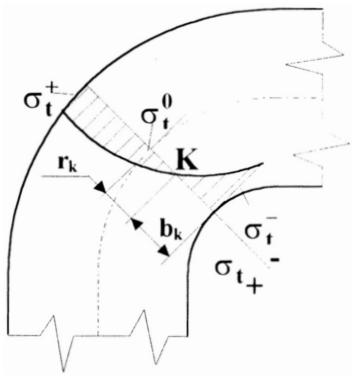
$$\sigma_t^- = \frac{15000}{60 \cdot 90} - \frac{15000}{29754} \cdot \frac{60}{60 - 26} \cdot 26 = -20,35 \text{ kN / cm}^2,$$

$$\sigma_t^0 = \frac{15000}{60 \cdot 90} = 2,78 \text{ kN / cm}^2,$$

$$\sigma_t^+ = \frac{15000}{60 \cdot 90} + \frac{15000}{29754} \cdot \frac{60}{60 + 26} \cdot 26 = 11,92 \text{ kN / cm}^2.$$

A feszültségeloszlást a 6.44 ábrán láthatjuk.

6.44 ábra



2. A legnagyobb sugárirányú feszültség a **K** pontban lép fel ($r_k = 5,05 \text{ cm}$).

A feszültségábra negatív tartományát közelítően háromszög alakúnak tekintve, annak területe:

$$A_{\sigma K} \approx \frac{\sigma_t^- \cdot b_k}{2} = \frac{20,35 \cdot (26 - 5,05)}{2} = 213,17 \text{ kN / cm}.$$

A legnagyobb sugárirányú feszültség:

$$\sigma_{r \max} = \frac{A_{\sigma K}}{R_o} = \frac{213,17}{60} = 3,55 \text{ kN / cm}^2$$

Megjegyzés: Az övlemezeket a fentiekén kívül egy $p_r = \frac{\sigma_t \cdot A_{\text{öv}}}{R_o}$ sugárirányú megoszló terhe-

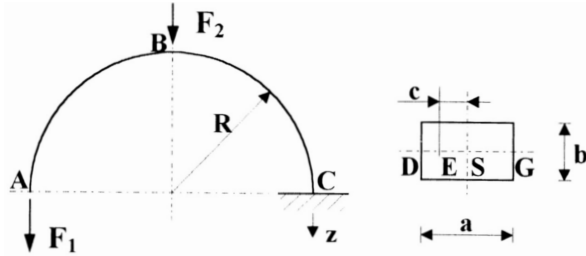
lés is igénybe veszi, ennek részleteivel azonban ezen jegyzetben nem foglalkozunk.

C.6.3.3 Gyakorló feladatok

6.3.3-5 Feladat

Ismeretes a 6.45 ábrán látható állandó keresztmetszetű félkörív alakú rúd terhelése.

6.45 ábra



Adatok:

$$R = 180 \text{ mm},$$

$$a = 60 \text{ mm},$$

$$b = 40 \text{ mm},$$

$$c = 20 \text{ mm},$$

$$F_1 = 6 \cdot 10^3 \text{ N},$$

$$F_2 = 9 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

- Feladat:** 1. Számítsa ki a C keresztmetszet D, E, S, G pontjában ébredő feszültséget!
2. Rajzolja meg a C keresztmetszetben keletkező feszültség-eloszlási ábráját!

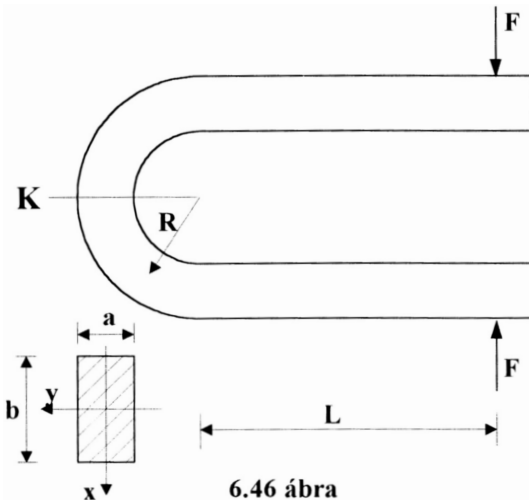
Eredmények:

$\sigma_z(D) = -186,5 \text{ MPa},$	$\sigma_z(E) = -115,625 \text{ MPa},$
$\sigma_z(S) = 2,5 \text{ MPa},$	$\sigma_z(G) = 137,5 \text{ MPa}.$

6.3.3-6 Feladat

Egy téglalap keresztmetszetű görbe rúd vázlata látható a 6.46 ábrán.

6.46 ábra



Adatok:

$$L = 120 \text{ mm},$$

$$R = 40 \text{ mm},$$

$$a = 24 \text{ mm},$$

$$b = 36 \text{ mm},$$

$$F = 2800 \text{ N}.$$

- Feladat:** Határozza meg a K keresztmetszetben ébredő maximális feszültséget!

Eredmény:

$$\sigma_{\max} = -175,3 \text{ MPa}.$$