

Csizmadia Béla (Szerk.)

MŰSZAKI MECHANIKA III/B MOZGÓ TESTEK MECHANIKÁJA

ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ – FELADATOK

Anyagi pont mozgása

Anyagi pontrendszer mozgása

Merev test mozgása

Merev testekből álló szerkezetek mozgása

Rugalmas testekből álló szerkezetek mozgása



Dunakavics
DUE PRESS

Csizmadia Béla (Szerk.)

MECHANIKA III/B.

MOZGÓ TESTEK MECHANIKÁJA

© Dr. Csizmadia Béla, editor, 2017

© Csizmadia Béla, Koppány Imre, Miklán Károly, Szlávik Béláné,
Szőnyiné Passa Erzsébet, Vigh Sándor, authors, 2017

Csizmadia Béla, okl. gépészmérnök, főisk. docens	III. fejezet 1–2 pont, 2–6; 9–13; 20–23. feladatok
Koppány Imre, okl. gépészmérnök, főisk. tanársegéd	III. fejezet 3. pont, IV. fejezet
Miklán Károly, okl. gépészmérnök	V. fejezet 2.6–2.7 pont, VI. fejezet 1.1–1.2. és 2.1–2.2 pontok
Szlávik Béláné, okl. gépészmérnök	V. fejezet 1–2.5 pont, VI. fejezet 1.3 és 2.3 pontok
Szőnyiné Passa Erzsébet, okl. gépészmérnök, főisk. tanársegéd	1.; 7–8.; 14–19.; 24–34. feladatok
Vigh Sándor, fémszerkezetgyártó üzem mérnök	VII. fejezet, 35–38. feladatok

Lektorálta Dr. Huszár István

DUNAÚJVÁROSI EGYETEM

www.uniduna.hu

D=U=E PRESS

Kiadóvezető Németh István

Felelős kiadó Dr. habil András István

Felelős szerkesztő Nemeskéry Artúr

Tördelés Duma Attila

Készült a HTSART nyomdában

Felelős vezető Halász Iván

ISBN 978-963-9915-83-1

Csizmadia Béla (Szerk.)

MŰSZAKI MECHANIKA III/B
MOZGÓ TESTEK MECHANIKÁJA

ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ – FELADATOK

Anyagi pont mozgása

Anyagi pontrendszer mozgása

Merev test mozgása

Merev testekből álló szerkezetek mozgása

Rugalmas testekből álló szerkezetek mozgása



Dunakavics

DinUjveoPRESS

M
Ű
S
Z
A
K
I

K
Ö
N
Y
V
E
K

4.

TARTALOM

III. Fejezet Anyagi pont mozgása

1. Anyagi pont kinematikája	7
1.1. Mozgásjellemzők	7
1.2. Feladatmegoldások speciális mozgásokra	11
2. Anyagi pont kinetikája.....	22
2.1. Erő és mozgás	22
2.2. Newton törvények	22
2.3. Kinetika alaptételei	23
2.4. D'Alembert-elv	29
2.5. Példák kényszermozgásokra	30
3. Anyagi pont lengőmozgása	40
3.1. Harmonikus lengőmozgás	40
3.2. Csillapított lengőmozgás	42
3.3. Gerjesztett lengőmozgás	49
3.4. Gerjesztett és csillapított lengőmozgás	52

IV. Fejezet Anyagi pontrendszer mozgása

1. Anyagi pontrendszer kinematikája	61
2. Anyagi pontrendszer kinetikája	61
2.1. Belső és külső erők	61
2.2. Súlyponttétel.....	62
2.3. Perdülettel	65
2.4. Munkatétel	67
2.5. A Newton-törvények kiterjesztése	68
2.6. A statika alaptörvénye	69
2.7. Példák az anyagi pontrendszerre felírt tételek alkalmazására	69
3. Anyagi pontrendszer lengőmozgása	70

V. Fejezet Merev test mozgása

1. A merev test kinematikája	71
1.1. A merev test helyzetének és mozgásállapotának vizsgálata.....	72
1.2. A merev test pillanatnyi mozgásai és a véges mozgás	76
1.3. A síkmozgás	88
2. Merev test kinetikája	101
2.1. Merev test mozgásmennyisége	101
2.2. Az impulzustétel	101
2.3. A merev test perdülete, perdülettel	102
2.4. A merev test kinetikai energiája	119
2.5. Munkatétel	122

2.6. Feladatok álló tengely körül forgó merev testekre	123
2.7. Feladatok merev testek csuszásmentes gördülésére	138

VI. Fejezet Merev testekből álló szerkezetek mozgása

1. Merev testekből álló szerkezetek kinematikája	143
1.1. Merev testekből álló szerkezetek szabadságfoka	143
1.2. Mozgásátvitel merev testekből álló néhány egyszerű szerkezetben	143
1.3. Merev testekből álló bonyolultabb szerkezetek mozgásának vizsgálata a relatív mozgás segítségével	156
2. Merev testekből álló szerkezetek kinetikája	163
2.1. Merev testekből álló egyszerű szerkezetek vizsgálata klasszikus módszerrel	163
2.2. Merev testekből felépített egyszerű szerkezetek mozgásának vizsgálata redukcióval.....	166
2.3. Merev testekből álló bonyolultabb szerkezetek mozgásának vizsgálata a relatív mozgás segítségével	178

VII. Fejezet Rugalmas testekből álló szerkezetek mozgása

1. Ütközés	182
1.1. Rugalmas testek centrikus ütközése mozdulatlan (végtelen tömegű) sík felületű falba	184
1.2. Haladó mozgást végző rugalmas testek centrikus ütközése	188
2. Egyszabadságfokú lengőrendszer szabad lengése	193
2.1. Hajlító lengés	194
2.2. Torziós lengés	196
3. Kétszabadságfokú hajlító lengőrendszer szabad lengése	198
3.1. Rugóállandók értelmezése és meghatározása	200
3.2. Sajátfrekvenciák meghatározása	200
4. Kétszabadságfokú torziós lengőrendszer szabad lengése	204
4.1. Rugóállandók meghatározása	205
4.2. Sajátfrekvenciák meghatározása	205
5. Lengésvizsgálatok	208
5.1. A lengésvizsgálatok alkalmazási területe	208
5.2. Lengésmérések	209

III. ANYAGI PONT MOZGÁSA

Ezen fejezetben a Fizika című tárgyban tanultak összefoglalását adjuk néhány kiegészítéssel.

Anyagi pontnak tekinthetjük azt az anyagi testet, melynek méretei a mozgásra jellemző más méretekhez, pl. a pálya méreteihez viszonyítva elhanyagolhatók (lásd még IV. fejezet 2.2. pont).

1. Anyagi pont kinematikája

A kinematika az anyagi pont vagy test mozgásának leírásával foglalkozik.

1. 1. MOZGÁSJELLEMZŐK

Az anyagi pont mozgását leíró mozgásjellemzők (helyzet, elmozdulás, sebesség, gyorsulás) vektormennyiségek, azaz a nagyságukon kívül irányuk, és irányítottságuk jellemzi őket. Ezért szükséges a mozgások leírásához a vektoralgebra ismerete. Azon speciális esetben, amikor a mozgásjellemzők hatásvonalát és azon kijelölt pozitív irányt minden időpillanatban ismerjük, alkalmazható a skaláris tárgyalásmód, ahol az előjel az irányítottságot fejezi ki.

1.1.1. Térgörbék, kíséző triéder, mozgástörvény, sebesség, gyorsulás

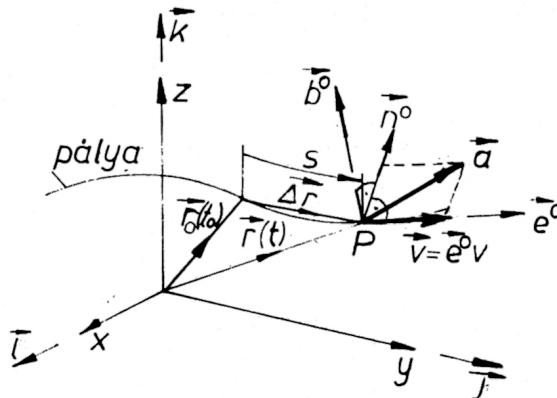
A mozgásjellemzők, azon kívül, hogy vektormennyiségek, időben változóak. Így az anyagi pont térbeli helyzetét az

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{mozgástörvénnyel} \quad (1)$$

adhatjuk meg. Ez geometriailag egy térgörbét jelent (22. ábra). Az x; y; z koordináta-rendszerben koordinátás alakban

$$\vec{r} = \vec{i}_x(t) + \vec{j}_y(t) + \vec{k}_z(t) \quad [m].$$

22. ábra



Az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ térgörbe lesz a mozgás pályája. Az anyagi pont *elmozdulásvektorán* pedig a

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0(t_0)$$

mennyiséget értjük (22. ábra).

A térgörbe ismeretében a *sebesség* a

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (2)$$

összefüggéssel, a *gyorsulás* az

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad (3)$$

összefüggéssel számítható. Az x; y; z koordinátarendszerben pedig a

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= i v_x(t) + j v_y(t) + k v_z(t) \quad [\text{m/s}], \\ \vec{a}(t) &= i a_x(t) + j a_y(t) + k a_z(t) \quad [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

koordinátás alakkal is megadhatók.

1.1.2. Pályamenti mozgásjellemzők, foronómiai görbék

A sebesség és gyorsulás szemléletesebb kifejezése érdekében azokat az ún. kísérő triéder koordinátarendszerében szokták ábrázolni. A kísérő triéder koordinátarendszere a pályagörbéhez kötött rendszer, és tengelyének irányait egy adott pontban a pálya érintője (\vec{e}), főnormálisa (\vec{n}) és binormálisa (\vec{b}) adja meg. Az érintő és a főnormális a görbe simulósíkját feszíti ki, és a főnormális pozitív iránya a görbületi középpont felé mutat. A sebesség és a gyorsulásvektor mindig a simuló síkban van, ezen kívül a sebesség mindig érintőirányú (22. ábra). Így a sebesség és gyorsulás

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{e} \quad , \quad (4)$$

$$\vec{a} = a_e(t) \vec{e} + a_n(t) \vec{n} \quad (5)$$

alakban is megadható a kísérő triéder koordinátarendszerében.

Vezessük be az s pályakoordinátát, vagy pályamenti elmozdulást, melyet a pálya P pontjától mért s ívhosszal jellemzünk (22. ábra). Ekkor a mozgástörvényt $\vec{r} = \vec{r}[s(t)]$ alakban is megadható.

Egyszerűen belátható, hogy

$$\vec{e} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad , \quad (6)$$

azaz

$$\vec{v} = v \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Ezt (2)-vel összevetve a láncszabály szerinti differenciálás figyelembevételével a *pályasebesség*:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad [m/s]. \quad (7)$$

Térgörbék egy pontjához tartozó érintőirányú egységvektor és a főnormális egységvektor között fennáll az

$$\vec{n} = \varrho \frac{d\vec{e}}{ds} \quad (8)$$

összefüggés az x; y; z koordinátarendszerben, ahol ϱ az adott térgörbe vizsgált pontbeli görbületi sugara. A binormális egységvektor pedig

$$\vec{b} = \vec{e} \times \vec{n}.$$

A (3) és (4) alapján

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v\vec{e}) = \frac{dv}{dt} \vec{e} + v \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e} + v \frac{d\vec{e}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

A $\frac{d\vec{e}}{ds}$ -et a (8)-ből kifejezve és helyettesítve, (7) alkalmazásával:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e} + \frac{v^2}{\varrho} \vec{n}.$$

Ezt összevetve (5) összefüggéssel, (7) figyelembevételével:

$$a_e = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2(t)}{\varrho} \quad [m/s^2]. \quad (9)$$

Így tehát az $s(t)$, $v(t)$ $a_e(t)$ pályamenti jellemzők között is differenciális kapcsolat van. Itt a_e csak az \vec{a} gyorsulásvektor egyik, pályamenti komponense.

Ezen skaláris pályamenti jellemzők időbeli változását a foronómiai görbékkel szemléltetjük. Ezek a pályamenti elmozdulás, a pályasebesség és a pályagyorsulás időbeli változását mutatják. A foronómiai görbék használhatóságát egy egyszerű példán mutatjuk be.

6. feladat:

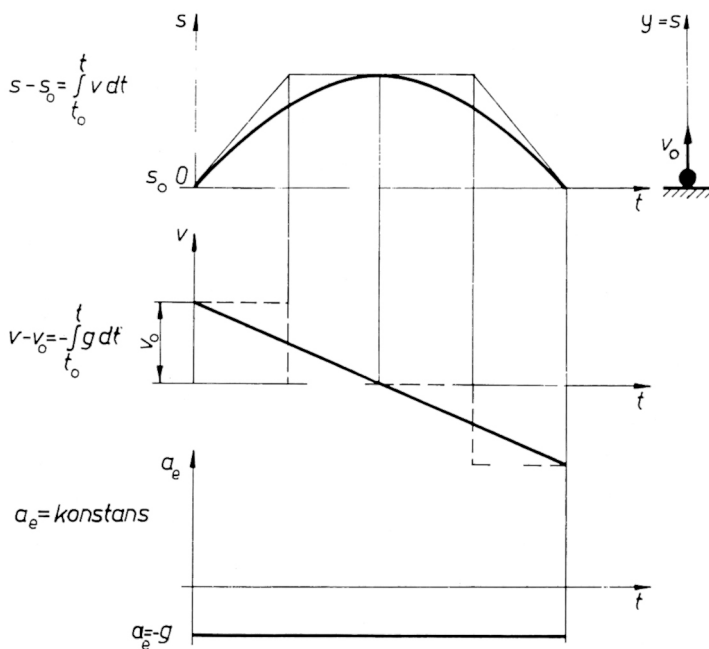
Rajzoljuk meg a függőleges hajtás foronómiai görbéit, ha $t_0 = 0$ időpontban az $s_0 = 0$ koordinátájú helyről $v_0 = 5$ m/s sebességgel hajtunk el egy anyagi pontnak tekinthető testet (23. ábra). Az adott esetben a gyorsulás időbeli változásának ismeretében ($a_e = -g$) a sebesség és pályamenti elmozdulás t_0 -t határok között integrálással v_0 és s_0 kezdeti értékek ismeretében akár számítással, akár grafikus integrálással meghatározhatók:

$$dv = a_e dt ; \quad ds = v dt .$$

Mindkét oldal integrálásával:

$$v - v_0 = - \int_{t_0}^t g dt ; \quad s - s_0 = \int_{t_0}^t v dt ,$$

23. ábra



$$v = v_0 - g(t-t_0) ; \quad s = s_0 + v_0(t-t_0) - \frac{g}{2}(t-t_0)^2 .$$

A kezdeti értékek helyettesítése után

$$v = v_0 - gt = 5 - 9,81 t ; \quad s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 = 5t - 4,9 t^2 .$$

A foronómiai görbékéből szemléletesen leolvasható, hogy az adott példában $v = 0$ sebességérték-nél van a legtávolabb a test a kiinduló helyzetétől.

1.3.3. Vetületi mozgások

Mint már felírtuk, a mozgástörvény

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t) .$$

Tagonkénti differenciálással pedig

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{i}_x(t) + \dot{j}_y(t) + \dot{k}_z(t) = \dot{i}v_x(t) + \dot{j}v_y(t) + \dot{k}v_z(t) , \quad (10)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{i}_x(t) + \ddot{j}_y(t) + \ddot{k}_z(t) = \dot{i}a_x(t) + \dot{j}a_y(t) + \dot{k}a_z(t) .$$

Itt – mint előbb is – a $v_x; v_y; v_z$ illetve $a_x; a_y; a_z$ kifejezéseket sebesség, illetve gyorsuláskoordinátáknak nevezzük, amely egy vektoralgebrai értelmezés. Ugyanakkor az $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, illetve $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ kifejezések a koordinátasebesség, illetve gyorsulás értékei, melyek kinematikai értelmezések. Ezek a tömegpont-mozgás $\dot{i}, \dot{j}, \dot{k}$ irányra eső vetületi mozgásának sebesség-, ill. gyorsulásértékei. Ezen értékeket a (10) alapján a megfelelő egységvektorral való skaláris végigszorzással kapjuk. Pl.:

$$\dot{x}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{i} .$$

Tetszőleges ξ koordinátával jellemzett \vec{e} irányú vetületi mozgásjellemzők pedig:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \vec{r}(t) \cdot \vec{e} , \\ \dot{\xi}(t) &= \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{e} , \\ \ddot{\xi}(t) &= \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{e} . \end{aligned}$$

A vetületi mozgások mozgásjellemzőinek időbeli változása a pályamenti mozgásjellemzőkhöz hasonlóan foronómiai ábrákkal szemléltethető.

1.2. FELADATMEGOLDÁSOK SPECIÁLIS MOZGÁSOKRA

1.2.1. Hajítás

A hajítás síkmozgás, azaz a mozgás pályagörbéje síkgörbe, mégpedig parabola vagy egyenes. A tömegpont gyorsulása konstans, és ez a gravitációs gyorsulás, azaz egyenletesen gyorsuló mozgásról van szó.

7. feladat:

Mekkora sebességgel éri el a cölöpöt a $h = 3$ m magasságból függőlegesen leeső $G = 450$ kp súlyú cölöpverő kos? (A vezeték kialakítása olyan, hogy a kost szabadon esőnek tekinthetjük.) Először a mozgásjellemzők egyikének időbeli változását, a másik kettőnek kezdeti értékeit kell rögzíteni a felvett koordinátarendszerben:

$$\vec{a} = \vec{j}g \text{ az időben állandó, } \vec{v}_0 = \vec{0} , \vec{r}_0 = \vec{j}r_0 = -\vec{j}h. \quad (24. \text{ ábra}).$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} , \quad d\vec{v} = \vec{j}gdt , \quad / \int_0^t ,$$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{j}gt , \quad \vec{v} = \vec{j}gt .$$

Tehát a sebesség meghatározásához szükséges az esési idő ismerete. Ezt az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ függvény segítségével határozhatjuk meg úgy, hogy kiszámítjuk, mely $t = t_1$ időpillanatban lesz a kos az $\vec{r} = \vec{0}$ koordinátájú helyen, azaz a cölöpnél.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad d\vec{r} = \vec{v} dt = \vec{j}gt dt, \quad / \int_0^t,$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{j} \frac{g}{2} t^2.$$

Az $\vec{r} = \vec{0}$ helyvektor és a kezdeti értékek helyettesítése után:

$$\vec{0} + \vec{j}h = \vec{j} \frac{g}{2} t_1^2, \quad /: \vec{j}$$

Innen

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{a kos esési ideje.}$$

Ezt a sebesség összefüggésébe visszahelyettesítve:

$$\vec{v}_1 = \vec{j}g t_1 = \vec{j} \sqrt{2gh} = \vec{j} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3} = \vec{j} 7,65 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right],$$

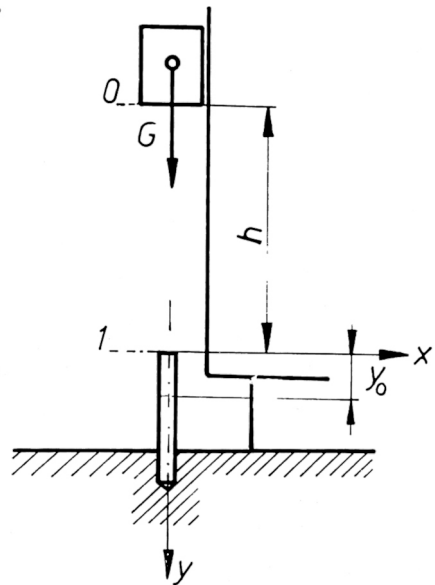
azaz a kos 7,65 m/s sebességgel éri el a cölöpöt. A feladat folytatása az *Ütközés* c. fejezetnél (34. feladat).

8. feladat:

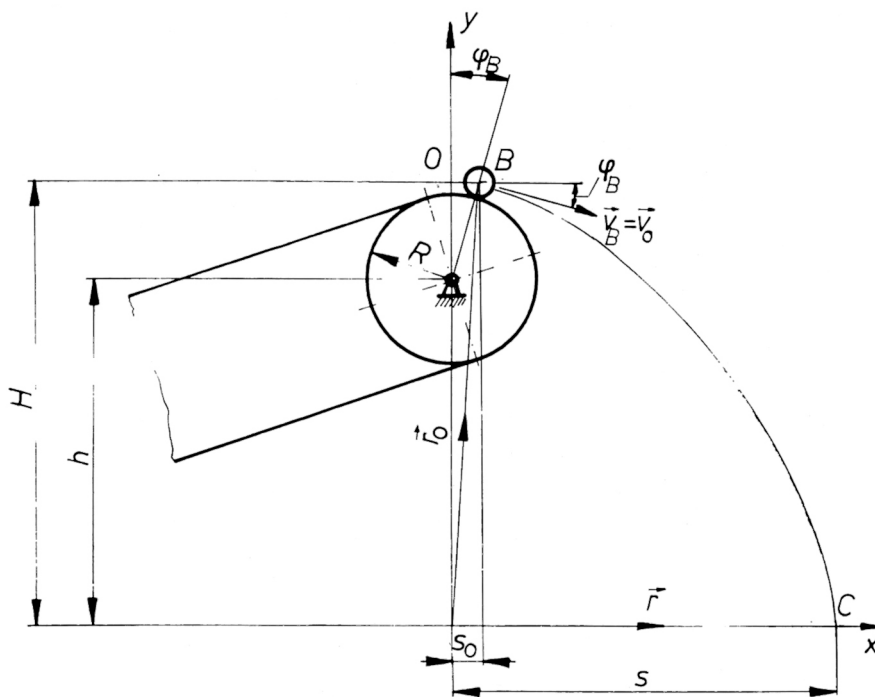
Hol ér földet a szállítószalagról a B pontban leváló anyagi pont, ha $h = 2$ m, $R = 0,25$ m és a 16. feladat eredményei alapján $\varphi_B = 15^\circ$, $|\vec{v}_B| = 1,546$ m/s (25. ábra)? A feladat ferde hajítás.

Mint ismeretes, $\vec{a} = -\vec{j}g$ az időben állandó.

24. ábra



25. ábra



Kezdeti értékek:

$$\vec{v}_O = i v_O \cos \varphi_B - j v_O \sin \varphi_B ,$$

$$\vec{r}_O = i s_O + j H ,$$

ahol

$$H = h + R \cos \varphi_B = 2 + 0,25 \cdot 0,972 = 2,24 \text{ [m]} ,$$

$$s_O = R \sin \varphi_B = 0,25 \cdot 0,259 = 0,0647 \text{ [m]} .$$

A földreérés helyvektora a 25. ábra alapján: $\vec{r} = i s$.

A (3) összefüggésből

$$d\vec{v} = \vec{a} dt , \quad / \quad \int_{t=0}^t ,$$

$$\vec{v} - \vec{v}_O = \int_{t=0}^t \vec{a} dt ,$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{j}gt \quad .$$

A (2) összefüggésből

$$d\vec{r} = \vec{v} dt, \quad / \int_{t=0}^t, \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^t \vec{v} dt \quad .$$

A \vec{v} előbbi kifejezését helyettesítsük be:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \vec{j} \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

A kezdeti értékeket is beírva:

$$\vec{r} = \vec{i} s_0 + \vec{j}H + \vec{i}v_0 t \cos\varphi_B - \vec{j}v_0 t \sin\varphi_B - \vec{j} \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

A földreérés pillanatában $\vec{r} = \vec{i}s$. Ennek helyettesítése után:

$$\vec{i}s = \vec{i}s_0 + \vec{j}H + \vec{i}v_0 t_1 \cos\varphi_B - \vec{j}v_0 t_1 \sin\varphi_B - \vec{j} \frac{1}{2} g t_1^2 \quad .$$

Ezt a vektorgyenletet \vec{i} -al és \vec{j} -al végigszorozva

$$s = s_0 + v_0 t_1 \cos\varphi_B \quad ,$$

$$0 = H - v_0 t_1 \sin\varphi_B - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad .$$

A második egyenletből kifejezhető a földreérésig eltelt t_1 idő

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\varphi_B \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\varphi_B + 2gH}}{\quad} \quad ,$$

$$t_1 = \frac{1,546 \cdot \sin 15^\circ \pm \sqrt{1,546^2 \cdot \sin^2 15^\circ - 2 \cdot 9,81 \cdot 2,24}}{-9,81} = 0,635 \text{ [m]} \quad .$$

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$s = s_0 + v_0 t_1 \cos\varphi_B = 0,0647 + 1,546 \cdot 0,635 \cdot \cos 15^\circ = 1,01 \text{ [m]} \quad .$$

Tehát a földreérés helyének a 25. ábrán jelölt s koordinátája $s = 1,01$ m lesz.

1.2.2. Körmozgás

A körmozgás pályája kör. Egyenletes körmozgás esetén az \vec{a} gyorsulásvektor főnormális irányú, azaz érintőirányú összetevője zérus, ellenkező esetben van érintőirányú összetevője is.

A speciális pályaalak miatt célszerű itt a polárkoordinátás jelölésrendszert bevezetni. A $s(t)$, $v(t)$,

$a_t(t)$, pályamenti jellemzők helyett itt $\varphi(t) = \frac{s(t)}{R}$; szögkoordináta, $\omega(t) = \frac{v(t)}{R}$

szögsebesség, $\mathcal{E}(t) = \frac{a_c(t)}{R}$ szöggyorsulás (fizikában β -val jelölik) értékeket vezetjük

be. Mivel $R = \text{const.}$, itt is fennállnak a szögkoordináta, a szögsebesség és a szöggyorsulás közti

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad [1/s]; \quad \mathcal{E} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad [1/s^2] \quad (11)$$

differenciális összefüggések.

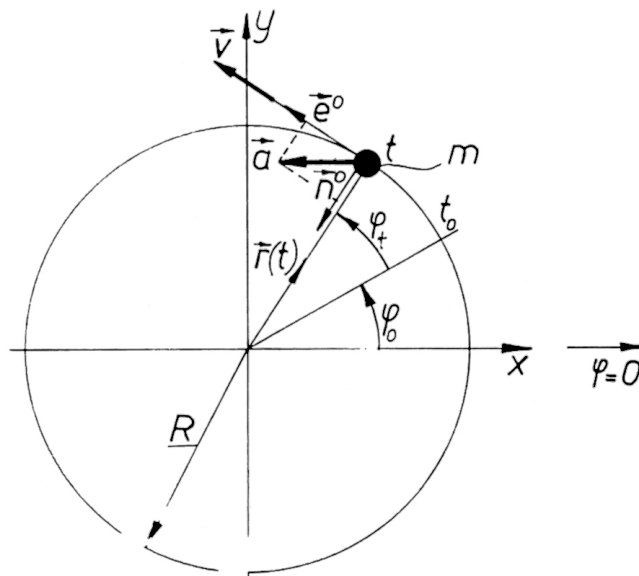
Ezek felhasználásával a mozgástörvény (26. ábra):

$$\vec{r}(t) = \vec{i} R \cos(\varphi_t + \varphi_0) + \vec{j} R \sin(\varphi_t + \varphi_0) \quad [m]. \quad (12)$$

A (2) szerinti differenciálás elvégzése és az $\vec{\omega} = \vec{k} \omega$ szögsebességvektor bevezetése után

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \quad (13)$$

26. ábra



Itt $\vec{\omega}$ -t pozitívnak akkor tekintjük, ha a \vec{k} ányból nézve a mozgás az óramutató járásával ellenkező irányban történik (26. ábra). A (13) összefüggés idő szerinti differenciálásával:

$$\vec{a}(t) = \vec{\mathcal{E}}(t) \times \vec{r}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t), \quad (14)$$

ahol $\vec{\mathcal{E}} = \vec{k} \mathcal{E}$ szöggyorsulás-vektor. A (14)-ben a második tag

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r},$$

tehát

$$\vec{a}(t) = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}.$$

Az első tag \vec{e} , a második tag \vec{n} irányú, azaz a kísérő triéder koordinátarendszerében:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= |\vec{\mathcal{E}}| |\vec{r}| \vec{e} + \omega^2 |\vec{r}| \vec{n}, \\ \vec{a}(t) &= R \mathcal{E}(t) \vec{e} + R \omega^2(t) \vec{n}, \\ \text{vagy} \quad \vec{a}(t) &= R \mathcal{E}(t) \vec{e} + \frac{v^2(t)}{R} \vec{n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Tehát itt is a (9) általános összefüggésnek megfelelő kifejezést kaptunk.

Ugyanis

$$a_e = R \mathcal{E}(t) = R \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d[R\omega(t)]}{dt} = \frac{dv}{dt}, \quad (15a)$$

mivel a (13) összefüggés

$$\vec{v} = v\vec{e} = R \omega(t) \vec{e} \quad (13a)$$

alakban is írható a vektorszorzást elvégezve.

9. feladat: (27. ábra)

A 8. és 16. feladatban is szereplő szállítószalag mennyi idő alatt éri el a bekapcsolás után a névleges $v_k=1,5$ m/s sebességét, ha a szalagot mozgató R sugarú hengeren nem csúszik meg a szállítószalag, és a henger $\mathcal{E}=10$ 1/s² szöggyorsulása állandó? A mozgató henger mekkora φ_i szöggel fordul el ez idő alatt?

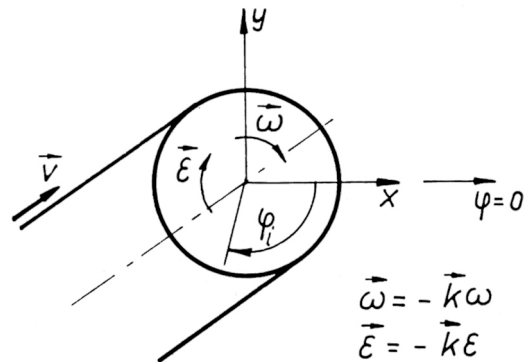
Először határozzuk meg, hogy a v_k kerületi sebességnek mekkora ω_k szögsebesség felel meg. (A 13a) összefüggés szerint

$$\omega_k = \frac{v_k}{R} = \frac{1,5}{0,25} = 6 \text{ [1/s]}.$$

A (11) összefüggések szerint viszont

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= -\vec{k}\omega \\ \vec{\mathcal{E}} &= -\vec{k}\mathcal{E} \end{aligned} \quad \int_{\omega_0=0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0=0}^t \mathcal{E} dt, \quad \omega = \mathcal{E} t.$$

27. ábra



Ahonnán a t_i indítási idő:

$$t_i = \frac{\omega_k}{\varepsilon} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ [s]}.$$

Ezen idő alatti szögelfordulás a (11) alapján

$$\int_{\varphi_0=0}^{\varphi_i} d\varphi = \int_{t_0=0}^{t_i} \omega dt = \int_{t_0=0}^{t_i} \varepsilon t dt ,$$

vagy fokokban $\varphi_i = 103^\circ$.

1.2.3. Egyenesvonalú harmonikus lengőmozgás, lengések összetétele

1.2.3.1. A mozgás leírása

Egyenesvonalú harmonikus lengőmozgásról akkor beszélünk, ha a mozgástörvény

$$\vec{r}(t) = \vec{i}A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (16)$$

alakban leírható. Vagy ezt \vec{i} -al végigszorozva

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) . \quad (17)$$

Ez lesz az egyenesvonalú harmonikus lengőmozgás mozgástörvénye.

A sebesség

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \text{ [m/s]} \quad (18)$$

a gyorsulás pedig

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ [m/s}^2\text{]} \quad (19)$$

alakban írható fel. A (17)-et (19)-be helyettesítve és rendezve megkapjuk az egyenesvonalú harmonikus lengőmozgás differenciálegyenletét:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (20)$$

A (17) mozgástörvény és a (20) differenciálegyenlet által leírt mozgás foronómiai görbéit a 28. ábra mutatja.

Mind a (17)–(19) összefüggésekből, mind a foronómiai görbékből látható, hogy a nullhelyzettől való legnagyobb elmozdulás, +A és -A.

Ezekon a helyeken lép fel a legnagyobb gyorsulás érték is, mely a kitéréssel ellen-

kező értelmű és nagysága $a_{\max} = \omega^2 A$.

A sebesség maximuma a nullhelyzetnél van, értéke $v_{\max} = \omega A$. A mozgás periodikus,

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ időnként valamennyi mozgásjellező értéke megismétlődik.

Az ω mennyiséget körfrekvenciának nevezzük. Az időegység alatti periódusok, lengések száma lengésszám vagy frekvencia:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad [1/\text{s} = \text{Hz}],$$

vagy

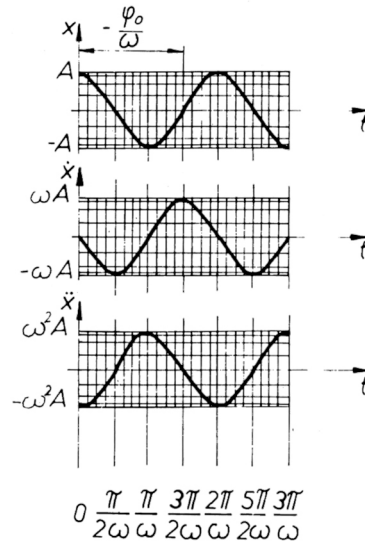
$$\mathcal{V} = 60 \frac{\omega}{2\pi} \quad [1/\text{min}].$$

10. feladat:

Egyenesvonalú harmonikus lengőmozgás legnagyobb sebességét és legnagyobb gyorsulását mérésrel meghatároztuk: $v_{\max} = 12 \text{ m/s}$; $a_{\max} = 6600 \text{ m/s}^2$. Számítsuk ki a mozgás többi jellemzőjét!

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

28. ábra



$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0); \quad v_{\max} = \omega A;$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0); \quad a_{\max} = \omega^2 A,$$

$$\omega = \frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{6600}{12} = 550 \text{ [1/s]}$$

lesz a mozgás körfrekvenciája. A legnagyobb kitérés, azaz a mozgás amplitúdója pedig:

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{12}{550} = 0,02182 \text{ m} = 2,182 \text{ [cm]},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{550} = 0,01142 \text{ [s]}.$$

A mozgás frekvenciája:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,01142} = 87,54 \text{ [Hz]}.$$

1.2.3.2. Harmonikus lengések összetétele

a) Egyirányú, egyező frekvenciájú lengések

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1); \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2);$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad .$$

Trigonometrikus átalakítások után

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad ,$$

ahol

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad ,$$

$$\varphi = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad .$$

Ez azt jelenti, hogy a (17) összefüggés is felfogható, mint két azonos körfrekvenciájú harmonikus lengés összege.

b) Egyirányú különböző frekvenciájú lengések

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \quad x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2);$$

$$x = x_1 + x_2 \quad .$$

Ilyen jellegű lengések összetevése nem ad harmonikus lengést, sőt általában periodikus is csak akkor lesz, ha

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n} \quad ,$$

ahol m és n egész. Abban a speciális esetben, amikor $A_1 = A_2 = A$ és $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, az összegezés könnyebben elvégezhető:

$$x = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad .$$

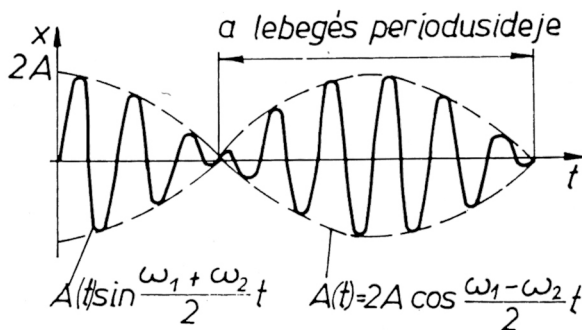
Fontos speciális eset, amikor $\omega_1 \approx \omega_2$. Ekkor $\left| \omega_1 - \omega_2 \right| \ll \omega_1 + \omega_2$, így a cosinusos tényező sokkal kevésbé változik, mint a sinusos. Ezt a lengést $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ kör-

frekvenciájúnak foghatjuk fel, melynek amplitúdója,

$$A(t) = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \quad , \quad [0; 2A] \text{-ban lassan változik.}$$

E jelenség a *lebegés*. (29. ábra).

29. ábra



A lebegés frekvenciája:

$$\nu_{\text{leb}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{4\pi} \quad .$$

c) Egymásra merőleges irányú egyenlő frekvenciájú lengések

$$x = A \sin \omega t; \quad y = B \sin(\omega t + \varphi) \quad .$$

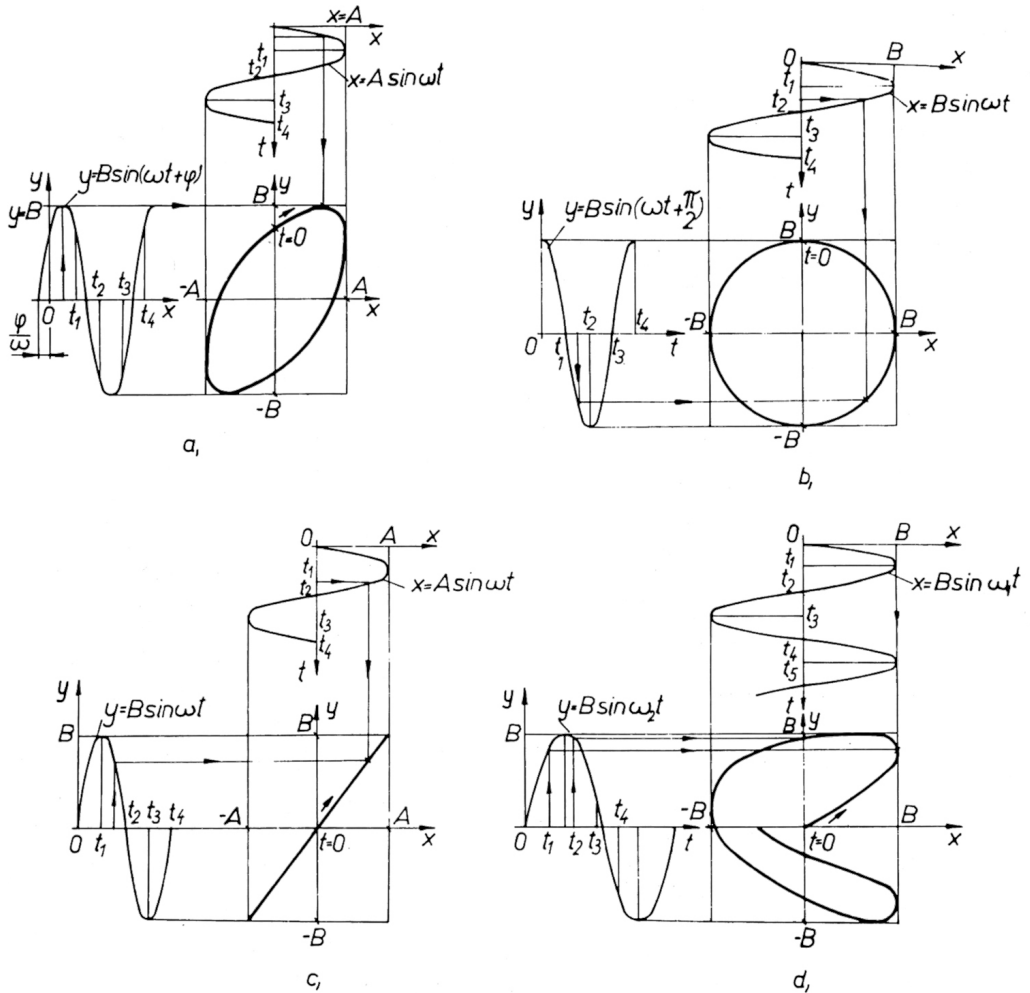
Az eredő mozgás pályája ellipszis (30.a. ábra). Abban a speciális esetben, amikor $A = B$,

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ a mozgás $x^2 + y^2 = A^2$ egyenlettel leírható körmozgás lesz, és ezért ennek vetületi moz-

gásaként is értelmezhető a harmonikus lengőmozgás (30.b. ábra). Ha $\varphi = 0$, a mozgás

pályája $y = \frac{B}{A} x$ egyenes. (30.c. ábra).

30. ábra



d) Egymásra merőleges irányú különböző frekvenciájú lengések

$$x = A \sin \omega_1 t ; \quad y = B \sin(\omega_2 t + \varphi) .$$

A mozgás pályája a $2A$ és $2B$ oldalalpu téglalapba beírható Lissajous-görbe lesz. (30.d. ábra). Ez csak akkor zárt, azaz periodikus, ha

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

teljesül.

2. Az anyagi pont kinetikája

Míg a kinematika a mozgások leírásával foglalkozott, a kinetika a mozgást létrehozó okokat kutatja.

2.1. ERŐ ÉS MOZGÁS

Már a *Statika* tárgyban az erőt, mint testek mechanikai kölcsönhatását értelmeztük. Ez azt jelenti, hogy erő csak ott lép fel, ahol a testek mechanikai kölcsönhatásban állnak egymással. Ezekben a helyeken tehát fel kell tételeznünk erőket, melyek vektorának meghatározása lehet a feladatunk. Az így értelmezett és a testre ható összes erő eredője hozza létre a test mozgását (nyugalmat).

2.2. NEWTON-TÖRVÉNYEK

Az anyagi pont mozgása és az arra ható erők eredője közti kapcsolatot Newton állapította meg. A Newton-törvények a következők:

I. Az anyagi pont, ha a rá ható erők eredője zérus, nyugalomban van, vagy állandó sebességgel mozog.

II. Az m tömegű anyagi pont $\vec{F}(t)$ erő hatására úgy mozog, hogy mozgás közben fennáll az

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(t) \text{ összefüggés.}$$

III. Hatás és ellenhatás törvénye (lásd a Statika tárgyat). Mivel az erő a testek kölcsönhatása az első

test másodikra gyakorolt \vec{F}_{12} hatása és a második test elsőre gyakorolt \vec{F}_{21} hatása között

szoros kapcsolat áll fenn. Ezen erők egyenlő nagyságúak, hatásvonaluk egybeesik, irányítottságuk ellentétes:

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21} .$$

IV. Az m tömegű anyagi pont $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ erők hatására úgy mozog, mint egyetlen

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \text{ erő hatására. (Erők eredője; lásd Statika)}$$

2.3. A KINETIKA ALAPTÉTELEI

Newton törvényéből levezethetők az anyagi pontra vonatkozó olyan további kinetikai alaptételek, melyek igen alkalmasak a kinetikai feladatok megoldására.

2.3.1. Impulzustétel

Az anyagi pont mozgásmennyisége $\vec{I} = m\vec{v} \left[\frac{\text{kgm}}{\text{s}} \right]$. Ennek differenciálásával és Newton

II. törvényének alkalmazásával kapjuk az impulzustétel differenciális alakját:

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F} \quad [\text{N}]. \quad (21)$$

Szavakban: az anyagi pont mozgásmennyiségének idő szerinti első differenciálhányadosa egyenlő az anyagi pontra ható összes erő eredőjével.

Integrális alakban (21) integrálásából:

$$\vec{I} - \vec{I}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt \quad \left[\frac{\text{kgm}}{\text{s}} \right]$$

Szavakban: Az anyagi pont mozgásmennyiségének $t-t_0$ időközbeni megváltozása egyenlő az anyagi pontra ható erők eredőjének $t-t_0$ időközre vonatkoztatott impulzusával. Az anyagi pontra ható erők eredőjének impulzusán az anyagi pontra ható összes erő idő szerinti integráltját értjük.

2.3.2. Perdülettétel

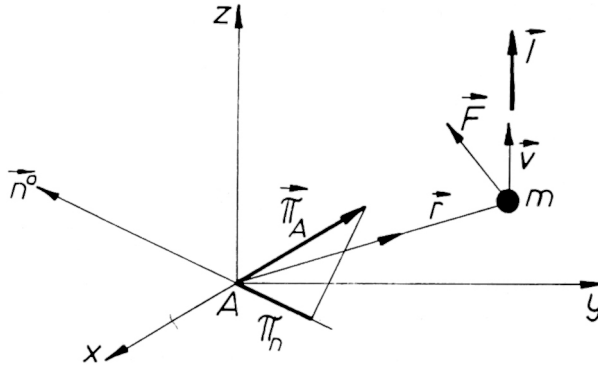
Először a perdület fogalmát határozzuk meg. Perdületen a mozgásmennyiség nyomatékát értjük. A nyomaték statikában történt értelmezése szerint beszélhetünk pontra és tengelyre vonatkoztatott perdületről (31. ábra). Az m anyagi pont A pontra vonatkoztatott perdülete vektormennyiség:

$$\vec{\pi}_A = \vec{r} \times \vec{I} \quad \left[\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \right], \quad (22)$$

a tengelyre vonatkoztatott skaláris, előjeles mennyiség (31. ábra), melyet a tengely egy pontjára számított perdületnek és a tengelyirányú egységvektornak a skaláris szorzatával értelmezzük:

$$\pi_n = \vec{\pi}_A \cdot \vec{n} \quad \left[\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \right]. \quad (23)$$

31. ábra



Most már megfogalmazhatjuk a perdülettételt.
Ha a perdületet idő szerint deriváljuk;

$$\dot{\vec{\pi}}_A = \dot{\vec{r}} \times \vec{I} + \vec{r} \times \dot{\vec{I}}.$$

Mivel $\dot{\vec{r}} = \vec{v} \parallel \vec{I}$, az első tag zérus, (21)-et figyelembevéve pedig

$\vec{r} \times \dot{\vec{I}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_A$. Így a

$$\dot{\vec{\pi}}_A = \vec{M}_A \quad [\text{Nm}] \quad (24)$$

összefüggést kapjuk, mely a perdülettétel pontra vonatkoztatott alakja.

A (24)-et \vec{n} - al végigszorozva

$$\dot{\pi}_n = M_n \quad [\text{Nm}]. \quad (25)$$

Ez a perdülettétel tengelye.

Szavakban: Az anyagi pont A pontra, ill. "n" tengelyre vonatkoztatott perdületének idő szerinti első deriváltja egyenlő a tömegpontra ható összes erő A pontra, ill. az "n" tengelyre vonatkoztatott nyomatékának összegével.

Integrális alakban:

$$\vec{\pi}_A(t) - \vec{\pi}_A(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{M}_A dt,$$

$$\pi_n(t) - \pi_n(t_0) = \int_{t_0}^t M_n dt.$$

Szavakban: Az anyagi pont A pontra, illetve "n" tengelyre számított perdületének $t-t_0$ idő alatti megváltozása egyenlő az anyagi pontra ható összes erő A pontra, illetve "n" tengelyre vonatkoztatott nyomaték-impulzusával.

2.3.3. Munkatétel

Mint fizika tanulmányainkból tudjuk az anyagi pont kinetikus energiájú

$$E = \frac{1}{2} m (\vec{v})^2 \left[\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} \right]. \quad \text{Differenciáljuk ezt!}$$

$$\dot{E} = \frac{1}{2} m 2 \vec{v} \dot{\vec{v}} = m \vec{a} \vec{v}.$$

A (21) felhasználásával és a $P = \vec{F} \vec{v}$ teljesítményfogalom alkalmazásával.

$$\dot{E} = P. \quad (26)$$

Ez a munkatétel differenciális alakja. Ennek idő szerinti integrálása után:

$$E_1 - E_0 = \int_{t_0}^{t_1} P dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \vec{v} dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} d\vec{r},$$

$$E_1 - E_0 = W_{01} \left[\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm} \right],$$

az integrális alakot kapjuk. Szavakban a munkatétel: az anyagi pont kinetikus energiájának t_1-t_0 idő alatti megváltozása egyenlő az anyagi pontra ható összes erő t_1-t_0 idő alatt végzett munkájával.

2.3.4. Feladatok az alaptételek alkalmazására

Egy kinetikai feladat megoldását mindig az anyagi pontra ható összes erő számbavételével kezdjük. Ezután az ismert vagy elérni kívánt, azaz a feladat szempontjából adottnak tekinthető mozgásjellemzőket kell bejelölnünk.

A meghatározni kívánt paraméterek ismeretében most már egy vagy több kinetikai alaptétel felírásával a feladat megoldható.

Mielőtt konkrét feladatok megoldására térnénk át, táblázatosan összefoglaljuk, hogy valamely keresett jellemző esetén adott paraméterek mellett leggyakrabban mely alaptétel alkalmazásával jutunk eredményre. Az I. táblázatban szereplő \vec{F} és \vec{M}_A az anyagi pontra ható erők eredője, illetve annak nyomatéka. Az m tömeget mindig ismertnek tételezzük fel.

I. táblázat

Keresett jellemző	Adott jellemzők	Alkalmazható alaptétel
$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$	$\vec{F}(\vec{r}); v_1(\vec{r}_1); v_0(\vec{r}_0)$	$E_1 - E_0 = W_{01}$
\vec{v}_1	$v_0(\vec{r}_0); \vec{r}_1; \vec{F}(\vec{r})$	$E_1 - E_0 = W_{01}$
	$\vec{v}_0(t_0); t; t_0; \vec{F}(t)$	$\vec{I}_1 - \vec{I}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$
\vec{a}	\vec{F}	$\dot{\vec{I}} = \vec{F}$
$t = t_1 - t_0$	$\vec{v}_0(t_0); t_0; \vec{v}_1(t_1); \vec{F}(t)$	$\vec{I}_1 - \vec{I}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$
\vec{K}_1	\vec{K}_1^0 a kényszererő iránya; pálya (ha nem egyenes v_1 is) \vec{F}' aktiv erők	$\dot{\vec{I}} = \vec{F}$
\vec{F}_1	$\vec{F} - \vec{F}_1$ az anyagi pontra ható többi erő; \vec{a}_1	$\dot{\vec{I}} = \vec{F}$
	$\vec{v}_0(\vec{r}_0); \vec{v}_1(\vec{r}_1); \vec{r}_1; \vec{r}_0;$ $\vec{F}'(\vec{r}) = \vec{F} - \vec{F}_1; \vec{F}_1(\vec{r})$ jellege	$E - E_0 = W$
\vec{F}_1	$\vec{v}_0(t_0); \vec{v}_1(t_1); t_0; t_1$ $\vec{F}''(t) = \vec{F} - \vec{F}_1; \vec{F}_1(t)$ jellege	$\vec{I} - \vec{I}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$
\vec{M}_A	$\vec{r}(t); \vec{v}(t)$	$\dot{\vec{\pi}}_A = \vec{M}_A$

11. feladat:

A 7. feladatot oldjuk meg a kinetikai alaptételek felhasználásával!

Írjuk fel a munkatételt (24. ábra, 12. old.):

$$E_1 - E_0 = W_{01} .$$

A kezdeti kinetikus energia $E_0 = 0$, mivel itt a sebesség is zérus. Az 1 pontbeli E_1 kinetikus energia az itteni, még ismeretlen v_1 sebességgel:

$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$. Mivel a testre csak a súlyerő hat, ennek a W_{01} munkája a 01 pontok között:

$$W_{01} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{j} G \, d\vec{r} = \vec{j} G (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) .$$

Mivel a felvett koordinátarendszerben $\vec{r}_1 = \vec{0}$, és $\vec{r}_0 = -\vec{j}h$,

$$W_{01} = -\vec{j} \vec{r}_0 G = hG .$$

Tehát

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = Gh ,$$

amiből

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gh}{m}} = \sqrt{2hg} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3} = 7,65 \left[\frac{m}{s} \right] ,$$

azaz természetesen így is a 7. feladatban kapott eredményre jutottunk.

12. feladat:

Vizsgáljuk meg a 8. feladat szerint mozgó tömegpont sebességének a nagyságát a földreérés pillanatában a munkatétel segítségével!

$$E - E_0 = W.$$

A kinetikus energia a kezdeti állapotban $E_0 = 1/2 m v_0^2$, a földreéréskor pedig a kiszámítandó v sebességgel: $E = 1/2 m v^2$. Az anyagi pontra itt is csak a súlyerő hat, ennek munkavégzése pedig:

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \, d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{j} G d\vec{r} = - \vec{j} G (\vec{r} - \vec{r}_0) .$$

A 8. feladatban már felírt \vec{r} és \vec{r}_O vektorok különbsége;

$$\vec{r} - \vec{r}_O = \vec{i}s - \vec{i}s_O - \vec{j}H .$$

Ezt W összefüggésbe helyettesítve:

$$W = - Gj(\vec{i}s - \vec{i}s_O - \vec{j}H) = GH .$$

Így most már a munkatétel:

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_O^2 = GH ,$$

$$v = \sqrt{2gH + v_O^2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,24 + 1,546^2} = 6,82 \text{ [m/s]} .$$

13. feladat:

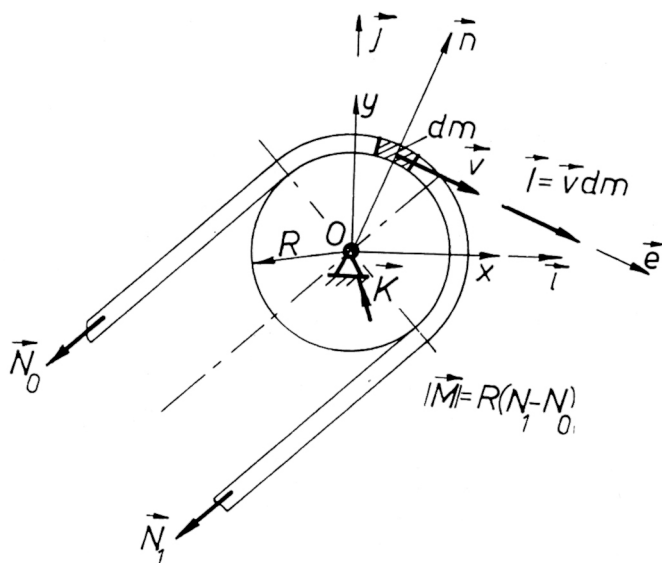
A 9. feladatbeli szállítószalag üresjáratú indításához mekkora nyomaték szükséges, ha a szalag tömege $m = 40 \text{ dkg}$?

A további szükséges adatok a 9. feladatban szerepelnek ($R = 0,25 \text{ m}$; $\mathcal{E} = 10/s^2$).

Induljunk ki egy dm tömegelem vizsgálatából (32. ábra). Ennek körpályán való mozgásához szükséges nyomatékot keressük, ezért írjuk fel a perdületételt.

$$\vec{\mathcal{L}}_O = \vec{M}_O .$$

32. ábra



A \vec{M}_O meghatározásához először a $\vec{\mathcal{H}}_O$ perdületet írjuk fel. Értelmezés szerint

$$\vec{\mathcal{H}}_O = \vec{r} \times \vec{I}.$$

Figyelembe véve, hogy itt $\vec{r} = -R\vec{n}$ és

$$\vec{I} = v \, dm \, \vec{e}, \quad \vec{\mathcal{H}}_O = -\vec{n} \times \vec{e} \, R \, v \, dm = \vec{k} \, R \, v \, dm.$$

A v (13a) szerinti értelmzését helyettesítve:

$$\vec{\mathcal{H}}_O = \vec{k} \, R^2 \, \omega \, dm.$$

Mivel itt csak (ω) változó az indítás ideje alatt

$$\dot{\vec{\mathcal{H}}}_O = \vec{k} \, R^2 \, \frac{d\omega}{dt} \, dm = \vec{k} \, R^2 \, \mathcal{E} \, dm.$$

Ezt a perdülettelbe helyettesítve;

$$\vec{M}_O = \vec{k} \, R^2 \, \mathcal{E} \, dm.$$

nyomaték szükséges a dm tömegelem megindításához. Mivel a szállítószalag minden pontjának sebessége azonos, úgy tekinthetjük, mintha a szállítószalag egész tömege a mozgatóhenger R sugarán helyezkedne el. Tehát csak az egész üres szalag megindításához

$$\vec{M}_O = \vec{k} \, R^2 \, \mathcal{E} \, m = \vec{k} \cdot 0,25^2 \cdot 10 \cdot 40 = \vec{k} \, 25 \, [\text{mN}]$$

indítónyomaték szükséges. Természetesen a további mozgó alkatrészek miatt a teljes indításhoz ennél nagyobb nyomaték kell. Ezzel később foglalkozunk.

2.4 D'ALEMBERT-ELV

A Newton-törvényeken és a kinetikai alaptételek alkalmazásán kívül a D'Alembert-elv felhasználásával is megoldhatjuk kinetikai feladatainkat. Ez is csak a II. Newton-törvény más formájú megfogalmazása.

Egy m tömegpontra hassanak $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ erők, melyek hatására az \vec{a} gyorsulással mozog.

Newton II. törvénye szerint

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad [\text{N}].$$

Átrendezve:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i - m\vec{a} = \vec{0}.$$

Legyen $-m\vec{a} = \vec{F}_I$ inerciaerő. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{F}_I = \vec{0} \quad [N]$$

a D'Alembert-elv. Ez kimondja, hogy az *anyagi pontra ható összes erők az inerciaerőkkel együtt egyensúlyi erőrendszert alkotnak*. Tehát az erőfogalom D'Alembert-féle kiterjesztésével a kinetikai feladatok statikaiakká vezethetők vissza. Ha ezt külön nem hangsúlyozzuk, erőn mindig a 2.1. pontban értelmezett fogalmat értünk.

2.5. PÉLDÁK KÉNYSZERMOZGÁSOKRA

A kinetikai feladat megoldásának menete itt is a 2.3.4. pontban leírtakkal egyező. Itt azonban az eddigi feladatokban szereplő erőhatásokon kívül, még kényszererők is fellépnek. Vizsgáljuk meg ezek figyelembevételének módját és utána, a már leírtak szerinti lépésekben, oldjunk meg néhány feladatot.

2.5.1. Kényszererő fogalma

Már a statikában aktív és passzív erőkről beszéltünk. Az aktív erőket a testnek rendeltetéséből adódóan kell viselnie. Ezek vagy a súlyerő, mely a test és a Föld mechanikai (gravitációs) kölcsönhatásaként jön létre, vagy valamely más test hatásaként létrejövő, általában ismert erő. A passzív erőket a statikában támasztó, vagy kényszererőknek nevezzük. A kinetikai vizsgálatokban a *kényszererők nem a test megtámasztását, hanem meghatározott pályán való mozgását biztosítják. Kényszererőnek tehát a vizsgált anyagi pont és az anyagi pontot a meghatározott kényszerpályán tartó elemek között fellépő mechanikai kölcsönhatást nevezzük.*

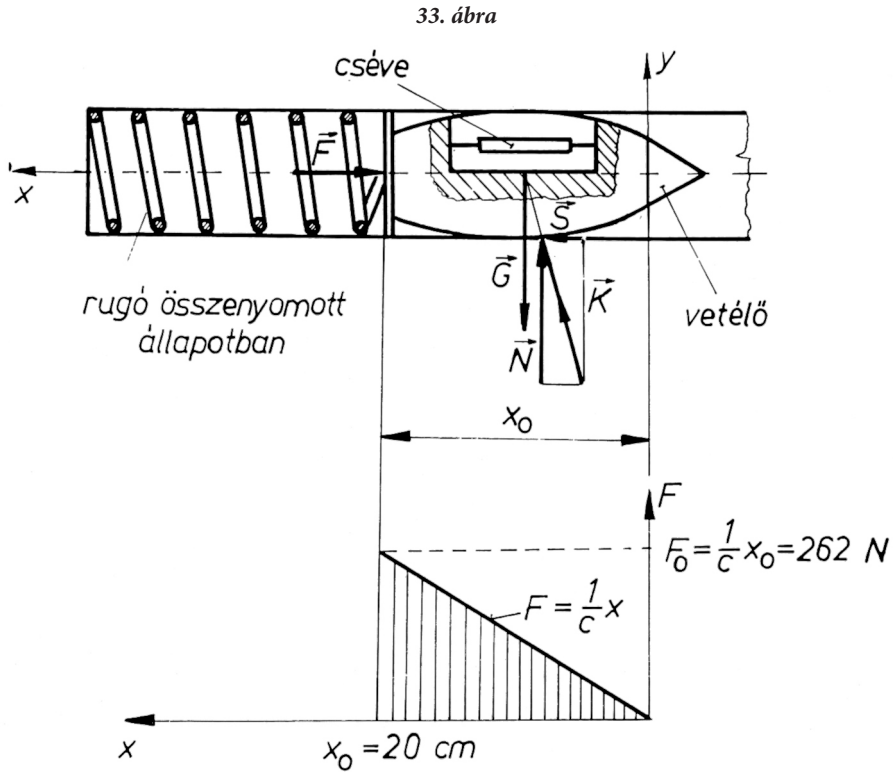
Érdes pályán mozgó anyagi pont esetén a kényszererő iránya az anyagi pont sebességvektorától is függ. A műszaki gyakorlatban előforduló feladatoknál általában vagy ismert a sebesség iránya és irányítottsága, vagy csak az iránya. Az első esetben a kényszererő iránya egyértelműen felvehető, a másodikban meg kell vizsgálni, hogy az adott erőhatások eredményeként az anyagi pont nyugalomban van-e, vagy egyik vagy másik irányítottságnak megfelelően mozdul-e el. Ennek eldöntése után a kényszererő iránya itt is egyértelmű.

2.5.2. Egyenes érdes pályán való mozgás

14. feladat (33. ábra):

A szövőgép $G = 3,34$ N súlyú vetelőjét $c = 7,65 \cdot 10^{-4}$ m/N rugóállandójú rugó mozgatja. A gép működése közben a rugó összenyomódása eredeti helyzetéhez képest $x_0 = 0,2$ m.

Működés közben a rugó feloldódik és meglöki a vetélőt, amely ezáltal a szövőgép egyik oldaláról a másikra repül át. Közben a vetülékfonal a csévéről lefejtődik és a láncfonalak közé fekszik.



Mekkora sebességre gyorsítja a rugó a vetélőt, ha a vezetékben a surlódási tényező $\mu = 0,1$. Munkatétellel oldjuk meg a feladatot:

$$E_1 - E_0 = W_{01} \quad ,$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{01} \quad .$$

A kioldás pillanatában a sebesség $\vec{v}_0 = \vec{0}$ és így a munkatétel:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = W_{01} \quad .$$

A vetélőre az \vec{F} , \vec{G} , \vec{K} erő hat. A \vec{G} - súlyerő és a \vec{K} ényyszerő \vec{N} összetevője az x_0 úton nem végez munkát, mivel az elmozdulás és az erő egymásra merőlegesek.

Így a vetélőre ható összes erő x_0 úton végzett W_{ol} munkájának meghatározásakor csak az \vec{F} rugóerővel és \vec{S} surlódóerőkomponenssel kell számolnunk. (Az \vec{S} statikai tanulmányaink szerint, a mozgást akadályozó erő, ezért az elmozdulással ellenkező irányítású).

Vizsgáljuk meg először a rugóerő által végzett munkát!

A rugóerő az összenyomódásnak közelítőleg lineáris függvénye:

$\vec{F} = -\vec{i} F(x) = -\vec{i} \frac{x}{c}$. A rugó kioldásakor a vetélő x irányú elmozdulást szenved, tehát

az elemi elmozdulásvektor $d\vec{r} = \vec{i} dx$. A rugóerő által kioldáskor végzett munka:

$$W_{ol \text{ rugó}} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{0}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{x_0}^0 F(x) dx = \int_0^{x_0} F(x) dx .$$

Tehát a keresett munka a $[0; x_0]$ intervallumban az $F(x)$ függvény alatti területtel számítható (33. ábra):

$$W_{ol \text{ rugó}} = \frac{F_0 x_0}{2} = \frac{x_0^2}{2c} .$$

A surlódási erő munkájához S meghatározása impulzustétel segítségével történhet:

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \vec{F} + \vec{G} + \vec{K} , & /j , \\ 0 &= N - G , \\ N &= G . \end{aligned}$$

A Coulomb-féle összefüggésből

$$S = \mu N = \mu G = \text{áll.}$$

Tehát

$$W_{ol \text{ surl}} = - S x_0 ,$$

mivel az S állandó és iránya az elmozdulással ellentétes.

Visszahelyettesítve a munkatételbe

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{x_0^2}{2c} - \mu G x_0 ,$$

$$v_1 = \sqrt{x_0 \left(\frac{x_0}{mc} - 2\mu g \right)} = \sqrt{0,2 \left(\frac{0,2}{0,35 \cdot 7,65 \cdot 10^{-4}} - 2 \cdot 0,19,81 \right)},$$

mivel $m = \frac{G}{g} = \frac{3,43 \text{ N}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 0,35 \text{ [kg]}.$

Így $v_1 = 12,2 \text{ [m/s]}.$

Tehát a rugó 12,2 m/s sebességre gyorsítja a vetélőt.

15. feladat:

A $H=5 \text{ m}$ magasságban levő zsákokat kell a $h=1,5 \text{ m}$ magasságú futószalagra juttatni. Ezt egy $\alpha = 30^\circ$ hajlásszögű egyenes lejtő közbeiktatásával oldják meg. A lejtőre helyezett zsák A-tól B-ig G súlya következtében csúszik és egy v_B sebességre tesz szert. Hogy a futószalagra lehessen tenni v_B sebességét egy rugós mechanizmussal $b = 1 \text{ m}$ úton nullára csökkentik. A zsák C pontba érve átesik a futószalagra (34. ábra). Mekkora legyen a fékező rugó c rugóállandója, ha a zsák súlya $G = 490 \text{ N}$, a zsák és a lejtő közötti súrlódási tényező $\mu = 0,3$?

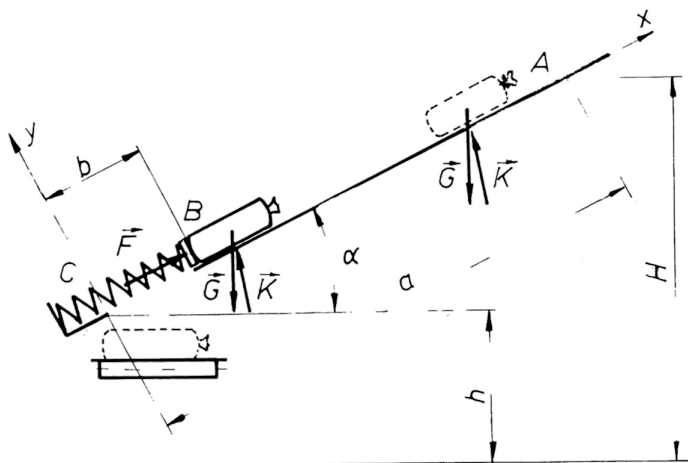
A lejtő teljes hossza:

$$a = \frac{H-h}{\sin \alpha} = \frac{5 - 1,5}{\sin 30^\circ} = 7 \text{ [m]}.$$

A zsákot anyagi pontnak tekinthetjük, mivel csak haladó mozgást végez (lásd még IV. fejezet 2.2. pont). A rá ható erők az \overline{AB} szakaszon \vec{K} , a \overline{BC} szakaszon pedig \vec{G} , \vec{K} , $\vec{F}(x)$. A koordináta-rendszert célszerűen a lejtő iránya és a rá merőleges irány határozza meg. Először a zsák a B pontbeli sebességét határozzuk meg egy munkatétellel:

$$E_B - E_A = W_{AB}.$$

34. ábra



Mivel $v_A = 0$, így $E_A = 0$. A \vec{G} és \vec{K} erőknek csak a pályairányú komponensei végeznek munkát az $\overline{AB} = a-b$ úton:

$$W_{AB} = (a-b) G \sin \alpha - (a-b) S.$$

Mivel a $G \sin \alpha$ erőösszetevő az elmozdulás irányába mutat (\vec{i} irányú), az S surlódási erőösszetevő viszont ezzel ellentétesen, ezért az első munkája pozitív, a másodiké negatív előjelű lesz. Ugyanerre az eredményre jutunk a munka általános összefüggéséből kiindulva is:

$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} (\vec{G} + \vec{K}) \cdot d\vec{r}.$$

A $d\vec{r} = \vec{i} dx$ összefüggést felhasználva:

$$W_{AB} = \int_a^b \vec{G} \cdot \vec{i} dx + \int_a^b \vec{K} \cdot \vec{i} dx = - \int_a^b G \sin \alpha dx + \int_a^b S dx.$$

Az integrálást elvégezve:

$$W_{AB} = -G(\sin \alpha) [b-a] + S [b-a] = (a-b) [G \sin \alpha - S].$$

Így most már a munkatétel részletesen:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = (a-b) [G \sin \alpha - S].$$

Itt még az S surlódóerő ismeretlen. Ezt egy impulzustétel segítségével határozzuk meg:

$$\vec{I} = \vec{G} + \vec{K}.$$

Szorozzuk végig mindkét oldalt \vec{j} -al, akkor

$$0 = -G \cos \alpha + N$$

mivel \vec{I} x irányú, nincs normálirányú gyorsulás. Ebből

$$N = G \cos \alpha.$$

A Coulomb-féle súrlódási összefüggést felhasználva:

$$S = \mu N = \mu G \cos \alpha.$$

Ezt a munkatételbe helyettesítve és v_B értékét onnan kifejezve:

$$v_B = \sqrt{\frac{2(a-b) (G \sin \alpha - \mu G \cos \alpha)}{m}} .$$

$$v_B = \sqrt{2(a-b) g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot (7-1) \cdot 9,81 \cdot (\sin 30^\circ - 0,3 \cdot \cos 30^\circ)} = 5,31 \text{ [m/s]} .$$

Végül tehát $v_B = 5,31$ m/s sebességgel érkeznek a zsák a B pontba

Ekkor az erőviszonyok megváltoznak. A keresett rugóállandót az F rugóerőből határozhatjuk meg, a rugóerőre viszont abból a feltételből következtetünk, hogy a zsák C pontbeli sebessége zérus.

A feladatot egy BC szakaszra vonatkozó munkatétellel oldhatjuk meg.

$$E_C - E_B = W_{BC}$$

Az anyagi pontra ható \vec{G} és \vec{K} erők munkáját az előző megfontolások, az \vec{F} rugóerő munkáját a 14. feladatban leírtak alapján határozzuk meg.

Így

$$0 - \frac{1}{2} m v_B^2 = b(G \sin \alpha - S') - \frac{b^2}{2c} .$$

Itt $S' = S$ mivel az \vec{F} lejtőirányú rugóerő nem változtatja meg a kényszererő normálkomponensének nagyságát ($N'=N$). A rugóerő munkája azért negatív, mivel \vec{F} erő az elmozdulással ellentétes. A fenti összefüggésből a rugóállandót kifejezhetjük:

$$c = \frac{b^2}{2b(G \sin \alpha - \mu G \cos \alpha) + m v_B^2} ,$$

$$c = \frac{1^2}{2 \cdot 1 \cdot (490 \cdot \sin 30^\circ - 0,3 \cdot 490 \cdot \cos 30^\circ) + \frac{490}{9,81} \cdot 5,31^2} = 6,1 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{m}}{\text{N}} \right] .$$

Tehát a keresett rugóállandó $c = 6,1 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{m}}{\text{N}} \right]$.

16. feladat:

A 35. ábrán egy szállítószalagot látunk, amely sódert továbbít. A szalag $v_k = 1,5$ m/s sebessége állandó. Hol hagyja el a tömegpontoknak tekinthető anyag a szalagot, ha $R = 0,25$ m, a szalag és a sóder közti nyugvásbeli surlódási tényező $\mu_0 = 0,4$; mozgásbeli surlódási tényező $\mu \approx 0$, $h = 2$ m és $\beta = 20^\circ$?

Először is vizsgáljuk meg, mekkora lehet β_{\max} , hogy a szállítószalag még elvigye az anyagot, azaz ne csússzon vissza a szalagon (36. ábra)!

Az anyagi pont addig van nyugalomban a szalaghoz viszonyítva, amíg

$$\beta \leq \varrho_0,$$

ahol ϱ_0 a surlódási kúp fél nyílásszöge, és $\operatorname{tg} \varrho_0 = \mu_0$ (lásd Statika jegyzet).

Azaz

$$\beta_{\max} = \varrho_0,$$

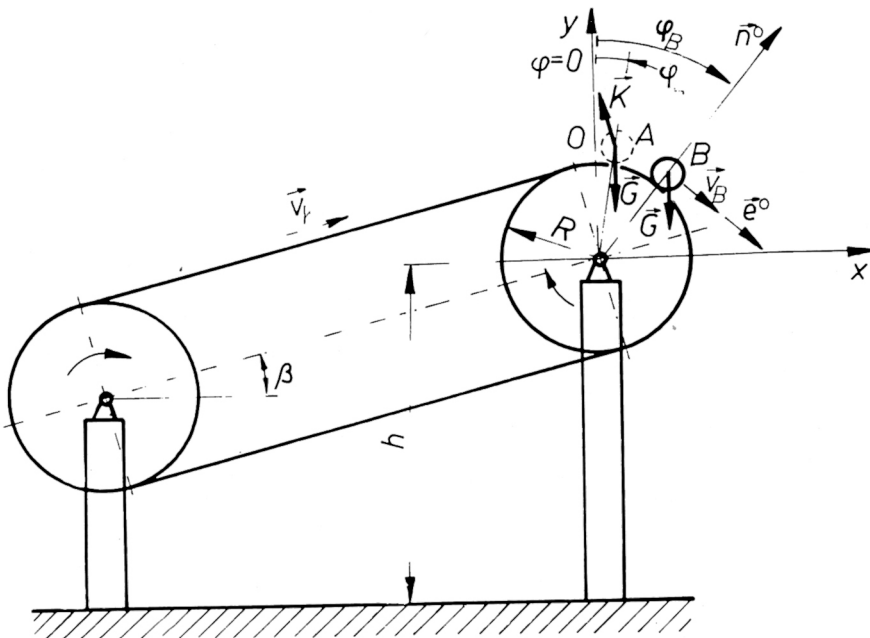
$$\operatorname{tg} \beta_{\max} = \operatorname{tg} \varrho_0 = 0,4,$$

$$\beta_{\max} = 21,8^\circ.$$

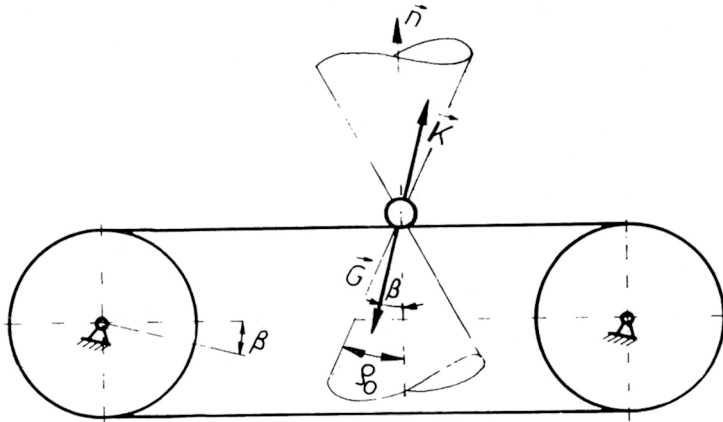
Tehát a lejtő maximális hajlásszöge független a szállított anyag tömegétől, csak az illető anyag és a szalag közti nyugvásbeli surlódási tényezőtől függ.

Esetünkben $\beta < \beta_{\max}$, azaz a szalagról nem csúszik vissza a szállítandó anyag.

35. ábra



36. ábra



Továbbiakban vizsgáljuk meg, hogy az m tömegpontok a köríves pályarészen meddig mozognak együtt a szállítószalaggal (sebességük a szalaghoz képest nulla). Jelöljük A-val azt a pontot, amelytől kezdve a tömegpontok megcsúsznak a szalaghoz képest (35. ábra). Az anyagi pontra csak a \vec{G} súlyerő és a \vec{K} kényszererő hat.

Az impulzustétel az A pontban:

$$\dot{\vec{I}} = \vec{G} + \vec{K} .$$

Mivel a v_k sebesség állandó, a köríves pályán az anyagi pont gyorsulása normálirányú lesz (1.2.2. pont). Az impulzustételt \vec{n} és \vec{e} vektorral végigszorozva:

$$- m \frac{v_k^2}{R} = - mg \cos \varphi_A + N , \quad (27)$$

$$0 = mg \sin \varphi_A - S . \quad (28)$$

A nyugalom és elmozdulás határhelyzetét vizsgáljuk, tehát

$$S = \mu_0 N .$$

Ezt (28)-ba helyettesítve és rendezve az

$$N = \frac{mg \sin \varphi_A}{\mu_0}$$

összefüggést kapjuk. Ezt behelyettesítve (27)-be:

$$- m \frac{v_k^2}{R} = - mg \cos \varphi_A + \frac{mg \sin \varphi_A}{\mu_0}$$

E gyszerűsítés és rendezés után

$$\sin\varphi_A + \frac{\mu_o v_k^2}{gR} = \mu_o \cos\varphi_A .$$

A $\cos\varphi_A = \sqrt{1 - \sin^2\varphi_A}$ behelyettesítése, négyzetreemelés és rendezés után

$$(1 + \mu_o^2) \sin^2\varphi_A + \frac{2\mu_o v_k^2}{gR} \sin\varphi_A + \frac{\mu_o^2 v_k^4}{g^2 R^2} - \mu_o^2 = 0 .$$

Ebből

$$\begin{aligned} \sin\varphi_A &= \frac{-\frac{\mu_o v_k^2}{gR} \pm \mu_o^2 \sqrt{1 + \mu_o^2 - \frac{\mu_o^2 v_k^4}{g^2 R^2}}}{1 + \mu_o^2} = \\ &= \frac{-\frac{0,4 \cdot 2,25}{9,81 \cdot 0,25} \pm 0,4 \sqrt{1 + 0,16 - \left(\frac{0,4 \cdot 2,25}{9,81 \cdot 0,25}\right)^2}}{1,16} . \end{aligned}$$

Az adott esetben csak a pozitív előjelnek van fizikai tartalma, így

$$\sin\varphi_A = 0,0328 ,$$

$$\varphi_A = 1^{\circ}53' .$$

Ez azt jelenti, hogy a további számítások szempontjából közelítőleg úgy tekinthetjük, hogy a pálya legfelső pontján már megcsúsznak a tömegpontok, azaz ezek után sebességük már nem lesz azonos a szalagsebességgel. Térjünk rá az elválás helyének meghatározására! Ott válik el az anyagi pont a szalagtól, ahol a pálya és a tömegpont közötti kölcsönhatás megszűnik, azaz $K = 0$ lesz. Tehát azt a helyet keressük, ahol a kényszererő zérussá válik. Jelöljük B-vel ezt a pontot, és φ_B -vel jellemezzük (35. ábra).

A B pontban felírt impulzustétel

$$\vec{I} = \vec{G} + \vec{K} , \quad / \cdot \vec{n} ,$$

$$-m a_n = -G \cos\varphi_B + N .$$

Az elválás pillanatában a $\vec{K} = \vec{0}$ azaz $N = 0$ is fennáll.

Így

$$- m \frac{v_B^2}{R} = - G \cos \varphi_B . \quad (29)$$

Meg kell tehát határozni, hogy az m tömegpontok mekkora v_B sebességgel érnek B-be.

Mivel az anyagi pontok a futószalagon megcsúsznak, úgy tekinthetjük, mintha nyugvó pályán csúsznának le, de v_k kezdősebességgel. A v_B kiszámításához használjuk fel a munkatételt.

$$E_B - E_O = W_{oB}$$

A mozgásbeli surlódási tényezőt nullának vehetjük. Így a kényszererőnek csak elmozdulásra mérőleges komponense van.

Ebből következően a \vec{K} kényszererő a 0 és B pont között nem végez munkát. A súlyerő munkája pedig az előzőek értelmében $W = G(R - R \cos \varphi_B)$. Tehát a munkatétel:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_k^2 = G(R - R \cos \varphi_B) .$$

Innen

$$v_B^2 = 2 g R (1 - \cos \varphi_B) + v_k^2 . \quad (30)$$

Behelyettesítve (29)-be és -m-mel egyszerűsítve

$$\frac{2 g R (1 - \cos \varphi_B) + v_k^2}{R} = g \cos \varphi_B .$$

Rendezés után

$$\cos \varphi_B = \frac{v_k^2 + 2gR}{3gR} .$$

Az összefüggésből látható, hogy az elválás helye független az m tömegtől.

$$\cos \varphi_B = \frac{2,25 + 2 \cdot 9,81 \cdot 0,25}{3 \cdot 9,81 \cdot 0,25} = 0,972 , \quad \varphi_B = 15^\circ .$$

Tehát a függőlegestől 15° -ra az anyag elválik a szállítószalagtól.

Ekkor a sebessége (30) alapján

$$v_B = \sqrt{2gR (1 - \cos \varphi_B) + v_k^2} ,$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,25 (1 - 0,972) + 2,25} = 1,546 \text{ [m/s]} .$$

A példa folytatása a 8. feladatban található.

3. Anyagi pont lengőmozgása

Ha egy anyagi pont mozgása egyenlő időközönként ismétlődő szakaszokból áll, akkor az anyagi pont periodikus lengőmozgásáról beszélünk. Az alábbiakban olyan periodikus lengőmozgásokkal foglalkozunk, amelyek során az anyagi pontra az $\vec{F}_O(\vec{r})$; $\vec{F}_c(\vec{v})$; $\vec{F}_g(t)$ erők hatnak.

Ezen erőhatásokat létrehozó valóságos körülményekről az egyes alpontokban beszélünk részletesebben.

3.1. HARMONIKUS LENGŐMOZGÁS

Az egyenesvonalú harmonikus lengőmozgást végző anyagi pont kitérése egyetlen sinus függvénnyel adható meg a (17)-es összefüggés értelmében.

Vizsgáljuk most meg, milyen erő hatására jön létre ez a mozgás!

Legyen az anyagi pontra ható erők eredője a pont helyvektorának függvénye: $\vec{F}_O(\vec{r})$, méghozzá azzal arányos és vele ellentétes irányú:

$$\vec{F}_O = -\frac{1}{c} \vec{r} \quad (c > 0).$$

Ezen erő mindig különbözik zérustól, ha $\vec{r} \neq \vec{0}$, az anyagi pontot igyekszik visszatéríteni az $\vec{r} = \vec{0}$ helyvektorú kezdőpontba. Az \vec{F}_O erőt *visszatérítő erőnek* nevezzük. Ilyen visszatérítő

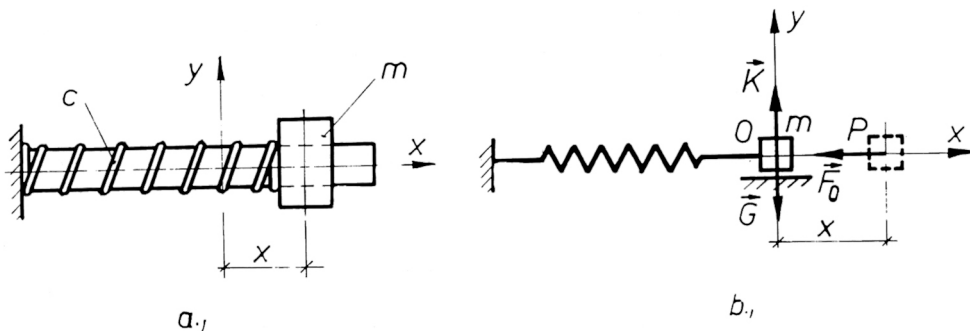
erő a valóságban előállítható lineárisan rugalmas anyagi testek, rugók segítségével, azok alakváltozása közben. A c jelenti az egységnyi erőhatásra létrejövő kitérést, amit rugóállandónak nevezünk. Mértékegysége: [m/N]. Írjuk fel az impulzustételt az m tömegű anyagi pontra (37. ábra):

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F},$$

ahol

$$\dot{\vec{I}} = (m\vec{v}) = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}}; \quad \vec{F} = \vec{F}_O = -\frac{1}{c} \vec{r}.$$

37. ábra



Behelyettesítve az impulzustételbe:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{c} \vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{1}{mc} \vec{r} = \vec{0} . \quad (31)$$

Bevezetve az $\frac{1}{mc} = \alpha_0^2$ jelölést, kapjuk az $\ddot{\vec{r}} + \alpha_0^2 \vec{r} = \vec{0}$ egyenletet, a harmonikus lengőmozgás differenciálegyenletét.

Mi részletesebben azzal az esettel foglalkozunk, amikor a mozgás egyenes mentén történik. Ilyen mozgást végez a csavarrugóra erősített, annak tengelye irányában (x irány) surlódás nélküli mozgó anyagi pont (37. ábra).

A mozgás differenciálegyenlete ekkor

$$\ddot{x} + \alpha_0^2 x = 0 , \quad (32)$$

ami egyezik a III. 1.2.3. pontban megadott (20) összefüggéssel. (Az impulzustétel y irányú vetületi egyenlete \vec{G} és \vec{K} egyensúlyát adja).

A matematikában tanultak szerint (32) általános megoldása $x = A \sin(\alpha_0 t + \varphi_0)$ alakban adódik.

Ebből

$$\dot{x} = \alpha_0 A \cos(\alpha_0 t + \varphi_0) ,$$

$$\ddot{x} = -\alpha_0^2 A \sin(\alpha_0 t + \varphi_0) = -\alpha_0^2 x ,$$

amelynek a diff. egyenletbe történő behelyettesítése azonosságra vezet.

Az anyagi pont tehát az

$$x = A \sin(\alpha_0 t + \varphi_0) \quad (33)$$

kifejezés szerint fog mozogni (38. ábra), ahol

x : a lengő anyagi pont t időponthoz tartozó kitérése [m],

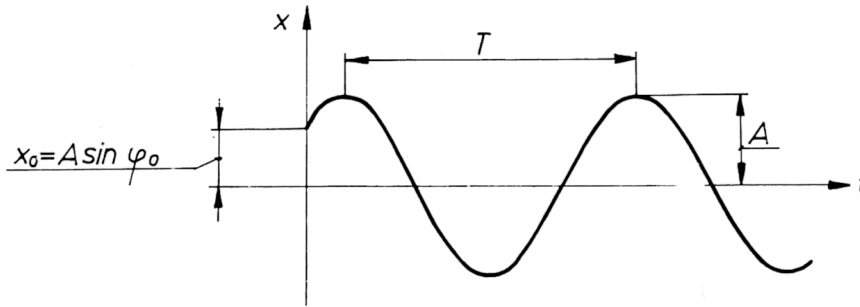
A : a lengés amplitúdója (legnagyobb kitérése) [m],

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{mc}} = \text{a lengőmozgás körfrekvenciája [1/s],} \quad (34)$$

φ_0 : a lengés $t = 0$ időponthoz tartozó fázisszöge [rad],

$$T = \frac{2\pi}{\alpha_0} \text{ a lengésidő [s].}$$

38. ábra



A fenti jellemzők közül A és φ_0 a mozgás kezdeti feltételeiből (vagy két, egymástól független, tetszőleges időpontbeli mozgásjellemző értékéből) határozhatók meg (lásd 10. feladat).

A mozgás α_0 körfrekvenciája viszont csupán a lengő tömeg (m) és a rugóállandó (c) függvénye, értékét nem befolyásolja az indítás módja.

A fentiekben értelmezett \vec{F}_O visszatérítő erő hatására tehát az anyagi pont egyetlen sinus függ-

vénnyel leírható, harmonikus lengőmozgást végez. Ezt az esetet, amelynél a bevezetőben említett \vec{F}_c és \vec{F}_g erők nem hatnak az anyagi pontra, és az egyedül az \vec{F}_O erő által meghatározott moz-

gást végez, szokás szabad lengésnek is nevezni.

3.2. CSILLAPÍTOTT LENGŐMOZGÁS

A valóságban létrejövő lengőmozgások esetén mindig jelentkeznek olyan hatások, amelyek a lengés amplitúdóját csökkentik: a lengések csillapodnak. Vizsgáljuk meg, milyen módon változhatnak a csillapítást okozó erők!

3.2.1. Külső csillapító erők esetén

1. A Coulomb-féle törvénnyel leírható surlódásból származó csillapító erő nagysága állandó, iránya a mozgásirány változásakor megváltozik.
2. A folyadéksurlódás következtében fellépő csillapító erő megközelítően arányos a mozgás sebességével.
3. A légellenállásból származó csillapító erő közel arányos a sebesség négyzetével.

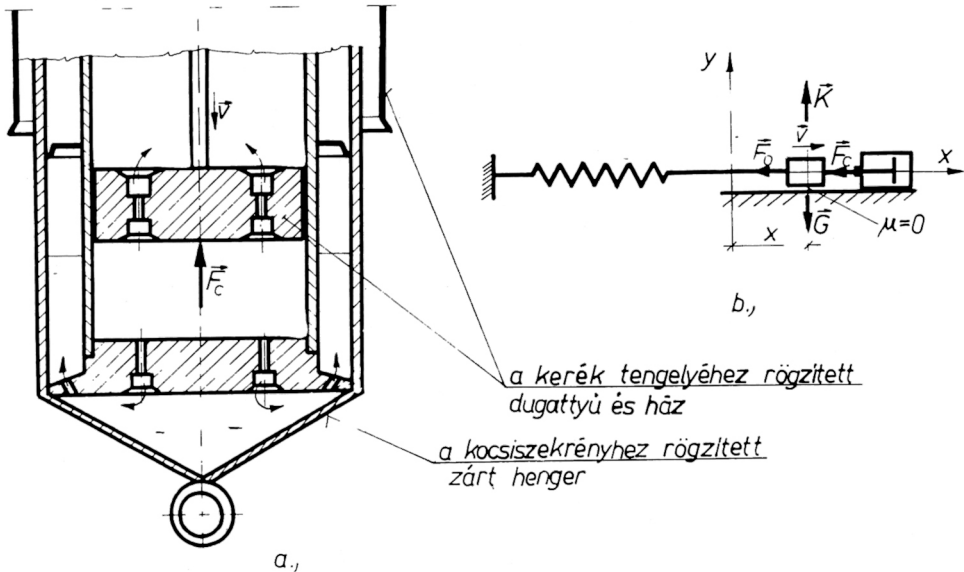
Mi a következőkben az említett csillapító erők közül azon esettel foglalkozunk, amikor a csillapító erő arányos a mozgás sebességével és vele ellentétes irányú:

$$\vec{F}_c = -k\vec{v} = -k\dot{\vec{r}},$$

ahol a k a csillapítás tényezője, pozitív állandó, mértékegysége: [Ns/m]

Jó közelítéssel ilyen csillapító erőt fejt ki a lassan mozgó dugattyúra a fojtónyíláson átáramló folyadék pl, a gépkocsi lengéscsillapítójában (39.a. ábra). Ezen lengéscsillapítóval ellátott lengőrendszer mechanikai modelljét mutatja a 39.b. ábra.

39. ábra



Írjuk fel az impulzustételt az m tömegű anyagi pontra, amelyre az \vec{F}_O és \vec{F}_C erők hatnak:

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}_O + \vec{F}_C,$$

ahol

$$\dot{\vec{I}} = m\ddot{\vec{r}};$$

így

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{r}} - k\vec{r},$$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{k}{m}\dot{\vec{r}} + \frac{1}{mc}\vec{r} = \vec{0}.$$

Bevezetve a

$$2\beta = \frac{k}{m} \quad \text{és} \quad \alpha_0^2 = \frac{1}{mc}$$

jelöléseket, ahol β a csillapításra, α_0 a visszatérítő erőre jellemző állandó, az

$$\ddot{\vec{r}} + 2\beta\dot{\vec{r}} + \alpha_0^2\vec{r} = \vec{0}$$

lineáris, homogén, állandó együtthatós differenciálegyenletet nyerjük, amely az x tengely mentén történő egyenesvonalú mozgás esetén

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \alpha_0^2 x = 0$$

alakú lesz.

A diff. egyenlet megoldását $x = e^{\lambda t}$ alakban keresve a

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \alpha_0^2 = 0$$

karakterisztikus egyenletre jutunk (lásd Matematika című tárgyat), amelynek gyökei:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha_0^2}.$$

Ezek felhasználásával a differenciálegyenlet általános megoldása az

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (35)$$

alakban írható, ahol C_1, C_2 tetszőleges állandók. A λ_1, λ_2 gyökök természeté szerint

(komplex, valós, vagy kettős gyök) három esetet különböztetünk meg:

a) Ha $\beta < \alpha_0$ vagyis a csillapítás egy bizonyos mértéknél kisebb – a (35) általános megoldás az

$$x = A e^{-\beta t} \sin(\alpha t + \varphi_0) \quad (36)$$

alakra hozható, ahol A és φ_0 valós konstansok a mozgás kezdeti feltételeiből határozhatók meg,

$$\alpha = \sqrt{\alpha_0^2 - \beta^2}$$

a lengés körfrekvenciája, amelyből

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_0^2 - \beta^2}} \quad \text{a lengésidő.}$$

A (36) egyenlettel leírt mozgás olyan harmonikus lengésnek tekinthető, amelynek *amplitúdója az időben exponenciálisan csökken* (40. ábra). Szokás ezt az esetet *gyenge csillapítású lengőmozgásnak* nevezni.

Két, egymást követő, azonos előjelű maximális kitérés viszonya itt egyenlő:

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4} = \dots = \frac{A_n}{A_{n+2}} = K .$$

Ha az A_n -hez tartozó időpont t_n , akkor (36) felhasználásával

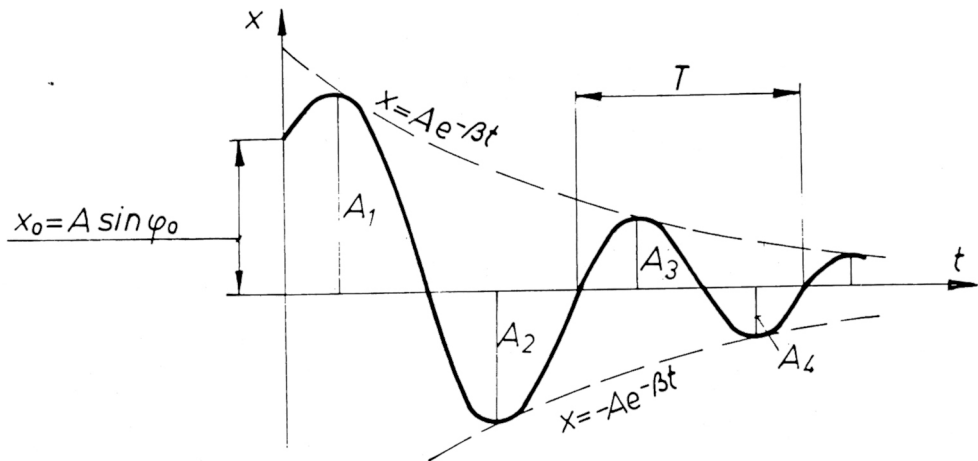
$$K = \frac{A_n}{A_{n+2}} = \frac{x(t_n)}{x(t_n+T)} = \frac{Ae^{-\beta t_n}}{Ae^{-\beta(t_n+T)}} = \frac{Ae^{-\beta t_n}}{Ae^{-\beta t_n} e^{-\beta T}} = e^{\beta T} .$$

Ez a viszony a csillapodás mértékére jellemző, *csillapodási hányadosnak* nevezzük. Szokás a csillapodást a

$$\mathcal{A} = \ln K = \beta T$$

logaritmikus dekrementummal is jellemezni.

40. ábra



A II. táblázat 1–5. oszlopa adatainak alapján a gyengén csillapított lengőmozgás jellemzőinek

változását vizsgálhatjuk a $0 \leq \frac{\beta}{\alpha_0} \leq 1$ tartományban.

II. táblázat

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	$\frac{\Delta A}{A}$	K	\mathcal{L}	$\frac{\beta}{\alpha_0}$	$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	$\frac{\omega^*}{\alpha_0}$	η'_{\max}
1.	0	1	0	0	1	1	∞
2.	0,167	1,2	0,182	0,029	0,9992	0,996	17,85
3.	0,333	1,5	0,405	0,064	0,998	0,996	7,83
4.	0,500	2	0,693	0,110	0,994	0,989	4,57
5.	0,750	4	1,385	0,216	0,976	0,954	2,37
6.	0,900	10	2,30	0,343	0,937	0,879	1,545
7.	0,950	20	2,99	0,434	0,910	0,791	1,275
8.	0,990	100	4,61	0,593	0,808	0,548	1,045
9.	0,998	540	6,28	0,71	0,71	0	1
10.	1	∞	∞	1	0	-	-

Az 1. oszlopban szereplő $\frac{\Delta A}{A}$ mennyiség az egy lengésperiódus alatti fajlagos amplitúdó-csökkenés, amelyben

ΔA az egy lengésperiódus alatti amplitúdócsökkenés,

A a lengés amplitúdója a vizsgált lengésperiódus elején.

A táblázatban szereplő további jellemzők értelmezése a korábbiaknak megfelelő.

A táblázat 1. sora ($\beta = 0$) a csillapítatlan harmonikus lengésnek felel meg. Lefelé haladva a csillapítás mértéke növekszik, végül a 10. sor ($\beta = \alpha_0$) már a következő, c) pontban tárgyalt, nem periodikus lengés esete.

Figyeljük meg pl. az 5. sor adatait! A $\beta = 0,216 \alpha_0$, ill. $\mathcal{L} = 1,385$ esetén a lengés amplitú-

dója egy periódus alatt már 75%-kal ($\frac{\Delta A}{A} = 0,750$), vagyis negyed részére ($K = 4$) csökken,

ezen csillapított lengés körfrekvenciája (α) azonban a csillapítatlan lengés saját körfrekvenci-

ájához (α_0) viszonyítva mindössze 2,4%-kal változik ($\frac{\alpha}{\alpha_0} = 0,976$). Ez azt jelenti,

hogy ezen csillapítási esetben, még nagy K értékeknél is, a lengőmozgás körfrekvenciája közelítéssel a csillapítatlan lengőmozgás körfrekvenciájával azonosnak vehető.

b) Ha $\beta > \alpha$ – vagyis a csillapítás egy bizonyos mértéknél nagyobb – a (35) megoldás az

$$x = Ae^{-\beta t} \operatorname{sh}(\alpha' t + \varphi_0) \quad (37)$$

alakra hozható; ahol A és φ_0 valós konstansok a mozgás kezdeti feltételeiből határozhatók meg és

$$\alpha' = \sqrt{\beta^2 - \alpha_0^2}.$$

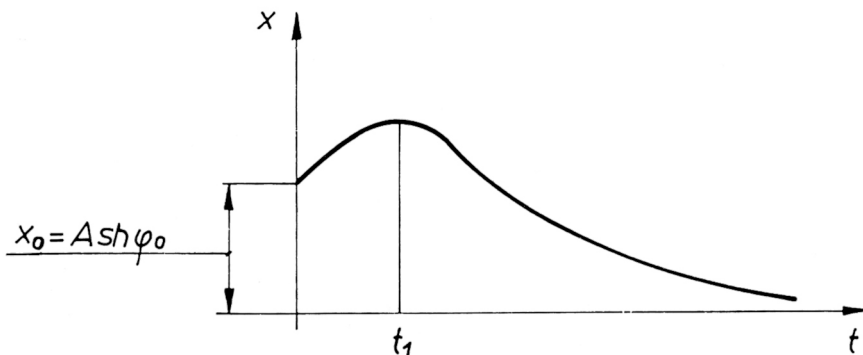
Az anyagi pont fenti egyenlettel leírható mozgása nem lengés, hanem *aperiodikus* mozgás. Amennyiben $\varphi_0 > 0$, x értéke sohasem negatív (41. ábra). A kitérés egy bizonyos t_1 időpontban eléri maximális értékét, majd $t \rightarrow \infty$ esetén zérushoz tart. Szokás ebben az esetben az anyagi pont mozgását *erősen csillapított*nak nevezni.

c) Ha $\beta = \alpha_0$ – határesetben – a diff. egyenlet (35) általános megoldása

$$x = e^{-\beta t} (C_1 + C_2 t) \quad (38)$$

alakban adódik, ahol C_1 és C_2 valós konstansok a mozgás kezdeti feltételeiből határozhatók meg. Ekkor az erős csillapítás esetéhez hasonló jellegű *aperiodikus mozgást* fog végezni az anyagi pont.

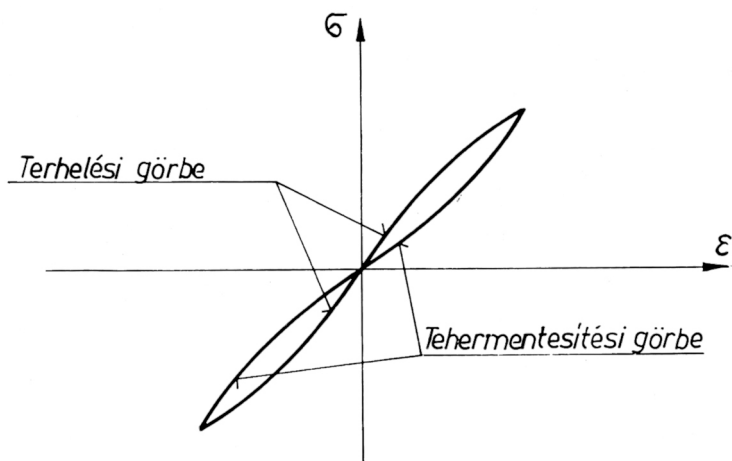
41. ábra



3.2.2. Belső csillapító erők esetén

A rugalmas test terhelése közben végzett munka a valóságban soha nem egyezik meg a tehermentesítés során visszanyert munkával, az energia egy része hővé alakul. Erre mutat az alakváltozási diagram terhelési és tehermentesítési görbéje alatti területek különbözősége (42. ábra), mivel ezen területek arányosak a fent említett munkákkal.

42. ábra



A III. táblázat kísérleti adatokat, közül különböző anyagok belső csillapításának jellemzőire, a korábbiakban értelmezett jelölések felhasználásával.

III. táblázat

	$\frac{\Delta A}{A}$	K	λ
Acélok	0,005 ... 0,01	1,005 ... 1,01	0,004 ... 0,010
Szürke öntöttvas	0,11	1,125	0,118
Fa	0,03 ... 0,07	1,03 ... 1,075	0,030 ... 0,072
Beton	0,13	1,15	0,140
Vasbeton	0,12	1,135	0,127
Tégla fal	0,11	1,125	0,118

A IV. táblázat – épületszerkezetekre vonatkozó – adatai az anyagcsillapításon kívül a szerkezetek csomópontjaiban, a szerkezet és a talaj között, stb., keletkező veszteségeket is magukban foglalják.

IV. táblázat

	$\frac{\Delta A}{A}$	K	Λ
Acélszerkezetek	0,08 ... 0,09	1,09 ... 1,10	0,086 ... 0,095
Faszerkezetek	0,15 ... 0,17	1,18 ... 1,21	0,165 ... 0,190
Vasbetonszerkezetek	0,25	1,33	0,285
Téglafalazat	0,12	1,135	0,127

Ezen tájékoztató jellegű adatok alapján a következő megállapításokat tehetjük:

1. A III. és IV. táblázat adatait összehasonlítva láthatjuk, hogy az épületszerkezeteknél jelentkező külső csillapítások jelentős növekedést okoztak a tiszta anyagcsillapításhoz viszonyítva.
2. A III., IV. táblázat adatait a II. táblázat adataival nagyságrendileg összehasonlítva, tisztán anyagcsillapítású rendszerekre, ill. épületszerkezetekre jó közelítéssel igaz, hogy a csillapítás a rendszer körfrekvenciáját nem változtatja meg ($\alpha = \alpha_0$).

3.3. GERJESZTETT LENGŐMOZGÁS

A gyakorlatban nagy jelentősége van annak az esetnek, amikor az anyagi pontra az \vec{F}_O visszatérítő erőn kívül egy periodikusan változó, pl.

$$\vec{F}_g(t) = \vec{F}_{g1} \cos \omega t + \vec{F}_{g2} \sin \omega t$$

alakú gerjesztőerő is hat. Ez az erő származhat pl. gépek kiegyensúlyozatlan forgórészének tömegközélpontjából (V. fejezet 2.8. pont). Gerjesztést jelent a támaszmozgás, rugóvégpont mozgása is. Írjuk fel ekkor az m tömegű anyagi pontra az impulzustételt:

$$\vec{\dot{I}} = \vec{F}_O + \vec{F}_g,$$

ahol

$$\vec{\dot{I}} = m\vec{\ddot{r}}.$$

Így

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{c}\vec{r} + \vec{F}_g,$$

$$\ddot{\vec{r}} + \alpha_0^2 \vec{r} = \frac{1}{m} \vec{F}_g,$$

felhasználva az $\frac{1}{mc} = \alpha_0^2$ jelölést. Amennyiben az anyagi pont az x tengely mentén végez egyenesvonalú mozgást és a gerjesztőerő

$$\vec{F}_g = i F_{g0} \sin(\omega t + \delta_0)$$

alakú, a diff. egyenlet a következő lesz:

$$x + \alpha_0^2 x = \frac{F_{g0}}{m} \sin(\omega t + \delta_0). \quad (39)$$

Ezen egyenlettel leírható mozgást nyerünk, ha egy csavarrugóra függesztett test szabad lengőmozgását úgy befolyásoljuk (gerjesztjük), hogy a rugó felső végét ω körfrekvenciával fel-le mozgatjuk. Éppen ezért α_0 -t a rendszer saját körfrekvenciájának, ω -t a gerjesztőerő körfrekvenciájának, vagy kényszerkörfrekvenciának nevezzük, valamint F_{g0} a gerjesztőerő maximális értéke, δ_0 a gerjesztőerő kezdő fázisszöge.

A kapott inhomogén, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet

$$x_h = A \sin(\alpha_0 t + \varphi_0) \quad (40)$$

általános megoldásának (lásd (32), (33) összefüggéseket) és egy

$$x_p = B \sin(\omega t + \delta_0) \quad (41)$$

alakú partikuláris megoldásnak az összege:

$$x = x_h + x_p = A \sin(\alpha_0 t + \varphi_0) + B \sin(\omega t + \delta_0) \quad (42)$$

ahol A és B konstansok.

A megoldásból látható, hogy a mozgás két lengés összetevése (III. fejezet 1.2.3.2. pont): egy α_0 körfrekvenciájú lengése, amelynek amplitúdója (A) és kezdő fázisszöge (φ_0) a kezdeti feltételekből határozható meg, valamint egy ω körfrekvenciájú lengése, amelynek amplitúdója a (41) összefüggés (39) diff. egyenletbe való helyettesítésével határozható meg:

$$B = \left| \frac{F_{g0}}{m(\alpha_0^2 - \omega^2)} \right|.$$

Ez a c rugóállandó $\alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{mc}}$ az összefüggésből való kifejezésével és

$$\eta = \frac{\alpha_0^2}{m(\alpha_0^2 - \omega^2)}$$

dinamikus, vagy nagyítási tényező bevezetésével átalakítható:

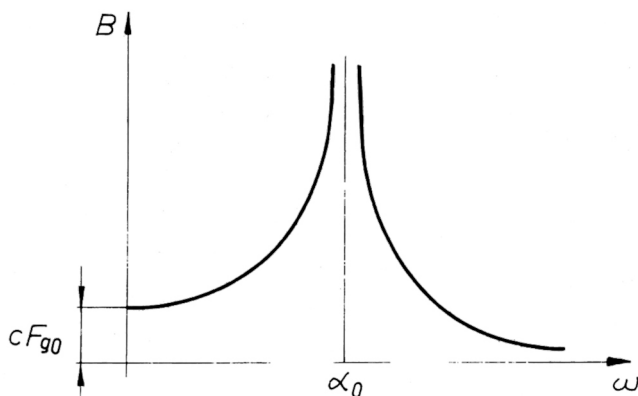
$$B = \frac{F_{g0}}{m\alpha_0^2} \cdot \frac{\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - \omega^2} = c F_{g0} \eta.$$

Az η , megmutatja, hogy a mozgás B amplitúdója hányszor lesz nagyobb annál az elmozdulásnál, amely akkor jönne létre, ha F_{g0} erő statikusan működne a rendszerre.

Látható, hogy $\omega \rightarrow \alpha_0$ esetben – vagyis ha a gerjesztőerő körfrekvenciája a rendszer saját

körfrekvenciájához közeledik – a nagyítás tényező – és vele együtt a B amplitúdó – minden határon túl növekszik (43. ábra).

43. ábra



Az $\omega = \alpha_0$ esetben rezonancia lép fel, a lengés amplitúdója elméletileg végtelen nagyra növekszik, és a szerkezet tönkremegy.

A valóságban azonban (mint azt már a III. 3. 2. pontban megállapítottuk) mindig fellépnek csillapítást okozó hatások. Vizsgáljuk ezért meg a gerjesztett és csillapított lengőmozgást is.

3. 4. GERJESZTETT ÉS CSILLAPÍTOTT LENGŐMOZGÁS

Vizsgáljuk meg azt az általános esetet, amikor az anyagi pontra a helyvektortól függő $\vec{F}_o(\vec{r})$ visszatérítő, a sebességtől függő $\vec{F}_c(\vec{v})$ csillapító és az időtől függő $\vec{F}_g(t)$ gerjesztőerő hat.

Írjuk fel ekkor az m általános esetet, amikor az anyagi pontra az impulzustételt:

$$\vec{I} = \vec{F}_o + \vec{F}_c + \vec{F}_g .$$

Az egyes mennyiségek behelyettesítése után:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{c}\vec{r} - k\dot{\vec{r}} + \vec{F}_g(t) .$$

Átrendezve

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{k}{m}\dot{\vec{r}} + \frac{1}{mc}\vec{r} = \frac{1}{m}\vec{F}_g(t) .$$

Felhasználva a 3.2. pont szerinti jelöléseket

$$\ddot{\vec{r}} + 2\beta\dot{\vec{r}} + \alpha_o^2\vec{r} = \frac{1}{m}\vec{F}_g(t)$$

adódik. Ha az x tengely mentén egyenesvonalú mozgást végző anyagi pontra korlátozzuk vizsgálatainkat és a gerjesztőerő

$$\vec{F}_g = i F_{go} \sin(\omega t + \delta_o)$$

alakú, a differenciálegyenlet a következő lesz:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \alpha_o^2 x = \frac{F_{go}}{m} \sin(\omega t + \delta_o). \quad (43)$$

Az egyenletben szereplő mennyiségek értelmezése a korábbiaknak megfelelő. Ezen inhomogén, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet

$$x_h = \begin{cases} Ae^{-\beta t} \sin(\alpha t + \varphi_o) ; & \text{ha } \beta < \alpha_o \\ Ae^{-\beta t} \text{sh}(\alpha' t + \varphi_o) ; & \text{ha } \beta > \alpha_o \\ e^{-\beta t} (C_1 + C_2 t) & ; \quad \text{ha } \beta = \alpha_o \end{cases}$$

megfelelő esetre vonatkoztatott általános megoldásának (lásd (36), (37), (38) összefüggéseket) és egy

$$x_p = B' \sin(\omega t + \delta_o - \varepsilon) \quad (44)$$

alakú partikuláris megoldásnak az összege:

$$x = x_h + x_p \quad .$$

Az anyagi pont mozgása tehát *összetehető egy csillapított lengő mozgásból* (amely lehet

$\alpha = \sqrt{\alpha_0^2 - \beta^2}$ körfrekvenciájú periodikus mozgás, vagy pedig aperiodikus mozgás) és egy

(ω) körfrekvenciájú *csillapítatlan lengésből*, amelynek amplitúdója B' . Az első rész egy bizonyos idő múlva elhanyagolható kitérését jelent, hiszen $t \rightarrow \infty$ esetén $e^{-\beta t} \rightarrow 0$, így tartósan csak az (ω) körfrekvenciájú kényszerlengés marad meg. Ezen lengés amplitúdója: a (44), (43)-ba helyettesítésével meghatározható:

$$B' = \frac{F_{g0}}{m \sqrt{(\alpha_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{F_{g0}}{m \alpha_0^2} \frac{\alpha_0^2}{\sqrt{(\alpha_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = c F_{g0} \eta' \quad ,$$

ugyanis

$$\frac{1}{m \alpha_0^2} = c \quad ,$$

valamint bevezettük az

$$\eta' = \frac{\alpha_0^2}{\sqrt{(\alpha_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

dinamikus, vagy nagyítási tényezőt.

Egy adott lengőrendszer esetén a nagyítási tényező a gerjesztőerő körfrekvenciájának függvénye, hiszen akkor α_0 és β állandó.

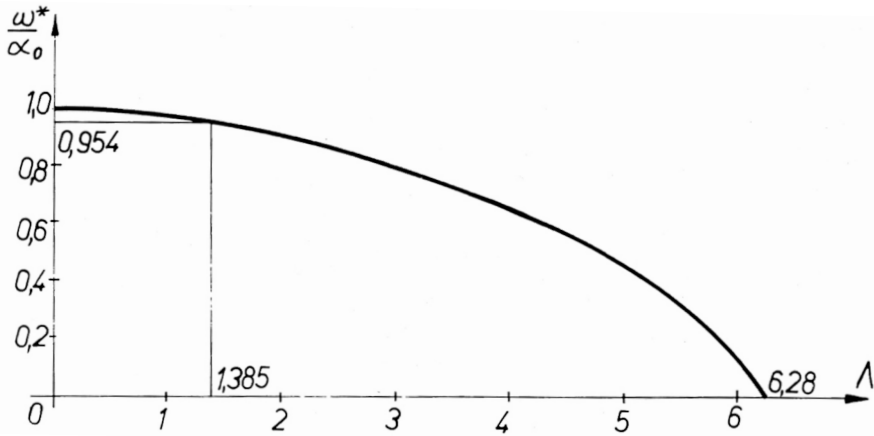
Azon gerjesztőkörfrekvencia értéket, amelynél az $\eta'(\omega)$ függvénynek maximuma van, jelöljük ω^* -gal! A csillapítás nélküli gerjesztett lengő mozgásnál $\omega^* = \alpha_0$ volt, vagyis a rezonancia akkor következett be, amikor a gerjesztőerő körfrekvenciája megegyezett a rendszer saját körfrekvenciájával. Ha csillapítás is van, ω^* eltér α_0 -tól. A II. táblázat 6. oszlopának

$\frac{\omega^*}{\alpha_0}$ adatai arra jellemzőek, hogy ω^* milyen mértékben különbözik α_0 -tól.

Ugyancsak az $\frac{\omega^*}{\alpha_0}$ hányados változását mutatja a csillapodás mértékétől (\mathcal{L}) függően a

44. ábra. A 7. oszlopban a nagyítási tényező függvényének maximális értékeit találhatjuk az illető csillapításhoz tartozóan. Míg a csillapítás nélküli esetben a lengés amplitúdója végtelen nagyra nő rezonancia-állapotban, addig *csillapító hatások felléptekor* a nagyítási tényező maximuma – és vele együtt a lengés amplitúdójának legnagyobb értéke – *véges nagyságú és a csillapítás erősödésével csökken.*

44. ábra



A 9. sor adatai mutatják, hogy a csillapítás mértékének növekedése során, a $\beta = 0,71 \alpha_0$ elérésekor (tehát még a $0 < \beta < \alpha_0$ "gyengén csillapított" tartományban) $\eta' \leq 1$ követ-

kezik be bármely ω -nál; vagyis a B' amplitúdó semmiképpen nem nőhet már a gerjesztőerő által okozott statikus kitérés ($c F_{go}$) fölé. A 45. ábra görbéi a nagyítási tényező változását mutatják a gerjesztőkörfrekvenciától függően, különböző csillapítások esetére.

A rezonancia káros hatását lehet a gyakorlatban. Pl. ha a visszatérítő erő rugó fejt ki, ennek növekvő alakváltozása a rugót használhatatlanná teszi, motorok, gépek által keltett periodikus rázkódások megrongálhatják az épületet, stb.

Ilyen károsodások elkerülése kétféleképpen történhet (lásd 45. ábra):

1. Biztosítjuk, hogy ω eléggé távol legyen ω^* -től,
2. Nagy csillapítást hozunk létre.

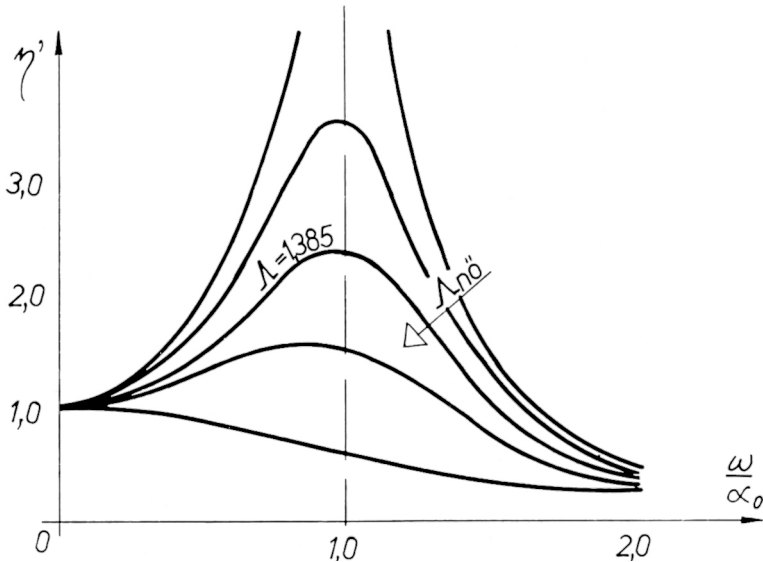
Az első esetben szükséges lenne ω^* meghatározása, ami komoly nehézségekkel jár, ezért általában a következő egyszerűsített eljárást fogadhatjuk el:

1. Amennyiben a rendszer csillapítása $K \leq 4$, vagy $\Lambda \leq 1,385$ tényezővel jellemezhető (II. táblázat 5. sora), akkor $\omega^* \approx \alpha_0$ értékűnek vehető (az eltérés 5%-kal kisebb) (lásd még 44. ábra). A lengőrendszer saját körfrekvenciájának (α_0) meghatározása után tehát azt

kell biztosítanunk, hogy a gerjesztőerő körfrekvenciája ne essen ennek környezetébe (ez az ún. „elhangolás”). Figyeljük meg – a III. és IV. táblázat adatai alapján –, hogy a tisztán anyagcsillapítású rendszer, ill. az épületszerkezetek esetén $\Lambda \ll 1,385$, tehát az α_0 sajátkör-

frekvencia közelében járó körfrekvenciájú gerjesztés erős rezonanciaveszélyt jelent (II. táblázat 7. oszlopa). Ilyenkor szükséges tehát α_0 meghatározása és ω „elhangolása”.

45. ábra

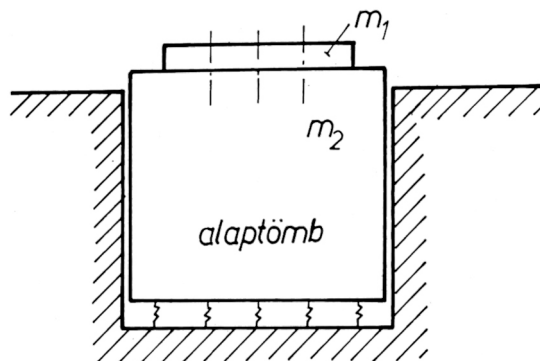


2. Ha a csillapítás az 1. szerinti értéknél nagyobb ($\Lambda > 1,385$), a rezonanciaveszély kicsiny (lásd III.3.1 táblázat η'_{\max} értékeit, ill. 45. ábrát), a gerjesztőerő körfrekvenciája általában tetszőleges értéket felvehet, károsodás nem jön létre.

17. feladat:

Vizsgáljuk meg egy $\omega = 105/s$ körfrekvenciájú gerjesztést szolgáltató gép alapozását. Az $m_1 = 4,5 \cdot 10^3$ kg tömegű gépet egy m_2 tömegű alaptömbre helyezik, mely rugós alátétek közbeiktatásával a talajon fekszik. (46. ábra) A rugós alátétek és a talaj együttes rugóállandója $c = 1,275 \cdot 10^8$ m/N, mely az irodalom alapján nomogramokból megállapítható. Milyen nagy legyen az alaptömb m_2 tömege, hogy a gép gerjesztőkörfrekvenciája háromszorosa legyen az alapozás saját körfrekvenciájának?

46. ábra



Mivel az alaptömb és a gép csak haladó mozgást végez, anyagi pontként vizsgálhatjuk (lásd IV. fejezet 2.2. pont). A csillapítást a saját körfrekvencia megállapításánál az előzőekben leírtak értelmében elhanyagoljuk.

Így tehát az alapozás saját körfrekvenciája, az alapot egytömegű lengőrendszernek tekintve (34):

$$\alpha \approx \alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{mc}} \quad ,$$

ahol

$$m = m_1 = m_2 \quad ,$$

azaz

$$\alpha^2 = \frac{1}{m_1 c + m_2 c} \quad .$$

Innen

$$m_2 = \frac{1}{c \alpha^2} - m_1 \quad .$$

A $\alpha = \frac{\omega}{3}$ feladatban megadott feltételünket is figyelembe véve:

$$m_2 = \frac{1}{1,275 \cdot 10^{-8} \left(\frac{105}{3}\right)^2} - 4,5 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^4 \quad [\text{kg}] \quad .$$

Tehát az alaptömb tömegének $6 \cdot 10^4$ kg kell lennie.

18. feladat (47. ábra):

Négyütemű Ottó-motor bütykös tengelyének fordulatszáma $n = 2000/\text{min}$. A szelepemelő, szeleprugó és a szelep együttes súlya $G = 1,96$ N. Mekkora legyen a szeleprugó c rugóállandója, hogy a szelepemelő sehol ne váljon el a bütyöktől. (A számítás egyszerűsítése végett a bütyköt egy $e = 2$ mm = $2 \cdot 10^{-3}$ m excentricitású körtárcsának vesszük, és a rugó előfeszítésétől eltekintünk).

A szelepemelőt, szeleprugót és szelepet egyetlen

$$m = \frac{G}{g} = \frac{1,96 \text{ N}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,2 \text{ kg}$$

tömeggel helyettesítjük, mivel együttes haladó mozgást végeznek.

Az egyszerűsített modell a 47.b. ábrán látható.

A szelepemelő elmozdulás-függvényét a geometriából láthatóan, a $\varphi = \omega t$ összefüggés felhasználásával (III. fejezet, 1.2.2. pont) az

$$y = e (1 - \cos \omega t) \quad (45)$$

összefüggés írja le (47.b. ábra). Az xy koordinátarendszert az álló környezet azon pontjához kötjük, melyben a szelepemelő a forgástengelyhez való legközelebbi helyzetében van.

A szelepemelőre ható erők \vec{F} , \vec{G} és \vec{K} , ahol \vec{F} rugóerő, \vec{G} a súlyerő és \vec{K} a kényszererő.

Amíg a szelepemelő nem válik le a bütyöktől $|\vec{K}| > 0$. Keressük a lehetséges elválás helyét és a feltételeit. Írjuk fel a szelepemelőre az impulzustételt

$$\begin{aligned} \vec{I}' &= \vec{F} + \vec{G} + \vec{K} , \\ m\vec{a} &= \vec{F} + \vec{G} + \vec{K} . \end{aligned}$$

Mivel a szelepemelő csak y irányban mozdulhat el:

$$\vec{a} = \vec{j} \ddot{y} .$$

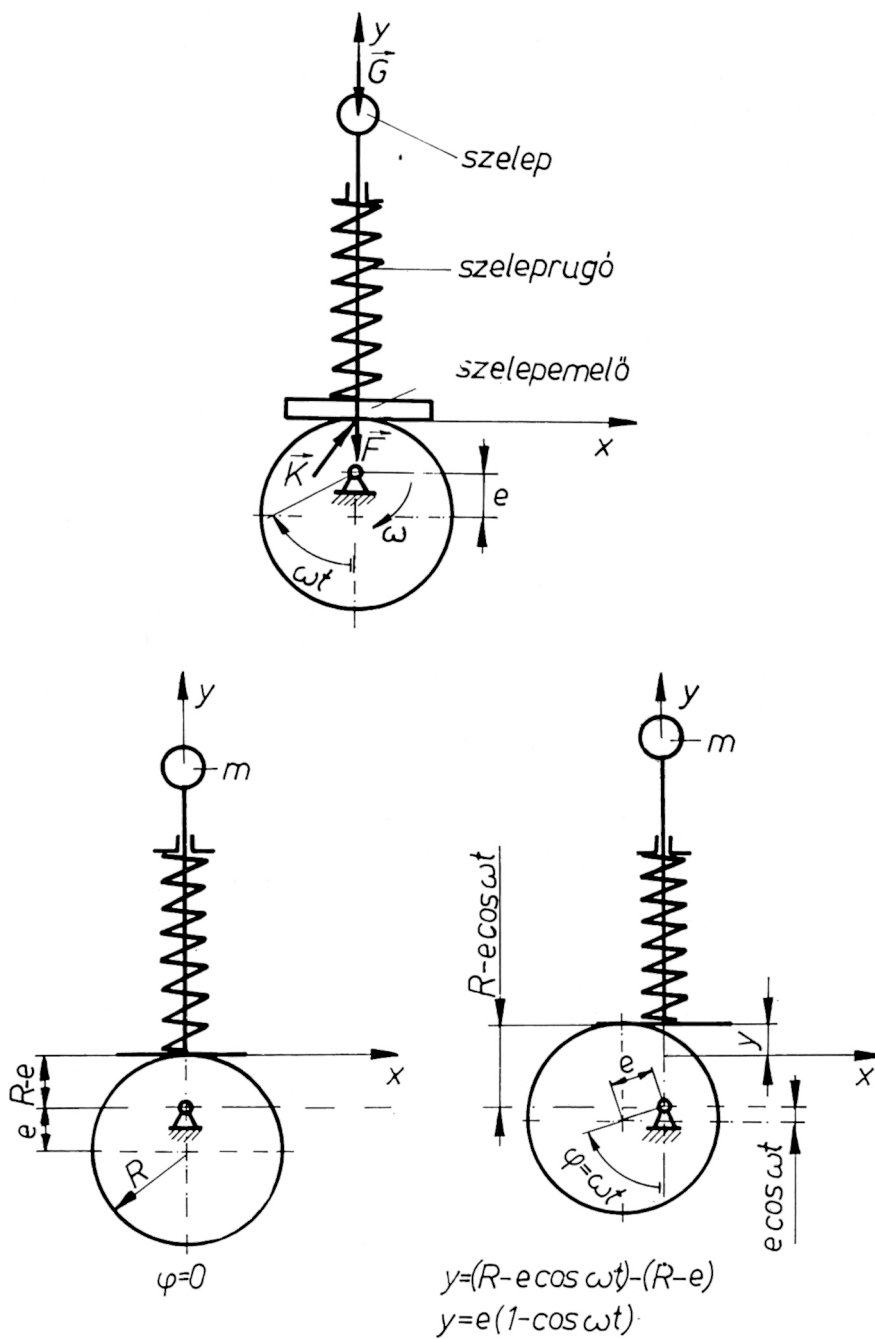
Az impulzustételt \vec{j} -al skalárisan végigszorozva (47.b. ábra)

$$m \ddot{y} = -F - G + N .$$

A rugóerőt a rugóállandóval kifejezhetjük: $F = \frac{1}{c} y$. Így

$$m \ddot{y} = - \frac{1}{c} y - G + N .$$

47. ábra



Innen

$$N = m \ddot{y} + \frac{1}{c} y + G .$$

A (45) összefüggés felhasználásával:

$$N = m e^{-\omega^2 t} \cos \omega t + \frac{1}{c} e^{-\omega^2 t} (1 - \cos \omega t) + mg . \quad (46)$$

Vizsgáljuk meg, hogy – ha elválás még nem következik be – a bütők mely helyzetében minimális a kényszererő! Ebben a helyzetben

$$\frac{\partial N}{\partial (\omega t)} = 0 = - m e^{-\omega^2 t} \sin \omega t + \frac{1}{c} e^{-\omega^2 t} \sin \omega t ,$$

$$e^{-\omega^2 t} \left(\frac{1}{c} - m \omega^2 \right) \sin \omega t = 0 .$$

Tehát a $\sin \omega t = 0$ összefüggés által meghatározott $\varphi = \omega t$ helyeken lesz az N kényszererő összetevőnek és vele együtt a \vec{K} kényszererőnek is szélsőértéke. Ebből

$$\varphi = \omega t = 0 \pm k \pi .$$

A \vec{K} kényszererőnek $k = 0, 2, 4 \dots 2n-2$ esetén maximuma van,
 $k = 1, 3, 5 \dots 2n-1$ esetén pedig minimuma.

Tehát a kényszererő minimumának megállapításához a (46) egyenletet az

$$\omega t = \pm k \pi, \quad k = 1, 3, \dots 2n - 1$$

helyen kell vizsgálni.

Határozzuk meg azt a c értéket, amelynél $N_{\min} = 0$ lesz! Tehát

$$N_{\min} = m e^{-\omega^2 t} \cos \pi + \frac{1}{c} e^{-\omega^2 t} (1 - \cos \pi) + mg = 0 .$$

Ezt c-vel végigszorozva és $\cos \pi = -1$ értéket helyettesítve:

$$- c m e^{-\omega^2 t} + 2 \cdot e^{-\omega^2 t} + c m g = 0 .$$

Az $\omega \left[\frac{1}{s} \right]$ szögsebesség, ill. gerjesztő körfrekvencia és az adott n [1/min] fordulatszám közti összefüggés felhasználásával:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \pi \cdot 2000}{60} = 210 \left[1/s \right] .$$

Így

$$c = \frac{2 e}{m(e \omega^2 - g)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-1} (2 \cdot 10^{-3} \cdot 210^2 - 9,81)} = 3 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{m}}{\text{N}} \right].$$

Ha tehát azt akarjuk, hogy az elválás ne következzen be, ennél nagyobbra kell választani a c rugóállandót. A c túlzott növelése sem célszerű, mert akkor nagy lesz a surlódási veszteség.

Vizsgáljuk meg, hogy ilyen rugóállandó mellett, nem áll-e főt a rezonancia veszélye! Mivel a lengőrendszer csillapítása kicsi (belső csillapítás és a vezetékben fellépő csillapító hatás) így a sajátfrekvencia számításánál ezt elhanyagolhatjuk.

Rezonancia tehát akkor lép fel, ha a rendszer saját körfrekvenciája megegyezik a gerjesztő körfrekvenciával, azaz:

$$\alpha \approx \alpha_0 = \omega ,$$

$$\alpha \approx \frac{1}{m c} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-4}}} \Rightarrow 140 \left[1/\text{s} \right].$$

Mivel

$$\alpha < \omega = 210 \text{ 1/s} ,$$

rezonancia nem lép fel az üzemi fordulatszámon.

IV. ANYAGI PONTRENDSZER MOZGÁSA

Bármely anyagi testet három – egymásra páronként merőleges helyzetű – síksorral részecskékre bonthatunk. Ha ezek méretei a test méreteihez képest elhanyagolhatóan kicsinyek, *anyagi pont*-nak tekinthetők, összességük pedig *anyagi pontrendszert* alkot. Vizsgálható azonban egymástól különálló testek rendszere is, mint anyagi pontrendszer, pl. akkor, ha az egyes testek anyagi pontnak vehetők. (lásd III. fejezet és IV. fejezet 2.2. pont).

1. Anyagi pontrendszer kinematikája

Anyagi pontrendszer mozgásviszonyait az egyes pontok mozgásviszonyainak meghatározásával tehetjük ismertté. Az egyes pontok mozgásviszonyainak leírását pedig a III. fejezetben leírtak szerint végezhetjük el.

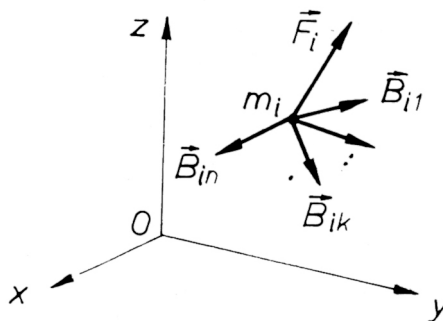
2. Anyagi pontrendszer kinetikája

2.1. BELSŐ ÉS KÜLSŐ ERŐK

A pontrendszert alkotó anyagi pontok mechanikai kölcsönhatásban állnak egymással, valamint más – a rendszeren kívüli – anyagi testekkel. Az anyagi testek mechanikai kölcsönhatása eredményeképpen pedig mindig *erők* lépnek fel (III. fejezet 2.1. pont).

Vizsgáljuk most meg az n anyagi pontból álló rendszer tetszőlegesen választott, m_i tömegű i -edik elemére ható erőket (48. ábra).

48. ábra



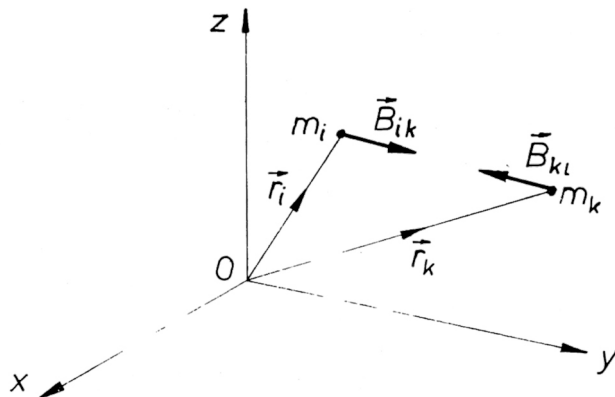
A rendszer többi elemének hatásaként jelentkeznek a $\vec{B}_{i1}, \vec{B}_{i2}, \dots, \vec{B}_{ik}, \dots, \vec{B}_{in}$

jelű *belső* erők, ahol az első index azon anyagi pont sorszáma, amelyre az erők hatnak, a második index azon anyagi pont sorszáma, amely a hatást kifejti. Az i -edik anyagi pontra ható belső erők száma $n-1$, hiszen $i = k$ nem jöhet számításBA

Jelentkeznek még a rendszeren kívüli testek által az i -edik anyagi pontra kifejtett *külső erők*, melyek eredőjét jelöli: \vec{F}_i .

Vizsgáljuk meg a pontrendszer i -edik és k -edik anyagi pontja között fellépő \vec{B}_{ik} és \vec{B}_{ki} belső erőket (49. ábra)!

49. ábra



Ezen erők Newton III. törvénye értelmében egyenlő nagyságúak, ellentétes irányítottaságúak és egy egyenesre esnek, vagyis

$$\vec{B}_{ik} + \vec{B}_{ki} = \vec{0} ,$$

valamint pl. az 0 pontra számított nyomatékaik összege:

$$\vec{r}_i \times \vec{B}_{ik} + \vec{r}_k \times \vec{B}_{ki} = \vec{r}_i \times \vec{B}_{ik} + \vec{r}_k \times (-\vec{B}_{ik}) = (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{B}_{ik} = \vec{0} ,$$

mivel

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \parallel \vec{B}_{ik} .$$

2.2. SÚLYPONTTÉTEL

Írjuk fel a rendszer m_i tömegű, i -edik anyagi pontjára az impulzustételt (48. ábra)!

$$\dot{\vec{I}}_i = \vec{F}_i + \sum_k \vec{B}_{ik}$$

Mivel

$$\dot{\vec{I}}_i = (m_i \vec{v}_i)' = m_i \dot{\vec{v}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i ,$$

kapjuk az

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_k \vec{B}_{ik}$$

alakú mozgásegyenletet, amely leírja az anyagi pont mozgását. Ezen vektoregyenletet valamennyi pontra felírva, az erők időfüggésének ismeretében a pontok mozgását ismertnek tekinthetjük.

A valóságban azonban a *belső erőket ritkán ismerjük*. Célszerű lenne olyan egyenleteket keresni, amelyekből az anyagi pontrendszer mozgására nézve bizonyos következtetéseket le tudnánk vonni a belső erők ismerete nélkül is.

Írjuk fel valamennyi pontra az impulzustételt, majd adjuk össze az egyenleteket!

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{I}}_1 &= \vec{F}_1 + \sum_k \vec{B}_{1k} \\
 \dot{\vec{I}}_2 &= \vec{F}_2 + \sum_k \vec{B}_{2k} \\
 &\vdots \\
 \dot{\vec{I}}_i &= \vec{F}_i + \sum_k \vec{B}_{ik} \\
 &\vdots \\
 \dot{\vec{I}}_n &= \vec{F}_n + \sum_k \vec{B}_{nk}
 \end{aligned}$$

$$\sum_i \dot{\vec{I}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_k \vec{B}_{ik}$$

A $\sum_i \sum_k \vec{B}_{ik}$ kifejezés az összes belső erők összege. Mint a IV.2.1. pontban láttuk, ezek párosával kiejtik egymást:

$$\vec{B}_{ik} + \vec{B}_{ki} = \vec{0} ,$$

tehát

$$\sum_i \sum_k \vec{B}_{ik} = \vec{0} .$$

Bevezetve még a *rendszer mozgásmennyiségvektorának* fogalmát:

$$\vec{I} = \sum_i \vec{I}_i ,$$

amelyből mindkét oldal idő szerinti differenciálásával

$$\dot{\vec{I}} = \sum_i \dot{\vec{I}}_i$$

adódik, valamint az

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

jelölést, kapjuk az anyagi pontrendszer impulzustételének differenciális alakját:

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F} . \quad (1)$$

Vagyis az anyagi pontrendszer mozgásmennyiségének idő szerinti első differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható összes *külső* erő eredőjével. Az integrális alak a III. 2. 3. 1. pontban leírtakhoz hasonlóan értelmezhető.

Vizsgáljuk meg a rendszer I mozgásmennyiségét! Az értelmezés, valamint ismert összefüggések alapján:

$$\vec{I} = \sum_i \vec{I}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \dot{\quad} . \quad (2)$$

A Statikából ismeretes, hogy az anyagi pontrendszer súlypontjának helyvektora

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i G_i \vec{r}_i}{\sum_i G_i} .$$

Amennyiben a rendszer elemeire nézve a nehézségi gyorsulás állandónak tekinthető, a súlypont egybeesik a tömegközépponttal, hiszen

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i g m_i \vec{r}_i}{\sum_i g m_i} = \frac{g \sum_i m_i \vec{r}_i}{g \sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} .$$

Ebből

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{r}_s \sum_i m_i = m \vec{r}_s , \quad (3)$$

$$m = \sum_i m_i$$

a rendszer teljes tömege.

A (3) összefüggést (2)-be helyettesítve kapjuk az *első súlyponttételt*:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{I}} &= \sum_i m_i \vec{v}_i = (m\vec{r}_S) \dot{} = m\vec{v}_S, \\ \sum_i m_i \vec{v}_i &= m\vec{v}_S. \end{aligned} \quad (4)$$

Tehát az *anyagi pontok mozgásmennyiségvektorainak összege* ($\sum_i m_i \vec{v}_i$) *akkora, mint a súlypontba koncentrálva gondolt és a súlypont sebességével haladó teljes tömeg mozgásmennyiségvektora* ($m\vec{v}_S$).

Ezen eredményünket beírva a pontrendszer impulzustételébe, nyerjük a *második súlyponttételt*:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{I}} &= (m\vec{v}_S) \dot{} = m\vec{a}_S = m\ddot{\vec{r}}_S = \vec{F}, \\ m\ddot{\vec{r}}_S &= \vec{F}. \end{aligned} \quad (5)$$

Az anyagi pontrendszer súlypontja úgy mozog, mintha az összes külső erő a rendszer súlypontba koncentrálva gondolt tömegére hatna. Ez azt jelenti, hogy egy térbeli kiterjedéssel rendelkező test súlypontjának a mozgását az *anyagi pont mozgásánál* leírtak szerint meg lehet határozni. Ha a test valamennyi pontjának sebességfüggvénye azonos a súlypontéval, úgy a *test mozgását* is helyesen leírhatjuk, ha – a test méreteitől függetlenül – azt anyagi pontnak tekintjük (lásd pl. 17. feladat).

2.3. PERDÜLETTÉTEL

Írjuk fel a rendszer elemeire nézve az álló 0 pontra vonatkoztatott perdülettételt, majd – a belső erőket kiküszöbölendő – adjuk össze az egyenleteket (48. ábra)!

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\mathcal{H}}}_{O1} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \sum_k \vec{r}_1 \times \vec{B}_{1k}, \\ \dot{\vec{\mathcal{H}}}_{O2} &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \sum_k \vec{r}_2 \times \vec{B}_{2k}, \\ &\vdots \\ \dot{\vec{\mathcal{H}}}_{Oi} &= \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_k \vec{r}_i \times \vec{B}_{ik}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\pi}}_{O_n} &= \vec{r}_n \times \vec{F}_n + \sum_k \vec{r}_n \times \vec{B}_{nk} \quad , \\ \hline \sum_i \dot{\vec{\pi}}_{O_i} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{B}_{ik} \quad . \end{aligned}$$

A $\sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{B}_{ik}$ kifejezés az összes belső erők 0 pontra számított nyomatékának összege.

Mint a IV. 2. 1. pontban láttuk, ezek párosával kiejtik egymást:

$$\vec{r}_i \times \vec{B}_{ik} + \vec{r}_k \times \vec{B}_{ki} = \vec{0} \quad ,$$

tehát

$$\sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{B}_{ik} = \vec{0} \quad .$$

Bevezetve még a rendszer 0 pontra számított *perdületvektorának* fogalmát:

$$\vec{\pi}_O = \sum_i \vec{\pi}_{O_i} \quad ,$$

amelyből mindkét oldal idő szerinti differenciálásával

$$\dot{\vec{\pi}}_O = \sum_i \dot{\vec{\pi}}_{O_i}$$

adódik, valamint az

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{M}_{O_i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

jelölést, kapjuk az anyagi pontrendszer perdülettételét:

$$\dot{\vec{\pi}}_O = \vec{M}_O \quad . \quad (6)$$

Az anyagi pontrendszer 0 pontra számított perdületének idő szerinti első differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható összes külső erő 0 pontra számított nyomatékával.

A perdülettétel nemcsak pontra, hanem egy tetszőleges t tengelyre is felírható

$$\dot{\vec{\pi}}_t = \vec{M}_t \quad . \quad (7)$$

Az ebben az esetben skaláris egyenlet formáját öltő tétel az előzőhöz hasonlóan fogalmazható meg (III. fejezet 2.3.2. pont).

Az integrális alakot szintén a III. fejezet 2.3.2. pontban leírtak szerint értelmezhetők.

2.4. MUNKATÉTEL

Írjuk fel a pontrendszer m_i tömegű i -edik elemére a munkatétel differenciális alakját! (lásd III. fejezet 2.3.3.)

$$\dot{E}_i = P_i \quad ,$$

ahol

$$E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

az i -edik anyagi pont mozgási energiája és

$$P_i = \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i + \vec{v}_i \cdot \sum_k \vec{B}_{ik}$$

a pontra ható *külső és belső erők teljesítménye* (48. ábra).

A rendszer minden elemére felírva a munkatételt és ezeket összegezve, a

$$\sum_i \dot{E}_i = \sum_i P_i$$

egyenletet kapjuk.

Bevezetjük a rendszer mozgási energiájának fogalmát:

$$E = \sum_i E_i \quad ,$$

amelynek idő szerinti differenciálásával

$$\dot{E} = \sum_i \dot{E}_i$$

adódik, valamint a

$$P = \sum_i P_i = P_b + P_k$$

jelölést, ahol P_b és P_k jelenti a pontrendszerre ható összes belső, ill. külső erők teljesítményét, kapjuk a rendszerre vonatkozó munkatétel differenciális alakját:

$$\dot{E} = P_b + P_k \quad .$$

Az anyagi pontrendszer mozgási energiájának idő szerinti első differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható összes külső és belső erők teljesítményének összegével.

Amennyiben a tétel integrális formáját írjuk fel az i -edik anyagi pontra, valamely t_1, t_2 időintervallumot vizsgálva, kapjuk, (lásd III. 2.2.3.)

$$E_2^{(i)} - E_1^{(i)} = W_{12}^{(i)},$$

ahol $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$ az anyagi pont mozgási energiáját jelöli a kezdeti (t_1), ill. a végső (t_2) időpontban, $W_{12}^{(i)}$ pedig az anyagi pontra ható összes, külső és belső erők munkája a vizsgált időintervallumban. Ha a rendszer minden elemére felírjuk a munkatételt és ezeket összegezzük, az

$$E_2 - E_1 = W_{12} = W_{12}^{(b)} + W_{12}^{(k)}$$

egyenletet, a pontrendszer munkatételét nyerjük.

E szerint, az anyagi pontrendszer mozgási energiájának megváltozása – a mozgás valamely szakaszán – egyenlő a rendszerre ható összes külső és belső erők ezen szakaszon kifejtett munkájának ($W_{12}^{(b)}$, és $W_{12}^{(k)}$) összegével.

2.5. A NEWTON-FÉLE TÖRVÉNYEK KITERJESZTÉSE

Newton törvényei anyagi pontra vonatkoznak. (Az általa használt „test” fogalmán „anyagi pontot” kell érteni). A mechanikában azonban olyan általános elveket akarunk felépíteni, amelyek alkalmazhatók bármilyen anyagi pontrendszer tetszőleges mozgására. Ezen elveket fejezik ki az *impulzus-, a perdület- és a munkatétel.*

Az anyagi pontra vonatkoztatott impulzus- és perdülettel egyenértékűnek tekinthető a Newton-féle mozgástörvénnyel (a II. törvénnyel). Newton I. törvénye arra a speciális esetre vonatkozik, amikor az anyagi pontra egyensúlyi erőrendszer hat. Az anyagi pontrendszer mozgás-egyenletét a Newton-törvények helyett megfogalmazott impulzustétel (vagy a vele ekvivalens első és második súlyponttétel) és a perdülettel adják. (2.2. és 2.3. pont)

Vizsgáljuk itt is meg azt a speciális esetet, amikor a pontrendszerre ható külső erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak!

Ekkor az erők eredője, valamint bármely pontra számított nyomatéka zérus:

$$\vec{F} = \vec{0}, \quad \vec{M}_O = \vec{0}.$$

Tehát az

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}, \quad \text{ill.} \quad \dot{\vec{\mathcal{H}}}_O = \vec{M}_O$$

tételek a következő alakot öltik:

$$\dot{\vec{I}} = \vec{0}, \quad \text{ill.} \quad \dot{\vec{\mathcal{H}}}_O = \vec{0},$$

amelyből integrálással $\vec{I} = m\vec{v}_S = \text{állandó}$, ill. $\vec{\mathcal{H}}_O = \text{állandó}$ következik.

Vagyis egyensúlyi erőrendszer hatása alatt

- az anyagi pontrendszer mozgásmennyisége az időben állandó.
- az anyagi pontrendszer perdülete az álló 0 pontra vonatkoztatva az időben állandó.

Az előbbi a mozgásmennyiség-megmaradás, az utóbbi a perdületmegmaradás tétele.

Az első tételből következik az is, hogy az egyensúlyi erőrendszer hatása alatt álló anyagi pontrendszer súlypontjának sebességvektora, $\vec{v}_S = \text{áll.}$, vagyis ezen súlypont egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez.

A második tételből ilyen egyszerű, szemléletes következtetést levonni nem lehet.

2.6. A STATIKA ALAPTÖRVÉNYE

A statika a tartós nyugalomban lévő anyagi testekkel foglalkozik, vagyis azokkal, amelyek pontjainak sebessége a véges (t_1, t_2) időszakasz minden időpontjában zérus.

Mivel – mint láttuk – az anyagi testek anyagi pontrendszerként is felfoghatók, a statika alaptörvényei levezethetők a pontrendszer mozgásegyenleteiből; az impulzus- és a perdülettételből:

$$\vec{I} = \vec{F} ; \quad \vec{\mathcal{H}}_O = \vec{M}_O .$$

Ha a rendszer elemei nyugalomban vannak, fennáll az

$$\vec{I} = \vec{0} ; \quad \text{ill.} \quad \vec{\mathcal{H}}_O = \vec{0}$$

összefüggés, és ha ezen nyugalom tartós, akkor

$$\dot{\vec{I}} = \vec{0} ; \quad \text{ill.} \quad \vec{\mathcal{H}}_O = \vec{0}$$

is igaz. Ezek szerint a tartós nyugalomban lévő anyagi pontrendszerre felírt impulzus- és perdülettétel az

$$\vec{F} = \vec{0} ; \quad \vec{M}_O = \vec{0}$$

alakot ölti.

Az anyagi pontrendszer tehát akkor lehet tartós nyugalmi állapotban, ha a rá ható külső erőrendszer eredője, valamint egy tetszőleges pontra számított nyomatéka zérus. (A nyugalom szükséges, de – mint a IV. 2. 5. pontban láttuk – nem elégséges feltétele). Ez a statika alaptörvénye.

2.7. PÉLDÁK AZ ANYAGI PONTRENDSZERRE FELÍRT TÉTELEK ALKALMAZÁSÁRA

a) Milyen mozgást végezhet az a test, amelyre külső erőként egyedül a súlyerő hat?

Az anyagi pont ilyen körülmények között – általánosan – ferde hajítást végez, parabola alakú pályán halad. Most az anyagi test mozgását vizsgáljuk oly módon, hogy azt – a IV. fejezet bevezetésében említett módon – anyagi pontrendszernek fogjuk fel.

Ekkor a második súlyponttétel értelmében elmondhatjuk, hogy a *test súlypontja* parabola pályán fog mozogni. Parabolát ír le tehát az elrugaszkodás után az ugró ember, vagy állat súlypontja; az eldobott, vagy elrúgott labda, az elhajított gerely súlypontja. Az ugró ember súlypontjának pályáját az elugrás után belső erővel megváltoztatni nem tudja, csak az egyes testrészek egymáshoz viszonyított helyzetét módosíthatja.

Földi körülmények között azonban az elhajított tárgyra légellenállásból származó erő is hat, amely függ a test felületének nagyságától, alakjától és a felületi pontok sebességétől.

Emiatt a testek súlypontjának pályája eltér a parabolától. A légellenállásból származó erőnek a felületi pontok sebességétől való függésére mutat pl. az egyszerűen elrúgott labda és az ún. „csavart” labda (vagyis a saját tengelye körül gyorsan pörgő labda) pályái között észlelhető eltérés.

b) Milyen mozgást végezhet a súlytalanság állapotában lévő ember, ha kezdetben nyugalomban volt?

Amennyiben külső erők nem hatnak egy testre (pontrendszerre), az impulzustétel ill. a perdület-tétel integrális alakjából

$$\vec{I} - \vec{I}_0 = \vec{0}; \quad \text{ill.} \quad \vec{\mathcal{H}}_0(t) - \vec{\mathcal{H}}_0(t_0) = \vec{0}$$

adódik, amelyből

$$\vec{I} = m\vec{v}_S = \vec{0}; \quad \text{ill.} \quad \vec{\mathcal{H}}_0(t) = \vec{0}$$

következik, hiszen jelen esetben feltételeztük a kezdeti t_0 időpontbeli nyugalmi állapotot, azaz

$$\vec{I}_0 = \vec{0} \quad \text{és} \quad \vec{\mathcal{H}}_0(t_0) = \vec{0} \quad \text{feltételek teljesülését.}$$

A fentieket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az ember súlypontja helyben kell, hogy maradjon ($\vec{v}_S = \vec{0}$), ill. a test pontjainak mozgásmennyiségei zérus perdületet kell, hogy adjanak bármely térbeli pontra és tengelyre is ($\vec{\mathcal{H}}_0 = \vec{0}; \quad \mathcal{H}_n = 0$). Ha tehát a súlytalanság álla-

potában az ember pl. karját kinyújtja egy irányban, belső erőt fejt ki, testének más részei ellentétesen fognak elmozdulni és így biztosítják a súlypont változatlan helyét.

Ha karjával körözni kezd egy kúpfelületet leírva – és így a kar pontjainak mozgásmennyiségei nyomatékot (percitiletet) adnak a kúp tengelyére –, testének más részei olyan mozgásba kénytelenek jönni, hogy ezen pontoknak a kúp tengelyére vett perdülete ugyanakkora, de ellentétes értelmű legyen, mint a kar pontjaié.

3. Anyagi pontrendszer lengőmozgása

Ezzel a kérdéssel az alkalmazásoknál a VII.3–4. fejezetben foglalkozunk. Ugyanis a rugalmas testeket – ezen fejezet bevezetésében említett módon – anyagi pontrendszerre bontjuk, és ezek kölcsönhatását a test rugalmas tulajdonsága alapján határozzuk meg.

V. MEREV TEST MOZGÁSA

Merevnek nevezzük a testet akkor, ha mozgás közben pontjainak egymástól mért távolsága nem változik, vagyis ha $|\vec{r}_{AB}| = \text{áll}$ (50. ábra).

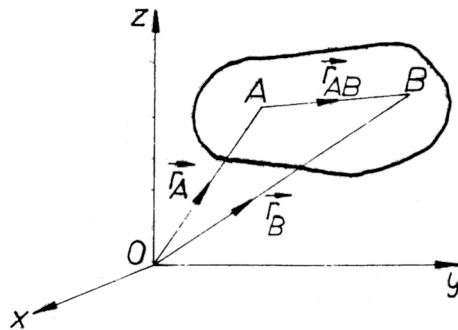
1. A merev test kinematikája

A merev test kinematikájának feladata a merev test mozgásának leírása.

A merev test mozgása akkor tekinthető kinematikailag tisztázottnak, ha ismerjük minden egyes pontjának $\vec{r}_i(t)$ mozgástörvényét, vagyis bármely időpillanatban, bármelyik pontjának vala-

mennyi kinematikai jellemzőjét. A következő pontban részletezzük, hogy ennek egyértelmű meghatározásához hány, és milyen adat szükséges. Ez előtt azonban ismerkedjünk meg két fogalommal, a mozgástörvény és a mozgásállapot fogalmával.

50. ábra



Az anyagi pontnál értelmezettekhez hasonlóan a merev test egy pontjának mozgástörvényén ezen pont helyvektorának [pl. $\vec{r}_A(t)$] időbeli változását értjük. A merev test mozgás-

állapotán pedig a merev test valamennyi pontjának egy adott, rögzített időpillanatbeli helyzetét, ill. sebességvektorainak vagy gyorsulásvektorainak összességét értjük.

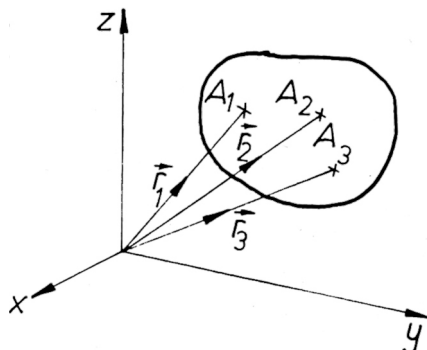
A merev test egy pontjának (pl. súlypontnak) mozgástörvénye ugyanúgy vizsgálható, mint ahogyan azt az anyagi pontnál meghatároztuk, ezért ebben a fejezetben ezt nem részletezzük. A merev test mozgásállapotának vizsgálatához a merev test adott időpontbeli helyzetében meghatározzuk a merev test minden pontjának sebességvektorát (sebességállapot) és gyorsulásvektorát (gyorsulásállapot).

1.1. A MEREV TEST MOZGÁSÁLLAPOTÁNAK VIZSGÁLATA

1.1.1. A merev test helyzetének megadása, szabadságfok

A merev test térbeli helyzetét három, nem egy egyenesen fekvő pontjának (A_1, A_2, A_3) helyvektorára egyértelműen meghatározza (51. ábra). Ez hat egymástól független adatot jelent (lásd Statika c. tárgy). A merev test mozgásának szabadságfoka tehát térben hat.

51. ábra



1.1.2. A merev test elmozdulásai

A merev test egyik helyzetéből egy másik helyzetbe többféle mozgással jutunk el. A test elmozdulását a kezdeti és a végső helyzetével adjuk meg. A merev test bármilyen elmozdulása egy translációra (eltolódás) és egy rotációra (elfordulás) bontható.

1. Transzlációnak nevezzük az elmozdulást, ha a test a kezdeti helyzetből a végső helyzetbe úgy kerül, hogy minden pontjának elmozdulása egyenlő nagy és azonos irányú ($\vec{r}_A = \vec{r}_B = \text{áll.}$)

2. Rotációnak nevezzük az elmozdulást, ha mozgás közben a testnek legalább két pontja nyugalomban marad; a két pontot összekötő vonalat a rotáció tengelyének nevezzük. A mozgás a két pontot összekötő tengely körüli forgás.

1.1.3. A merev test sebességállapota

A merev test sebességállapota ismertnek vehető, ha meghatároztuk egy adott időpillanatban valamennyi pontjának sebességvektorát. Nézzük meg milyen adatok ismerete szükséges, hogy valamennyi pont sebességvektora meghatározható legyen. Tegyük fel, hogy ismerjük a merev test A pontjának sebességét (\vec{v}_A) és a III. fejezet 1.2.2. pontja szerint értelmezett szögsebességét

($\vec{\omega}_A$) ezen A pont, mint középpont körül. Így a mozgást itt is felbontottuk, egy \vec{v}_A -val jellemzett translációra és egy $\vec{\omega}_A$ jellemzett A körüli rotációra.

Az 1.1.2. szerint bármilyen mozgás így felbontható (52. ábra).

A B pont elemi elmozdulása dt idő alatt a translációból:

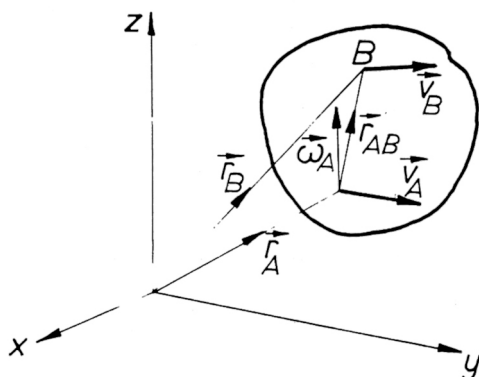
$$d\vec{r}_{B1} = d\vec{r}_A ,$$

és rotációból

$$d\vec{r}_{B2} = (\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AB}) dt$$

III. fejezet (13) összefüggés alapján adódik.

52. ábra



Így az egész elmozdulás:

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + (\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AB}) dt .$$

Ebből

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AB} .$$

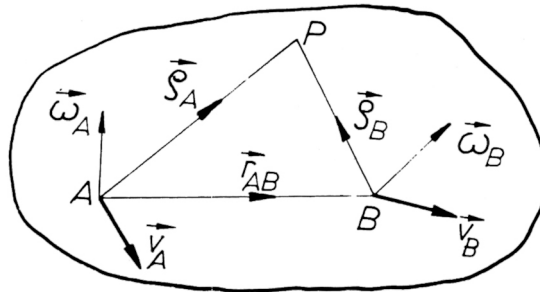
Vagyis

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AB} .$$

Az A pont körüli rotáció $\vec{\omega}_A$ szögsebességvektorával jellemezhető minden pont körüli elfor-

dulás is. Ez abból következik, hogy a test tetszőleges P pontjának sebességére ugyanazt az értéket kell kapni, akármelyik vonatkoztatási pontból indulunk is ki (53. ábra).

53. ábra



Írjuk fel a P pont sebességét A, majd B pontot véve vonatkoztatási pontnak

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{S}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{S}_B ,$$

de

$$\vec{S}_A = \vec{r}_{AB} + \vec{S}_B ,$$

tehát

$$\vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_A \times \vec{S}_B = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{S}_B .$$

Ugyanakkor az előzőek szerint

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AB}$$

és így marad, hogy

$$\vec{\omega}_A \times \vec{S}_B = \vec{\omega}_B \times \vec{S}_B .$$

Ez pedig \vec{S}_B tetszőleges értékénél csak akkor lehet igaz, ha

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B . \quad (1)$$

Így a merev test tetszőleges B pontjának sebességét a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (1a)$$

Itt az $\vec{\omega}$ az egész merev testre jellemző rotáció (forgás) szögsebessége egy meghatározott időpillanatban, ezért ezt a pillanatnyi forgás szögsebességének nevezzük.

Tehát a merev test sebességállapotának ismeretéhez egy pontja pillanatnyi \vec{v}_A sebességének és a merev testre jellemző pillanatnyi $\vec{\omega}$ szögsebességnek ismerete elegendő.

1.1.4. Merev test gyorsulásállapota

A merev test gyorsulásállapota ismertnek vehető, ha meghatároztuk egy adott pillanatban valamennyi pontjának gyorsulását.

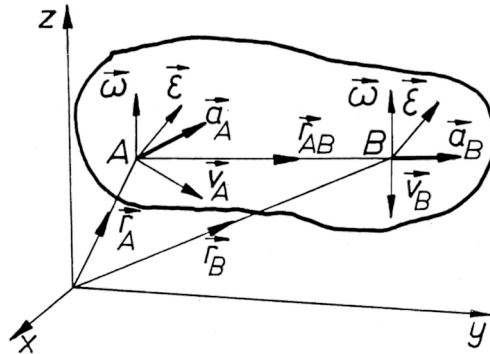
Tegyük fel, hogy ismerjük a merev test A pontjának mozgásjellemzőit (54. ábra), és keressük B pontjának gyorsulását.

A merev test A és B pontjának sebességei közti kapcsolat (1a) összefüggését az idő szerint deriválva:

$$\dot{\vec{v}}_B = \vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{AB} ,$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{AB} .$$

54. ábra



Figyelembe véve, hogy B pont A-hoz viszonyított \vec{v}_{AB} sebessége a rotációból adódik:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}). \quad (2)$$

Itt $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ III. fejezet 1.2.2. pontjában értelmezett szöggyorsulásvektor azzal a különbséggel, hogy általános mozgás esetén $\vec{\omega}$ nem kell, hogy $\vec{\varepsilon}$ -val párhuzamos legyen.

Mint látjuk az A vonatkoztatási ponthoz kötött \vec{a}_A , $\vec{\omega}$ és $\vec{\varepsilon}$ meghatározzák a tetszőleges B pont gyorsulását, s így – mivel B tetszőleges – a merev test gyorsulásállapotát. Az előzőekben láttuk, hogy $\vec{\omega}$ független a vonatkoztatási pont választásától. Ugyanez áll az $\vec{\varepsilon}$ szöggyorsulásvektorra is.

Míg a merev test sebességállapotát vektorkettős \vec{a}_A ; $\vec{\omega}$, addig gyorsulásállapotát vektorhármassal $(\vec{a}_A; \vec{\omega}; \vec{\varepsilon})$ határozza meg.

1.2. A MEREV TEST PILLANATNYI MOZGÁSAI ÉS A VÉGES MOZGÁS

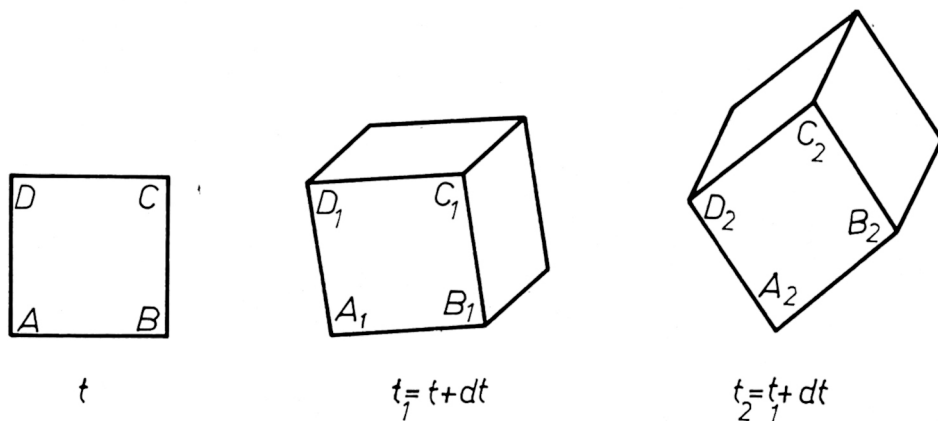
A merev test véges időn keresztül tartó mozgásait *véges mozgásnak* nevezzük, amely nem más, mint igen rövid dt időn keresztül tartó ún. *elemi mozgások* sorozata. Az 1.2.1. pontban részletezettek szerint négyféle elemi mozgást különböztethetünk meg, melyek sorrendjétől és idejétől függően a véges mozgások száma nem korlátozott. A legfontosabb véges mozgásokat az 1.2.3. pontban tárgyaljuk.

1.2.1. A pillanatnyi (elemi) mozgás

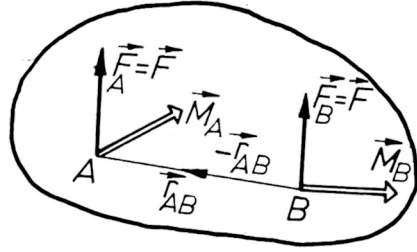
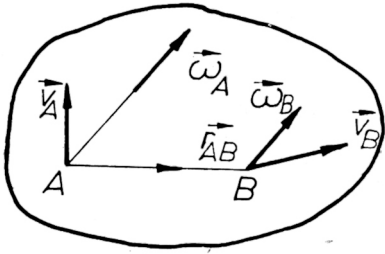
A merev test véges ideig tartó mozgásának vizsgálatához a mozgást dt időn keresztül tartó szakaszokra bontjuk szét. Egy-egy ilyen dt időn keresztül tartó mozgásszakaszt elemi mozgásnak nevezünk, (55. ábra).

Hogy a merev test elemi mozgásait könnyebben megértsük, használjuk fel a statikában tanult, erőrendszerek redukálására vonatkozó, matematikai ismereteinket. A merev test kinematikai és erőtani (dinamikai) viselkedésének egyértelmű meghatározását a matematikai összehasonlíthatóság érdekében egymás mellett összefoglaljuk az alábbiakban (56. ábra).

55. ábra



56. ábra



A merev test általános mozgásállapotát (sebességállapotát) az 1.1.3. pont szerint egy pontjának sebességvektora \vec{v}_A és a merev test $\vec{\omega}_A$ szögsebességvektora egyértelműen meghatározza. A sebességállapot egy B pont \vec{v}_B sebességvektorával és $\vec{\omega}_B$ szögsebességvektorával

is meghatározható. Ezen jellemzők közötti összefüggés (1) és (1a) szerint:

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A = \vec{\omega},$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

A merev testre ható általános erőrendszer helyettesíthető a statikában tanultak szerint egy pontban működő \vec{F}_A erővel és \vec{M}_A erőpárral (redukció). Ugyanakkor helyettesíthető egy másik B pontba redukált \vec{F}_B és \vec{M}_B vektorkettőssel is. Ezen jellemzők közötti összefüggés:

$$\vec{F}_B = \vec{F}_A = \vec{F},$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F},$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A - \vec{F} \times \vec{r}_{BA},$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}.$$

Látható tehát a teljes *matematikai analógia*, ha az $\vec{\omega}$ -t az \vec{F} -nak, \vec{v} -t pedig az \vec{M} -nak feleltetjük meg:

$$\vec{\omega} \doteq \vec{F},$$

$$\vec{v} \doteq \vec{M}.$$

Ennek alapján \vec{v} úgy értelmezhető, mint $\vec{\omega}$ -nak valamely pontra számított nyomatéka.

Az $\vec{\omega}_A$ és \vec{v}_A ismeretében $\vec{\omega}_A$ és \vec{v}_A egymáshoz viszonyított értéke alapján meghatározhatók a merev test azon pontjai, melyek mozgásjellemezőivel a legegyszerűbben definiálhatjuk a merev test mozgásállapotát.

Az \vec{F}_A és \vec{M}_A ismeretében az \vec{F}_A és \vec{M}_A egymáshoz viszonyított értékei alapján meghatározható az erőrendszer eredője, azaz a legegyszerűbb egyenértékű erőrendszer.

A következő esetek fordulhatnak elő:

a) pillanatnyi nyugalom

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{0}, \\ \vec{\omega}_A &= \vec{0},\end{aligned}$$

vagyis a merev test nyugalomban van.

b) elemi haladás

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &\neq \vec{0}, \\ \vec{\omega}_A &= \vec{0}, \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AB} = \vec{v}_A,\end{aligned}$$

azaz a merev test minden pontjának pillanatnyi sebessége azonos.

c) elemi forgás

$$\alpha), \begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{0}, \\ \vec{\omega}_A &\neq \vec{0}.\end{aligned}$$

Az $\vec{\omega}_A$ hatásvonalán levő B pont (57. ábra)

\vec{v}_B sebessége:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AB},$$

$$\vec{v}_B = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$

mivel $\vec{\omega}_A \parallel \vec{r}_{AB}$

a) egyensúlyi erőrendszer

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \vec{0}, \\ \vec{F}_A &= \vec{0}\end{aligned}$$

vagyis a merev testet terhelő erőrendszer egyensúlyban van.

b) erőrendszer eredője: erőpár

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &\neq \vec{0}, \\ \vec{F}_A &= \vec{0},\end{aligned}$$

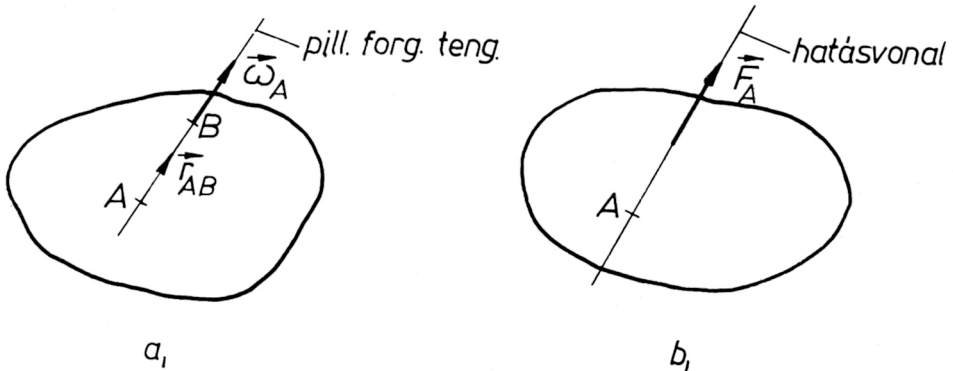
Az erőpár önmagával párhuzamosan bárhová eltolható.

c) erőrendszer eredője: egyetlen erő

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \vec{0}, \\ \vec{F}_A &\neq \vec{0}.\end{aligned}$$

A hatásvonal pontjaira számított nyomaték zérus.

57. ábra



Tehát a merev test, $\vec{\omega}_A$ hatásvonalán lévő bármely pontjának sebessége zérus. Ezen pontok összességét pillanatnyi forgástengelynek nevezzük.

Az erő a hatásvonalán eltolható.

$$\beta) \quad \vec{v}_A \neq \vec{0},$$

$$\vec{\omega}_A \neq \vec{0}, \quad \text{de} \quad \vec{v}_A \perp \vec{\omega}_A.$$

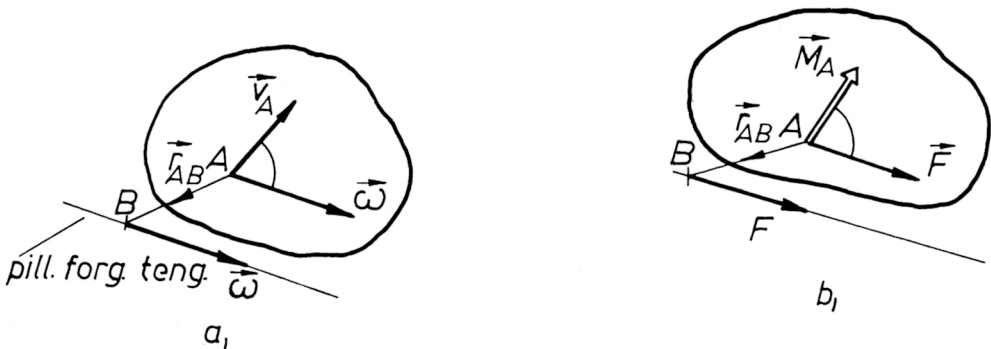
$$\beta) \quad \vec{M}_A \neq \vec{0},$$

$$\vec{F} \neq \vec{0}, \quad \text{de} \quad \vec{M}_A \perp \vec{F}.$$

A merev testnek van egy $\vec{\omega}$ -val párhuzamos egyenese, mely pontjainak pillanatnyi sebessége zérus. Ez lesz a pillanatnyi forgástengely, de ez nem megy át az A ponton (58.a. ábra).

Az erőrendszer eredője egy erő, de annak hatásvonala nem megy át az A ponton. (58.b. ábra).

58. ábra



d) elemi csavarmozgás

$$\alpha) \vec{\omega}_A \neq \vec{0},$$

$$\vec{v}_A \neq \vec{0},$$

de $\vec{v}_A \parallel \vec{\omega}_A$.

Az $\vec{\omega}_A$ hatásvonalán lévő pontok sebessége

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AC} = \vec{v}_A,$$

mivel $\vec{r}_{AB} \parallel \vec{\omega}_A$.

Tehát az $\vec{\omega}_A$ hatásvonalán levő pontok sebessége azonos, és $\vec{\omega}_A$ irányú.

d) erőrendszer eredője: erőcsavar

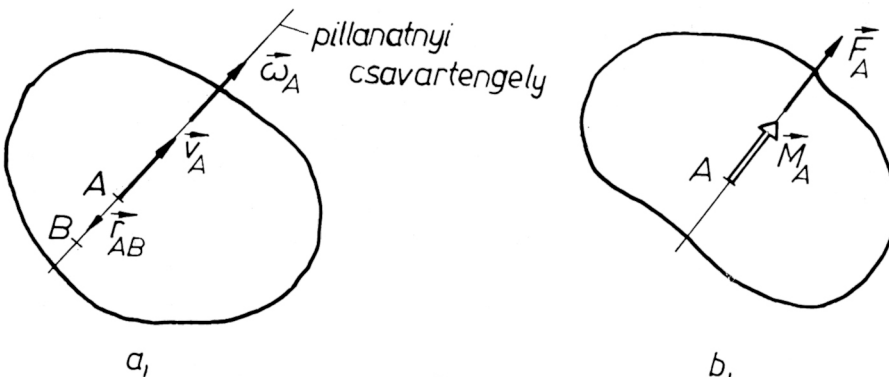
$$\vec{F}_A \neq \vec{0},$$

$$\vec{M}_A \neq \vec{0},$$

de $\vec{M}_A \parallel \vec{F}_A$.

Az erőrendszer eredője: erőcsavar. (59.b. ábra).

59. ábra



Ez a vonal a pillanatnyi csavartengely (59.a. ábra).

$$\beta) \vec{v}_A \neq \vec{0},$$

$$\vec{\omega}_A \neq \vec{0}, \text{ és } \vec{\omega}_A$$

$$\beta) \vec{M}_A \neq \vec{0},$$

$$\vec{F}_A \neq \vec{0}, \text{ és } \vec{M}_A$$

általános helyzetű \vec{v}_A -hoz viszonyítva (60. ábra).

A merev testnek van egy $\vec{\omega}_A$ -ral párhuzamos egyenes, mely pontjainak pillanatnyi

$$|\vec{v}_P| = |\vec{v}_A| \cos \alpha = \vec{v}_{A1}$$

sebessége állandó, és $\vec{\omega}_A$ -ral párhuzamos. Azaz

$$\vec{v}_P = \frac{\vec{\omega}_A}{|\vec{\omega}_A|} |\vec{v}_A| \cos \alpha.$$

Itt α az $\vec{\omega}_A$ és \vec{v}_A vektorok szöge (60. ábra)

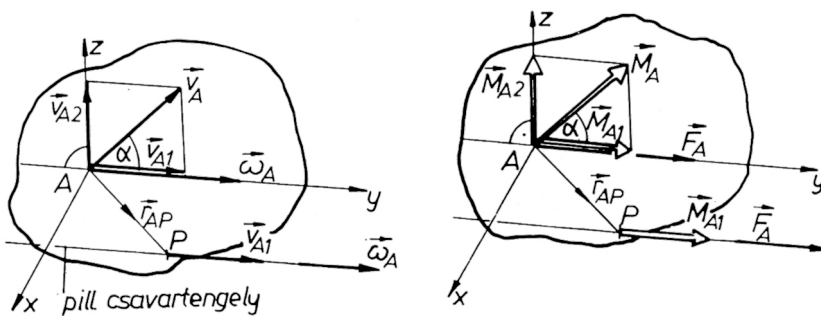
általános helyzetű \vec{F}_A -hoz viszonyítva.

Az erőrendszer eredője egy erőcsavar. Az erőcsavar hatásvonalának egy pontja az A kezdőpontú koordináta-rendszerhez viszonyítva

$$\vec{r}_{AP} = \frac{\vec{F}_A \times \vec{M}_{A2}}{F_A^2}.$$

Jelölések értelmezése a 60. ábrán látható.

60. ábra



Ez az egyenes a pillanatnyi csavartengely, mely egy pontjának A kezdőpontú koordináta-rendszerhez viszonyított helyvektora

$$\vec{r}_{AP} = \frac{\vec{\omega}_A \times \vec{v}_{A2}}{\omega_A^2},$$

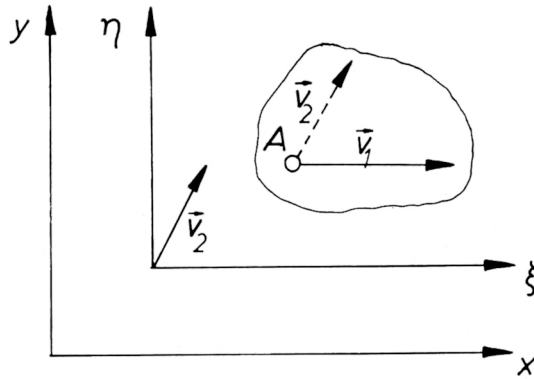
ahol \vec{v}_{A2} vektort a 60. ábrán értelmeztük.

A pillanatnyi mozgás fogalmának bevezetése nagyon jelentős, mert a pillanatnyi elmozdulások a sorrendtől függetlenül összegezhethetők. Véges elmozdulásoknál általában nem ez a helyzet. A véges translációk összegzésekor az eredmény a sorrendtől független, véges elforgások összegzésekor azonban csak akkor, ha ugyanazon tengely körüli elforgatásokat összegezzünk.

1.2.2. Elemi mozgások összetétele (61. ábra)

Elemi mozgások összetételén elemi haladó mozgások és elemi forgások összetételét értjük.

61. ábra



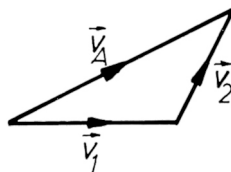
1.2.2.1. Elemi haladó mozgások összetétele

Egy test pontjai a $\xi \cdot \eta$ (mozgó) koordinárendszerhez viszonyítva \vec{v}_1 pillanatnyi sebességgel mozognak, és közben a $\xi \cdot \eta$ koordinárendszer \vec{v}_2 sebességgel szintén haladó mozgást végez.

Ekkor egy nyugvó (x, y) koordinárendszerhez képest az eredő mozgás sebességvektora a mozgások sebességvektorainak összege (62. ábra):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}. \quad (3)$$

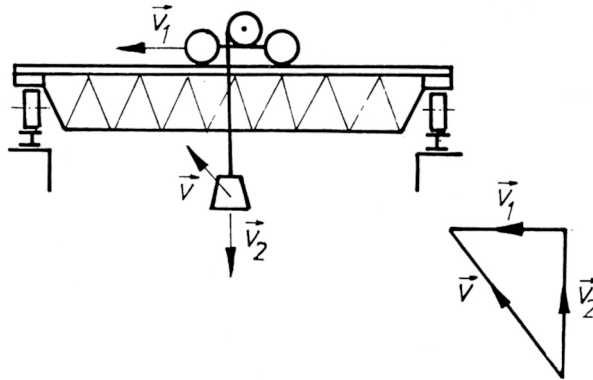
62. ábra



19. feladat:

Elemi haladó mozgások összetételére egy teheremelő szerkezetet vizsgálunk (63. ábra).

63. ábra



Daruhídon a teheremelő macska $\vec{v}_1 = -\vec{i} 0,2$ [m/s] sebességgel halad, ugyanakkor a terhet $\vec{v}_2 = \vec{j} 0,1$ [m/s] sebességgel emeli. Mekkora a teher pillanatnyi sebessége?

A (3) összefüggés szerint

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = -\vec{i} 0,2 + \vec{j} 0,1 \text{ [m/s]}.$$

Abszolút értékben:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,1^2} = 0,224 \text{ [m/s]}.$$

1.2.2.2. Elemi forgások összetétele

Előfordul, hogy a merev test mozgása egyidejű pillanatnyi forgások eredője. Az eredő mozgás pillanatnyi szögsebessége az

$$\vec{\omega} = \sum_i \vec{\omega}_i$$

összefüggéssel határozható meg.

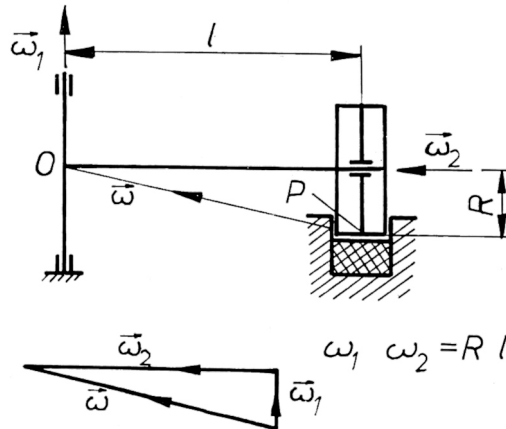
a) *Két egymást metsző tengely körüli elemi forgás összetétele.*

A 64. ábra egy Koller-járat vázlatos rajza. A berendezés $\vec{\omega}_1$ szögsebességgel forog egy függőleges tengely körül, ugyanakkor a rajta levő henger $\vec{\omega}_2$ szögsebességgel forog vízszintes tengely körül. Milyen lesz a henger pillanatnyi mozgása a vázolt helyzetben?

A henger eredő mozgásának szögsebessége:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 .$$

64. ábra



Az $\vec{\omega}$ hatásvonalára átmegy az $\vec{\omega}_1$ és $\vec{\omega}_2$ hatásvonalának 0 metszéspontján. Feltételezzük, hogy a henger alul csúszásmentesen gördül, azaz P pontjának sebessége $\vec{v}_P = \vec{0}$ (részletesen lásd 1.3.4. pontban), ekkor az eredő $\vec{\omega}$ hatásvonalának, mint a pillanatnyi forgástengelynek P-n is keresztül kell mennie. Tehát az ábra alapján, adott $\vec{\omega}_1$ szögsebesség esetén a henger szögsebességének nagysága:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{l}{R} .$$

Az eredő mozgás szögsebességének nagysága pedig:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \omega_1 \frac{\sqrt{R^2 + l^2}}{R} .$$

b) Párhuzamos tengelyek körüli forgás összegezése

R_2 sugarú fogaskerék helytálló R_1 sugarú fogaskeréken gördül le $\vec{\omega}_1$ szögsebességgel (65. ábra).

Mekkora $\vec{\omega}_2$ szögsebességgel forog ugyanekkor az R_2 sugarú fogaskerék saját tengelye körül?

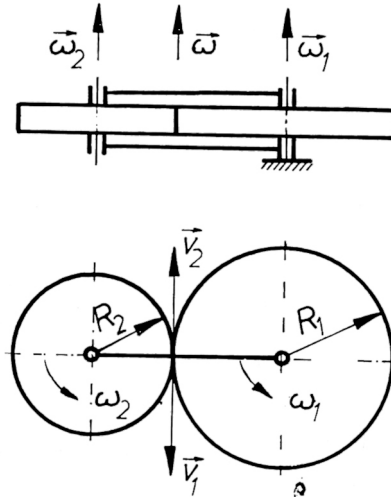
A vizsgált merev test az R_2 sugarú fogaskerék. Ez egyidejűleg kering a nagy kerék körül, azaz

$\vec{\omega}_1$ szögsebességvektora ennek tengelyén megy át. Saját tengelye körüli forgásra jellemző $\vec{\omega}_2$ a keringésértelmem miatt ugyancsak felfelé mutat. Végülis a két párhuzamos szögsebesség

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

összege lesz az eredő pillanatnyi szögsebesség.

65. ábra



Mivel gördüléskor az érintkezési hely sebessége zérus, nincs csúszás az álló kerékhez képest, ezen a ponton kell átmennie az eredő hatásvonalának.

Az érintkezési pont sebessége tehát

$$v = 0 = v_1 - v_2 = R_1 \omega_1 - R_2 \omega_2 \cdot$$

Innen

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2} \omega_1 \cdot$$

1.2.3. Véges mozgások

Csak a gyakorlat számára leglényegesebb véges mozgásokkal foglalkozunk.

a) *Véges haladó mozgás* a merev test legegyszerűbb mozgása.

Mivel $\vec{\omega} = \vec{0}$, bármely időpontban

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A = \vec{v},$$

és

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A = \vec{a},$$

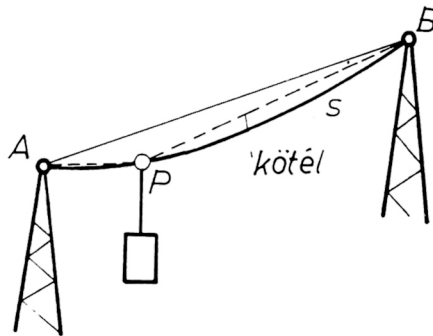
ahol A és B a merev test két tetszőleges pontja. Ennek eredményeként a merev test mozgásjellemzőinek ismeretéhez 3 skaláris adat (egy pontjának $\vec{v}_A(t)$ sebességfüggvénye) elegendő.

A mozgás szabadságfoka tehát: 3.

Az így mozgó merev test mozgásjellemzőit az anyagi pontnál tanultak szerint leírhatjuk.

Példaként nézzünk egy kötélpályát (66. ábra). A kötélpálya két oszlopközébe szállítókat halad. Felfüggesztése olyan, hogy helyzete mindig függőleges. Vizsgáljuk meg a mozgást. A felfüggesztés P pontjának pályája legyen az AB pontok közé berajzolt s görbe. A szokásos kis sebességeknél jó közelítéssel ugyanilyen pályát ír le a kas minden pontja, azonos mozgásfüggvénnyel, azaz haladó mozgást végez. A mozgás görbevonalú.

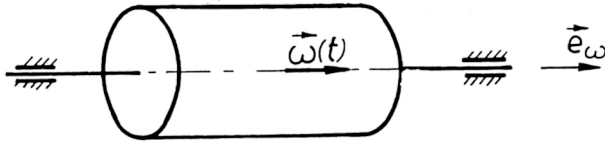
66. ábra



b) *Forgómozgás álló tengely körül.*

A merev test mozgása közben két pontja (és így a két pontot összekötő egyenes összes pontja) nyugalomban van (67. ábra). A test összes többi pontja egymással párhuzamos, a tengelyre merőleges síkokban levő, körpályát ír le. A körpályák középpontjai az álló tengelyen vannak.

67. ábra



Mint a pillanatnyi forgómozgásnál, a mozgás jellemezhető itt is szögsebességvektorral.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) = \omega(t) \vec{e}_\omega,$$

ahol \vec{e}_ω az álló forgástengelyhez rögzített egységvektor a tengellyel adott. Így egyetlen $\omega(t)$

skaláris függvénnyel leírható a mozgás. Tehát a mozgás szabadságfoka egy. A műszaki gyakorlatban nagyon sok géprész végez ilyen mozgást (pl. villamos motor forgórésze), ezért ennek vizsgálatára még részletesebben később visszatérünk.

c) Síkmozgás.

Előállítható olyan elemi forgások sorozataként, ahol az $\vec{\omega}$ szögsebesség iránya állandó, vagyis a forgástengelyek egymással párhuzamosak (\vec{e}_ω). Jellemzője

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &\neq \vec{0}, & \vec{\omega} &= \vec{\omega}(t) = \omega(t) \vec{e}_\omega, \\ \vec{v}_A &\neq \vec{0}, & \vec{v}_A &= \vec{v}_A(t), \end{aligned}$$

$$\text{dc} \quad \vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0 = \vec{v}_A \cdot \vec{e}_\omega.$$

A tetszőleges A pont ennek folytán \vec{e}_ω -ra merőleges síkban végzi mozgását.

A 66. ábrán szemléltetett haladó mozgás a síkmozgás egy speciális esete, mivel ott is minden pont síkgörbe pályán mozog.

Ha

$$\vec{\omega} = \vec{k}\omega,$$

$$\vec{v}_A = \vec{i} v_{Ax} + \vec{j} v_{Ay}.$$

Tehát a mozgás szabadságfoka 3 (\vec{v}_A és ω ismerete szükséges).

A gyakorlatban ez szintén igen gyakran előforduló mozgásfajta. Ilyen mozgást végez pl. a forgattyús hajtómű hajtórúdja, az egyenesvonalú mozgást végző járművek kereke (lásd még 1.3.4. pontot), stb.

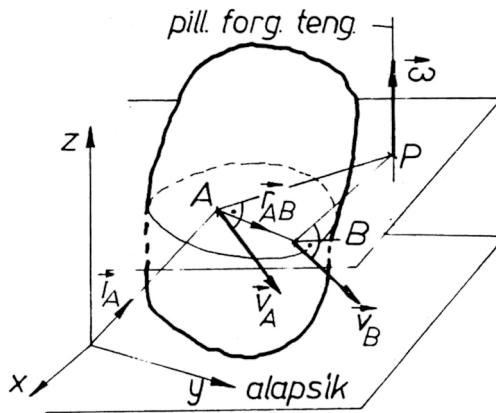
1.3. SÍKMOZGÁS

Jelentőségénél fogva ezzel a véges mozgásfajttával részletesebben foglalkozunk.

1.3.1. A sebességpólus

Mint már tudjuk a merev test akkor végez síkmozgást, ha minden pontja síkgörbét ír le és ezek a síkok egy adott *alapsíkkal* párhuzamosak. A síkmozgást úgy is leírhatjuk, hogy ahogy a merev testet metszük az alapsíkkal párhuzamos síkkal és a síkmetszet mozgását határozzuk meg (68. ábra). Ehhez elegendő, ha rajta fekvő két pont mozgását megadjuk.

68. ábra



Síkmozgás esetén $\vec{\omega}$ merőleges az alap síkra, az \vec{r}_{AB} pedig párhuzamos vele. Az 1.2.1. pont szerint a pillanatnyi forgástengely, az $\vec{\omega}$ vektorral párhuzamos, így itt a pillanatnyi forgástengely és az alapsík is merőleges egymásra.

A síkmozgás leírásához vizsgált síkmetszet és a pillanatnyi forgástengely P metszéspontját *sebességpólusnak* nevezzük.

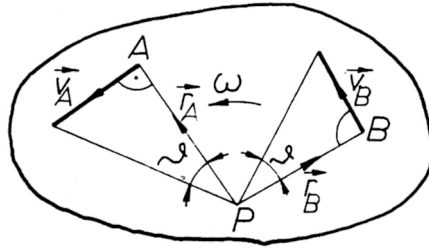
1. 3. 2. A sebességállapot

Ha ismerjük a P sebességpólus helyét és az ω szögsebességet, tetszőleges A és B pontok sebességvektorai meghatározhatók (69. ábra):

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A ,$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_B ,$$

69. ábra



mivel $\vec{v}_P = \vec{0}$. Ebből következik, hogy $\vec{v}_A \perp \vec{r}_A$, illetve $\vec{v}_B \perp \vec{r}_B$,
és mivel $\vec{\omega} \perp \vec{r}_A$ -ra, illetve \vec{r}_B -re:

$$v_A = |\vec{v}_A| = \omega r_A , \quad (5)$$

$$v_B = |\vec{v}_B| = \omega r_B ,$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{r_A}{r_B} ,$$

vagyis a síkmetszet egyes pontjainak sebességei úgy aránylanak egymáshoz, mint a sebességpólustól mért távolságuk, irányuk pedig a vizsgált pontból a sebességpólushoz húzott sugarakra merőleges. Az előzőkből a 69. ábra jelöléseivel, és (5) felhasználásával:

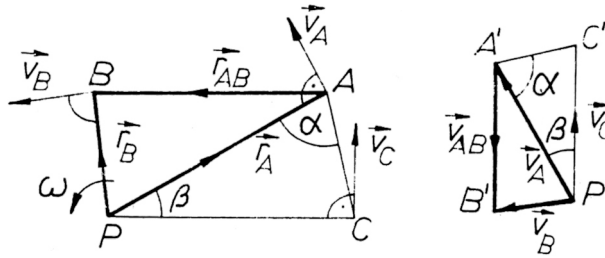
$$\frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B} = \omega = \operatorname{tg} \varphi ,$$

vagyis a pólusból a pontok sebességvektorai azonos szög alatt láthatók. Ha az A és B pontok \vec{v}_A és \vec{v}_B sebessége adott, meghatározható (pl. szerkesztéssel) a sebességpólus helye és kiszámítható a forgás pillanatnyi szögsebessége.

1.3.3. A sebességállapot ábrázolása, a sebességábra

A sebességállapot vizsgálatára sokszor szerkesztő módszerek is előnyösen használhatók. Ha a test 68. ábra szerinti síkmetszetét ábrázoltuk, a pillanatnyi forgástengely merőleges az ábra síkjára és a P ponton megy át (70. ábra). Sebességléptéket felvéve, és felhasználva, hogy a sebességvektorok merőlegesek a megfelelő helyvektorra, sebességábra szerkeszthető.

70. ábra



Mérjük fel léptékhelyesen egy tetszőleges P' pontból a merev test síkmetszete A és B pontjainak

\vec{v}_A és \vec{v}_B sebességét (70. ábra).

Vizsgáljuk most a síkmetszet ABP és a sebességvektor végpontjai által meghatározott A' B' P' háromszögeket.

Az 1.3.2. pont szerint a megfelelő oldalak (AB és B'A' stb.) merőlegesek egymásra. Ezen kívül az (5) összefüggést felhasználva:

$$\begin{aligned} \overline{AP} = r_A & \quad ; \quad \overline{A'P'} = |\vec{v}_A| = \omega r_A \quad , \\ \overline{BP} = r_B & \quad ; \quad \overline{B'P'} = |\vec{v}_B| = \omega r_B \quad , \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{\overline{A'P'}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{B'P'}}{\overline{BP}} = \omega .$$

Ebből következően $ABP\Delta \sim A'B'P'\Delta$, másszóval A' és B' P' -hez viszonyított helyzete hasonló az A és B P -hez viszonyított helyzetéhez. Mivel A és B a síkmetszet tetszőleges pontjai voltak, ez a megállapítás minden pontra igaz.

Ha tehát a P' pontból a síkmetszet minden pontjának sebességvektorát felmérjük, azaz a sebességábrát megrajzoljuk, a sebességvektorok végpontjai által meghatározott alakzat a síkmetszethez hasonló lesz, ω irányában 90° -kal elforgatva. Így ha ismerjük a sebességábrát pl. A' B' P' pontjaival, a síkmetszet egy tetszőleges C pontjának \vec{v}_C sebességét a 70. ábra szerkesztése alapján meghatározhatjuk.

Az előzőekben elmondottak alkalmazási módját egyszerű példában mutatjuk be.

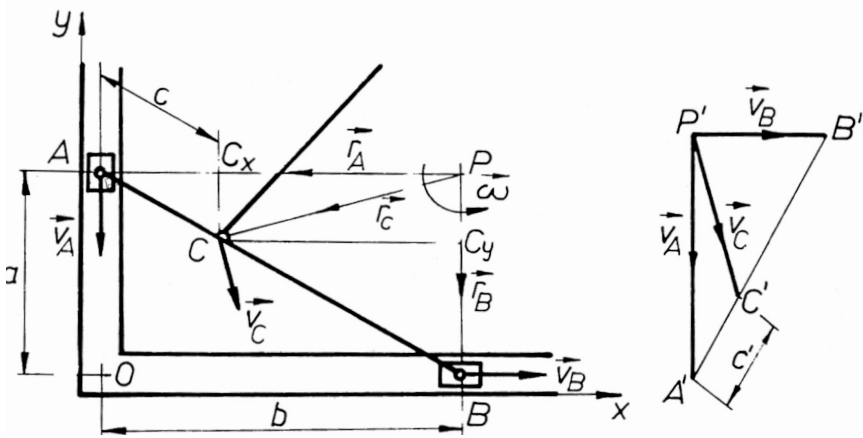
20. feladat

Valamely szerkezet egy elemét mutatja a 71. ábra. Ennek A pontját az adott helyzetben

$$\vec{v}_A = \vec{j} v_A = -\vec{j} 5 \text{ [m/s]} \text{ sebességgel mozgattuk.}$$

B pontja csak az x tengely mentén tud elmozdulni. C pontjához csuklósan egy rúd kapcsolódik. Mekkora lesz a C pont \vec{v}_C sebessége és AB rúd pillanatnyi ω szögsebessége, ha $a = 0,15 \text{ m}$; $b = 0,2 \text{ m}$; $c = 0,1 \text{ m}$?

71. ábra



Az AB rúd síkmozgást végez, mivel A és B pontjának és ezzel együtt minden pontjának sebessége az xy síkkal párhuzamos. Az adott feltételek szerint B pont sebességvektora \vec{i} irányú lesz. Az 1.3.2. pont szerint a P pólus rajta lesz az A ill. B pontokból húzott \vec{v}_A , ill. \vec{v}_B vektorokra merőleges egyeneseken (71. ábra).

Így ugyanis fennáll a $\vec{v}_A \perp \vec{r}_A$ és $\vec{v}_B \perp \vec{r}_B$. Az (5) ill. (4) összefüggések felhasználásával

(P pólust az AB-hez rögzítettnek tekintjük):

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{v_A}{b} = \frac{5}{0,2} = 25 \text{ [1/s]},$$

$$\vec{\omega} = \vec{k} \omega,$$

B pont sebessége pedig

$$v_B = \omega r_B = \omega a = 25 \cdot 0,15 = 3,75 \text{ [m/s]},$$

$$\vec{v}_B = \vec{i} \cdot 3,75 \text{ [m/s]}.$$

A C pont \vec{v}_C sebességét többféle módszerrel is meghatározzuk. Talán legegyszerűbben a sebességábrából szerkesztéssel kaphatjuk meg az eredményt. \vec{v}_A és \vec{v}_B sebességek ismeretében megrajzolhatjuk az A' B' P'sebességábrát (71. ábra). A' B' szakaszon A'-tól felmérünk egy c' szakaszt, mely a C' pontot határozza meg. A C' ugyanolyan arányban metszi A' B' -t, mint C AB -t,

$$\frac{c'}{A'B'} = \frac{c}{AB} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{0,1}{\sqrt{0,15^2 + 0,2^2}} = 0,4 .$$

A P'C' most már irány és nagyság szerint - a v_A és v_B felrajzolásánál felvett léptéknek megfelelően - megadja C pont sebességét.

A feladat megoldható grafoanalitikus úton is, azaz a sebességábra alapján, hasonló háromszögek és trigonometrikus összefüggések segítségével ki is számítható \vec{v}_C sebesség nagysága.

Ezzel itt nem foglalkozunk részletesen, mert a feladatmegoldáshoz csak matematikai ismeretek szükségesek.

Ugyancsak eredményre jutunk, ha meghatározzuk az $\vec{r}_{PC} = \vec{r}_C$ helyvektort, és $\vec{\omega}$ ismeretében (4) felhasználásával számítjuk ki \vec{v}_C sebességet. Az \vec{r}_C vektor koordinátáit a

CC_yB és BOA háromszögek, valamint CC_xA és AOB háromszögek hasonlóságából számíthatjuk ki:

$$r_{Cx} = (AB-c) \frac{b}{AB} = (0,25-0,1) \frac{0,2}{0,25} = 0,12 \text{ [m]} ,$$

$$r_{Cy} = c \frac{a}{AB} = 0,1 \frac{0,15}{0,25} = 0,06 \text{ [m]} ,$$

$$\vec{r}_C = -\vec{i} r_{Cx} - \vec{j} r_{Cy} = -\vec{i} 0,12 - \vec{j} 0,06 \text{ [m]} .$$

Mint már meghatároztuk:

$$\vec{\omega} = \vec{k} 25 \text{ [1/s]} ,$$

és (4) szerint

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 25 \\ -0,12 & -0,06 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} 25 \cdot 0,06 - \vec{j} 25 \cdot 0,12 .$$

Végül a C pont sebessége:

$$\vec{v}_C = \vec{i} 1,5 - \vec{j} 3 \text{ [m/s]} .$$

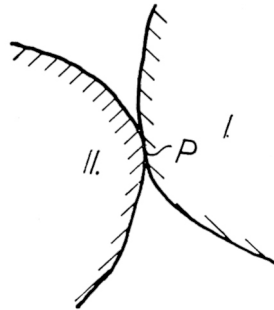
A sebesség abszolút értéke

$$v_C = \sqrt{1,5^2 + 3^2} = 3,35 \text{ [m/s]} .$$

1.3.4. Gördülés és csúszás

Egy test, síkgörbével határolt síkmetszete (I) saját síkjában mozog, eközben állandóan érintkezik egy másik, ebben a síkban fekvő síkgörbével (II) (72. ábra).

72. ábra



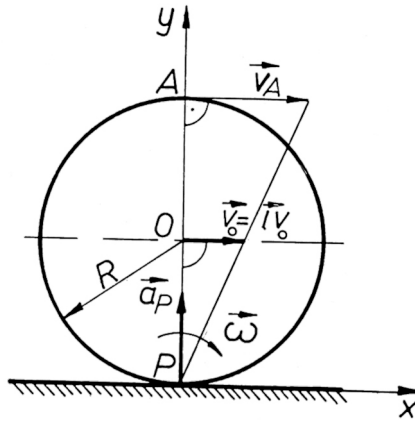
Ha az I. test mozgása pillanatnyi forgás a P érintkezési pont körül, akkor az I. mozgása *gördülés* a II-n. A P a pillanatnyi forgás sebességpólusa. Ha az I. pillanatnyi mozgása a síkkal határolt II-n haladó mozgás, akkor azt az I-nek a II-en történő csúszásának nevezzük. A csúszás sebessége egyenlő az érintkezési pont sebességével.

Általános esetben csúszás és gördülés is lehet egyidőben.

21. feladat

Egy $v_0 = 90$ km/óra állandó sebességgel egyenesvonalú pályán haladó jármű $R = 0,2$ m sugarú kerekét vizsgáljuk, mely nem csúszik meg az egyenes úttesten, azaz úgy tekinthetjük, hogy egy henger legördül egy síkon. Határozzuk meg a kerék szögsebességét, és a legnagyobb sebességét (73. ábra)!

73. ábra



A kerék síkmozgást végez, mivel minden pontja az xy síkkal párhuzamos síkban mozdul el. Vizsgáljuk a kerék xy síkmetszetét (73. ábra)! Mivel a kocsiszekrény a 0 ponton átmenő tengelyhez kapcsolódik, így a kerék síkmetszetének 0 pontja $\vec{v}_0 = \vec{i} v_0 = \vec{i} 25$ [m/s] sebességgel

mozog. Az álló síkon legördül a kerék, ezért a kerék és a sík érintkezési pontja egymáshoz képest nem mozdulhat el, azaz a kerék P pontja is nyugalomban van. Tehát ez a kerék pillanatnyi sebességpólusa. Most már (5) felhasználásával

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{25}{0,2} = 125 \text{ [1/s]},$$

$$\vec{\omega} = -\vec{k} 125 \text{ [1/s]}.$$

A kerék pólustól legtávolabbi pontja A , ezért ennek a pontnak lesz a sebessége a legnagyobb:

$$v_A = \omega (2R) = 125 \cdot 2 \cdot 0,2 = 50 \text{ [m/s]},$$

$$\vec{v}_A = \vec{i} 50 \text{ [m/s]}.$$

1.3.6. A gyorsulásállapot vizsgálata

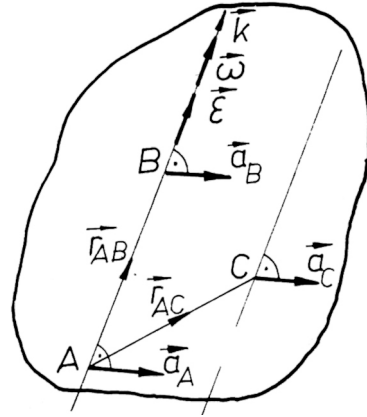
Mint már láttuk a merev test pontjainak gyorsulása között az összefüggés (2) szerint (75. ábra):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}).$$

Nézzük a síkmozgás gyorsulás viszonyait (74. ábra).

Ilyenkor, mint tudjuk $\vec{\omega} = \vec{k} \omega(t)$.

74. ábra



Ebből következik, hogy

$$\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{k} \dot{\omega}(t) = \vec{k} \epsilon(t)$$

szöggyorsulásvektor is az egész mozgás ideje alatt \vec{k} irányú. Ebből pedig részletesebb bizonyítás nélkül könnyen belátható, hogy a síkmozgást végző merev test minden pontjának gyorsulása az alapsíkkal párhuzamos (lásd III. fejezet 1. 2. 2. pontot is).

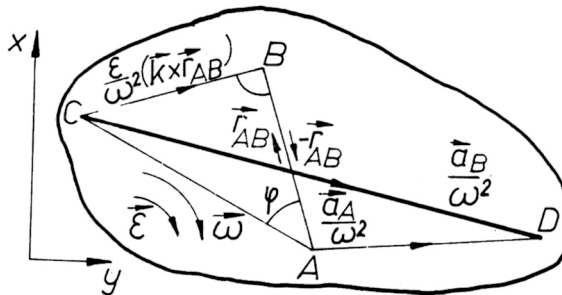
Vizsgáljuk még meg egy \vec{k} -al párhuzamos egyenesen lévő két pont gyorsulását (74. ábra):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \epsilon \vec{k} \times \vec{r}_{AB} + \omega \vec{k} \times (\omega \vec{k} \times \vec{r}_{AB}) = \vec{a}_A,$$

mivel $\vec{k} \parallel \vec{r}_{AB}$, és így $\vec{k} \times \vec{r}_{AB} = \vec{0}$.

Bármelyik \vec{k} -ral párhuzamos egyenesen lévő pontok gyorsulása tehát megegyezik. Ezért a gyorsulásviszonyok vizsgálatához is elegendő egyetlen alapsíkkal párhuzamos síkmetszet vizsgálata (75. ábra).

75. ábra



A (2) összefüggésben szereplő tagok ez alapján így írhatók:

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{r}_{AB} = \mathcal{E} \vec{k} \times \vec{r}_{AB} \quad ,$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) = -\omega^2 \vec{r}_{AB} \quad .$$

Így

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \mathcal{E} \vec{k} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB} \quad . \quad (6)$$

Így a síkmetszet tetszőleges B pontjának gyorsulásvektora egy másik pont \vec{a}_A gyorsulásának,

valamint \mathcal{E} szögsebességnek és \mathcal{E} szöggyorsulásnak az ismeretében meghatározható.

A \vec{a}_B meghatározására egy szerkesztő eljárást is bemutatunk.

Ha $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ és így $\omega^2 \neq 0$, akkor a (6) egyenletet ω^2 -tel osztva:

$$\frac{\vec{a}_B}{\omega^2} = \frac{\vec{a}_A}{\omega^2} + \frac{\mathcal{E}}{\omega^2} (\vec{k} \times \vec{r}_{AB}) - \vec{r}_{AB} \quad . \quad (7)$$

Az egyenlet minden tagja hosszúság dimenziójú és így hosszlépték segítségével ábrázolható (75. ábra).

$$\frac{\vec{a}_A}{\omega^2} = \vec{AD} \quad ; \quad \frac{\mathcal{E}}{\omega^2} (\vec{k} \times \vec{r}_{AB}) = \vec{CB} \quad ; \quad -\vec{r}_{AB} = \vec{BA} \quad ,$$

amelyek vektorösszege (7) szerint $\frac{\vec{a}_B}{\omega^2} = \vec{CD}$ - t adja.

Az ABC derékszögű háromszögben

$$\frac{BC}{AB} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\mathcal{E}}{\omega^2} |\vec{k} \times \vec{r}_{AB}|}{|\vec{r}_{AB}|} = \frac{\mathcal{E}}{\omega^2} \quad .$$

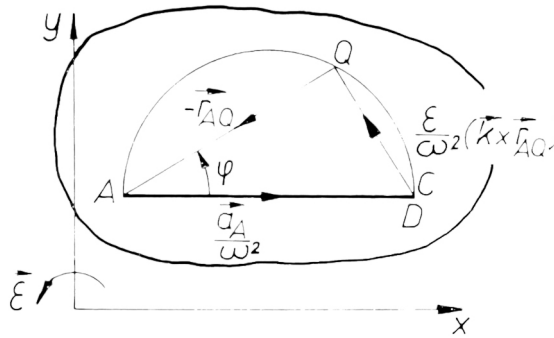
Ezért a C pont egyszerűen úgy szerkeszthető meg, mint az AB sugárra a B pontban merőlegesen álló és az AB sugárral φ szöget bezáró egyenesek metszéspontja.

1.3.7. A gyorsuláspólus meghatározása

Az előbbi szerkesztésből az következik, hogy a síkmozgást végző merev test síkmetszetének van olyan Q pontja (a merev testnek a Q ponton átmenő és az $\vec{\mathcal{E}}$ -al párhuzamos olyan egyenese), amelynek zérus a gyorsulása. Ez az Q pont a gyorsuláspólus és a következőképpen határozható meg (76. ábra).

A meghatározáshoz a \vec{a}_A , $\vec{\varepsilon}$, $\vec{\omega}$ ismerete szükséges.

76. ábra



Az A pontból felmért $\frac{\vec{a}_A}{\omega^2}$, mint átmérő fölé kört rajzolunk. A Q pont – gyorsuláspólus – ezen a körön fekszik és azt az AD egyenessel φ szöget bezáró egyenes metszi ki, mely φ szöget AD egyenestől előjelhelyesen kell felmérni. A 75. ábra szerinti szerkesztést alkalmazva, valóban az derül ki, hogy $\vec{a}_Q = \vec{CD} = \vec{0}$. A Q gyorsuláspólus ismeretében a B pont gyorsulása is egyszerűbben szerkeszthető (77. ábra):

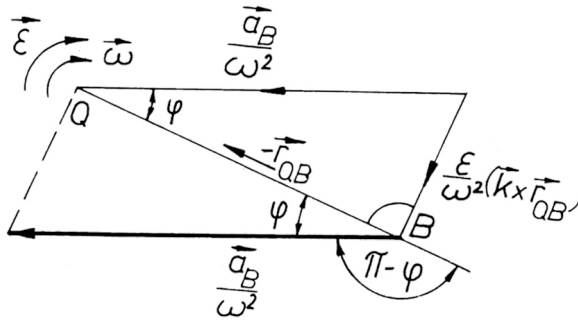
$$\vec{a}_Q = \vec{0},$$

$$\vec{a}_B = \vec{0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{QB} - \omega^2 \vec{r}_{QB},$$

$$\frac{\vec{a}_B}{\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} k \times \vec{r}_{QB} - \vec{r}_{QB}. \quad (8)$$

A gyorsulásvektor iránya a B pontban az \vec{r}_{QB} helyvektorral az ε irányában $\pi - \varphi$ szöget zár be!

77. ábra

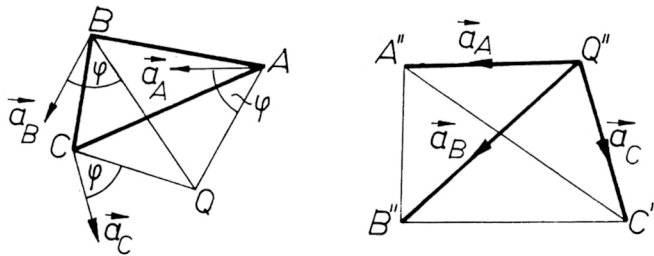


1.3.8. A gyorsulásállapot ábrázolása, a gyorsulásábrára

A merev test gyorsulásállapotának szemléltetésére gyorsulásábrát is szokás szerkeszteni – a sebességábrához hasonlóan – oly módon, hogy a gyorsulásvektorokat közös Q pontból mérjük fel (78. ábra). Mindegyik pont gyorsulása 1.3.1. pont szerint $\pi - \varphi$ szöget zár be a pontnak a Q gyorsuláspólusra vonatkozó helyvektorával.

Ezért $ABC \Delta \sim A''B''C'' \Delta$ Így a gyorsulásábrára – megfelelő lépték figyelembevételével – a síkmetszet Q körüli \mathcal{E} irányú $\pi - \varphi$ nagyságú elforgatásával nyerhető.

78. ábra



22. feladat

A 20. feladatban szereplő szerkezeti elem A pontja $\vec{a}_A = -\vec{j} a_A = -\vec{j} 789 \text{ [m/s}^2\text{]}$ gyorsulással mozog az adott pillanatban.

Az AB rúd pillanatnyi szögsebessége – mint a 20. feladatban meghatároztuk –

$$-\vec{\omega} = \vec{k} 25 \text{ [1/s]} .$$

Határozzuk meg a C pont pillanatnyi gyorsulását!

Az AB rúd gyorsulásállapotának ismeretéhez a fenti adatokon kívül az $\vec{\mathcal{E}} = \vec{k} \mathcal{E}$ pillanatnyi szöggyorsulást is ismernünk kellene. E helyett azt tudjuk, hogy a B pont is egyenes pályán mozog, azaz gyorsulásának iránya adott: $\vec{a}_B = \vec{i} a_B$.

Ennek felhasználásával határozzuk meg \mathcal{E} szöggyorsulás nagyságát. A (6) összefüggést felhasználva:

$$\vec{i} a_B = \vec{a}_A + \vec{k} \mathcal{E} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB}.$$

Ez az egy vektoregyenlet két skalár ismeretlen meghatározását teszi lehetővé. Így az ismeretlen a_B nagysága és \mathcal{E} szöggyorsulás innen meghatározható. Az a_B kiejtése érdekében szorozzuk végig az egyenletet \vec{j} vektorral skalárisan:

$$0 = -a_A + \mathcal{E} (\vec{k} \times \vec{r}_{AB}) \cdot \vec{j} - \omega^2 \vec{r}_{AB} \cdot \vec{j}.$$

Mivel az ábrából láthatóan $\vec{r}_{AB} = \vec{i}b - \vec{j}a$, ezért $\vec{r}_{AB} \cdot \vec{j} = -a$, és

$$(\vec{k} \times \vec{r}_{AB}) \cdot \vec{j} = (\vec{j} \times \vec{k}) \cdot \vec{r}_{AB} = \vec{i} \cdot \vec{r}_{AB} = b.$$

Így
$$0 = -a_A + \mathcal{E} b + \omega^2 a.$$

Ebből

$$\mathcal{E} = \frac{a_A - \omega^2 a}{b} = \frac{789 - 25^2 \cdot 0,15}{0,2} = 3480 \left[1/s^2 \right].$$

A gyorsuláspólus és gyorsulásra szerkesztéséhez szükséges φ szög most már meghatározható:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mathcal{E}}{\omega^2} = \frac{3480}{625} = 5,57$$

$$\varphi = 79,9^\circ$$

Ezt a φ szöget (és ezzel együtt \mathcal{E} szöggyorsulást) a 75. ábrán bemutatott szerkesztés felhasználásával is meghatározhattuk volna.

A 76. ábra szerkesztését alkalmazva, φ -t az

$$\overline{AD} = \frac{a_A}{\omega^2} = \frac{789}{625} = 1,26 \text{ [m]}$$

szakasztól pozitív irányban felmérjük, és így megkapjuk a gyorsuláspólust (79. ábra). Most már a 78. ábra szerkesztése szerint a gyorsulásábrát is megrajzolhatjuk, amiből leolvasható az AB bármely pontjának a gyorsulása:

$$\vec{a}_B = \vec{i} 390 \left[m/s^2 \right]$$

$$\vec{a}_C = \vec{i} 155 - \vec{j} 470 \left[m/s^2 \right]$$

A gyorsulásra egyben azt is megmutatja, hogy az AB rúd mentén hogyan változik a rúd egyes elemeinek a gyorsulása.

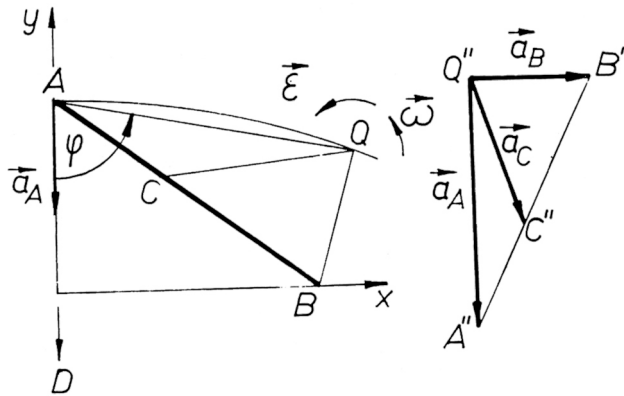
23. feladat

Határozzuk meg a 21. feladatban megadott jellemzőkkel mozgó járműkerék P pontjának (sebességpólus) a_p gyorsulását!

A megadott feltételekből adódik, hogy a gyorsuláspólus 0, mivel ez állandó \vec{v}_O sebességgel mozog, így gyorsulása zérus. A 21. feladatban meghatározott ω , pillanatnyi szögsebesség állandó, mivel időben állandó mennyiségekből határoztuk meg ($V_0; R$).

Ebből viszont az következik, hogy az $\vec{\epsilon}$ pillanatnyi szöggyorsulás zérus.

79. ábra



Ezek ismeretében a kerék gyorsulásállapota adott, így (6) felhasználásával a sebességpólus gyorsulása meghatározható:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \epsilon \vec{k} \times \vec{r}_{OP} - \omega^2 \vec{r}_{OP} .$$

Az adatok behelyettesítése után, figyelembe véve, hogy $\vec{r}_{OP} = -jR$:

$$\vec{a}_P = \vec{j} \omega^2 R = \vec{j} 125^2 \cdot 0,2 = \vec{j} 3120 \left[\text{m/s}^2 \right]$$

lesz a P pont gyorsulása, azaz a középpont felé mutat (73. ábra).

2. A merev test kinetikája

A merev testet gondolatban végtelen nagy számú végtelen kis dm tömegű részre bonthatjuk, és így a merev testet anyagi pontokból állónak tekinthetjük. Ezen anyagi pontok egymástól való távolsága azonban állandó. A pontrendszernek tekintett merev testre így a pontrendszerekre levezetett tételek érvényesek (IV. fejezet). Az alábbiakban – összefoglalva ezeket a tételeket – a bennük szereplő egyes mennyiségek meghatározásáról beszélünk merev test esetén.

2.1. A MEREV TEST MOZGÁSMENNYISÉGE

A merev test mozgásmennyisége a fentiek szerint az anyagi pontrendszer mozgásmennyiségéhez hasonló formában számítható (IV. fejezet 2.2. pont):

$$\vec{I} = \sum m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_S$$

A fenti kifejezésben \vec{v}_S a merev test (tömegpontrendszer) súlypontjának sebessége.

Mivel a merev testet $m_i = dm$ végtelen kicsiny tömegelemekre osztottuk, folytonos tömegeloszlás esetén a szummázás helyett integrálás alkalmazható, a merev test (tömegpontrendszer) teljes m tömegére:

$$\vec{I} = \int \vec{v} dm$$

2. 2. IMPULZUSTÉTEL

Az anyagi pontrendszereknél tárgyalt formával azonosan:

$$\vec{I} - \vec{I}_0 = \int_0^{t_1} \vec{F} dt$$

Szavakban: *A merev test mozgásmennyiségének megváltozása a $(t_0; t_1)$ időintervallumban egyenlő a merev testre ható összes erő impulzusával. Differenciális alakban: a merev test mozgásmennyiségének idő szerinti első deriváltja egyenlő a merev testre ható összes erő vektorösszegével:*

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F} \quad .$$

A súlyponttétel tartalmilag és formailag is egyeznek a tömegpontrendszerre vonatkozó tételekkel. A súlyponttétel igazolja, hogy az anyagi pont fogalmának bevezetése nem közelítő feltevés volt, hanem fizikai tartalommal rendelkező jogos absztrakció, mivel egy merev test súlypontjának mozgását az anyagi pontokra érvényes tételekkel meghatározhatjuk.

2.3. A MEREV TEST PERDÜLETE, PERDÜLETTÉTEL

Az előzőekből látjuk, hogy a merev test súlypontja úgy mozog, mint az a tömegpont, melynek tömege egyezik a merev test tömegével, és a ráható erők is megegyeznek a merev testre ható erők súlypontba redukált értékével. A merev test ezen mozgásának létrejöttét vizsgáltuk eddig. A merev test egésze ugyanakkor, a súlyponttal együttmozgáson kívül még a súlypont körül foroghat. Vizsgáljuk most ezen forgás létrejöttének okait. Ehhez a merev test perdületét kell megvizsgáljunk.

Az anyagi pont A pontra vonatkoztatott perdülete – mint tudjuk – a mozgásmennyiségének nyomatéka: $\vec{\pi}_A = \vec{r}_A \times \dot{\vec{I}}$. Ha a merev testet most is tömegpontrendszernek tekintjük,

bármely pontra felírható a merev test perdülete, mint az egyes anyagi pontok mozgásmennyisége vizsgált pontra vonatkoztatott nyomatékának összege (80. ábra).

2.3.1. Merev test forgástengellyel párhuzamos súlyponti tengelyére számított perdülete

Célszerű először a súlypontra meghatározni a merev test perdületét.

Ha \vec{v}_S a súlypont sebessége és

$\vec{\omega} = \vec{n}^0 \omega$ a merev test forgásának

szögsebessége (80. ábra), úgy ezen fejezet (1.a) összefüggése szerint (V. fejezet 1.1.3. pont): a merev test egy tetszőleges pontjának sebessége:

$$\vec{v} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

és a perdület:

$$\vec{\pi}_S = \sum_m \vec{r}_i \times m_i \vec{v}$$

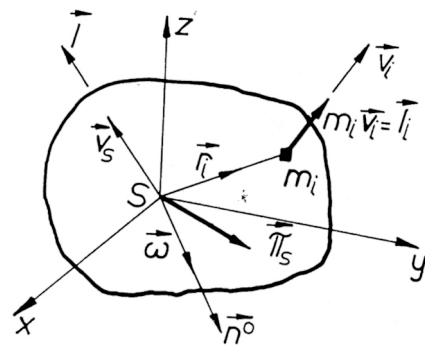
A test dm elemi részekre bontva:

$$\vec{\pi}_S = \int_m \vec{r} \times \vec{v} dm.$$

A \vec{v} kifejezését helyettesítve:

$$\vec{\pi}_S = \left(\int \vec{r} dm \right) \times \vec{v}_S + \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm .$$

80. ábra



Mivel az $\int \vec{r} \, dm$ kifejezés a súlypontra számított statikai nyomaték, és ez a statikában tanultak szerint mindig zérus, így a merev test súlypontra számított perdülete:

$$\vec{\pi}_s = \int_{(m)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \, dm$$

$$\vec{\pi}_s = \omega \int_{(m)} \vec{r} \times (\vec{n}^0 \times \vec{r}) \, dm \quad (9)$$

A merev test súlypontra felírt perdülete után vizsgáljuk meg a súlyponton átmenő $\vec{\omega}$ vektorral párhuzamos n tengelyre vonatkozó perdületét. A III. fejezet 2.3.2. pontja szerinti értelmezés alapján a merev test n tengelyre vonatkoztatott perdületét

$$\pi_n = \vec{n}^0 \cdot \vec{\pi}_s$$

alakban írhatjuk. Ebbe (9)-t behelyettesítve

$$\pi_n = \omega \vec{n}^0 \cdot \int \vec{r} \times (\vec{n}^0 \times \vec{r}) \, dm$$

összefüggést kapjuk. Ha bevezetjük a

$$\Theta_n = \vec{n}^0 \cdot \int \vec{r} \times (\vec{n}^0 \times \vec{r}) \, dm \quad (10)$$

jelölést, akkor a merev test súlyponti n tengelyre számított perdülete

$$\pi_n = \omega \Theta_n \quad (11)$$

alakban írható le. Θ_n -t a merev test " n " súlyponti tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékának nevezzük. Mint a (10) összefüggésből látható Θ_n skaláris és időben nem változó mennyiség. Valamint az is látható, hogy ez csak a merev test tömegétől, alakjától és a forgástengely testhez viszonyított helyzetétől függ. A merev test Θ_n tehetetlenségi nyomatékának részletes számítására a 2.3.5. pontban később még visszatérünk. Ez az összefüggés azt is megmutatja, hogy perdület csak akkor van, ha $\vec{\omega} \neq \vec{0}$.

2.3.2. *Perdületétel*

A tehetetlenségi nyomaték fogalmával és a merev test forgástengelyre számított perdületével megismerkedve felírhatjuk a merev testre vonatkozó perdületételt is a *IV. fejezetben* leírtak alapján

$$\dot{\mathcal{P}}_n = M_n ,$$

$$\frac{d(\Theta_n \omega)}{dt} = M_n \quad (12)$$

Mivel az Θ_n egy, az időben nem változó mennyiség, a (12) összefüggés így is írható

$$\Theta_n \dot{\omega} = M_n$$

$$\Theta_n \mathcal{E} = M_n \quad (13)$$

Szavakban kifejezve: *a merev test tengelyre számított perdületének idő szerinti első deriváltja egyenlő a merev testet terhelő összes erő ugyanarra a tengelyre számított nyomatékával.*

A perdületétel integrális alakja:

$$\mathcal{P}_n(t) - \mathcal{P}_n(t_0) = \int_{t_0}^t M_n dt \quad (14)$$

$$\Theta_n \omega - \Theta_n \omega_0 = \int_{t_0}^t M_n dt$$

$$\Theta_n (\omega - \omega_0) = \int_{t_0}^t M_n dt \quad (15)$$

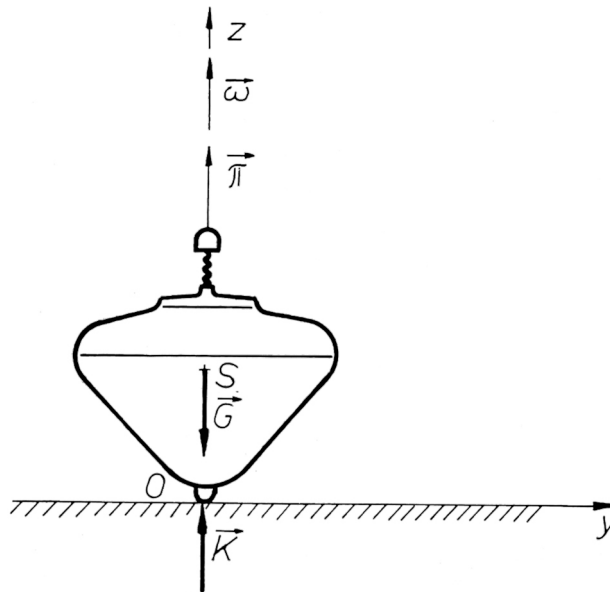
Szavakban: *a merev test valamely tengelyre számított perdületének $[t_0; t_1]$ időintervallumbeli megváltozása egyenlő a merev testet terhelő összes erő ugyanarra a tengelyre vonatkozó nyomatékimpulzusával.*

2.3.3. A merev test szabad mozgása, tehetetlenségi főtengelyek

Vizsgáljuk a következőkben a merev test forgómozgását abban az esetben, amikor a rá ható erőrendszer eredője zérus. A merev test ilyen mozgását szabad mozgásnak nevezzük.

Végezzünk egy elvi kísérletet a gyermekkorunkból jól ismert játékkal, a bűgőcsigával! Pörgezzük meg ezt a tengelye körül úgy, hogy magára hagyva a forgástengely függőleges legyen. (81. ábra). Azt tapasztaljuk, hogy közel állandó szögsebességgel forogva a forgástengely és vele együtt a szögsebességvektor iránya függőleges is marad.

81. ábra



Ha a forgó merev test és a talaj közti surlódástól eltekintünk, a merev testre ható erők eredője zérus, így bármely pontra számított nyomatéka is az, azaz a merev test szabad mozgást végez.

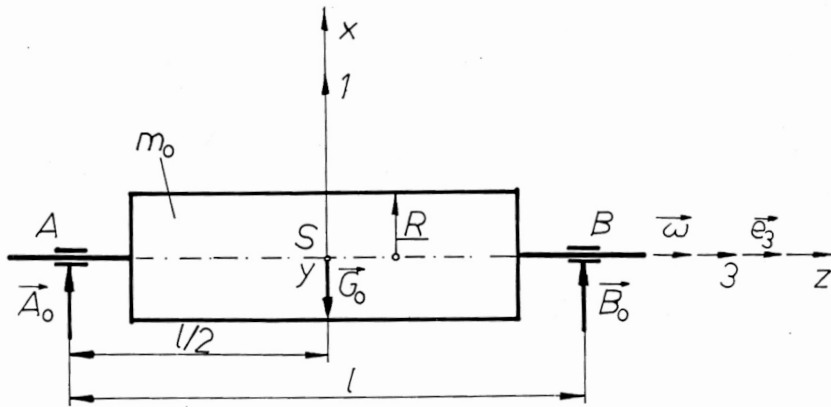
A merev test tengelyeit, melyek egyike körül megforgatva a testet, az olyan szabad mozgást végez, hogy az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor állandó marad, tehetetlenségi főtengelyeknek nevezzük. (81. ábrán z tengely).

Minden merev testnek legalább három, egymásra merőleges tehetetlenségi főtengelye van. Ezek mind átmennek a merev test súlypontján. A gyakorlatban leggyakrabban szimmetriasíkokkal rendelkező, homogén tömegeloszlású testeket használunk. Ilyen esetben a főtengelyeket könnyű megtalálni.

Két szimmetriasíkkal rendelkező test esetén (86. ábra) a szimmetriasíkok súlyponton átmenő normálisa, illetve az ezekre merőleges, súlyponton átmenő egyenes lesz a három egymásra merőleges főtengely (a 86. ábrában x; z ill. y tengelyek).

Ha a testnek több szimmetria síkja van, a főtengelyeinek a száma is nő. Például egy körhenger (lásd 82. ábra) esetén az ábrán bejelölt 1, 2, 3 főtengelyek, de minden 1 és 2 tengelyek síkjában levő egyenes is főtengely, hiszen mindegyikre merőlegesen található a testnek egy szimmetriasíkja.

82. ábra



A fő tengelyeket a merev test rájuk vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai nagyságának sorrendjében 1, 2, 3 számmal szoktuk jelölni. Azt a fő tengelyt, amelyikre számítható tehetetlenségi nyomaték a legnagyobb 1, a következőt 2, és a legkisebb tehetetlenségi nyomatékút 3 jellel látjuk el.

A fő tengelyek ezen kívül olyan tulajdonságokkal is rendelkeznek, hogy a merev test S súlypontján átmenő valamennyi tengelyre számítható tehetetlenségi nyomaték közül az 1 fő tengelyre számított a legnagyobb, a 3 fő tengelyre számított pedig a legkisebb.

2.3.4. A merev test álló tengely körüli forgómozgása

A gyakorlat szempontjából a merev testek álló tengely körüli forgómozgásának van a legnagyobb jelentősége. A továbbiakban fő- és nem fő tengelyek körül megforgatott merev testek viselkedését vizsgáljuk meg.

A 2.3.3. pontban leírt kísérletből nyilvánvaló, hogy ha a 81. ábra szerint forgó merev test z tengelyét csapágyazzuk, attól a mozgás nem változik meg. Más szóval, ha egy merev testet a fő tengelye, mint álló tengely körül megforgatunk, a megtámasztásoknál a forgásból adódóan kényszererők (csapágyerők) nem keletkeznek. Az ilyen tengelyeket szabad tengelyeknek is nevezzük.

Tehát például, ha a 82. ábrán vázolt merev testet 3-as jelű fő tengelye, mint álló tengely körül megforgatjuk, az A és B megtámasztásoknál keletkező kényszererők nagysága és iránya csak \vec{G}_O -tól függ, és független attól, hogy a test forog-e vagy áll:

$$\vec{A}_O = \vec{B}_O = -\frac{1}{2} \vec{G}_O = i \frac{1}{2} G_O \vec{i}.$$

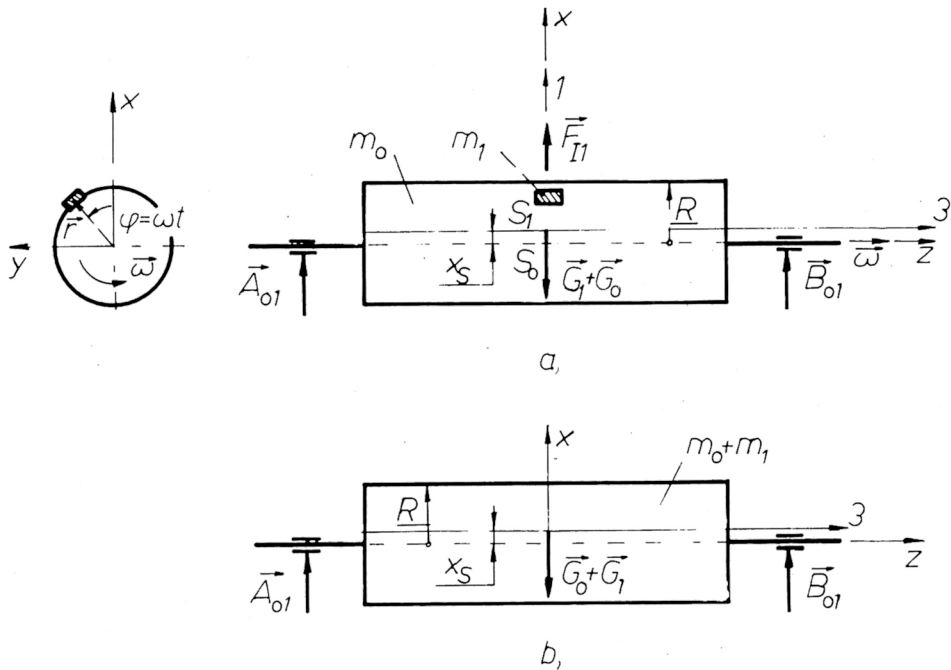
Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor a merev testet fő tengelyével párhuzamos tengely körül forgatjuk meg. Ezt azonban nem a forgástengely, hanem a fő tengely áthelyezésével valósítjuk meg. Ez elérhető az által, ha az 1. fő tengelyen a szimmetrikus, hengeres, homogén tömegeloszlású merev testre egy \vec{G}_1 súlyú anyagi pontnak tekinthető m_1 tömeget erősítünk (83.a ábra).

Ezáltal a $\vec{G}_O + \vec{G}_1$ súlyú merev test súlypontja az S_0 -ból az S_1 -be kerül.

Az S_1 súlypont z tengelytől való x_s távolságát a Statikában tanultak szerint meghatározhatjuk:

$$x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{R m_1}{m_0 + m_1} \quad (16)$$

83. ábra



Mivel az eddigi 1, 2 fő tengelyek által meghatározott sík szimmetriásík marad, ennek súlyponton átmenő normálisa lesz a 3 fő tengely, ami a z forgástengellyel párhuzamos. Az ilyen forgó merev testet statikailag kiegyensúlyozatlannak nevezzük.

Határozzuk meg, hogy az így kialakult $m_1 + m_0$ tömegű merev test z tengely körüli állandó $\vec{\omega}$ szögsebességű forgása során milyen \vec{A}_{01} és \vec{B}_{01} kényszererők keletkeznek a csapágyakban. Ezt a szuperpozíció elvének felhasználásával végezzük el. Mivel az m_0 tömeg z tengely körüli forgását már az előző példában megvizsgáltuk, most már csak az m_1 tömegpont mozgásával kell foglalkoznunk. Ez R sugarú pályán egyenes körmozgást végez, így a III. fejezet 1.2.2. pontja szerint \vec{a}_1 gyorsulása mindig sugárirányú:

$$\vec{a}_1 = -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 R (\vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t) \quad (17)$$

Így a D'Alambert-elv (III. fejezet 2.4. pont) szerint számítható inerciaerő $\vec{F}_{I1} = -m_1 \vec{a}_1$.

A problémát most már statikai feladattá redukáltuk, így az egyensúlyi egyenletek felírásával, az

\vec{F}_{II} erő hatására a támasztásokban keletkező reakcióerők:

$$\vec{A}_{1\omega} = \vec{B}_{1\omega} = -\frac{1}{2} \vec{F}_{II} = -\frac{1}{2} m_1 \omega^2 R (\vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t)$$

Az m_1 tömeg súlyából keletkező reakcióerő pedig

$$\vec{A}_1 = \vec{B}_1 = \vec{i} \frac{1}{2} m_1 g \vec{i}$$

Végül az \vec{A}_{O1} , \vec{B}_{O1} eredő támasztóerők:

$$\vec{A}_{O1} = \vec{A}_O + \vec{A}_1 + \vec{A}_{1\omega}$$

$$\vec{A}_{O1} = \vec{B}_{O1} = \vec{i} \frac{1}{2} (m_0 + m_1) g \vec{i} - \frac{1}{2} m \omega^2 R (\vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t) \quad (18)$$

Itt az első tag az $m_0 + m_1$ tömegű merev test súlyából adódik, és állandó értékű; a második tag a test forgásából származik és nagysága az ω szögsebesség négyzetével egyenesen arányos, vektorra pedig ω szögsebességgel forog. Ez az erőkomponens a forgó merev test csapágyazására, mint gerjesztőerő működik, és harmonikus lengőmozgásba hozza azt (lásd III. fejezet 3.3. pont). A káros rezgések és a rezonancia lehetőségének elkerülése érdekében törekednünk kell arra, hogy ez a gerjesztőerő minél kisebb legyen (lásd még V. fejezet 2.6.4. pont).

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor az $m_0 + m_1$ tömegű, homogén tömegeloszlású szimmetrikus merev testet a 3 fő tengelyével párhuzamos, és tőle x_s távolságban levő z tengely körül forgatjuk meg (83.b. ábra).

Ez egyenértékű a 83.a. ábrán vázolt esettel, mivel a fő- és forgástengely itt is párhuzamos, és távolságuk x_s azonos, valamint a forgó test tömege is egyező. Így a csapágyakban keletkező reakcióerők is azonosnak kell legyenek (18). A (16) összefüggésből Rm_1 -et kifejezve: $Rm_1 = x_s(m_0 + m_1)$. Ezt (18)-ba helyettesítve:

$$\vec{A}_{O1} = \vec{B}_{O1} = \vec{i} \frac{1}{2} (m_0 + m_1) g \vec{i} - \frac{1}{2} (m_0 + m_1) \omega^2 x_s (\vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t) .$$

Látható tehát, hogy a második tagban szereplő inerciaerő $(m_1 + m_0) x_s \omega^2$ nagysága az x_s sugarú körpályán mozgó $m = m_1 + m_0$ tömeg inerciaerejének nagyságával egyező.

Összefoglalva az eredményeket megállapíthatjuk, hogy ha egy tetszőleges m tömegű merev testet a fő tengelyével párhuzamos, és attól x_s távolságban levő álló tengely körül megforgatjuk, a csapágyakban ébredő reakcióerők úgy származtathatók, mintha egy, a forgástengelytől x_s távolságra levő m tömegű anyagi pontot forgatnánk meg. Természetesen, ha a merev test nem egyenletes szögsebességgel forog, úgy érintőirányú gyorsuláskomponensek is léteznek, melyekből további inerciaerők és reakcióerők származnak.

Tekintsük most egy olyan állandó $\vec{\omega}$ szögsebességgel forgó merev test mozgását, melynek forgástengelye a test egyik fő tengelyével sem párhuzamos. Az egyszerűbb vizsgálat kedvéért azonban tételezzük fel, hogy a forgástengely a merev test súlypontján megy át (84.a. ábra).

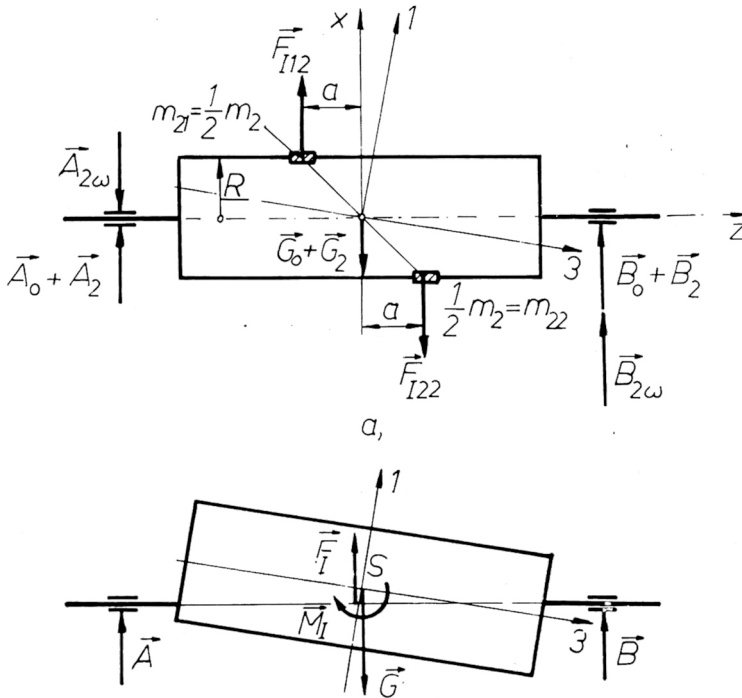
Úgy hozhatunk létre ilyen esetet, hogy a 82. ábra szerinti forgórészre m_2 tömeget helyezünk el a 84.a. ábra szerint. Ezzel az $m_0 + m_2$ tömegű és az m_0 tömegű merev test súlypontja azonos helyen lesz, de – tekintettel arra, hogy az xy sík most már nem szimmetriasík – a z forgástengely nem lesz főtengely. Az ilyen forgórészt dinamikusan kiegyensúlyozatlannak nevezzük. Az előzőekhez hasonlóan itt is a szuperpozíció elvének felhasználásával külön vizsgálhatjuk az m_0 és m_2 tömeg forgásából adódó reakcióerőket. Az $m_{21} = 1/2 m_2$ tömeg gyorsulása természetesen egyezik az előbbi m_1 tömeg gyorsulásával (17):

$$\vec{a}_{21} = \vec{a}_1 = -\omega^2 R (\vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t) \quad (19)$$

az $m_{22} = 1/2 m_2$ tömegé pedig ezzel ellenkező előjelű:

$$\vec{a}_{22} = -\vec{a}_{21} \quad (20)$$

84. ábra



Mivel az előző vizsgálatainkból látható, hogy az inerciaerőrendszer ω szögsebességgel forog, így jelen esetben is ez fog történni. Most tehát elegendő a $t_0 = 0$ időpillanatban megvizsgálni a viszonyokat, azaz amikor az m_2 tömeg az xz síkban van. Ekkor D’Alambert-elv szerint az inerciaerők a (19) és (20) felhasználásával:

$$\vec{F}_{I21} = -m_{21} \vec{a}_{21} = +\vec{i} m_{21} \omega^2 R = +\vec{i} \frac{1}{2} m_2 \omega^2 R ,$$

$$\vec{F}_{I22} = -m_{22} \vec{a}_{22} = -\vec{i} m_{22} \omega^2 R = -\vec{i} \frac{1}{2} m_2 \omega^2 R = -\vec{F}_{I21} .$$

Ezen fiktív inerciaerőrendszer súlypontba redukált értékét a $t_0 = 0$ időpillanatban könnyen meghatározhatjuk a 84.a. ábra felhasználásával:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Is} &= \vec{F}_{I21} + \vec{F}_{I22} = \vec{0} , \\ \vec{M}_{Is} &= -\vec{j} 2a F_{21} = -\vec{j} a m_2 \omega^2 R . \end{aligned}$$

A D'Alembert-elv szerint az m_2 tömeg forgásából adódó reakcióerők az előbbi fiktív nyomaték ismeretében egyensúlyi egyenletekből meghatározhatók. Természetesen itt is az eredő csapágyreakcióerők számításakor az $m_0 + m_2$ tömeg súlyából adódó állandó erőket is figyelembe kell venni.

Összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy *ha egy tetszőleges m tömegű merev testet a súlypontján átmenő és főtengelyével szöveget bezáró álló tengely körül megforgatunk, a csapágyakban ébredő reakcióerők úgy származtathatók, mintha a valóságosan működő erőkhöz kívül a merev test súlypontjában még egy ω szögsebességgel forgó koncentrált nyomaték is hatna, melynek nagysága a szögsebesség négyzetével arányos.*

Ha a forgó merev test statikusan és dinamikusan is kiegyensúlyozatlan (84.b. ábra), akkor az így kialakuló viszonyok az előbbi két eset szuperpozíciójából nyerhetők. Tehát a redukált inerciaerőrendszer egy fiktív erőből és egy fiktív nyomatékból áll. A fellépő reakcióerők tehát ezek figyelembevételével származtathatók.

2.3.5. Súlyponti tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték

A 2.3.1. pont szerint a merev test súlyponton átmenő, \vec{n}^0 egységvektorral párhuzamos n tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékán a

$$\Theta_n = \int_{(m)} \left[\vec{r} \times (\vec{n}^0 \times \vec{r}) \right] \vec{n}^0 dm \quad (21)$$

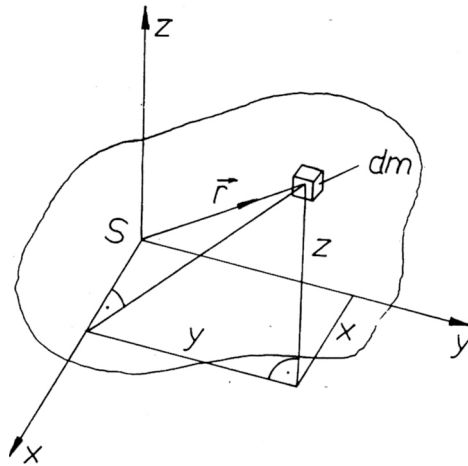
mennyiséget értjük. Legyen az x y z koordinátarendszer a test súlypontjába helyezett kezdőpontú, egyébként tetszőleges koordinátarendszer (85. ábra). A test x tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékát megkapjuk, ha (21)-be az

$$\vec{n}^0 = \vec{i}$$

helyettesítést elvégezzük:

$$\Theta_x = \int_{(m)} \left[\vec{r} \times (\vec{i} \times \vec{r}) \right] \vec{i} dm . \quad (22)$$

85. ábra



A test belsejében felvett, dm tömegű elemi hasáb helyvektorának

$$\vec{r} = \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z$$

koordinátás alakját felhasználva, adódik, hogy

$$\vec{i} \times \vec{r} = \vec{i} \times (\vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z) = -\vec{j} z + \vec{k} y ,$$

majd

$$\vec{r} \times (\vec{i} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} = \vec{i} (y^2 + z^2) - \vec{j} xy - \vec{k} xz ,$$

amelyből

$$\left[\vec{r} \times (\vec{i} \times \vec{r}) \right] \vec{i} = \left[\vec{i} (y^2 + z^2) - \vec{j} xy - \vec{k} xz \right] \vec{i} = y^2 + z^2 .$$

Ennek (22)-be helyettesítése után a

$$\Theta_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad (23a)$$

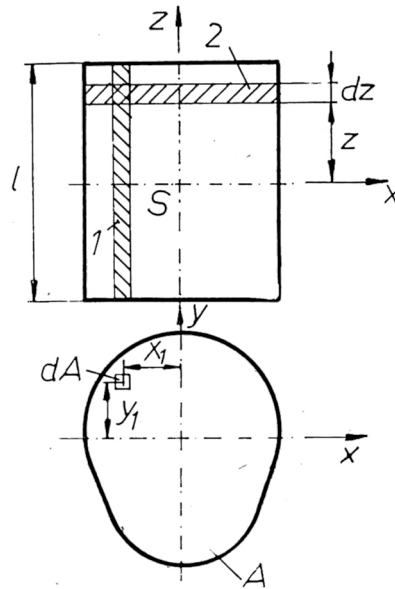
összefüggést nyerjük.

Hasonló úton kapható a test valamely, súlyponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka a test belsejében felvett elemi hasábok tömegének (dm) és az illető tengelytől való távolságuk négyzetének (Θ_x esetén $y^2 + z^2$; lásd 85. ábrát) szorzatösszege.

A műszaki gyakorlatban leggyakrabban olyan feladattal állunk szemben, hogy a (többnyire szimmetrikus) test főtengelyeire kell meghatározni a tehetetlenségi nyomatékok értékét. A következőkben erre látunk néhány példát.

Legyen az xy és az yz sík egy homogén tömegeloszlású test szimmetriasíkja (86. ábra).

86. ábra



A 2.3.3. pontban leírtak szerint akkor a test x , y , z súlyponti tengelyei főtengetyek lesznek. Határozzuk meg az előzőek felhasználásával a merev test ezen főtengetyeire vonatkozó tehetetlenségi nyomatékait. Ehhez először a (23) összefüggések integráljait az egyszerűbb számítás érdekében bontsuk részekre:

$$\theta_{xx} = \int_m x^2 \, dm; \quad \theta_{yy} = \int_m y^2 \, dm;$$

$$\theta_{zz} = \int_m z^2 \, dm \quad (24)$$

Így

$$\theta_x = \theta_{yy} + \theta_{zz}$$

$$\theta_y = \theta_{xx} + \theta_{zz} \quad (25)$$

$$\theta_z = \theta_{xx} + \theta_{yy}$$

A (24) összefüggések első két integráljának elvégzéséhez a dm tömegelem legyen a dA alapterületű l hosszúságú rúd tömege (86. ábra 1-es tömegeleme):

$$dm = \frac{\gamma}{g} l \, dA$$

A (24) alapján

$$\Theta_{xx} = \int_m x^2 dm = \frac{\gamma}{g} \ell \int_A x^2 dA = \frac{\gamma}{g} \ell I_y = \frac{\gamma}{g} \ell A i_y^2 = m i_y^2$$

$$\Theta_{yy} = \int_m y^2 dm = \frac{\gamma}{g} \int_A y^2 dA = \frac{\gamma}{g} \ell I_x = \frac{\gamma}{g} \ell A i_x^2 = m i_x^2$$

Most válasszuk 2-es tömegelemként az A alapú dz vastagságú lap tömegét:

$$\begin{aligned} dm &= \frac{\gamma}{g} A dz. \\ \Theta_{zz} &= \int_m z^2 dm = \frac{\gamma}{g} A \int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} z^2 dz = \frac{\gamma}{g} A \frac{\ell^3}{12} = \frac{\gamma}{g} A \ell \frac{\ell^2}{12} = \\ &= m \frac{\ell^2}{12} \end{aligned}$$

Így (25) szerint

$$\begin{aligned} \Theta_x &= \Theta_{yy} + \Theta_{zz} = m \left(i_x^2 + \frac{\ell^2}{12} \right) \\ \Theta_y &= \Theta_{xx} + \Theta_{zz} = m \left(i_y^2 + \frac{\ell^2}{12} \right) \quad (26) \\ \Theta_z &= \Theta_{yy} + \Theta_{xx} = m \left(i_x^2 + i_y^2 \right) \end{aligned}$$

Az V. táblázatban összefoglaljuk a legfontosabb szabályos geometriájú testek főtengelyre vonatkozó, más szóval főtehetetlenségi nyomatékainak számítására szolgáló összefüggéseket.

2.3.6. Nem súlyponti tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték

A test súlypontján áthaladó x , y , z tengelyekre (87. ábra) számított tehetetlenségi nyomaték $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ ismeretében lehetőség nyílik velük párhuzamos, nem súlyponti tengelyekre (ξ, η, ζ) is meghatározni a vizsgált merev test tehetetlenségi nyomatékait

$$(\theta_\xi, \theta_\eta, \theta_\zeta).$$

A Steiner-tétel szerint

$$\theta_\xi = \theta_x + m (\eta_s^2 + \zeta_s^2),$$

$$\theta_\eta = \theta_y + m (\zeta_s^2 + \xi_s^2),$$

$$\theta_\zeta = \theta_z + m (\xi_s^2 + \eta_s^2).$$

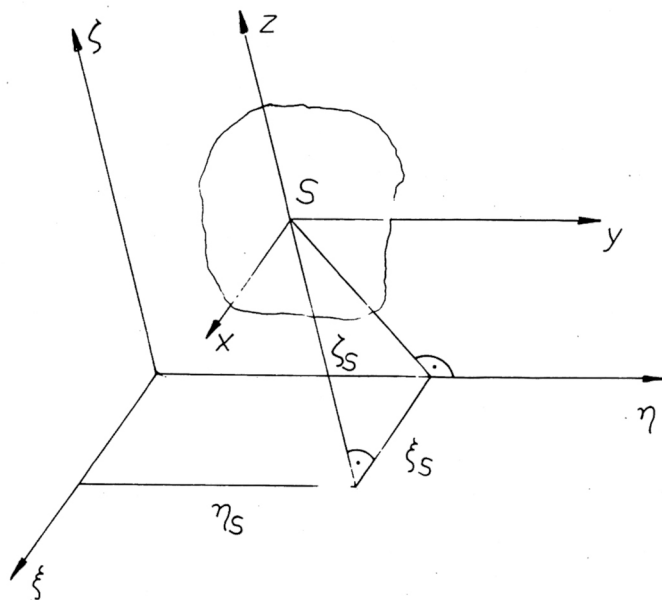
Itt m a test tömege, ξ_s, η_s, ζ_s a test súlypontjának a $\xi \eta \zeta$ rendszerbeli koordinátái.

Látható, hogy pl, az η tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték a vele párhuzamos, súlyponti y tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték, valamint a test tömege és a két tengely közötti távolság négyzete.

V. táblázat

Megnevezés	θ_x	θ_y	θ_z
Körhenger	$\frac{m}{4} (R^2 + \frac{\ell^2}{3})$	$\frac{m}{4} (R^2 + \frac{\ell^2}{3})$	$\frac{1}{2} m R^2$
Karcsu rud	$m \frac{\ell^2}{12}$	$m \frac{\ell^2}{12}$	$\frac{1}{2} m R^2 \approx 0$ ($\theta_x = \theta_y$ -hoz viszonyítva elhanyagolhatóan kicsi)
Körgyűrű henger	$\frac{m}{4} (R^2 + r^2 + \frac{\ell^2}{3})$	$\frac{m}{4} (R^2 + r^2 + \frac{\ell^2}{3})$	$\frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$ (vékonyfalú csőnél $r \approx R$, $\theta_z \approx mR^2$)
Hasáb	$\frac{m}{12} (b^2 + \ell^2)$	$\frac{m}{12} (a^2 + \ell^2)$	$\frac{m}{12} (a^2 + b^2)$
Gömb	$\frac{2}{5} m R^2$	$\frac{2}{5} m R^2$	$\frac{2}{5} m R^2$
Körkeresztmetszetű gyűrű	$m(\frac{R^2}{2} + \frac{5r^2}{8})$	$m(\frac{R^2}{2} + \frac{5r^2}{8})$	$m(R^2 + \frac{3r^2}{4})$

87. ábra



$(\zeta_S^2 + \xi_S^2)$ szorzatának összege. Mivel az utóbbi tag (az ún. Steiner-tag) mindig pozitív, így a nem súlyponti tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték mindig nagyobb a vele párhuzamos súlyponti tengelyre számítottnál.

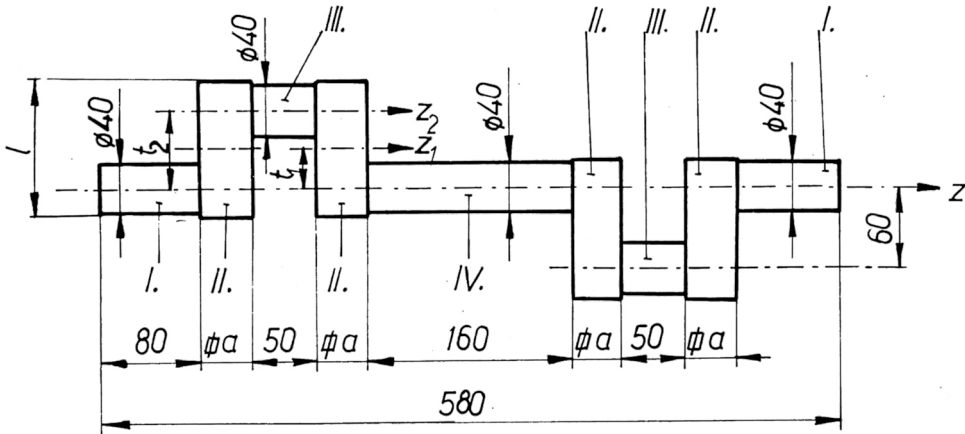
24. feladat

Határozzuk meg a 88. ábra szerinti gépkocsi forgattyús tengely z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékát. A tengely egyes részeit a számításhoz római számokkal jelöltük. Az egyes részek tömegének számítását nem részletezzük, csak az eredményeket közöljük; $m_I = 0,8$ kg, $m_{II} = 1$ kg; $m_{III} = 0,5$ kg; $m_{IV} = 1,6$ kg.

A tengelyt olyan részekre bontjuk, amelyeknek a forgástengellyel párhuzamos főtengeleire az V. táblázat szerint meg tudjuk határozni a tehetetlenségi nyomatékát. Ezt a Steiner-tétel segítségével számítjuk át a z forgástengelyre. Összetett merev testek esetén az egyes részek azonos tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékai összegezhetőek, így

$$\theta_z = \theta_z^{I.} + \theta_z^{II.} + \theta_z^{III.} + \theta_z^{IV.}$$

88. ábra



$$\phi a = 40 \text{ mm} \quad t_1 = 30 \text{ mm} \quad t_2 = 60 \text{ mm} \quad l = 104 \text{ mm}$$

Az azonos római számmal jelölt részek z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka a szimmetria miatt ugyanakkora, tehát az I-gyel jelölt összes rész z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka az V. táblázat szerint

$$\Theta_z^{\text{I.}} = 2 \cdot \left(\frac{m_{\text{I}} r_1^2}{2} \right) = 0,8 \cdot 0,02^2 = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 .$$

A II-vel jelölt részek z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékainak összege a Steiner-tétel felhasználásával:

$$\Theta_z^{\text{II.}} = 4 \cdot \left(\Theta_{z1}^{\text{II.}} + m_{\text{II}} t_1^2 \right) .$$

Behelyettesítve az V. táblázat szerinti súlyponti z_1 tengelyre számított

$$\Theta_{z1}^{\text{II.}} = \frac{m_{\text{II}}}{12} (\ell^2 + a^2)$$

tehetetlenségi nyomatékokot:

$$\Theta_z^{\text{II.}} = 4 \cdot \left[\frac{1}{12} (0,104^2 + 0,04^2) + 1 \cdot 0,03^2 \right] = 7,7 \cdot 10^{-3} \left[\text{kg m}^2 \right] .$$

A III-mal jelölt részek tehetetlenségi nyomatékainak összege a z tengelyre az előzőekhez hasonlóan:

$$\Theta_z^{\text{III.}} = 2 \left(\Theta_{z2}^{\text{III.}} + m_{\text{III}} t_2^2 \right) ,$$

ahol az V. táblázat alapján

$$\Theta_{z2}^{\text{III}} = m_{\text{III}} \frac{r_{\text{III}}^2}{2}.$$

Ezt behelyettesítve

$$\Theta_z^{\text{III}} = 2 \cdot (0,5 \cdot \frac{0,02^2}{2} + 0,5 \cdot 0,06^2) = 3,8 \cdot 10^{-3} \left[\text{kg m}^2 \right].$$

A IV. rész z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_z^{\text{IV}} = m_{\text{IV}} \frac{r_{\text{IV}}^2}{2} = 1,6 \cdot \frac{0,02^2}{2} = 3,2 \cdot 10^{-4} \left[\text{kg m}^2 \right].$$

A kapott eredmények alapján az egész forgattyús tengely z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka:

$$\begin{aligned} \Theta_z &= 0,32 \cdot 10^{-3} + 7,7 \cdot 10^{-3} + 3,8 \cdot 10^{-3} + 0,32 \cdot 10^{-3} = \\ &= 1,214 \cdot 10^{-2} \left[\text{kg m}^2 \right]. \end{aligned}$$

25. feladat:

Mekkora állandó M_z nyomaték szükséges a 88. ábra szerinti forgattyús tengely $n = 2000$ ford/perc fordulatszámra történő felgyorsításához, ha a gyorsítási idő $t = 1$ s?

Írjuk fel a z tengelyre a perdülettétel differenciális alakját:

$$\dot{\pi}_z = M_z$$

Az V. fejezet 2.3.2. pontjában levő (13) összefüggés szerint

$$\Theta_z \mathcal{E} = M_z$$

A vizsgált forgattyús tengely z tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát a 24. feladatban

meghatároztuk: $\Theta_z = 1,214 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$.

A kiinduló adatokból az \mathcal{E} szöggyorsulás a III. fejezet 1.2.2. pontja szerint határozható meg:

$$\omega = 2\pi n = 6,28 \cdot 2000 = 12560 \left[\frac{1}{\text{perc}} \right] = 209 \left[\frac{1}{\text{s}} \right],$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \omega_0 = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{209 \text{ s}^{-1}}{1 \text{ s}} = 209 \frac{1}{\text{s}}.$$

Tehát

$$M_z = \theta_z \varepsilon = 1,214 \cdot 10^{-2} \cdot 209 = 2,54 \text{ [Nm]}$$

nyomaték szükséges a forgattyús tengely üzemi fordulatszámra történő felgyorsításához.

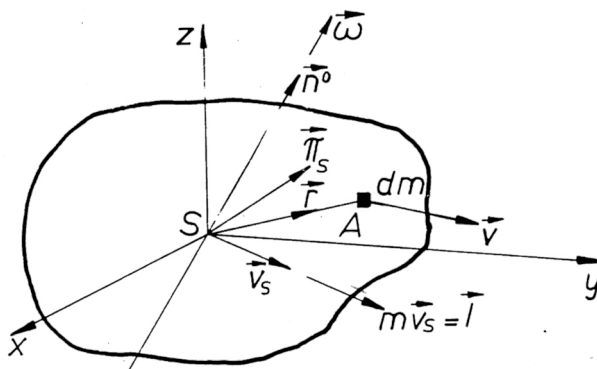
2.4. A MEREV TEST KINETIKAI ENERGIÁJA

A pontrendszer kinetikai energiája a IV. fejezet 2.4. pontja szerint:

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2.$$

Merev testnél, mivel az egyes pontok sebessége között szoros összefüggés van, a kinetikai energia egyszerűbben is kifejezhető. Legyen a súlypont sebessége \vec{v}_S , a pillanatnyi szögsebesség pedig $\vec{\omega} = \omega \vec{n}^0$ (89. ábra).

89. ábra



Tetszőleges A pont sebessége

$$\vec{v} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

A merev testet dm elemi részekre bontva:

$$E = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int \vec{v} \cdot \vec{v} dm,$$

$$E = \frac{1}{2} \vec{v}_s \int \vec{v} dm + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \vec{v} dm .$$

A két tagot külön vizsgálva:

$$\vec{v}_s \int \vec{v} dm = \vec{v}_s m \vec{v}_s = m v_s^2 ,$$

mivel az V. fejezet 2.1. pontja értelmében $\int \vec{v} dm$ a merev test mozgásmennyisége.
A másik tag:

$$\begin{aligned} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \vec{v} dm &= \int \vec{\omega} (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \\ &= \vec{\omega} \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \vec{\omega} \vec{\pi}_s . \end{aligned}$$

Mivel az integrál kifejezés a 2.3.1. pont szerint a súlypontra számított perdiület alapértelmezése.

Ha figyelembe vesszük, hogy $\vec{\omega} = \omega \vec{n}^0$, és $\vec{n}^0 \vec{\pi}_s = \pi_n$,

$$\vec{\omega} \vec{\pi}_s = \omega \vec{n}^0 \vec{\pi}_s = \omega \pi_n .$$

A (11) összefüggés figyelembevételével végül is a második tag:

$$\int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \vec{v} dm = \omega^2 \Theta_n ,$$

ahol Θ_n az \vec{n}^0 egységvektorral meghatározott súlyponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. Így a merev test kinetikus energiája:

$$E = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta_n \omega^2 . \quad (26)$$

Vizsgáljunk most néhány speciális esetet.

A kinetikai energia haladó mozgás esetén ($\vec{\omega} = \vec{0}$).

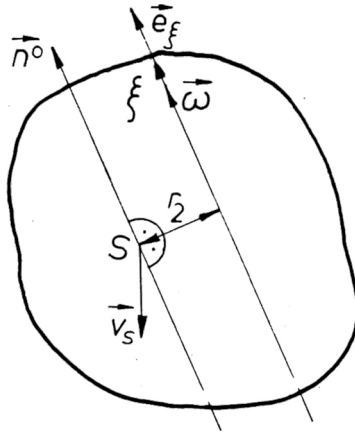
$$E = \frac{1}{2} m v_s^2 .$$

A kinetikai energia súlyponti tengely körüli forgás esetén ($\vec{v}_s = \vec{0}$)

$$E = \frac{1}{2} \Theta_n \omega^2 .$$

És végül a kinetikai energia nem súlyponti tengely körüli pillanatnyi forgás esetén (90. ábra).

90. ábra



Pillanatnyi forgástengely legyen ξ

$$E = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta_n \omega^2 .$$

Határozzuk meg a súlypont v_s sebességét:

$$v_s = \omega r_s .$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 r_s^2 + \frac{1}{2} \Theta_n \omega^2 ,$$

$$E = \frac{1}{2} (m r_s^2 + \Theta_n) \omega^2 .$$

A 2.3.6. pontban leírt Steiner-tétel szerint a zárójelben levő kifejezés éppen a forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_\xi = \Theta_n + m r_s^2 .$$

Vagyis a merev test kinetikai energiája bármilyen (ξ) tengely körüli elemi forgásnál kiszámítható

a tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték és a pillanatnyi szögsebesség ismeretében

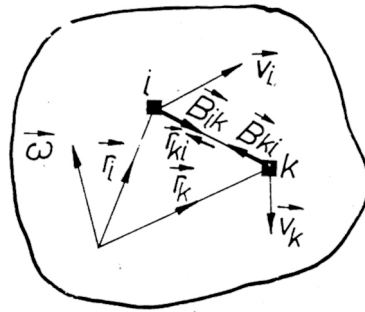
$$E = \frac{1}{2} \Theta_\xi \omega^2 . \quad (27)$$

A kinetikus energia kiszámítási módjának ismeretében most már merev testek esetében is alkalmazni tudjuk a munkatételt.

2.5. MUNKATÉTEL

Tekintsük a merev testet tömegpontrendszernek (IV. fejezet 2.4. pont)!

91. ábra



Vegyük a merev test i és k jelű két pontját (91. ábra), melyekre fennáll

$$\vec{v}_i = \vec{v}_k + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ki} \quad (28)$$

\vec{B}_{ik} és \vec{B}_{ki} belső erők. A belső erők teljesítménye:

$$P_{bik} = \vec{B}_{ik} \cdot \vec{v}_i + \vec{B}_{ki} \cdot \vec{v}_k$$

A belső erők $\vec{B}_{ki} = -\vec{B}_{ik}$ dualitásának (hatás-ellenhatás törvényének) figyelembevételével:

$$P_{bik} = \vec{B}_{ik} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_k) .$$

Ide (28)-at behelyettesítve:

$$P_{bik} = \vec{B}_{ik} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{ki}) = 0 ,$$

mivel \vec{B}_{ik} párhuzamos \vec{r}_{ki} vektorral.

Tehát a belső erők teljesítménye és így a munkája is zérus:

$$P_b = 0$$

$$W_b = \int P_b \cdot dt = 0 .$$

Mivel a belső erők teljesítménye és munkája zérus, a munkatétel a tömegpontrendszerre megadotthoz képest egy kicsit módosul:

$$\dot{E} = P$$

$$E_B - E_A = W_{AB} \quad .$$

Szavakban:

- *A merev test kinetikai energiájának idő szerinti első deriváltja egyenlő a testre ható összes külső erő teljesítményével.*
- *A merev test kinetikai energiájának A, B pontok közötti megváltozása egyenlő a testre ható összes külső erő A, B pontok között végzett munkájával.*

2.6. FELADATOK ÁLLÓ TENGELY KÖRÜL FORGÓ MEREV TESTEKRE

A feladatmegoldások elősegítésére a VI. és VII. táblázatban összefoglaltuk a haladó és az álló tengely körüli forgómozgás megfelelő fogalmait és tételeit.

A táblázatból is látható, hogy a haladó és forgómozgás között tökéletes a formai hasonlóság. A továbbiakban néhány elvi és számszerűen megoldott feladat segítségével mutatjuk be az előzőekben elsajátított ismeretek alkalmazásának lehetőségeit és módszerét.

A feladatok megoldása során használni kívánt alaptételeket az anyagi pontra érvényes I. táblázatban leírtak szerint választhatjuk ki, figyelembe véve az anyagi pont és az álló tengely körüli forgómozgást végző merev test megfelelő fogalmait és tételeit közti analógiát (VI. VII. táblázat).

2.6.1. C sapágysurlódás kísérleti úton való meghatározása

Határozzuk meg kísérleti úton a 92. ábrán vázolt lendkerék csapágyaiban ébredő surlódási nyomatékokat, ha a lendkerék forgástengelyére számított tehetetlenségi nyomatéka ismert.

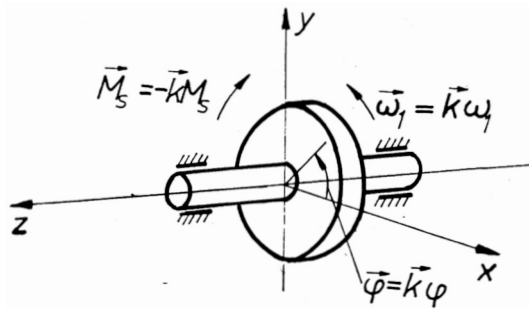
VI. táblázat

Haladó mozgás	Mérték- egység	Forgómozgás	Mérték- egység
Pályamenti elmozdulás $s = s(t)$	m	Szögelfordulás $\vec{\varphi} = k \varphi$ $\varphi = \varphi(t)$	1
Sebesség $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$; $v = \frac{ds(t)}{dt}$	m/sec	Szögsebesség $\vec{\omega} = k \dot{\omega}(t)$ $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$	1/sec
Gyorsulás $\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$; $a_t = \frac{dv(t)}{dt}$	m/sec ²	Szöggyorsulás $\vec{\epsilon} = k \dot{\epsilon}(t)$ $\epsilon(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$	1/sec ²
Tömeg m	kg	Tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték Θ_z	kgm ² = = Nms ²
Erő \vec{F}	N	Tengelyre számított nyomaték M_z	Nm
Mozgásmennyiség $\vec{I} = m\vec{v}$	$\frac{\text{kg m}}{\text{s}} = \text{Ns}$	Tengelyre számított perdület $\vec{\pi}_z = \Theta_z \omega$	Nms
Erőimpulzus $\vec{F} \cdot dt$	$\frac{\text{kgm}}{\text{s}} = \text{Ns}$	Nyomatékimpulzus $M_z \cdot dt$	Nms
Mozgási energia $E = \frac{1}{2} mv^2$	Nm	Mozgási energia $E = \frac{1}{2} \Theta_z \omega^2$	Nm
Munka $W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = T ds$	Nm	Munka $W = M_z d\varphi$	Nm
Teljesítmény $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_t v$	$\frac{\text{Nm}}{\text{s}}$	Teljesítmény $P = M_z \omega$	$\frac{\text{Nm}}{\text{s}}$

VII. táblázat

Tétel	Haladómozgás	Forgómozgás
Az impulzus illetve perdülettétel a mozgás alapegyenlete	$\vec{I} = \vec{F}$ $\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F}$ $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$	$\dot{J}_z = M_z$ $\frac{d(\Theta_z \omega)}{dt} = M_z$ $\Theta_z \varepsilon = M_z$
Munkatétel	$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = F_t s$	$\frac{1}{2} \Theta_z \omega^2 - \frac{1}{2} \Theta_z \omega_0^2 = M_z \varphi$

92. ábra



Ha az $\vec{\omega}_1$ szögsebességre felgyorsított lendkereket a meghajtó motortól hirtelen szétkapcsoljuk, az állandónak feltételezhető surlódóerők \vec{M}_s nyomatékának hatására egyenletesen lassuló mozgást végez és $\vec{\varphi}$ szögút megtétele után megáll.

Írjuk fel a merev testre a munkatételt:

$$E_2 - E_1 = W_{12} \cdot$$

Itt $E_2 = \frac{1}{2} \Theta_z \omega_1^2$ a kezdeti kinetikus energia, $E_2 = 0$ pedig a végső kinetikus energia.

A kezdeti és végső állapot között végzett munka

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{M}_s \cdot d\vec{\varphi},$$

mivel csak az \vec{M}_S nyomaték hat a testre. A 92. ábrán bejelöltek helyettesítése után:

$$W_{12} = - \int_1^2 \vec{k} M_S \vec{k} d\varphi =$$

Ezeket a munkatételbe helyettesítve:

$$- \frac{1}{2} \Theta_z \omega_1^2 = - M_S \varphi_{12}$$

ahonnan

$$M_S = \frac{\Theta_z \omega_1^2}{2 \varphi_{12}} \quad . \quad (30)$$

Így a surlódási nyomaték meghatározásához a forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomaték ismeretén kívül, mérnünk kell a szögsebességet, ill. a fordulatszámot a szétkapcsolás pillanatában, valamint egy fordulatomérővel a megtett fordulatok, illetve a φ_{12} szögelfordulás nagyságát a megállásig.

Ez a módszer csak akkor alkalmazható, ha a csapágysurlódóerő független a fordulatszámától és állandónak tekinthető.

26. feladat:

Egy $R = 2$ m sugarú hengeres $m = 6 \cdot 10^3$ kg tömegű lendkerék $t_0 = 0$ időpillanatban $n = 130/\text{min}$ fordulatszámmal szabadon forog. A csapágysurlódás miatt a t_0 időpillanattól számított $N = 1610$ fordulat után megáll. Mekkora volt a csapágysurlódásból adódó fékező nyomaték?

A t_0 időpillanattól a megállásig megtett szögelfordulás

$$\varphi = 2\pi N = 2 \cdot 3,14 \cdot 1610 = 10100 \text{ [radián]}.$$

A tehetetlenségi nyomaték a forgástengelyre a V. táblázat szerint:

$$\Theta_z = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 10^3 \cdot 4 \text{ kg m}^2 = 1,2 \cdot 10^4 \text{ [kg m}^2\text{]}.$$

A szögsebesség a t_0 időpillanatban:

$$\omega_1 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 130}{60} = 13,6 \text{ [1/s]}.$$

Végül a (38) szerint a fékezőnyomaték:

$$M_S = \frac{\Theta_z \omega_1^2}{2 \varphi} = \frac{1,2 \cdot 10^4 \cdot 13,6^2}{2 \cdot 1,01 \cdot 10^4} = 110 \text{ [kg m}^2\text{/s}^2\text{]}$$

$$M_S = 110 \text{ [Nm]}.$$

2.6.2. Forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomaték meghatározása kísérleti úton

A gyakorlatban sokszor nincs lehetőség arra, hogy a merev test forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomatékát, mint a 14. feladatban, számítással meghatározzuk. A merev test bonyolult geometriai alakja, geometriai tengely és forgástengely közti eltérés bizonytalanságai mind megnehezítik a számítást. Ezért ilyenkor a forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomatékot kísérleti úton kell meghatároznunk.

A (30) egyenletből az M_s fékezőnyomaték ismeretében a

$$\Theta_z = \frac{2M_s \varphi_{12}}{\omega_1^2}$$

összefüggéssel a tehetetlenségi nyomaték is számítható. Ha ezt a módszert akarjuk felhasználni például egy nagyteljesítményű villanymotor forgórész tehetetlenségi nyomatékának a meghatározására a beépítés helyén, bizonyos nehézségekbe ütközünk. Egyrészt nagy tehetetlenségi nyomaték és kis fékező nyomaték esetén a kísérlet ideje hosszú. Másrészt a fékezőnyomaték értéke csak csapágysúrlódás által való fékezés esetén ismeretlen, ill. csak közelítően határozható meg.

Írjuk fel ezért a munkatétel differenciális alakját:

$$\dot{E} = P_s$$

A (27) összefüggés szerint a kinetikus energia összefüggését behelyettesíthetjük:

$$\frac{d \left(\frac{\omega^2 \Theta_z}{2} \right)}{dt} = P_s ,$$

ahol P az üresjáratú veszteségteljesítmény. A differenciálást elvégezve:

$$\Theta_z \omega \frac{d\omega}{dt} = P_s .$$

Mivel Θ_z állandó, egy meghatározott időpillanathoz tartozó értékek helyettesítése és rendezése után

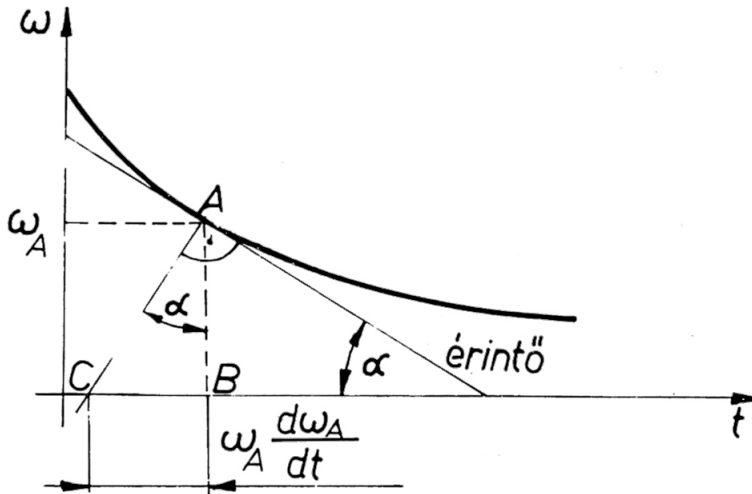
$$\Theta_z = \frac{P_{sA}}{\omega \frac{d\omega}{dt}}$$

a keresett tehetetlenségi nyomaték.

Ha villamos úton megmérjük az ω_A sebességhez tartozó P_{sA} értékét, és a forgórész lassulásakor felvettük az $\omega = \omega(t)$ függvényt, az $\omega_A \frac{d\omega_A}{dt}$ érték a 93. ábra szerint meghatározó, mivel

$$\overline{CB} = \overline{AB} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \omega_A \operatorname{tg} \alpha = \omega_A \frac{d\omega_A}{dt} .$$

93. ábra



Ha a villamosmotorral valamilyen más merev testet hajtunk meg, e módszerrel az egész rendszer tehetetlenségi nyomatékát is meghatározhatjuk, azaz ilyen módon általánosan is alkalmazható ez a módszer.

2.6.3. Lendkerék méretezése

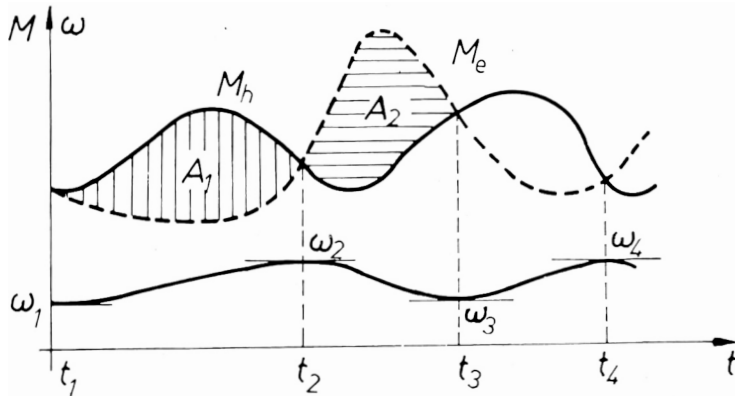
A valóságos szerkezetekben (gépekben) az M_h hajtónyomaték és az M_e ellenállásnyomaték az idő függvényeként változnak (pl. dugattyús gépek esetén). A szerkezet hol gyorsuló, hol lassuló mozgást fog végezni, minek eredményeként ω is változni fog az idő függvényében (94. ábra).

Vizsgáljuk meg, hogy ez a kedvezőtlen szögsebességváltozás adott hajtó- és ellenállásnyomaték esetén mitől függ, és hogyan lehet ezt csökkenteni!

Ha $M_h < M_e$ lassul, ha $M_h > M_e$ gyorsul a rendszer.

Állandósult üzemben $\omega_1 = \omega_3$, és a mozgást lüktető forgómozgásnak nevezzük (94. ábra).

94. ábra



A perdülettétel integrális alakjából:

$$\theta_z(\omega_2 - \omega_1) = \int_{t_1}^{t_2} (M_h - M_e) dt = A_1 ;$$

$$\theta_z(\omega_3 - \omega_2) = \int_{t_2}^{t_3} (M_h - M_e) dt = A_2 ;$$
(31)

összevonva a két egyenletet:

$$\theta_z = (\omega_3 - \omega_1) = A_1 - A_2 ,$$

mivel

$$\omega_3 - \omega_1 = 0 , \quad A_1 = A_2 .$$

Legyen

$$\omega_k = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$$
(32)

a lüktető forgómozgás közepes szögsebessége és

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_k}$$
(33)

a lüktető forgómozgás egyenlőtlenségi foka, amely a közepes szögsebességtől való eltérésre jellemző. A 94. ábra szerinti $\omega_1 = \omega_{\min}$, $\omega_2 = \omega_{\max}$, azaz a (33) alapján

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_{\max} - \omega_{\min} = \delta\omega_k,$$

másrészt a (31)-ből

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{A_1}{\theta_z},$$

tehát

$$\delta\omega_k = \frac{A_1}{\theta_z}. \quad (34)$$

Az egyenlőtlenségi fok tehát a nyomatéki viszonyokon kívül a közepes szögsebességtől és a forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomatéktól függ.

A tehetetlenségi nyomaték növelésével az egyenlőtlenségi fok csökkenthető.

A (34)-ből tehát

$$\theta_z = \frac{A_1}{\delta\omega_k}$$

a δ egyenlőtlenségi fokú lüktető mozgás biztosításához szükséges tehetetlenségi nyomaték.

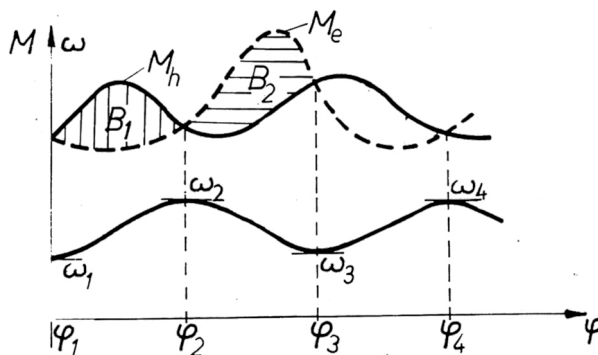
Ha a gép forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka ennél kisebb, lendítőkerék felszerelésével kell a szükséges θ_z értéket biztosítani.

Természetesen a θ_z értékét nem lehet korlátlanul növelni, mivel a perdülettétel szerint

($\theta_z \mathcal{E} = M_i$) igen nagy nyomaték lenne akkor szükséges a szerkezet indításához.

A valóságos szerkezetek (gépek) esetében nagyon sok esetben az M_h és M_e nyomatékok változása a φ szögelfordulás függvényében adottak (95. ábra).

95. ábra



Ekkor a munkatételből induljunk ki:

$$E_3 - E_1 = W_{13} ,$$

$$\frac{\Theta_z}{2} (\omega_3^2 - \omega_1^2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} (M_h - M_e) d\varphi = B_1 - B_2 ,$$

mivel

$$\omega_3 = \omega_1 ,$$

$$B_1 = B_2$$

lökötő forgómozgás esetében.

Határozzuk meg itt is az előirt δ egyenlőtlenségi fokú mozgást biztosító Θ_z értékét. A munkatételből

$$\frac{\Theta_z}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (M_h - M_e) d\varphi = B_1 , \quad (35)$$

ugyanakkor (32) és (33) felhasználásával

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_z}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) &= \Theta_z \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2} = \\ &= \Theta_z \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} (\omega_{\max} - \omega_{\min}) = \\ &= \Theta_z \omega_k \delta \omega_k = \Theta_z \delta \omega_k^2 . \end{aligned}$$

Ezt (35)-be helyettesítve, és onnan Θ_z -t kifejezve:

$$\Theta_z = \frac{B_1}{\delta \omega_k^2}$$

az előirt δ egyenlőtlenségi fokú mozgás biztosításához szükséges tehetetlenségi nyomaték.

2.6.4. Álló tengely körül forgó merev testek kiegyensúlyozása

A 2.3.4. pontból láthattuk, hogy mennyire fontos a nagyfordulatú alkatrészek kiegyensúlyozatlanságainak megszüntetése a csapágyakban ébredő dinamikus gerjesztőerők és a szerkezet rezgéseinek csökkentése érdekében.

2. 6. 4. 1. Statikus kiegyensúlyozás

A statikus kiegyensúlyozás célja, hogy a forgástengelyt súlyponti tengellyé tegyük, s ezáltal eltűnjön a forgó test inerciaerőrendszerének F_{II} eredő vektora (V. fejezet 2.3.4. pont).

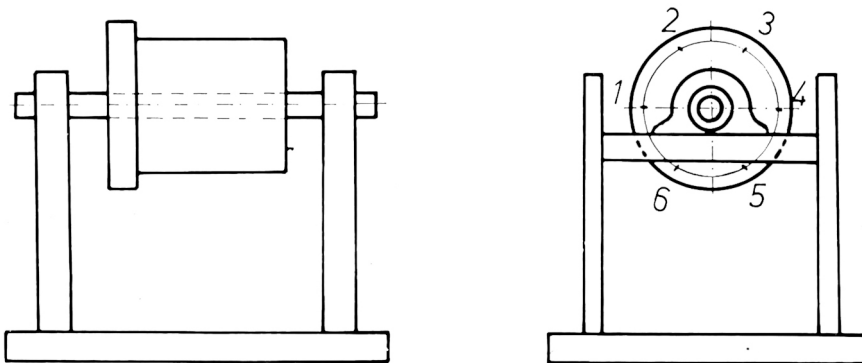
Vagyis a csapágyakban keletkező reakcióerők (\vec{A} és \vec{B}) nagysága és iránya csak a súlyerőtől függjön, és független legyen attól, hogy az alkatrész forog-e vagy sem. Ez úgy érhető el, hogy hozzáadunk a merev testhez m_s statikusan kiegyensúlyozó tömeget.

A gyakorlatban a gyártási pontatlanságok miatt mindig számítani kell az utólagos kiegyensúlyozás műveletére, amit már a gyorsan forgó alkatrészek gyártásakor is figyelembe vesznek oly módon, hogy pl. a test homloksíkjaiban a kiegyensúlyozó tömegek elhelyezésére alkalmas körgyűrű alakú hornyokat képeznek ki (96. ábra).

A statikus kiegyensúlyozás a forgó test súlypontja helyzetének ismeretében elméletileg egyértelműen elvégezhető. A gyakorlatban azonban a súlypont koordinátáinak pontos helyzetét a gyártási pontatlanságok miatt gyakorlatilag lehetetlen megállapítani. Ezért a gyakorlatban a statikusan kiegyensúlyozó tömeg nagyságát és helyét az úgynevezett statikus kiegyensúlyozás műveletét elvégezve határozzuk meg. A statikus kiegyensúlyozást lehetőleg a forgórész saját csapágyaiban, vagy azokhoz hasonló megtámasztásokban végezzük, hogy a kiegyensúlyozás és az üzemelés során keletkező forgástengelyek azonosak legyenek (96. ábra). A statikus kiegyensúlyozást két szakaszra bonthatjuk:

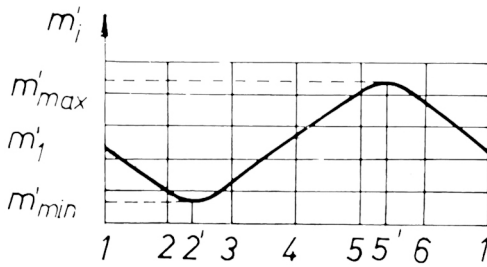
1. A forgó alkatrész homloklapfelületén arra alkalmas helyen (pl. a már említett, erre a célra kialakított horonyban) addig helyezünk találgatással kiegyensúlyozó tömegeket, amíg az alkatrész tetszőleges helyzetbe fordítva nyugalomban marad.

96. ábra

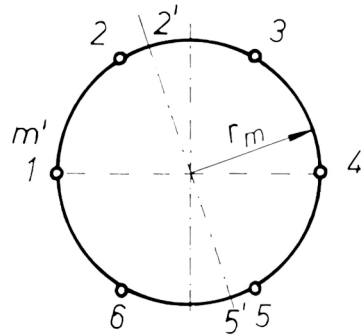


Ilyenkor a kiegyensúlyozatlan tömeg max. statikai nyomatéka a forgástengelyre már kisebb az M_g gördülési ellenállásnál és nem tudja a kiegyensúlyozandó alkatrészt mozgásba hozni.

97. ábra



98. ábra



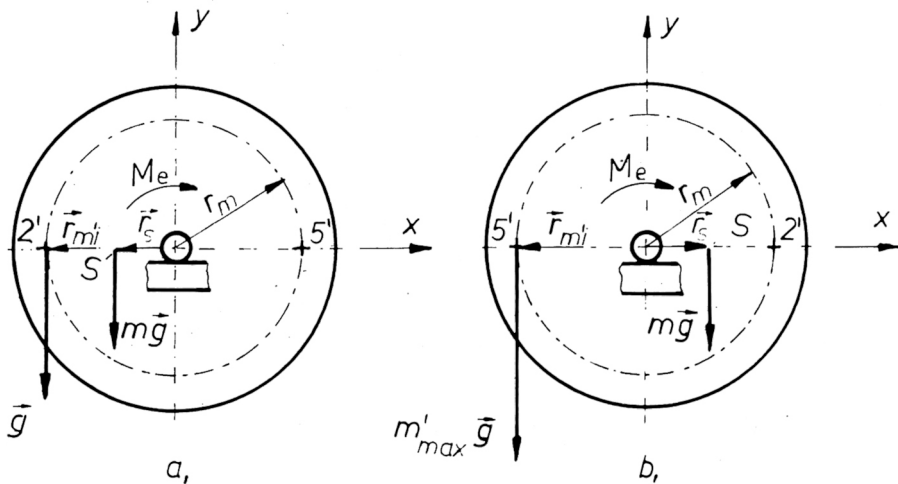
2. Ezek után a forgórész homloklfelületén azt a hornyot, ahol a kiegyensúlyozó tömegeket kívánjuk elhelyezni 6–8 egyenlő részre osztjuk (98. ábra). Állítsuk be a forgórészt úgy, hogy az 1–4 átmérő legyen vízszintes helyzetű (98. ábra). Fokozatosan növeljük az m'_1 tömeg értékét, amíg az alkatrész éppen megmozdul. Ezután vegyük le az m'_1 tömeget és fordítsuk el az alkatrészt egy osztással, hogy a 2–5 átmérő legyen vízszintes helyzetű és ismét határozzuk meg a testet nyugalmi állapotából éppen kimozdító m'_2 tömeg értékét.

Elvégezve a mérést minden osztásra és az eredményt diagramban felvéve a 97. ábrához hasonló függvényt kapunk.

Könnyen belátható, hogy az m'_{min} helyzetben a kiegyensúlyozatlan súlyerők forgástegelyre számolt nyomatéka maximális és az m'_{min} tömegre ható súlyerők nyomatékával azonos előjele (99.a. ábra).

Az m'_{max} helyzetben a kiegyensúlyozatlan súlyerők forgástengelyre számolt nyomatéka maximális és az m'_{max} tömegre ható súlyerők nyomatékával ellentétes előjelű (99.b. ábra).

99. ábra



A diagram felvételekor azokat az m'_i tömegeket határoztuk meg, melyek súlyerejének nyomatéka a kiegyensúlyozatlan forgórész súlyának forgástengelyre számított nyomatékával együtt éppen az M_e ellenállásnyomatékkal egyenlő.

Azaz az $m'_i \vec{g}$; $m \vec{g}$; \vec{M}_e ; erőrendszer egyensúlyi, ahol \vec{M}_e állandó, mivel határhelyeztet vizsgáltunk:

$$\vec{r}_{m,i} \times m'_i \vec{g} + \vec{r}_s \times m \cdot \vec{g} - \vec{k} M_e = \vec{0}, \quad (36)$$

ahol $\vec{r}_{m,i} = -\vec{i} r_m$; \vec{r}_s pedig a forgórész súlypontjának helyvektora.

m_l m_{rs}

Az (36) összefüggést a két határhelyzetre alkalmazva (97.a) ill. b) ábra), amikor

$$\vec{r}_s = -\vec{i} r_s \text{ ill. } \vec{r}_s = \vec{i} r_s :$$

$$-\vec{i} r_m \times m'_{\min} \vec{g} - \vec{i} r_s \times m \vec{g} - \vec{k} M_e = \vec{0},$$

$$-\vec{i} r_m \times m'_{\max} \vec{g} + \vec{i} r_s \times m \vec{g} - \vec{k} M_e = \vec{0}.$$

Ezeket a \vec{k} vektorral végigszorozva

$$r_m m'_{\min} g + r_s m g - M_e = 0, \quad (37)$$

$$r_m m'_{\max} g - r_s m g - M_e = 0. \quad (38)$$

Az (38)-ból (37)-t kivonva az ismeretlen M_e kiküszöbölhető, és csak r_s marad ismeretlen, ami innen már kifejezhető:

$$r_s = \frac{r_m}{m} \frac{m'_{\max} - m'_{\min}}{2} \quad (39)$$

A forgórész súlypontja $\vec{r}_s = \vec{i} r_s$ helyvektorának ismeretében (99.b) ábra) meghatározható az $\vec{r}_m = -\vec{i} r_m$ pontjában alkalmazandó kiegyensúlyozó m_s tömeg. Ennek tehát az

előzőek szerint akkorának kell lennie, hogy m és m_s tömeg tömegközéppontja az origóba, azaz a forgástengelybe essen:

$$\vec{0} = \frac{\vec{r}_m m_s + \vec{r}_s m}{m_s + m}.$$

Ebből \vec{r}_m és \vec{r}_s helyettesítése után

$$\vec{0} = -\vec{i} r_m m_s + \vec{i} r_s m \quad / \quad \vec{i}$$

$$m_s = \frac{mr_s}{r_m} .$$

Ebbe az (39) összefüggést helyettesítve az 5' pontban elhelyezendő kiegyensúlyozó tömeg a statikus kiegyensúlyozáshoz:

$$m_s = \frac{m'_{\max} - m'_{\min}}{2} .$$

A statikus kiegyensúlyozás a fentiekből láthatóan bármely xy síkkal párhuzamos metszetben történhet.

Ha a gördülő ellenállás, vagy az általa okozott hiba elhanyagolható, statikus kiegyensúlyozáskor a 2. alpontban leírtakat nem kell elvégezni. Levezetés nélkül is könnyen belátható, hogy a gördülő ellenállás által okozott hiba ebben az esetben

$$\Delta m_s = \frac{M_e}{r_m} \quad \text{nagyságúra adódik.}$$

Meg kell még jegyeznünk, hogy statikus kiegyensúlyozáskor a forgástengelyt mindig vízszintesre kell beállítani, és a tengely felfekvő átmérői csak egyformák lehetnek. Ha golyóscsapágyas bakokon végezzük a statikus kiegyensúlyozást, a gördülő ellenállás kicsi és egyszerűbb esetekben elhanyagolható.

2.6.4.2. Dinamikus kiegyensúlyozás

Hogy dinamikus kiegyensúlyozottá tegyük a forgórészt, a „z” tengelyt tehetetlenségi főtengelylé kell tenni.

A gyakorlatban a forgástest dinamikus kiegyensúlyozatlanságának mértéke, ami a gyártási pontatlanságokból adódik, pontosan nem határozható meg. Így a dinamikus kiegyensúlyozást is a statikus kiegyensúlyozáshoz hahasonlóan kísérleti úton, úgynevezett dinamikus kiegyensúlyozó gépeken végzik. Minden kiegyensúlyozó géptípusnál a dinamikus kiegyensúlyozatlanság mértékére, illetve megszűnésére a kiegyensúlyozatlan inerciaerők által keltett lengésekből lehet következtetni. A dinamikus kiegyensúlyozásra szolgáló géptípusok általában alkalmasak a forgó merev test statikus kiegyensúlyozására is. Az egyik, itt vizsgált kiegyensúlyozó géptípusnál az inerciaerő-rendszernek azt a tulajdonságát használjuk fel, hogy a forgástengely 0 pontjához redu-

kálva azt, \vec{F}_I eredő fiktív erőt és \vec{M}_{OI} fiktív eredő nyomatékot kapunk eredményül (lásd V.

fejezet 2.3.4. pont, 84.b) ábra).

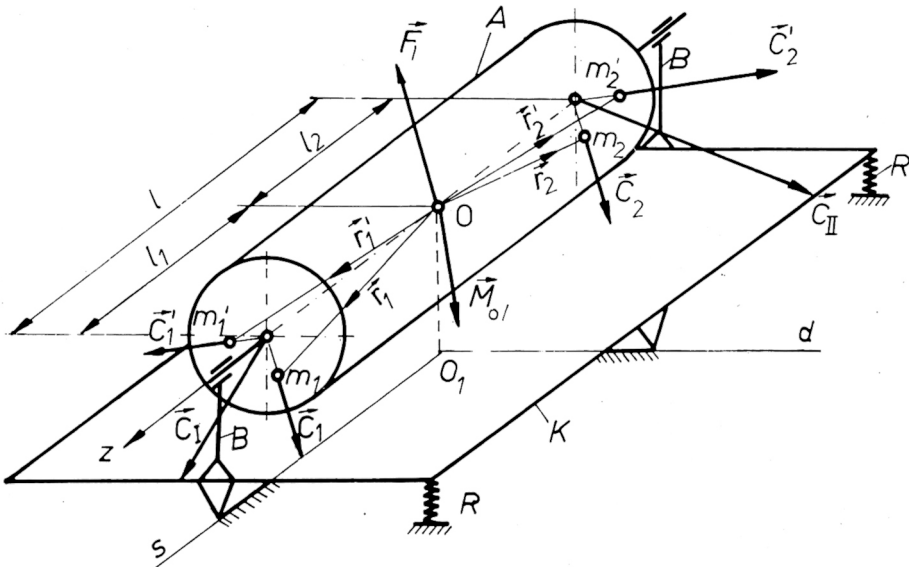
A kiegyensúlyozó gép egy alapkeretből (K) áll (100. ábra), mely két egymásra merőleges tengely körül végezhet lengő mozgást (s; d). A keretre két csapágybakot helyezünk (B), melyekre felerősítjük az A kiegyensúlyozandó alkatrészt. Kiegyensúlyozáskor az A alkatrészt $\omega_O = \text{const}$ szögsebességgel forgatjuk.

Az alkatrész z forgástengelye párhuzamos a gép s ún. statikus tengelyével. A d ún. dinamikus tengely erre merőleges. A z és s tengelyek által meghatározott sík merőleges a K alapkeret síkjára és egyben az s és d tengelyek által meghatározott síkra. Bocsássunk az s és d tengelyek O_1 metszéspontjából merőlegest a z tengelyre, így megkapjuk az 0 pontot, és képzeletben ide redukáljuk az inerciaerőrendszert. Mivel egyenletes ω_O szögsebességgel forgatjuk az A alkatrészt, a 2.3.4. pontban leírtak szerint az 0 pontba redukált inerciaerőrendszer

\vec{F}_I és \vec{M}_{O1} vektorai merőlegesek lesznek a z tengelyre és ezzel az s tengelyre is.

Ugyanakkor a 2.6.4. pontban elmondottak szerint az \vec{F}_I és \vec{M}_{O1} vektorok az alkatrésszel együtt ω_O szögsebességgel forogni fognak a z tengely körül. Ebből következően a forgó \vec{F}_I erő a K keretet csak az s tengely körüli, a forgó \vec{M}_{O1} erópár pedig csak a d tengely körüli lengésre kényszeríti. Akkor lesz a 2.6.4. pont szerint az alkatrészünk statikusan és dinamikusan is kiegyensúlyozott, ha $\vec{F}_I = \vec{0}$ és $\vec{M}_{O1} = \vec{0}$, azaz a lengések megszűnnek.

100. ábra



Ezen a gépen tehát egymás után a statikus és dinamikus kiegyensúlyozás is elvégezhető.

Ha a d tengelyt mereven rögzítjük, akkor a rendszer csak az s tengely körül végezhet lengéseket az \vec{F}_I erővektor hatására.

Ha az s tengelyt rögzítjük mereven, akkor a rendszer csak a d tengely körül végezhet lengéseket az \vec{M}_{OI} nyomatékvektor hatására. Az R rugók a lengések fenntartására szolgálnak.

A kiegyensúlyozást a d tengely rögzítésével kezdjük, majd egyenletes ω_0 szögsebességgel forgásba hozzuk a kiegyensúlyozandó testet.

A rendszer az \vec{F}_I erővektor hatására lengésbe jön. A lengéseket a homloklapfelületeken elhelyezett m_1 és m_2 tömegekkel kompenzáljuk. Ezt akkor érjük el, ha $\vec{C}_1 + \vec{C}_2 = -\vec{F}_I$, ahol \vec{C}_1 és \vec{C}_2 – a kiegyensúlyozó tömegekre ható inercia erők. Ahhoz, hogy az m_1 és m_2 tömegek az inerciaerő-rendszer \vec{M}_{OI} eredő nyomatékát ne módosítsák, a tömegek nagyságát és helyét úgy kell megválasztani, hogy $\vec{r}_1 \times \vec{C}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{C}_2 = \vec{0}$ legyen (100. ábra).

Ezt elérhetjük, ha az m_1 ; m_2 tömegek és a z forgástengely egy síkba esnek és

$$C_1 \cdot \ell_1 = C_2 \cdot \ell_2.$$

Az így megválasztott tömegekkel a statikus kiegyensúlyozást elvégeztük. Az eredményt a lengések megszűnéséből érzékeljük.

Ha ezután az s tengelyt rögzítjük, a rendszer a d tengely körül leng az \vec{M}_{OI} nyomaték hatására. A homloklapfelületen elhelyezett m'_1 és m'_2 tömegekkel az \vec{M}_{OI} nyomatékvektort is kiegyensúlyozhatjuk. A lengések akkor szűnnek meg, ha

$$\vec{r}'_1 \times \vec{C}'_1 + \vec{r}'_2 \times \vec{C}'_2 + \vec{M}_{OI} = \vec{0},$$

ahol \vec{C}'_1 és \vec{C}'_2 az m'_1 és m'_2 tömegekre ható inerciaerők. Hogy az inercia-erőrendszer eredő erővektora közben ne változzon, az m'_1 és m'_2 tömegek nagyságát úgy kell megválasztanunk, hogy $\vec{C}'_1 + \vec{C}'_2 = \vec{0}$ legyen. Ezt elérhetjük, ha az m'_1 ; m'_2 tömegek és a z tengely egy síkba esnek, az m'_1 és m'_2 tömegek a z tengely különböző oldalain vannak és $C'_1 = C'_2$ (100. ábra).

Merevnek tekinthető testek esetében a kiegyensúlyozást az alkatrész rezonancia-frekvenciáján végzik. Kevésbé merev testek esetében a kiegyensúlyozás csak az üzemi fordulatszámom végezhető el, mert az inerciaerők a forgórész tengelyét hajlítják és az alakváltozások pedig az inerciaerő-rendszert változtatják meg, s így a kiegyensúlyozás mértéke a fordulatszám függvényévé válik.

2.7. FELADATOK MEREV TESTEK CSÚSZÁSMENTES GÖRDÜLÉSÉRE

Az ilyenfajta problémák vizsgálata során kétféle kérdés szokott felvetődni. Mivel általában arra törekszünk, hogy szerkezeteinkben ne jöjjön létre csúszás az egymáson elgördülő alkatrészek között, az első feladat a csúszásmentes gördülés feltételeinek, a második feladat az így mozgó testek kinematikai és kinetikai jellemzőinek meghatározása.

A megoldás során először feltételezzük, hogy a vizsgált testek nem csúsznak meg egymáson, tiszta gördülés jön létre. Ennek feltételezése alapján a mozgásra jellemző egyes kinematikai jellemzők között az *V. fejezet* 1.3.4. pontja szerint meghatározott kapcsolat áll fenn. Ezek felhasználásával a kinetikai alapegyenletekből (impulzus és perdülettel) a gördülő alkatrészek érintkezési

pontjában fellépő \vec{K} kényszererő N és S komponensei meghatározhatók. Az így meghatározott kényszererő-komponensek azonban a valóságban csak akkor léphetnek fel, ha köztük az

$S \leq \mu_0 N$ Coulomb-féle egyenlőtlenség fennáll. Ha ez nem áll fenn, az egyenleteink felírása során tett feltételezésünk nem volt helyes, azaz a test nemcsak gördül, hanem meg is csúszik.

Ha a az $S \leq \mu_0 N$ összefüggés fennáll a kiszámított kényszererő komponensekre, akkor az előbb említett egyenletekből a gördülő test kinematikai jellemzői is kiszámíthatók.

Ezen gondolatmenet után a számítás végrehajtását konkrét példákon mutatjuk be.

27. feladat:

Vasúti mozdony egyik tengelyére jutó tengelynyomás $G_t = 2 \cdot 10^4$ N. A tengelyen levő kerekek sugara $r = 0,5$ m. A kerékpár és a tengely együttes tehetetlenségi nyomatéka a_2 súlyponton átmenő

forgástengellyel párhuzamos tengelyre $\Theta_S = 137$ kg m², tömegük $m = 1095$ kg. A gördülő el-

lenállás karja $k = 5 \cdot 10^{-5}$ m, a sín és a kerekek közti surlódási tényező $\mu_0 = 0,23$.

A mozdony $\alpha = 1^\circ$ hajlásszögű lejtőn halad fölfelé. A vizsgált tengelyre ható $M = 3000$ Nm nyomaték esetén megcsúsznak-e a kerekek (101. a. ábra)?

A kerékpárra ható erőrendszer: \vec{M} ; \vec{G}_t ; \vec{K} (101. b. ábra). Az erők meghatározásához írjuk

fel az impulzustételt (A kerékpárt a tengellyel egyetlen merev testként vizsgáljuk):

$$\vec{I} = \vec{G}_t + \vec{K}.$$

Ezt pályairányú, majd arra merőleges \vec{i} és \vec{j} egységvektorokkal végigszorozva:

$$m a_e = -G_t \sin \alpha + 2 S, \quad (40)$$

$$0 = 2 N - G_t \cos \alpha.$$

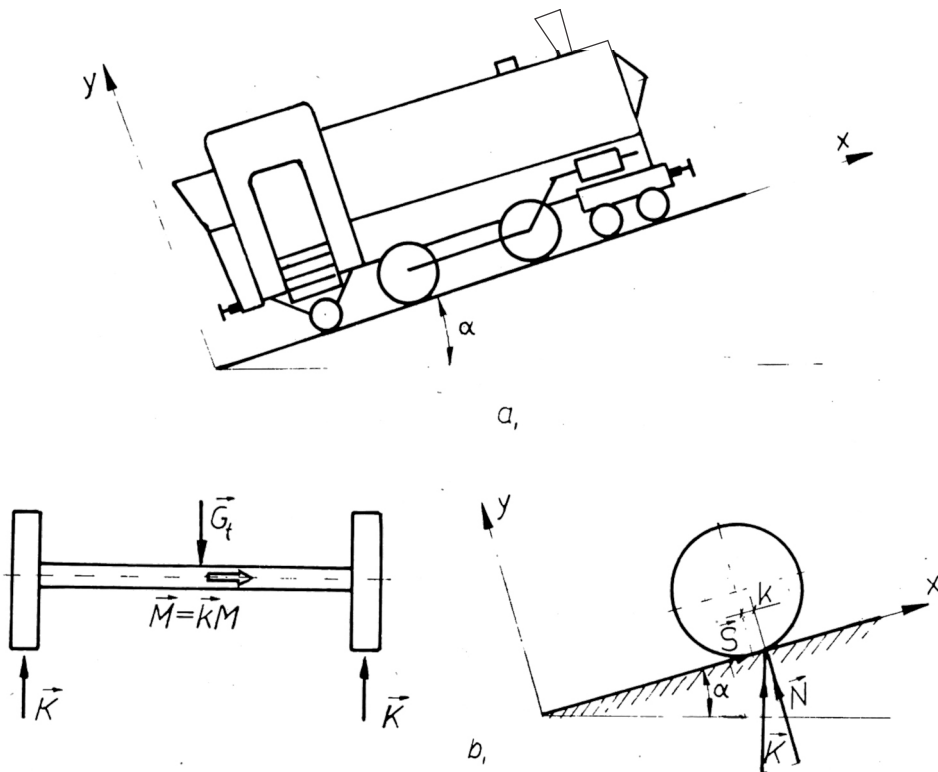
Az utóbbiból

$$N = \frac{G_t \cos \alpha}{2},$$

$$N = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0,999}{2} = 1 \cdot 10^4 \quad [\text{N}].$$

Az elsőből pedig látszik, hogy S meghatározásához ismernünk kell a súlypont a_c gyorsulásának értékét. Ennek érdekében írjuk fel a perdülettételt a súlyponton átmenő, forgástengellyel párhuzamos tengelyre (101. b. ábra)!

101. ábra



$$\dot{\mathcal{H}}_S = M - 2 \text{ kN} - 2 \text{ rS},$$

$$\Theta_S \mathcal{E} = M - 2 \text{ kN} - 2 \text{ rS}.$$

Behelyettesítve az N értékét és figyelembe véve a gördülés esetére érvényes

$$\omega = \frac{v_e}{r}; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \frac{a_e}{r}$$

kinematikai összefüggést (lásd 21. feladat).

$$\Theta_s \frac{a_e}{r} = M - 2k \frac{G_t \cos \alpha}{2} - 2Sr.$$

Ebből

$$a_e = \frac{Mr - k r G_t \cos \alpha - 2Sr^2}{\Theta_s}. \quad (41)$$

Ezt behelyettesítjük S meghatározása érdekében a (40)-be

$$\frac{mMr - mkrG_t \cos \alpha - 2mSr^2}{\Theta_s} =$$

$$= -G_t \sin \alpha + 2S.$$

Rendezés után az

$$S = \frac{m r (M - k G_t \cos \alpha) + G_t \Theta_s \sin \alpha}{2(\Theta_s + m r^2)}$$

összefüggést kapjuk. A számszerű értékek behelyettesítésével:

$$S = \frac{1095 \cdot 0,5(3000 - 5 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,999) + 2 \cdot 10^4 \cdot 137 \cdot 0,017}{2(137 + 1095 \cdot 0,25)},$$

$$S = 2050 \text{ [N]}.$$

$$\mu_o N = 0,23 \cdot 10^4 \text{ [N]} = 2300 \text{ [N]}.$$

Tehát $S < \mu_o N$, ami azt jelenti, hogy az adott nagyságú nyomaték mellett a kerekek még nem

csúsznak meg. Mivel feltételezésünk helyes volt és gördülés van, így az eddig felírt összefüggések is helyesek. Tehát (55)-ből a merev test súlypontjának gyorsulása számítható:

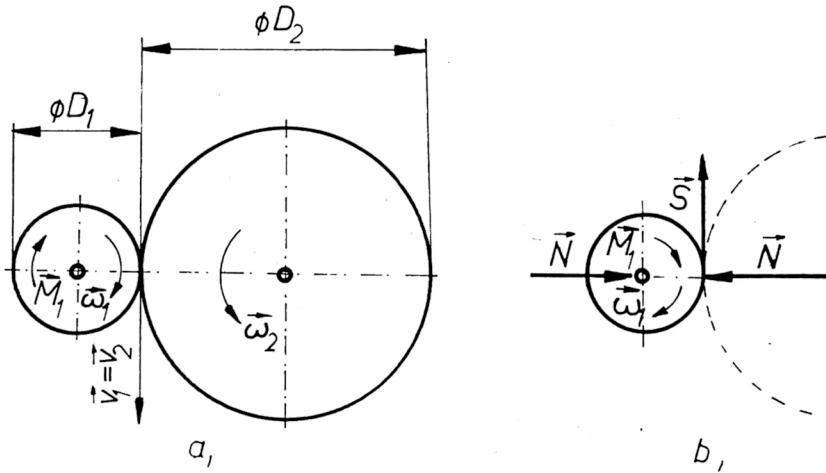
$$a_e = \frac{3000 \cdot 0,5 - 5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,999 - 2 \cdot 2050 \cdot 0,5^2}{137}$$

$$a_e = 3,46 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

28. feladat:

Egy varrógép $D_2 = 500$ mm átmérőjű lendítőkerekét $D_1 = 21,4$ mm átmérőjű surlódókerékkel $n_2 = 60$ l/perc fordulatszámmal hajtja egy $P_1 = 147$ mN/s teljesítményű, $n_1 = 1400$ l/perc fordulatszámú villamosmotor (102. a. ábra).

102. ábra



Mekkora legyen a kerekeket összeszorító erő $\mu_0 = 0,2$ surlódási tényező esetén, hogy a két kerék ne csússzon meg egymáson? A szorítóerő meghatározásához vizsgáljuk külön a meghajtó kereket, a lendítőkerekről átadódó erő figyelembevételével (102. b. ábra). Írjuk fel a perdülettételezést az 1. kerék forgástengelyére (a):

$$\dot{\tilde{\pi}}_a = M_a, \quad \text{azaz}$$

$$\Theta_a \varepsilon = M_1 - R_1 S. \quad (42)$$

Mivel $n_1 = \text{áll.}$, $\vec{\omega}_1 = \text{áll.}$, az $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$, tehát (42)-ből

$$S = \frac{M_1}{R_1}. \quad (43)$$

Az M_1 hajtónyomaték a teljesítmény és a fordulatszám ismeretében számítható

$$M_1 = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{P_1}{2\pi n_1} = \frac{147}{2 \cdot 3,14 \cdot \frac{1400}{60}} = 1 \text{ [mN]}.$$

Ezt felhasználva a surlódóerő (43)-ból:

$$S = \frac{1}{10,7 \cdot 10^{-3}} = 93,5 \text{ [N]}.$$

A csúszásmentes gördülés feltétele, mint láttuk: $S \leq \mu_0 N$, vagyis

$$N \geq \frac{S}{\mu_0} = \frac{93,5}{0,2} = 467,5 \text{ [N]}.$$

Tehát a csúszásmentes gördülés megvalósításához a minimális összeszorító erő 467,5 N. kell legyen.

VI. MEREV TESTEBŐL ÁLLÓ SZERKEZETEK MOZGÁSA

1. Merev testekből álló szerkezetek kinematikája

1.1. MEREV TESTEBŐL ÁLLÓ SZERKEZETEK SZABADSÁGFOKA

Általánosságban a rendszer szabadságfokainak számán azoknak a független változóknak a számát értjük, amelyek megadása a rendszer helyzetének egyértelmű meghatározásához szükséges (lásd V.1.1.1. pont és Statika c. tárgy). Szabad testekből álló rendszer szabadságfokát megkapjuk, ha merev testek i számát szorozzuk térbeli esetben hattal, síkban hárommal. $s = 6i$, illetve $s = 3i$, i szabad merev testből álló rendszer szabadságfoka térben, illetve síkban. A merev testekből álló szerkezetekben a merev testek szabadságfokainak egy részét a merev testek mozgását akadályozó kényszerek lekötik. Az i merev testből álló szerkezet szabadságfokát megkapjuk, ha az i szabad merev testből álló rendszer szabadságfokainak számából levonjuk a merev testeket rendszerre összekötő kényszerek által lekötött szabadságfokok számát.

Térben $s = 6i - s_k$,

ahol

s – a szerkezet szabadságfoka

Síkban $s = 3i - s_k$,

s_k – a kényszerek által lekötött szabadságfokok száma

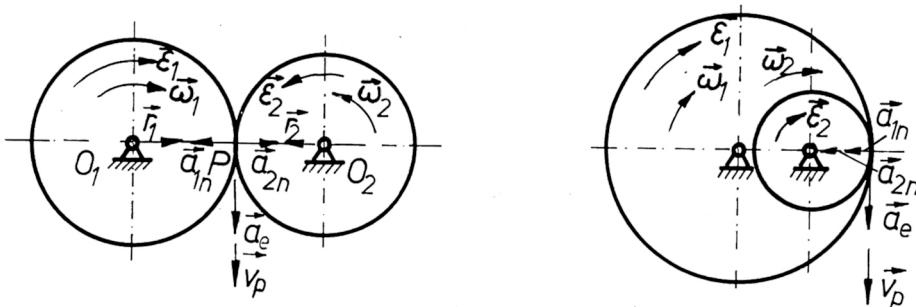
1.2. MOZGÁS-ÁTVITEL MEREV TESTEBŐL ÁLLÓ NÉHÁNY EGYSZERŰ SZERKEZETBEN

A gyakorlatban leggyakrabban egyszabadságfokú szerkezetekkel találkozunk. Itt az egyik merev test (meghajtott) mozgásviszonyait ismerjük, a többi elem mozgásviszonyai meghatározhatók.

1.2.1. Fogaskerék hajtás

Merev test álló tengely körüli forgómozgását alakítja át egy másik merev test álló tengely körüli forgómozgásává. Megkülönböztetünk külső és belső fogazású fogaskerék hajtást. Külső fogazásnál a forgásirány ellentétes, belső fogazásnál azonos (103. ábra).

103. ábra



A fogaskerék hajtás szabadságfoka

$$s = 3i - s_k = 3 \cdot 2 - (2+2+1) = 1 ,$$

ahol a 0_1 és 0_2 csukló két-két, P pontbeli sima felületen való érintkezés egy szabadságfokot köt le.

Sebességviszonyok:

A fogak érintkezési pontjában a két fogaskerék pontjainak sebessége azonos, mert az adott időpillanatban együtt mozognak.

$$\vec{v}_p = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 .$$

Mivel \vec{v}_{p1} és \vec{v}_{p2} irányai megegyeznek és $\vec{\omega} \perp \vec{r}_i$, ezért

$$|\vec{v}_p| = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 , \quad (1)$$

legyen $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ a hajtás módosítása, akkor (1) figyelembevételével

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_1}{i_{12}} , \quad (2)$$

ahol

$$i_{12} = \frac{r_2}{r_1} . \quad (3)$$

Gyorsulásviszonyok:

A fogak érintkezési pontjában a két fogaskerék pontjainak érintőirányú gyorsulása is azonos:

$$a_e = r_1 \cdot \mathcal{E}_1 = r_2 \cdot \mathcal{E}_2 , \quad (4)$$

innen (3) felhasználásával

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathcal{E}_1}{i_{12}} . \quad (5)$$

A gyorsulásvektorok normális irányú összetevői (1) figyelembevételével:

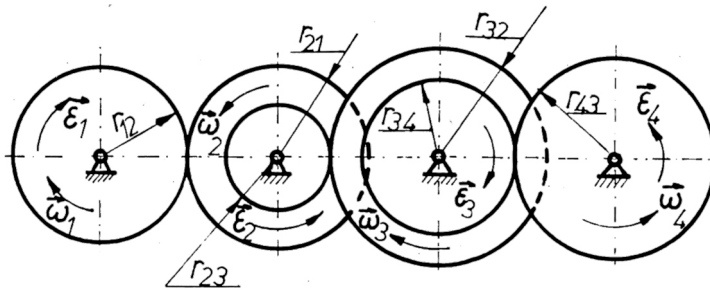
$$a_{n1} = \frac{v_p^2}{r_1} = r_1 \omega_1^2; \quad a_{n2} = \frac{v_p^2}{r_2} = r_2 \omega_2^2; \quad a_{n2} = \frac{a_{n1}}{i_{12}} .$$

1.2.2. Többfokozatú hajtóművek

Példának nézzünk meg egy háromfokozatú hajtóművet (104. ábra). Ennek szabadságfoka $s = 3i - s_k = 3 \cdot 4 - (4 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 1$. A hajtómű-eredő módosítása:

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34}, \quad (6)$$

104. ábra



ahol a VI. fejezet 1.2.1. pontja alapján

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{21}}{r_{12}}; \quad i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_{32}}{r_{23}}; \quad i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_{43}}{r_{34}},$$

így végül

$$\omega_4 = \frac{\omega_1}{i_{14}} = \frac{\omega_1}{\frac{r_{21}}{r_{12}} \cdot \frac{r_{32}}{r_{23}} \cdot \frac{r_{43}}{r_{34}}}, \quad (7)$$

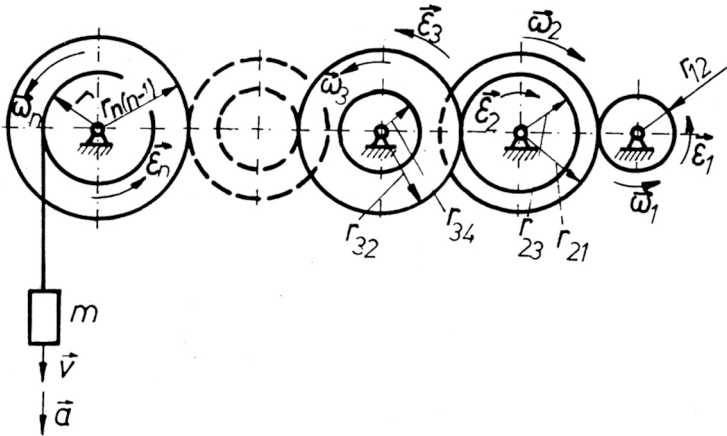
$$\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_1}{i_{14}} = \frac{\varepsilon_1}{\frac{r_{21}}{r_{12}} \cdot \frac{r_{32}}{r_{23}} \cdot \frac{r_{43}}{r_{34}}}. \quad (8)$$

1.2.3. Emelő szerkezet (105. ábra)

A többfokozatú hajtómű első tengelyét egy motor hajtja utolsó tengelyéhez egy kötéldob kapcsolódik, melyről a kötélnél csúszás nélkül tekeredik le és engedi v sebességgel lefelé az m tömegű terhet. Az (1) és (7) illetve (4) és (8) összefüggések alapján:

$$v = \omega_n \cdot r = \frac{r \cdot \omega_1}{i_{ln}}$$

105. ábra



$$a = \varepsilon_n \cdot r = \frac{r \cdot \varepsilon_1}{i_{ln}}$$

Ezen összefüggésekben i_{ln} -et (6) kifejezéssel értelmezhetjük.

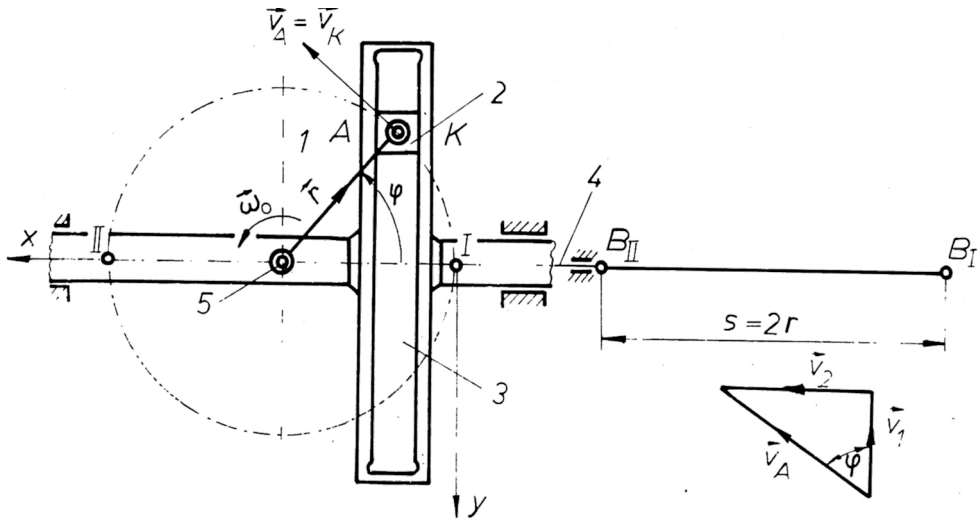
1.2.4. Kulisszás hajtómű

Vázlatát a 106. ábra mutatja. A hajtómű forgómozgásnak haladó mozgássá történő átalakítására szolgál. A szerkezet szabadságfoka: $s = 3i - s_k = 3 \cdot 3 - (3 \cdot 2 + 2) = 1$. Az ω_O szögsebességgel forgó r

sugarú I forgattyúkar. A forgattyúcsapja csuklósan a 2 kulisszakörhöz kapcsolódik. A kulisszakör a 3 kulisszában függőlegesen fel-alá csúszik.

A forgattyúcsap elmozdulásának vízszintes vetületét viszi át a kulissza a hozzákapcsolt és vízszintes irányban megvezetett 4 kulisszarúdra. A kulissza középsíkjában az I és II holtpontok közötti távolság éppen a hajtómű s lökete. A hajtómű az s löketnek megfelelő utat az 5 forgattyús tengely fél fordulata alatt teszi meg. A forgattyús tengely egy fordulata alatt a hajtómű két löketnek megfelelő utat tesz meg, azaz az I. holtpontból indulva a II. holtpontra keresztül oda tér vissza.

106. ábra



Vizsgáljuk meg a sebességviszonyokat a forgattyús tengely y szögelfordulásával megadott helyzetben. A forgattyúkarnak a kulisszakő K pontjával egybeeső A pontja minden időpillanatban a K ponttal azonos sebességgel és gyorsulással mozog, mert a két test ebben a pontban egy forgattyúcsappal van összekapcsolva: $\vec{v}_A = \vec{v}_K$.

A kulisszakő összetett mozgást végez. Egyrészt a kulisszában y tengely irányában mozdul el, másrészt a kulisszával együtt x tengely irányában. Az elemi haladó mozgások V. fejezet 1.2.2.1. pontjában tárgyalt összetétele értelmében, a kulisszakő K pontjának és vele együtt a forgattyúkar A pontjának pillanatnyi sebessége a

$$\vec{v}_k = \vec{v}_A = \vec{v}_y + \vec{v}_x \quad (9)$$

összefüggéssel határozható meg (106. ábra), ahol \vec{v}_y a kulisszakő y irányú mozgásának pillanatnyi sebessége a kulisszában, \vec{v}_x pedig a kulissza x irányú pillanatnyi sebessége. Éppen ezen utóbbi meghatározása a feladatunk.

Végezzon a forgattyúkar egyenletes forgómozgást $\vec{\omega}_0 = \vec{k} \omega_0$ szögsebességgel. Ekkor a 106. ábrán bejelölt φ szög $\varphi = \omega_0 t$ összefüggéssel adható meg (III. fejezet 1.2.2. pont) és $\vec{v}_A = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}$. Mivel $\vec{\omega}_0$ merőleges \vec{r} vektorra $|\vec{v}_A| = r \omega_0$. Ezek alapján a kulissza $\vec{v}_B = \vec{v}_x = \vec{i} v_B$ sebessége a 106. ábra vektorsokszöge alapján meghatározható: $v_B = v_A \sin \varphi = r \omega_0 \sin \omega_0 t$. (10)

Az $\vec{a}_B = \vec{i} a_B$ gyorsulás-idő függvény ezek után könnyen meghatározható:

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = r \omega_0^2 \cos \omega_0 t = r \omega_0^2 \cos \varphi. \quad (11)$$

Meghatározhatjuk a kulissza még hiányzó, harmadik $x_B(t)$ elmozdulás-idő foronómiai görbéjét is. Mivel

$$v_B = \frac{dx_B}{dt},$$

$$x_B = \int_0^{\omega_0 t} v_B dt = r \omega_0 \int_0^{\omega_0 t} \sin \omega_0 t dt = r \omega_0 \left[-\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right]_0^{\omega_0 t},$$

$$x_B = r (1 - \cos \omega_0 t) = r(1 - \cos \varphi).$$

A kulisszazozgás foronómiai görbéit a (10)–(12) összefüggések alapján a 107. ábra mutatja. Ezekből látszik, hogy a kulissza harmonikus lengőmozgást végez.

A foronómia-görbéket megadhatjuk a lökethossz függvényében is. A (12)-ből

$$\begin{aligned} \frac{x_B}{r} &= 1 - \cos \varphi, \\ \cos \varphi &= 1 - \frac{x_B}{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

A (10)-ből
$$v_B = r \cdot \omega_0 \cdot \sin \varphi = r \cdot \omega_0 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}.$$

Ebbe (13)-at helyettesítve:

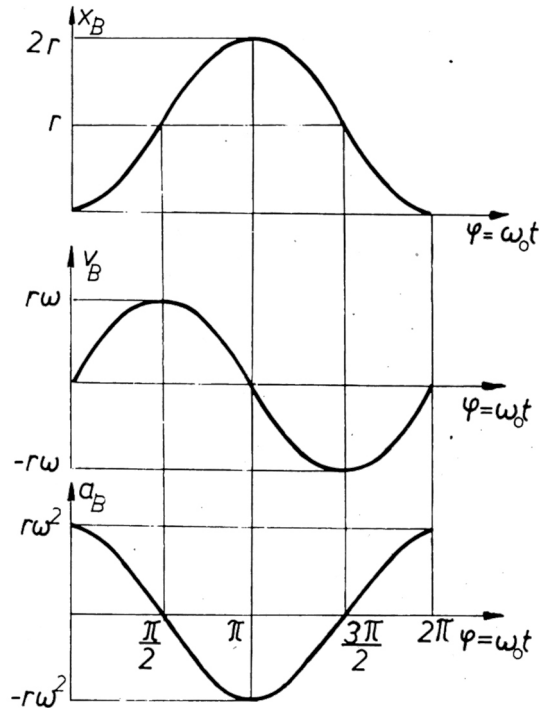
$$v_B = r \cdot \omega_0 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x_B}{r}\right)^2}.$$

Egységnyi ω_0 tartozóan p szögsebességhez tartozóan pedig ($\omega_0 = 1$)

$$\frac{v_B}{r} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x_B}{r}\right)^2},$$

$$\frac{v_B^2}{r^2} = 1 - \left(1 - \frac{x_B}{r}\right)^2,$$

107. ábra



$$\frac{v_B^2}{r^2} = 1 - \frac{(r-x_B)^2}{r^2},$$

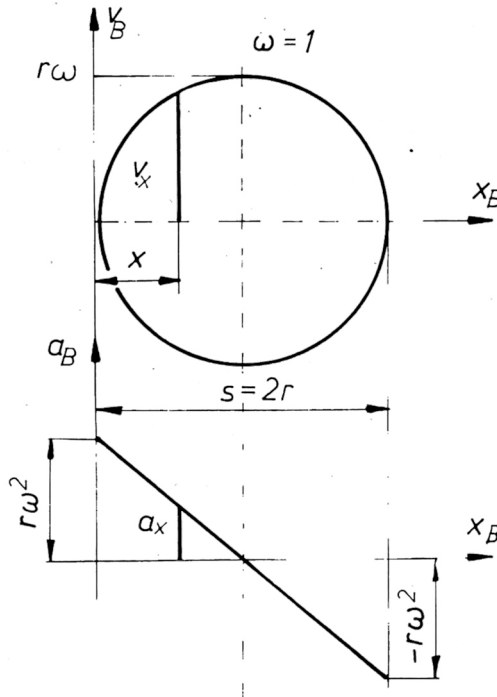
$$v_B^2 + (r-x_B)^2 = r^2,$$

amiből láthatjuk, hogy a kulissza sebességét a löket függvényében egy kör ábrázolja (108. ábra). A (11)-ből (13) behelyettesítésével

$$a_B = r \cdot \omega_0^2 \cos \varphi = r \cdot \omega_0^2 \left(1 - \frac{x_B}{r}\right) = r \omega_0^2 - \omega_0^2 x_B = \omega_0^2 (r - x_B),$$

ami egy egyenes egyenlete (108. ábra).

108. ábra



1.2.5. Forgattyús hajtómű

A kulisszás hajtóműhöz hasonlóan a forgattyús hajtómű is forgómozgás egyenes vonalú haladó mozgássá való átalakítására szolgál (109. ábra). A szerkezet szabadságfoka $s = 3i - s_k = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1$. Az ω_0 szögsebességgel forgó r sugarú l forgattyú A forgattyúcsapja csuklósan kapcsolódik

a 2 hajtókarhoz, míg a hajtókar B végpontja csuklósan a vízszintes x irányban megvezetett dugattyúhoz kapcsolódik.

Határozzuk meg a dugattyú mozgásának jellemzőit! Vizsgáljuk a síkmozgást végző AB merev testet, mely sebességállapota A pontjának \vec{v}_A sebességével és B pontja sebességének irányával

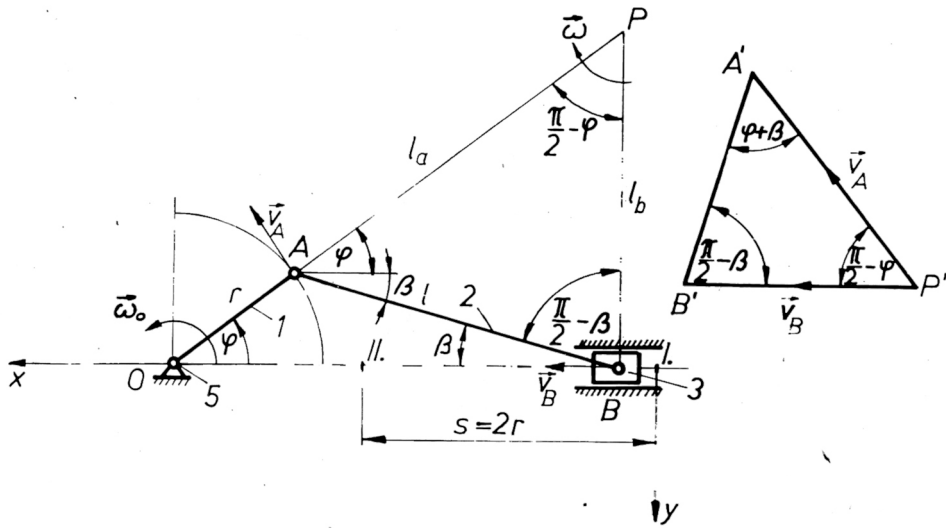
adott. Így P sebességpólusa ismert, és sebességábrája is megrajzolható (109. ábra), a szerkesztés

menetét az alábbiak szerint követve pedig a $\vec{v}_B = \vec{i} v_B$ számítható (V. fejezet 1.3.3. pont).

Ha a forgattyú a kulisszás hajtóműnél tárgyalt esethez hasonlóan $\vec{\omega}_0 = \vec{k} \omega_0$ szögsebességű egyenletes forgómozgást végez, \vec{v}_A és φ az ott leírtak szerint határozható meg:

$|\vec{v}_A| = v_A = r \omega_0$; $\varphi = \omega_0 t$. A $P'A'B'\Delta$ -re felírt sinus tételből (109.b ábra):

109. ábra



$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \frac{\sin\varphi \cos\beta + \cos\varphi \sin\beta}{\cos\beta} = \sin\varphi + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \cos\varphi. \quad (14)$$

A $\sin\beta$ az $ABO \Delta$ -ból határozható meg sinustétellel:

$$\frac{r}{l} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}, \quad \sin\beta = \frac{r}{l} \sin\varphi.$$

Ezt (14)-be helyettesítve és v_A értékét helyettesítve rendezés után:

$$v_B = r\omega_0 \left(\sin\omega_0 t + \frac{\frac{r}{l} \sin\omega_0 t}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\omega_0 t}} \cos\omega_0 t \right) \quad (15)$$

a B pont sebességének abszolút értéke az idő függvényében.

A B pont gyorsulását vagy a gyorsulásra szerkesztésével és az ez alapján végzett számítás-sal határozhatjuk meg, vagy a $v_B = v_B(t)$ sebességfüggvény differenciálásából.

A gyakorlatban $\lambda = \frac{r}{l} \approx \frac{1}{4} \sim \frac{1}{5}$ értékű, és mivel $\sin^2\omega_0 t \leq 1$, így

$\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\omega_0 t \ll 1$, tehát mellette elhanyagolható, azaz (15)-be a gyökös kifejezés egy-

nek tekinthető.

Tehát a dugattyú sebessége és gyorsulása –

$$\sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \sin^2 \omega_0 t$$

figyelembevételével, valamint a $\lambda = \frac{r}{\ell}$ hányados bevezetésével – közelítéssel:

$$v_B \approx r \omega_0 \left(\sin \omega_0 t + \frac{\lambda}{2} \sin 2 \omega_0 t \right), \quad (16)$$

$$a_B \approx \frac{dv_B}{dt} = - r \omega_0^2 \left(\cos \omega_0 t + \lambda \cos 2 \omega_0 t \right). \quad (17)$$

Az 1.2.4. pontban leírtakhoz hasonlóan meghatározható ezekből a dugattyú elmozdulás-idő függvénye is:

$$\vec{r}_B = \vec{i} x_B = \vec{i} \int_0^{\omega_0 t} v_B dt,$$

$$x_B = \int_0^{\omega_0 t} r \omega_0 \left[\sin \omega_0 t + \frac{\lambda}{2} \sin 2 \omega_0 t \right] dt.$$

Az integrálás elvégzése és az integrálási határok helyettesítése után:

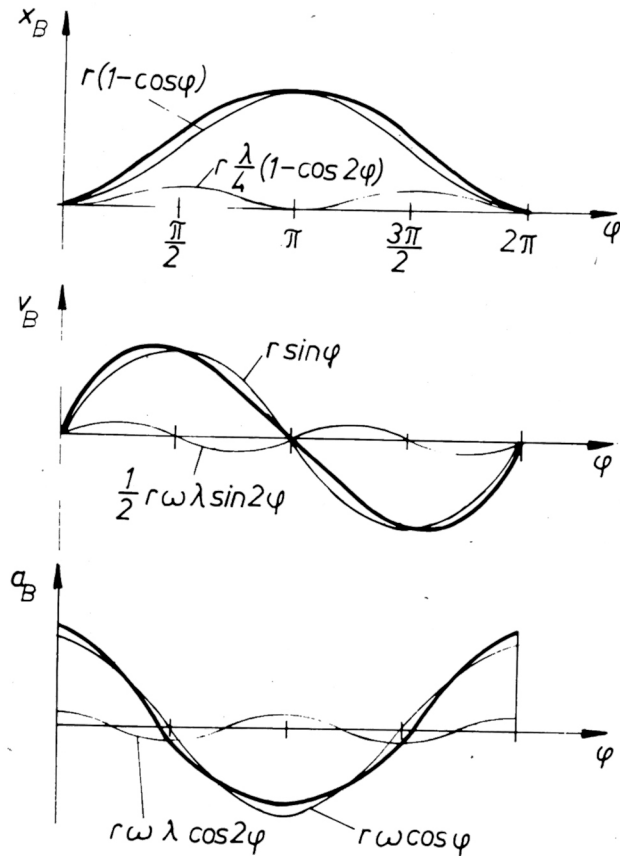
$$x_B = r \left[(1 - \cos \omega_0 t) + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2 \omega_0 t) \right]. \quad (18)$$

A (16), (17), (18) összefüggések a gyakorlat számára jó közelítéssel megadják a hajtórúd B pontjának mozgásjellemezőit. Láthatjuk, hogy mindhárom összefüggés két trigonometrikus függvény összegeként képezhető. Ezek első tagja egyezik a kulisszás hajtóműre, vonatkozó megfelelő (10), (11), (12) összefüggésekkel. A második a mozgásviszonyokat torzító zavaró tag, mely

$\lambda = \frac{r}{\ell} = 0$ esetén, azaz végtelen hajtókar alkalmazásánál tűnik el.

A 110. ábrán a (16), (17) és (18) összefüggések felhasználásával felrajzoltuk a foronómiai görbéket. Külön feltüntettük vékony vonallal rajzolva a két trigonometrikus függvényt, melyek összegeként adódtak a vastag vonallal rajzolt foronómiai görbék.

110. ábra



Természetesen a kulisszás hajtóműnél elmondottakhoz hasonlóan sebesség és gyorsulás megadhatók az elmozdulás függvényében is, ha az

$$x_B = f_1(\omega t) \quad x_B = f_1(\omega t)$$

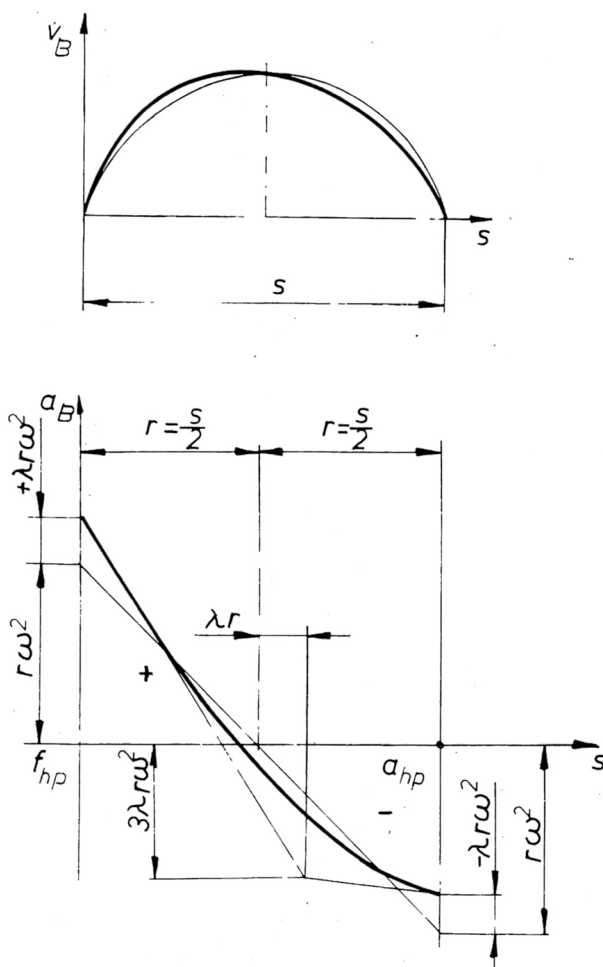
ill.

$$v_B = f_2(\omega t) \quad a_B = f_3(\omega t)$$

függvényekből ωt paramétert kizárjuk.

Analitikus úton a feladat megoldása ez esetben már nehézkes. Viszont a felrajzolt foronómiai görbékből grafikus úton a $v_B = f_4(x_B)$; $a_B = f_5(x_B)$ függvények viszonylag könnyen felrajzolhatók (111. ábra).

111. ábra



A szaktárgyakban alkalmazásra kerülő $a_B = f_5(x_B)$ függvény végérintőinek és egy pontjának szerkesztésére egy közelítő módszert is bemutat a 111. ábra.

29. feladat:

A vésőgépeket forgattyús hajtómű hajtja. A hajtómű legnagyobb lökethossza $s = 250$ mm, hajtórúd hossza $\ell = 500$ mm, a forgattyúkar szögsebessége $\omega_0 = 4 \frac{1}{s}$ (112. ábra).

Határozzuk meg a vésőfej legnagyobb sebességét!

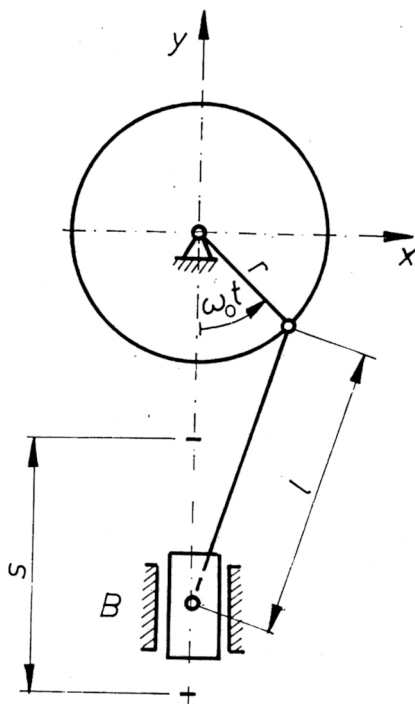
A sebességnek ott lehet szélsőértéke, ahol $\frac{dv_B}{dt} = 0$.

A (16) összefüggés felhasználásával: $\frac{dv_B}{dt} = r \omega_0^2 (\cos \omega_0 t + \lambda \cos 2 \omega_0 t) = 0$.

Ez akkor lehet nulla, ha

$$\cos \omega_0 t + \lambda \cos 2\omega_0 t = 0 .$$

112. ábra



Trigonometrikus átalakítások után:

$$\cos \omega_0 t + \lambda (\cos^2 \omega_0 t - 1 + \cos^2 \omega_0 t) = 0 ,$$

$$2\lambda \cos^2 \omega_0 t + \cos \omega_0 t - \lambda = 0 ,$$

$$\cos(\omega_0 t)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{4\lambda} .$$

A behelyettesítéseket elvégezve ($\lambda = \frac{r}{\ell} = \frac{1}{4}$):

$$\cos(\omega_0 t)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{16}}}{1} = 0,22 .$$

A negatív előjelű gyök figyelembevétele nem ad megoldást, mivel $\cos \omega_0 t < -1$ értéket eredményez. Pozitív előjelű gyök esetén

$$(\omega_0 t)_1 = 77^\circ + 2k \cdot 180^\circ \text{ és } (\omega_0 t)_2 = 283^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

A $\frac{d\vec{v}_B}{dt}$ derivált függvénynek maximuma van ezen a helyen, ugyanis

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{v}_B}{dt} \right) \right|_{\omega_0 t = 77^\circ + 2k \cdot 180^\circ} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{v}_B}{dt} \right) \right|_{\omega_0 t = 283^\circ + 2k \cdot 180^\circ} < 0.$$

A maximális sebesség (16) alapján

$$v_{B \text{ max}} = 0,125 \cdot 4(\sin 77^\circ + 0,125 \sin 164^\circ) = 0,5 \text{ [m/s]}.$$

1.3. MEREV TESTEKBŐL ÁLLÓ BONYOLULTABB SZERKEZETEK MOZGÁSÁNAK VIZSGÁLATA A RELATÍV MOZGÁS SEGÍTSÉGÉVEL

Több szabadságfokú szerkezeteknél a szerkezet egyes elemeinek mozgásviszonyait a relatív mozgással tudjuk meghatározni.

1.3.1. A relatív mozgás leírása

Eddigiekben azt a koordinátarendszert, amelyhez a mozgást viszonyítottuk, *állónak* tekintettük. Egyes esetekben egyszerűbb a mozgást az említett állóhoz képest *mozgó* koordinátarendszerben vizsgálni.

Például ha vasúti kocsiban sétálunk, mozgásunkat önkéntelenül a kocsihoz viszonyítjuk, függetlenül attól, hogy a vonat áll, vagy mozgásban van-e.

Más példa: a futómacskás forgódaruval (30. példa) terhelt teher mozgását vizsgálhatjuk a Földhöz kötött, álló koordinátarendszerben, de sokkal egyszerűbb a forgó gémmel kötött, mozgó koordinátarendszerben vizsgálni.

Ilyenkor mindig felmerül a kérdés: milyen összefüggés van az állónak tekintett és a *hozzá viszonyítva* mozgó rendszerben megfigyelt mozgások között.

Az álló koordinátarendszerhez viszonyított mozgást *abszolút mozgásnak* nevezzük. Továbbá ebben a rendszerben abszolút pályáról, elmozdulásról, sebességről és gyorsulásról beszélünk.

A mozgó rendszerhez viszonyított mozgást *relatív mozgásnak* nevezzük. Így beszélhetünk relatív pályáról, elmozdulásról, sebességről, gyorsulásról.

A mozgó koordinátarendszernek az álláshoz viszonyított mozgását *szállító mozgásnak* nevezzük. A vizsgált anyagi pont mozgásának leírásakor szállító elmozdulásról, sebességről és gyorsulásról beszélünk. Ha például a vasúti kocsiban sétáló utas mozgásának abszolút sebességét (Föld-

höz kötött rendszerbeli) akarjuk meghatározni, ismernünk kell a kocsihoz viszonyított - relatív sebességét és a vonat sebességét (szállító sebesség). Majd értelemszerűen az abszolút sebesség az *V. fejezetben* (elemi mozgások összetétele) tanultak alapján meghatározható.

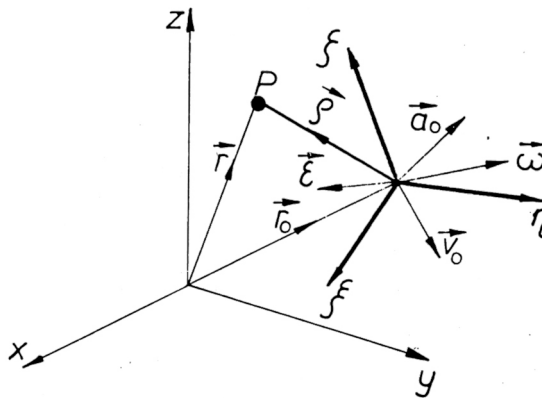
1.3.2. Összefüggés az abszolút és relatív sebességek között

Legyen a mozgó pont (P) helyvektora az x, y, z álló koordináta-rendszerben \vec{r} ; a \vec{v}_0 , $\vec{\omega}$, \vec{a}_0 és $\vec{\mathcal{E}}$ adatokkal mozgó ξ, η, ζ , koordináta-rendszerben pedig $\vec{\rho}$ (113. ábra).

Az ábra alapján írható:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$$

113. ábra



A *III. fejezet* 1.1.1. pontjában tanultak alapján az \vec{r} helyvektorú anyagi pont sebessége az álló rendszerben $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ differenciálással meghatározható. Azonban nem szabad megfeledkezni arról, hogy egymáshoz képest mozgó rendszerekről van szó.

Tegyük fel, hogy a P pont (113. ábra) mereven hozzá van kötve a ξ, η, ζ , rendszerhez.

Így $\vec{\rho}$ ebben a rendszerben állandó, de az x, y, z koordináta-rendszerből szemlélve a $\vec{\rho}$ időben változó (mozog). Ennek megfelelően a két rendszerben lényegesen különbözik egymástól a $\vec{\rho}$ idő szerinti deriváltja.

Vagyis az álló rendszerben

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\rho}}$$

az előzőekben leírtak miatt (levezetés mellőzésével) úgy alakul:

$$\vec{v} = \vec{\beta} + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

ahol $\vec{\beta}$ a relatív sebesség vektora,

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{SZ} \quad \text{a szállító sebesség vektora.}$$

Így

$$\vec{v} = \vec{\beta} + \vec{v}_{SZ} . \quad (19)$$

Szavakban: egy mozgó pont álló koordinátarendszerbeli abszolút sebessége (\vec{v}) – egyenlő a pont mozgó koordinátarendszerbeli – relatív sebességének ($\vec{\beta}$) és a szállító sebességnek (\vec{v}_{SZ}) az összegével.

Ahol a szállító sebesség a mozgó koordinátarendszer azon pontjának sebessége az álló rendszerhez viszonyítva, amelyben a vizsgált pont éppen tartózkodik.

1.3.3. Összefüggés a gyorsulások között

A (19) idő szerinti deriváltja az álló rendszerben

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\beta}} + \dot{\vec{v}}_{SZ} .$$

A sebesség számításánál leírtak miatt, részletezés nélkül:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} + \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2 (\vec{\omega} \times \vec{\beta}) ,$$

ahol a a relatív gyorsulás vektora,

$$\vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{a}_{SZ}$$

a szállító gyorsulás vektora, és

$$2 (\vec{\omega} \times \vec{\beta}) = \vec{a}_C \quad \text{a Coriolis-gyorsulás.}$$

Tehát

$$\vec{a} = \vec{\alpha} + \vec{a}_{SZ} + \vec{a}_C . \quad (20)$$

Szavakban: egy mozgó pont álló koordinátarendszerbeli – abszolút gyorsulása (\vec{a}) – számítható a pont mozgó koordinátarendszerbeli relatív gyorsulásának ($\vec{\alpha}$), a szállító gyorsulásnak (\vec{a}_{SZ}), és Coriolis-gyorsulás (\vec{a}_C) összegeként.

A szállító gyorsulás a mozgó koordinátarendszer azon pontjának gyorsulása az álló rendszerhez viszonyítva, amelyben a vizsgált pont éppen tartózkodik.

Coriolis-gyorsulás csak bizonyos esetekben létezik. $\vec{a}_C = \vec{0}$, ha a mozgó rendszer mozgása

haladó mozgás ($\vec{\omega} = \vec{0}$), ha az anyagi pont a mozgó rendszerben nyugalomban van

($\vec{\beta} = \vec{0}$) és akkor is ha $\vec{\omega}$ párhuzamos $\vec{\beta}$ vektorral.

30. feladat:

A 114.b) ábra a 114.a) ábrán látható futómacskás forgódaru egyszerűsített mechanikai modellje. A 114.b. ábrán vázolt helyzetben $\alpha = 30^\circ_{AB} = 4 \text{ m}$;

a gém szögsebessége $\vec{\omega}_1 = \vec{k} 0,2 \text{ s}^{-1}$;

szöggyorsulása $\vec{\epsilon}_1 = \vec{k} 0,1 \text{ s}^{-2}$.

A macska $\vec{v}_3 = -\vec{e}_\xi 0,5 \text{ m s}^{-1} = \text{áll. sebességgel mozog a konzolon.}$

Az $r_2 = 200 \text{ mm}$ sugarú kötél Dob $\vec{\omega}_2 = \vec{e}_\eta 0,8 \text{ s}^{-1}$ szögsebességgel és

$\vec{\epsilon}_2 = \vec{e}_\eta 0,2 \text{ s}^{-2}$ szöggyorsulással forog. Határozzuk meg a teher sebességét és gyorsulását

a földhöz képest! Az álló (x, y, z) koordinátarendszert a 114.b) ábrán látható módon kössük a

földhöz, a mozgó (ξ, η, ζ) koordinátarendszer ξ tengelye legyen a gém iránya, a

tengely essen egybe z-vel.

A szállítósebesség a VI. fejezet 1.3.2. pontja szerint

$$\vec{v}_{sz} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{AB},$$

ahol

$$\vec{\omega}_1 = \vec{k} 0,2 \text{ [1/s]}$$

és

$$\vec{r}_{AB} = \vec{i} r_{AB} \cos \alpha + \vec{j} r_{AB} \sin \alpha = \vec{i} 4 \cdot 0,866 + \vec{j} 4 \cdot 0,5,$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{i} 3,46 + \vec{j} 2 \text{ [m]}.$$

$$\text{Így } \vec{v}_{sz} = \vec{k} 0,2 \times (\vec{i} 3,46 + \vec{j} 2) = -\vec{i} 0,4 + \vec{j} 0,692 \text{ [m/s]}.$$

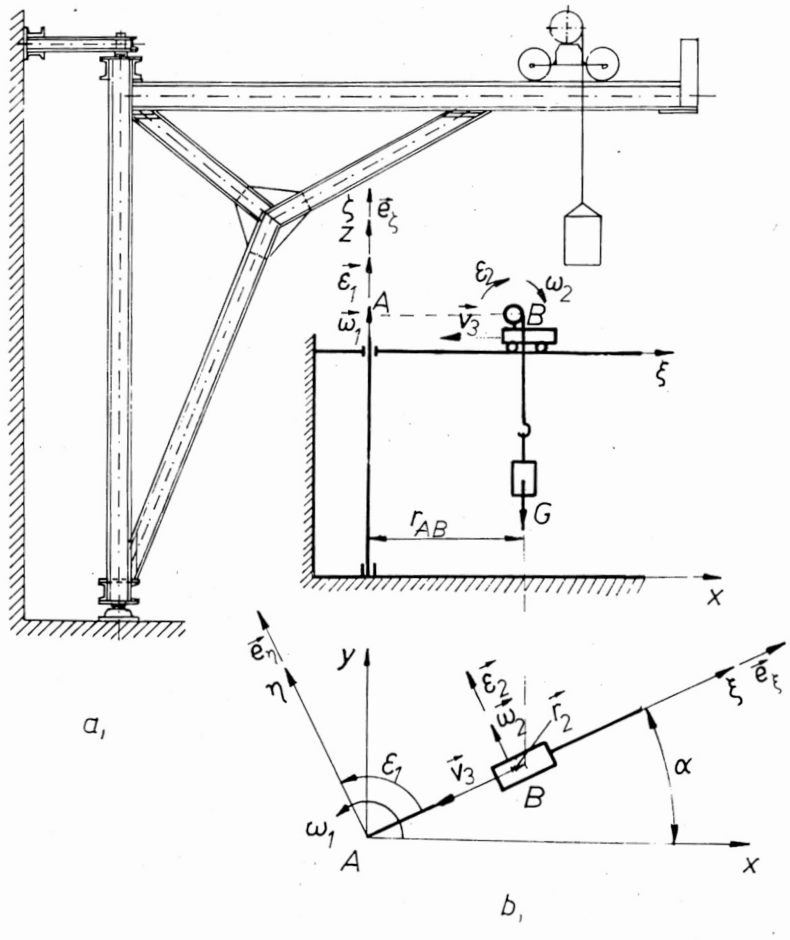
A teher mozgó koordinátarendszerhez viszonyított relatív sebessége az előző értelmezés szerint

$$\vec{\beta} = \vec{v}_3 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{v}_3 - \vec{k} \omega_2 r_2,$$

$$\vec{\beta} = -\vec{i} v_3 \cos \alpha - \vec{j} v_3 \sin \alpha - \vec{k} \omega_2 r_2 =$$

$$= -\vec{i} 0,5 \cdot 0,866 - \vec{j} 0,5 \cdot 0,5 - \vec{k} 0,8 \cdot 0,2,$$

114. ábra



$$\vec{\beta} = -\vec{i} 0,433 - \vec{j} 0,25 - \vec{k} 0,16 \text{ [m/s]}.$$

A kapott értékeket (19)-be visszahelyettesítve

$$\vec{v} = -\vec{i} 0,4 + \vec{j} 0,692 - \vec{i} 0,433 - \vec{j} 0,25 - \vec{k} 0,16 .$$

Tehát

$$\vec{v} = -\vec{i} 0,833 + \vec{j} 0,442 - \vec{k} 0,16 \text{ [m/s]}$$

sebességgel mozog a szállított teher a földhöz képest.

Ezek után térjünk át a gyorsulás meghatározására. Számítsuk ki először az egyes gyorsulásösszetevőket külön-külön.

A teher $\xi \eta \zeta$ koordinátarendszerhez viszonyított relatív gyorsulása, mivel $\vec{v}_3 = \vec{0}$ áll.

$$\vec{\alpha} = \vec{e}_2 \times \vec{r}_2 = -\vec{k} \epsilon_2 r_2 = -\vec{k} 0,2 \cdot 0,2 = -\vec{k} 0,04 \text{ [m/s}^2\text{]} .$$

A szállítógyorsulás

$$\vec{a}_{sz} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{AB}),$$

$$\vec{a}_A = \vec{0} \text{ és } \vec{\omega}_1 \perp \vec{r}_{AB}, \text{ ezért}$$

$$\vec{a}_{sz} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r}_{AB} - \omega_1^2 \vec{r}_{AB} =$$

$$= \vec{k} 0,1 \times (\vec{i} 3,46 + \vec{j} 2) - 0,04 (\vec{i} 3,46 + \vec{j} 2)$$

$$\vec{a}_{sz} = -\vec{i} 0,338 + \vec{j} 0,266 \quad [\text{m/s}^2].$$

Végül a Coriolis-gyorsulás értéke

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}_1 \times \vec{\beta} = \vec{k} 2,0,2 \times (-\vec{i} 0,433 - \vec{j} 0,25 - \vec{k} 0,16),$$

$$\vec{a}_c = \vec{i} 0,1 - \vec{j} 0,17 \quad [\text{m/s}^2].$$

Az így kiszámított értékeket visszahelyettesítve (20)-ba:

$$\vec{a} = -\vec{k} 0,04 - \vec{i} 0,338 + \vec{j} 0,266 + \vec{i} 0,1 - \vec{j} 0,17,$$

$$\vec{a} = -\vec{i} 0,238 + \vec{j} 0,096 - \vec{k} 0,04 \quad [\text{m/s}^2]$$

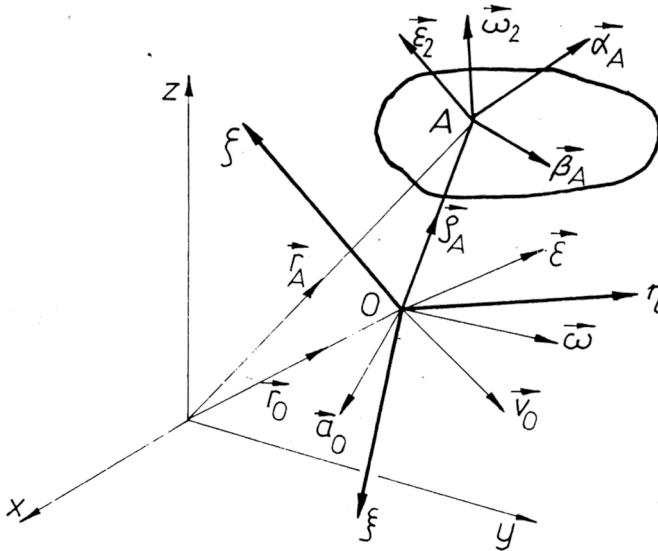
a teher földhöz viszonyított gyorsulása.

1.3.4. Merev test relatív mozgása

A merev testnek a nyugvó x, y, z koordináta-rendszerhez viszonyított mozgását az „A” pontjának mozgásával ($\vec{v}_A; \vec{a}_A$) és a test forgásának szögsebességével ($\vec{\omega}_1$) és a szöggyorsulásával ($\vec{\varepsilon}_1$) jellemezzük, az $\xi \eta \zeta$ rendszerben pedig $\vec{\beta}_A, \vec{\alpha}_A, \vec{\omega}_2$ és $\vec{\varepsilon}_2$ -vel.

A mozgó koordináta-rendszernek az állóhoz viszonyított mozgását $\vec{v}_O, \vec{a}_O, \vec{\omega}$ és $\vec{\varepsilon}$ adatokkal írjuk le (115. ábra).

115. ábra



A merev test A pontjának abszolút sebessége (19) szerint

$$\vec{v}_A = \vec{\beta}_A + \vec{v}_{ASZ} ,$$

abszolút gyorsulása (20) szerint

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha}_A + \vec{a}_{ASZ} + \vec{a}_{Ac} ,$$

abszolút szögsebessége V. fejezet 1.2.2.2. pont szerint (elemi forgások összetételének módszere alapján):

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega} . \quad (21)$$

Ez utóbbinak az álló rendszerbeli deriválásával az abszolút szöggyorsulás

$$\vec{\epsilon}_1 = \vec{\epsilon}_2 + \vec{\omega} \times \vec{\omega}_2 + \vec{\epsilon} \quad (22)$$

alakban számítható.

2. Merev testekből álló szerkezetek kinetikája

2.1. MEREV TESTEKBŐL ÁLLÓ EGYSZERŰ SZERKEZETEK VIZSGÁLATA KLASSZIKUS MÓDSZERREL

Merev testekből álló összetett szerkezetek egyensúlyi állapotának vizsgálatakor a statikában úgy jártunk el, hogy a szerkezetet építőelemeire, merev testekre bontottuk szét és külön-külön vizsgáltuk minden merev test egyensúlyi állapotát. A merev testek egyensúlyi egyenleteiben a merev testre ható aktív és passzív erőkön kívül a szerkezet szempontjából belső erők is szerepeltek.

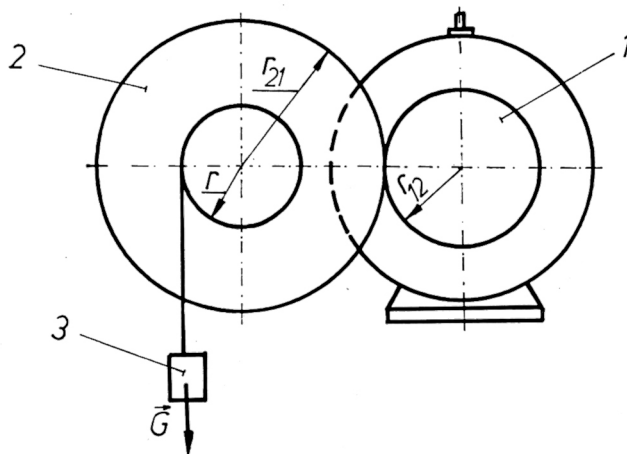
Ezt a módszert a merev testekből felépített szerkezetek kinetikájában is eredményesen használhatjuk a szerkezet mozgásviszonyainak vizsgálatához.

Ha a merev testekből felépített szerkezetet részeire bontjuk és az egyes merev testekre a külső aktív és passzív erőkön kívül a szerkezet szempontjából belső erőket is működtetjük, az így kapott merev testekre külön-külön alkalmazhatjuk a kinetika törvényeit. A továbbiakban feltételezzük, hogy a szerkezetet alkotó merev testek vagy csak haladó, vagy csak álló tengely körüli forgómozgást végeznek.

Bonyolultabb esetben a feladat megoldása analitikusan nehézkes (pl. forgattyús hajtómű), esetleg csak grafikus, illetve grafoanalitikus módszerekkel oldható meg.

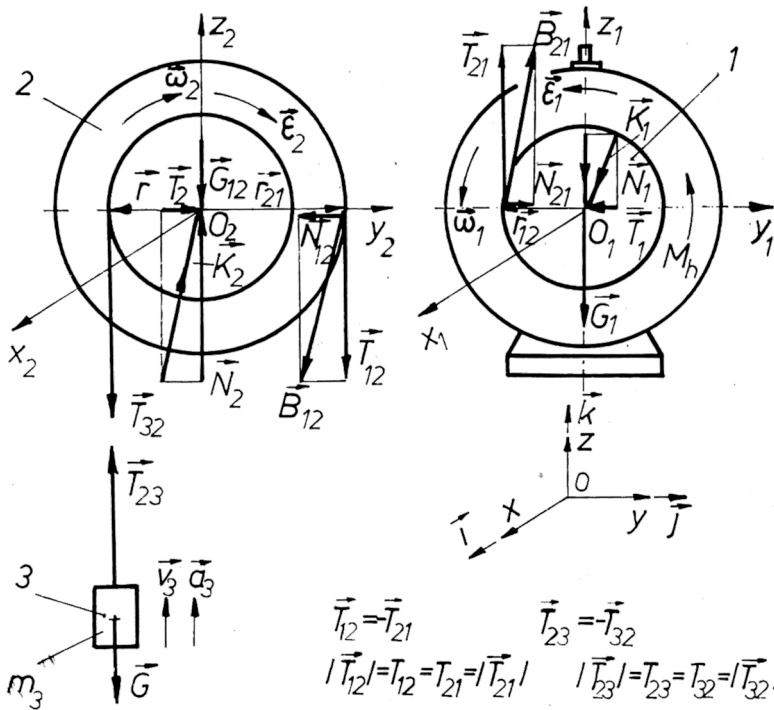
Az ilyen feladatok megoldása túllépi a műszaki mechanika c. tantárgy tárgykeretét, ezért azzal nem foglalkozunk. Feltételezzük továbbá, hogy számításainkban a súrlódó erők elhanyagolhatók. A súrlódó erők hatását később a VI. fejezet 2.2.3. pontjában azonban még tárgyaljuk. Az n merev testből felépített szerkezet esetében felírható n mozgásegyenlet, amelyekben n mozgásjellemző és $n-1$ ismeretlen reakcióerő szerepel. Az n mozgásjellemző egymással $n-1$ kinematikai egyenlőséggel is kapcsolatba hozható. Így a $2n-1$ egyenletből a $2n-1$ ismeretlen az egyenletrendszer megoldásával meghatározható. A merev test mozgásegyenlete a kinetika valamely alaptételével adható meg (V. fejezet 2.1.–2.5. pont). Világítsuk meg a fentieket egy konkrét példán. Határozzuk meg a 116. ábrán látható emelőszerkezet szöggyorsulását a villamos motor tengelyén, ha a villamos motor M_h hajtónyomatéka ismert. Mekkora kötélterő ébred eközben az emelőszerkezet emelőkötelében?

116. ábra



A vizsgált emelőszerkezet három merev testből áll (117. ábra):

117. ábra



1. Villanymotor forgórésze a meghajtó fogaskerékkel, mely az O_1 ponton átmenő, a fogaskerék síkjára merőleges tengely (x_1) körül forog.
2. Kötéldob a meghajtott fogaskerékkel, mely az O_2 ponton átmenő, a fogaskerék síkjára merőleges tengely (x_2) körül forog.
3. Emelendő teher, mely a fogaskerék síkjával párhuzamos pályán egyenesvonalú haladómozgást végez.

Az 1 jelű merev test forgástengelyére felírt perdülettételből:

$$\dot{\vec{H}}_{x1} = M_{x1} ; \quad \theta_1 \varepsilon_1 = M_h - r_{12} T_{21} ; \quad (23)$$

ahol θ_1 az x_1 tengely körül forgó részek tehetetlenségi nyomatéka erre a tengelyre.

A 2 jelű merev test forgástengelyére felírt perdülettételből:

$$\dot{\vec{H}}_{x2} = M_{x2} ; \quad -\theta_2 \varepsilon_2 = r T_{32} - r_{21} T_{12} . \quad (24)$$

A 3 jelű merev testre felírt impulzustételből

$$\vec{I}_3 = \vec{T}_{23} - \vec{G} \quad m_3 a_s = T_{23} - G . \quad (25)$$

A VI. fejezet 1.2. pontja szerint fennáll:

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{i_{12}}; \quad a_s = r \varepsilon_2 = r \frac{\varepsilon_1}{i_{12}};$$

$$i_{12} = \frac{r_{21}}{r_{12}}. \quad (26)$$

A (23)–(26) négy egyenletben az ε_1 ; ε_2 ; $T_{12} = T_{21}$; $T_{23} = T_{32}$ négy ismeretlen szerepel és így ezek meghatározhatók. A (26)-ot (23), (24), (25)-be helyettesítve és figyelembe véve a hatás-ellenhatás törvényét:

$$\Theta_1 \varepsilon_1 = M_h - T_{12} r_{12} \quad (27)$$

$$\Theta_2 \frac{\varepsilon_1}{i_{12}} = T_{12} r_{21} - T_{23} r, \quad (28)$$

$$m_3 r \frac{\varepsilon_1}{i_{12}} = T_{23} - G.$$

Ezt végigszorozva r-el:

$$m_3 r^2 \frac{\varepsilon_1}{i_{12}} = T_{23} r - G r. \quad (29)$$

A (28) és (29) összefüggést összeadva:

$$\Theta_2 \frac{\varepsilon_1}{i_{12}} + m_3 r^2 \frac{\varepsilon_1}{i_{12}} = T_{12} r_{21} - Gr,$$

$$\frac{\varepsilon_1}{i_{12}} (\Theta_2 + m_3 r^2) = T_{12} r_{21} - G r.$$

Ezt r_{12}/r_{21} -el végigszorozva:

$$\frac{\varepsilon_1}{i_{12}} \frac{r_{12}}{r_{21}} (\Theta_2 + m_3 r^2) = T_{12} r_{12} - G r \frac{r_{12}}{r_{21}}. \quad (30)$$

A (27) és (30) összeadása után:

$$\theta_1 \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{i_{12}} \frac{r_{12}}{r_{21}} (\theta_2 + m_3 r^2) = M_h - G r \frac{r_{12}}{r_{21}}.$$

Kiemelve az egyenletből ε_1 -et, és figyelembevéve, hogy $i_{12} = \frac{r_{21}}{r_{12}}$,

$$\left(\theta_1 + \frac{\theta_2}{i_{12}^2} + \frac{m_3 r^2}{i_{12}^2} \right) \varepsilon_1 = M_h - \frac{G r}{i_{12}} \quad (31)$$

ahonnan

$$\varepsilon_1 = \frac{M_h - \frac{G r}{i_{12}}}{\theta_1 + \frac{\theta_2}{i_{12}^2} + \frac{m_3 r^2}{i_{12}^2}} \quad (32)$$

És (29)-ből

$$T_{23} = m_3 r \frac{\varepsilon_1}{i_{12}} + G \quad (33)$$

az emelőkötélben ébredő dinamikus erő is számítható. Fenti számítási módszer előnyeként említhetjük meg, hogy a szerkezet elemeinek méretezéséhez a kapcsolatokban ébredő dinamikus belső erők is közvetlenül számíthatók a felírt mozgásegyenletekből. Hátránya viszont, hogy sok elemből felépített szerkezet esetében a többismeretlenes egyenletrendszer megoldása sok időt vesz igénybe.

2.2. MEREV TESTEKBŐL FELÉPÍTETT EGYSZERŰ SZERKEZETEK MOZGÁSÁNAK VIZSGÁLATA REDUKCIÓVAL

Ha csak a mozgásjellemzők meghatározása a célunk, előnyösebb ezt a módszert alkalmazni. Az előző fejezet példájának eredményeként kapott (31) összefüggésbe vezessük be a

$$\theta_r = \left(\theta_1 + \frac{\theta_2}{i_{12}^2} + \frac{m_3 r^2}{i_{12}^2} \right), \quad M_r = M_h - \frac{G \cdot r}{i_{12}}$$

jelöléseket.

Ekkor a

$$\Theta_{\mathbf{r}} \cdot \mathcal{E}_{\mathbf{l}} = M_{\mathbf{r}} \quad (33)$$

egyenletet kapjuk. A továbbiakban a (33) alakú egyenletet a szerkezet x_1 tengelyéhez redukált mozgásegyenletnek, vagy másképpen a redukált szerkezetre felírt perdülettelnek fogjuk nevezni.

Itt $\Theta_{\mathbf{r}}$ a redukált tehetetlenségi nyomaték, $M_{\mathbf{r}}$ a redukált nyomaték.

Az így meghatározott rendszer olyan mozgásjellemzőkkel rendelkezik, mint a szerkezet azon merev teste, amely tengelyébe redukáltuk a szerkezetet. Ha a redukálást haladó mozgást végző testhez végeznénk, akkor egy $m_{\mathbf{r}}$ redukált tömeget és egy $F_{\mathbf{r}}$ redukált erőt kell definiálnunk, és az erre felírt impulzustétel adja meg a mozgásegyenletet:

$$m_{\mathbf{r}} \vec{a} = \vec{F}_{\mathbf{r}} \quad (34)$$

Egyszerűen bizonyítható – és a 2.1. pontban közölt példa esetére bizonyítani is fogjuk –, hogy az előzőek szerint bevezetett redukált jellemzők ($\Theta_{\mathbf{r}}, M_{\mathbf{r}}; m_{\mathbf{r}}; F_{\mathbf{r}}$) az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. Egy adott időpillanatban az $m_{\mathbf{r}}$ redukált tömeg és a vizsgált rendszer mozgási energiája azonos.
2. Adott időpillanatban a $\Theta_{\mathbf{r}}$ tehetetlenségi nyomatékú redukált tömeg és a vizsgált rendszer mozgási energiája megegyező.
3. Adott időpillanatban az $F_{\mathbf{r}}$ redukált erő és a rendszert terhelő erőrendszer teljesítménye megegyezik.
4. Adott időpillanatban az $M_{\mathbf{r}}$ redukált nyomaték és a rendszert terhelő erőrendszer teljesítménye ugyanakkora.

A redukált jellemzők fenti tulajdonságait felhasználhatjuk a veszteségmentes szerkezet redukált jellemzőinek meghatározására is a redukált mozgásegyenlet levezetése nélkül.

2.2.1. Tömeg és tehetetlenségi nyomaték redukálása

Redukáljuk az n forgó és m haladó mozgást végző merev testből felépített szerkezet mozgását az 1 jelű forgó test mozgásához. Akkor a redukált tehetetlenségi nyomaték és a szerkezet mozgási energiáinak egyenlőségéből

$$\frac{\Theta_{\mathbf{r}} \cdot \omega_{\mathbf{l}}^2}{2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\Theta_k \omega_k^2}{2} + \sum_{j=n+1}^{j=n+m} \frac{m_j \cdot v_j^2}{2} \quad .$$

Ebből:

$$\Theta_{\mathbf{r}} = \sum_{k=1}^{k=n} \Theta_k \left(\frac{\omega_k}{\omega_{\mathbf{l}}}\right)^2 + \sum_{j=n+1}^{j=n+m} m_j \left(\frac{v_j}{\omega_{\mathbf{l}}}\right)^2 \quad (35)$$

a redukált tehetetlenségi nyomaték a szerkezet ismeretében számolható.

Amennyiben a kinetikai jellemzők az 1.2.2. pont szerint

$$\omega_k = \frac{\omega_1}{i_{1k}}; \quad v_j = r_\ell \omega_\ell = r_\ell \frac{\omega_1}{i_{1\ell}} \quad (36)$$

alakban megadhatók:

$$\theta_r = \sum_{k=1}^n \frac{\theta_k}{i_{1k}^2} + \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{m_j r_\ell^2}{i_{1\ell}^2} \quad (37)$$

Ha a szerkezet mozgását az (n+1)-ik jelű haladó test mozgásához redukáljuk, akkor a redukált tömeg és a szerkezet mozgási energiáinak egyenlőségéből:

$$\frac{m_r \cdot v_{n+1}^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{\theta_k \omega_k^2}{2} + \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{m_j \cdot v_j^2}{2}$$

Ebből:

$$m_r = \sum_{k=1}^n \theta_i \left(\frac{\omega_k}{v_{n+1}} \right)^2 + \sum_{j=n+1}^{n+m} m_j \left(\frac{v_j}{v_{n+1}} \right)^2$$

a redukált tömeg.

Ez a szerkezet kinematikai jellemzőinek ismeretében számolható.

2.2.2. Erő és nyomaték redukálása

Legyen M_k az előbb tárgyalt szerkezet k-ik forgó elemét terhelő erőrendszer nyomatéka a test forgástengelyére. F_j a szerkezet j-ik haladó elemét terhelő erőrendszer eredőjének a v_j sebesség irányú összetevője. Ennek megfelelően M_k , ill. F_j előjeles mennyiségek.

Ha $\vec{\omega}_k$, ill. \vec{v}_j irányúak pozitív, ha ezekkel ellentétes negatív előjellel kell őket figyelembe venni.

Most redukáljuk a szerkezet mozgását az 1. jelű merev test forgómozgásához. Akkor a redukált nyomaték és a szerkezetet terhelő erőrendszer teljesítményeinek egyenlőségéből:

$$M_r \omega_1 = \sum_{k=1}^n M_k \omega_k + \sum_{j=n+1}^{n+m} F_j \cdot v_j,$$

Ebből:

$$M_r = \sum_{k=1}^n M_k \frac{\omega_k}{\omega_1} + \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{F_j \cdot v_j}{\omega_1} \quad (38)$$

redukált nyomaték a szerkezet kinematikai jellemzőinek ismeretében számolható. Ha (36) fennáll:

$$M_r = \sum_{k=1}^n \frac{M_k}{i_{1k}} + \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{F_j^r \ell}{i_{1\ell}} \quad (39)$$

Most redukáljuk a szerkezet mozgását az (n+1)-dik merev test haladó mozgásához. A redukált erő és a szerkezetet terhelő erőrendszer teljesítményeinek egyenlőségéből

$$F_r \cdot v_{n+1} = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \omega_k + \sum_{j=n+1}^{n+m} F_j \cdot v_j$$

Ebből:

$$F_r = \sum_{k=1}^n M_k \frac{\omega_k}{v_{n+1}} + \sum_{j=n+1}^{n+m} F_j \frac{v_j}{v_{n+1}}$$

a redukált erő, mely a szerkezet kinematikai jellemzőinek ismeretében számolható. A megfelelő adatok helyettesítése után látható, hogy a (37) és (39) összefüggések a 2.1. pont példájánál kapott Θ_r és M_r értékeivel megegyeznek.

2.2.3. Veszteségek figyelembevétele redukáláskor Áttételek hatásfoka

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk meg a problémát a 2.1. fejezetben tárgyalt példa felhasználásával. A levezetésben csak a fogaskerék kapcsolatvesztéseit vesszük figyelembe. A levezetés és a végeredmény általános esetben is érvényben marad. A valóságban az áttételekben a veszteségek elkerülhetetlenek. Fogaskerek esetében a veszteséget az egymáson csúszó fogak között fellépő surlódás okozza. Ennek a surlódásnak következménye, hogy a fogak között ébredő belső erők hatásvonalai nem megy át a két osztókör geometriai E metszéspontján, hanem attól különböző E' pontban metszi a két keréktengelyt összekötő egyenest (118. ábra). Legyen ez a pont Δ távolságban az E ponttól.

A belső erők a hajtott tárcsára

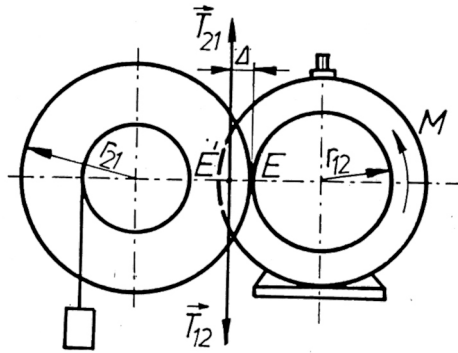
$$M_2 = \left| \vec{T}_{12} \right| (r_2 - \Delta),$$

a hajtótárcsára

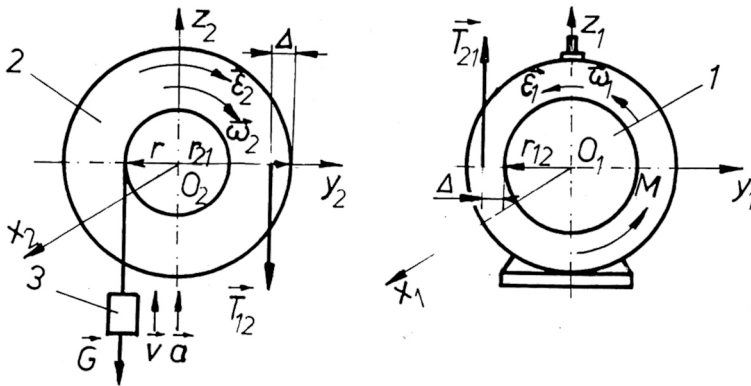
$$M_1 = \left| \vec{T}_{21} \right| (r_1 + \Delta)$$

nyomatékokat adnak.

118. a) ábra



118. b) ábra



Innen

$$|\vec{T}_{12}| = \frac{M_2}{r_2 - \Delta} = |\vec{T}_{21}| = \frac{M_1}{r_1 + \Delta},$$

$$M_2 = \frac{r_2 - \Delta}{r_1 + \Delta} M_1 < \frac{r_2}{r_1} M_1,$$

ahol $M_1 \frac{r_2}{r_1}$ a veszteségmentes hajtás mellett átvitt nyomaték. Legyen

$$M_2 = \eta_{12} M_1 \frac{r_2}{r_1},$$

ahol η_{12} a hajtás hatásfoka. Fogaskerék hajtásnál a fogak egymáson való legördülése közben

Δ és ezzel együtt η_{12} is bizonyos határok között ingadozik.

A továbbiakban Δ és η_{12} közepes értékével számolunk. Térjünk át ezek után a 2.1. fejezetben tárgyalt feladat vizsgálatára. A két részre bontott szerkezetre részenként alkalmazzuk a munkatételt (118.b) ábra).

Írjunk fel egy munkatételt a 2.3. testekből álló rendszerre:

$$\dot{E} = P$$

$$\frac{d\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{\Theta_2 \omega_2^2}{2}\right)}{dt} = T_{12} (r_{21} + \Delta) \omega_2 - G v ,$$

$$mva + \Theta_2 \omega_2 \varepsilon_2 = T_{12} (r_{21} + \Delta) \omega_2 - G v . \quad (40)$$

Az 1. elemre felírt munkatételből pedig:

$$\frac{d\left(\frac{\Theta_1 \omega_1^2}{2}\right)}{dt} = M_h \omega_1 - T_{21} (r_{12} + \Delta) \omega_1 ,$$

$$\Theta_1 \omega_1 \varepsilon_1 = M_h \omega_1 - T_{21} (r_{12} + \Delta) \omega_1 . \quad (41)$$

Szorozzuk be a (40)-et

$$\frac{r_{12} + \Delta}{r_{21} + \Delta} \frac{r_{21}}{r_{12}} = \frac{1}{\eta_{12}}$$

kifejezéssel. Akkor

$$\frac{mva}{\eta_{12}} + \frac{\Theta_2 \omega_2 \varepsilon_2}{\eta_{12}} = T_{12} (r_{21} + \Delta) \frac{r_{21} \omega_2}{r_{12}} - \frac{G v}{\eta_{12}} . \quad (42)$$

A (41)-et és (42)-öt összeadva, figyelembe véve, hogy $\omega_1 = \frac{r_{21}}{r_{12}} \omega_2$;

$$\Theta_1 \omega_1 \varepsilon_1 + \frac{mva}{\eta_{12}} + \frac{\Theta_2 \omega_2 \varepsilon_2}{\eta_{12}} = M_h \omega_1 - \frac{G v}{\eta_{12}} . \quad (43)$$

Ebből:

$$\theta_1 \varepsilon_1 + \frac{ma}{\frac{\omega_1}{v} \eta_{12}} + \frac{\theta_2 \varepsilon_2}{\frac{\omega_1}{\omega_2}} = M_h - \frac{G}{\eta_{12} \frac{\omega_1}{v}} .$$

Figyelembe véve, hogy $a = r \cdot \varepsilon_2 = r \frac{\varepsilon_1}{i_{12}}$ és $\frac{\omega_1}{v} = \frac{\omega_1}{r \omega_2} = \frac{1}{r} i_{12}$;

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{i_{12}} ; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{12} ,$$

$$\theta_1 \varepsilon_1 + \frac{mr^2 \varepsilon_1}{\eta_{12} i_{12}^2} + \frac{\theta_2 \varepsilon_1}{\eta_{12} i_{12}^2} = M_h - \frac{G r}{\eta_{12} i_{12}} ,$$

és kiemelve ε_1 -et

$$\left(\theta_1 + \frac{\theta_2}{\eta_{12} i_{12}^2} + \frac{mr^2}{\eta_{12} i_{12}^2} \right) \varepsilon_1 = M_h - \frac{G r}{\eta_{12} i_{12}} .$$

Tehát

$$\theta_r = \theta_1 + \frac{\theta_2}{\eta_{12} i_{12}^2} + \frac{mr^2}{\eta_{12} i_{12}^2} ; \quad M_r = M_h - \frac{G r}{\eta_{12} i_{12}} .$$

Ezt összevetve a 2.1. fejezet (31) egyenletével látjuk, hogy a veszteségek figyelembevételével a redukált tehetlenségi nyomaték (v. redukált tömeg) i -ik összetevője a veszteségmentes szerkezet redukált tehetlenségi nyomaték i -ik összetevőjének $\frac{1}{\eta_{1i}}$ szerese lesz, ha a mozgást a szerkezet 1 jelű

meghajtó eleméhez redukáljuk. A veszteségek figyelembevételével a redukált nyomaték (v. redukált erő) i -ik összetevője a veszteségmentes szerkezet redukált nyomatéka i -ik összetevőjének $\frac{1}{\eta_{1i}}$ -szerese lesz, ha a mozgást a szerkezet 1 jelű meghajtó eleméhez redukáljuk.

Ahol a η_{1i} redukált mozgásul választott 1 jelű elem és az i -ik elem közötti hajtás összhatásfoka. Ha a csapágy-surlódásokat is hatásfokkal akarjuk kifejezni, úgy az összhatásfokban az is figyelembe veendő. Ha az előző példában kötélnek a kötéldobra való feltekerésére elhasználandó veszteségeket figyelembe akarjuk venni, ezt megtehetjük az η_{13} hatásfok segítségével.

Akkor

$$\Theta_r = \Theta_1 + \frac{\Theta_2}{\eta_{12} i_{12}^2} + \frac{mr^2}{\eta_{13} i_{12}^2}; \quad M_r = M_h - \frac{G r}{\eta_{13} i_{12}}.$$

A 2.2.1. és 2.2.2. fejezetek általános képletei a veszteségek figyelembevételével módosulnak:

ha az 1. test a meghajtó elem

$$\Theta_r = \sum_{k=1}^n \frac{\Theta_i}{\eta_{1i}} \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 + \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{m_j}{\eta_{1j}} \left(\frac{v_j}{\omega_1} \right)^2 \quad (44)$$

$$M_r = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\eta_{1i}} \frac{\omega_i}{\omega_1} + \sum_{j=n+1}^{m+n} \frac{F_j}{\eta_{1j}} \frac{v_j}{\omega_1}; \quad (45)$$

ha az n+1. test a meghajtó test

$$m_r = \sum_{i=1}^n \frac{\Theta_i}{\eta_{(n+1)i}} \left(\frac{\omega_i}{v_{n+1}} \right)^2 + \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{m_j}{\eta_{(n+1)j}} \left(\frac{v_j}{v_{n+1}} \right)^2, \quad (46)$$

$$F_r = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\eta_{(n+1)i}} \frac{\omega_i}{v_{n+1}} + \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{F_i}{\eta_{(n+1)j}} \frac{v_j}{v_{n+1}}. \quad (47)$$

Redukáljuk most szerkezetünk mozgását a 3. jelű *meghajtott test* haladó mozgásához.

Szorozzuk be (43)-at η_{12}/v -vel.

$$\frac{\Theta_1 \omega_1 \varepsilon_1 \eta_{12}}{v} + ma \pm \frac{\Theta_2 \omega_2 \varepsilon_2}{v} = \frac{M_h \omega_1 \eta_{12}}{v} - G.$$

Mivel

$$\frac{\omega_1}{v} = \frac{\omega_1}{r \omega_2} = \frac{1}{r} \frac{1}{i_{12}}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{i_{21}} = \frac{1}{r} \frac{a}{i_{21}};$$

$$\frac{\omega_2}{v} = \frac{1}{r} ; \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{r} ;$$

így

$$\frac{\Theta_1 a \eta_{12}}{r^2 i_{21}^2} + ma + \frac{\Theta_2 a}{r^2} = \frac{M_h \eta_{12}}{r i_{21}} - G ,$$

és kiemelve a -t

$$\left(m + \frac{\Theta_1 \eta_{12}}{r^2 i_{21}^2} + \frac{\Theta_2}{r^2} \right) a = \frac{M_h \eta_{12}}{r i_{12}} - G ,$$

tehát

$$m_r = m + \frac{\Theta_1 \eta_{12}}{r^2 i_{21}^2} + \frac{\Theta_2}{r^2} ;$$

$$F_r = \frac{M_h \eta_{12}}{r i_{21}} - G .$$

Ha tehát a szerkezet mozgását m . jelű meghajtott elemének mozgásához redukáljuk, a redukált jellemző i -ik összetevője a veszteségmentes szerkezet redukált jellemzője i -ik összetevőjének η_{mi} -szerese lesz, ahol η_{mi} - a két elem közötti hajtás összhatásfoka.

Ha a kötélveszteségeket is figyelembe akarjuk venni,

$$m_r = m + \frac{\Theta_1 \eta_{31}}{r^2 i_{21}^2} + \frac{\Theta_2 \eta_{32}}{r^2} ; \quad F_r = \frac{M_h \eta_{31}}{r i_{21}} - G .$$

Általános esetben:

Ha az 1. test a meghajtott elem

$$\Theta_r = \sum \Theta_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \eta_{1i} + \sum m_j \left(\frac{v_j}{\omega_1} \right)^2 \eta_{1j} , \quad (48)$$

$$M_r = \sum M_i \frac{\omega_i}{\omega_1} \eta_{1i} + \sum F_j \frac{v_j}{\omega_1} \eta_{1j} . \quad (49)$$

Ha az $n+1$. test a meghajtott elem

$$m_r = \sum \Theta_i \left(\frac{\omega_i}{v_{n+1}} \right)^2 \eta_{(n+1)i} + \sum m_j \left(\frac{v_j}{v_{n+1}} \right)^2 \eta_{(n+1)j} , \quad (50)$$

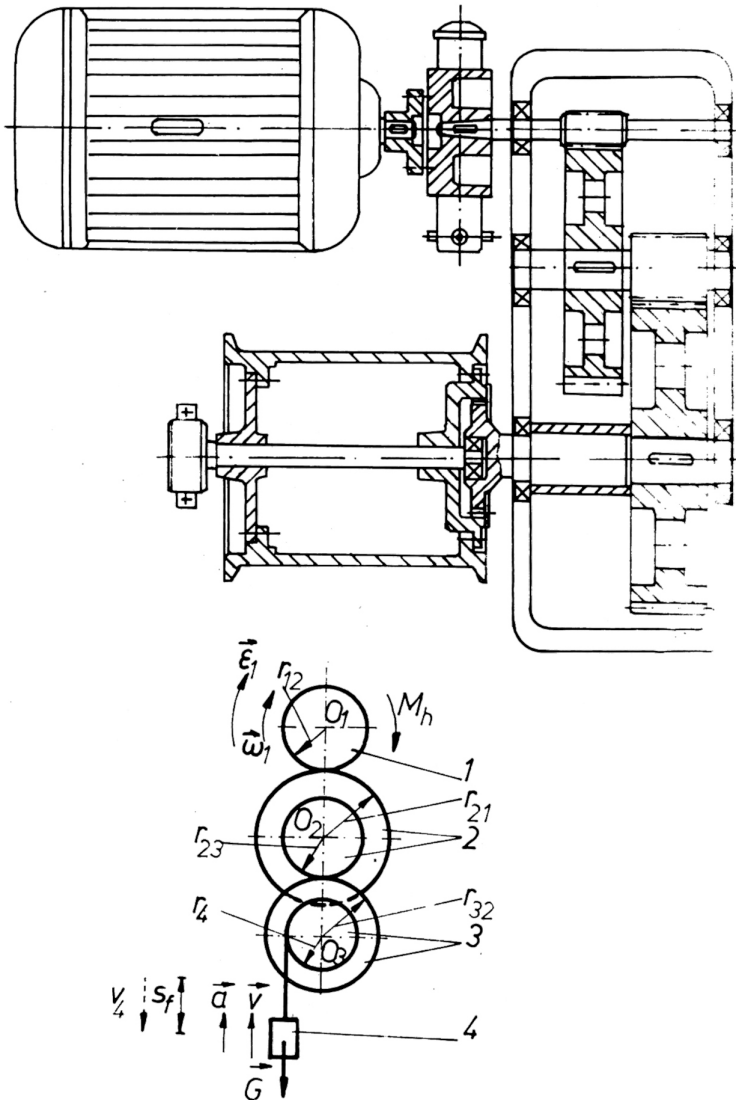
$$F_r = \sum M_i \frac{\omega_i}{v_{n+1}} \eta_{(n+1)i} + \sum F_i \frac{v_i}{v_{n+1}} \eta_{(n+1)j} \quad (51)$$

Ha a szerkezet mozgását tetszőleges elemének mozgásához redukáljuk (se nem meghajtó, se nem meghajtott) akkor értelemszerűen kell a veszteségek figyelembevételékor a hatásfokokkal szorozni, vagy osztani.

31. feladat:

Határozzuk meg mennyi idő alatt veszi fel a 119. ábra szerinti szerkezetet hajtó villamos motor $n = 960/\text{min}$ névleges fordulatszámát teheremelés esetén, ha a gyorsítás ideje alatt a motor $M_h = 41,7 \text{ Nm}$ indítónyomatéka állandónak tekinthető!

119. ábra



Az egyes tengelyek körül forgó testek tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_1 = 0,14 \text{ kg m}^2; \quad \Theta_2 = 0,13 \text{ kg m}^2; \quad \Theta_3 = 1,5 \text{ kg m}^2.$$

Az emelt test tömege: $m = 1000 \text{ kg}$. Az egyes fogaskerekkel megvalósított módosítások:

$$i_{12} = 6,4; \quad i_{23} = 6,34.$$

A kötéldob átmérője: $D_4 = 2r_4 = 250 \text{ mm}$. Egy fogaskerékáttétel hatásfoka a csapágsurlódással együtt $\eta_f = 0,98$. A kötéldobra való feltekeredésénél keletkező veszteségeket elhanyagoljuk.

Redukáljuk a szerkezet mozgását a villamosmotor tengelyéhez! A (32) valamint a (40) és (41) figyelembevételével a redukált tehetetlenségi nyomaték és redukált meghajtónyomaték:

$$\Theta_r = \Theta_1 + \frac{\Theta_2}{i_{12}^2 \eta_{12}} + \frac{\Theta_3}{i_{13}^2 \eta_{13}} + \frac{m r_4^2}{i_{13}^2 \eta_{14}},$$

$$M_r = M_h - \frac{G r_4}{i_{13} \eta_{14}},$$

ahol

$$\eta_{12} = \eta_f = 0,98, \quad \eta_{13} = \eta_f \eta_f = 0,98^2 = 0,96;$$

$$\eta_{14} = \eta_f \eta_f \cdot 1 = i_{13} = i_{12} \cdot i_{23} = 6,4 \cdot 6,34 = 40,58;$$

$$G = mg = 9,81 \cdot 10^3 [\text{N}].$$

Ezek helyettesítése után:

$$\Theta_r = 0,14 + \frac{0,13}{6,4^2 \cdot 0,98} + \frac{1,5}{40,58^2 \cdot 0,96} + \frac{10^3 \cdot 0,125^2}{40,58^2 \cdot 0,96} =$$

$$= 0,14 + 0,003 + 0,0009 + 0,0091 = 0,153 \text{ [kg m}^2\text{]},$$

$$M_r = 41,7 - \frac{9,81 \cdot 10^3 \cdot 0,125}{40,58 \cdot 0,96} = 10,22 \text{ [Nm]}.$$

A redukált rendszer forgástengelyére felírva egy perdülettel:

$$\hat{J}_r = M_r,$$

$$\Theta_r \varepsilon_1 = M_r, \quad \varepsilon_1 = \frac{M_r}{\Theta_r} = \text{const.}$$

$M_r =$ állandó, azaz egyenletesen gyorsuló forgómozgás keletkezik.

Így

$$\omega_{1n} = \varepsilon_1 \cdot t_i$$

a motor névleges szögsebessége, ahonnan a gyorsítási idő a szögsebesség és a fordulatszám közti összefüggés figyelembevételével:

$$t_i = \frac{\omega_{1n}}{\varepsilon_1} = \frac{2\pi n \Theta_r}{M_r} = \frac{2.3, 14.960.0, 153}{60.10, 22} = 1,5 \text{ [s]}$$

32. feladat:

Határozzuk meg, hogy a 31. feladatban szereplő emelőszerkezet motortengelyén milyen $M_f = \text{const}$ nyomatékot kell működtetnünk, hogy a $v_4 = 0,3 \text{ [m/s]}$ névleges sebességgel süllyedő teher $s_f = 1 \text{ [m]}$ fékút megtétele után megálljon!

A süllyedő teher a fékezés ideje alatt egyenesvonalú egyenletesen lassuló mozgást végez, mivel $M_f = \text{const}$. Redukáljuk a szerkezet mozgását a teher haladó mozgásához. A teher az adott esetben meghajtó elem lesz, ezért (46), (47) szerint a redukált tömeg és redukált erő:

$$m_r = \frac{\Theta_1}{\eta_{14}} \left(\frac{\omega_1}{v_4} \right)^2 + \frac{\Theta_2}{\eta_{14}} \left(\frac{\omega_2}{v_4} \right)^2 + \frac{\Theta_3}{\eta_{34}} \left(\frac{\omega_3}{v_4} \right)^2 + m,$$

$$F_r = - \frac{M_f}{\eta_{14}} \frac{\omega_1}{v_4} + G.$$

A (32) szerinti $v_4 = r_4 \omega_3$ helyettesítéssel és $\frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{13}$ $\frac{\omega_2}{\omega_3} = i_{23}$

figyelembe vételével.

$$m_r = \frac{\Theta_1}{r_4^2} \frac{i_{13}^2}{\eta_{14}} + \frac{\Theta_2}{r_4^2} \frac{i_{23}^2}{\eta_{24}} + \frac{\Theta_3}{r_4^2} \frac{1}{\eta_{34}} + m =$$

$$= \frac{0,14}{0,125^2} \cdot \frac{40,58^2}{0,96} + \frac{0,13}{0,125^2} \frac{6,34^2}{0,98} + \frac{1,5}{0,125^2} \frac{1}{1} + 10^3 = 16817 \text{ [kg]}.$$

$$F_r = G - \frac{M_f}{r_4} \frac{i_{13}}{\eta_{14}}, \quad (52)$$

mivel $\eta_{24} = \eta_{23} \cdot 1 = \eta_f$ és $\eta_{34} = 1$.

Most már a feladat a következő: a $\vec{v}_4 = -\vec{j} v_4$ kezdősebességgel mozgó m_r tömegű testre ismeretlen $\vec{F}_r = \vec{j} F_r$ erő hat, amely $\vec{r}_f = -\vec{j} s_f$ úton megállítja az m_r tömeget.

Írjunk fel erre a redukált rendszerre egy munkatételt:

$$\begin{aligned} E_1 - E_0 &= W_{12} \\ -\frac{1}{2} m_r v_4^2 &= -F_r s_f . \end{aligned}$$

Ebből

$$F_r = \frac{m_r v_4^2}{2 s_f} = \frac{16817.0,3^2}{2 \cdot 1} = 756 \text{ [N]} .$$

A (48)-ból pedig az alkalmazandó fékezőnyomaték:

$$M_f = \frac{(G - F_r) r_4 \eta_{14}}{i_{13}} = \frac{(9,81 \cdot 10^3 - 0,756 \cdot 10^3) 0,125 \cdot 0,96}{40,58} = 26,8 \text{ [Nm]} .$$

2.3. MEREV TESTEKBŐL ÁLLÓ BONYOLULTABB SZERKEZETEK MOZGÁSÁNAK VIZSGÁLATA A RELATÍV MOZGÁS SEGÍTSÉGÉVEL

Eddigiekben az erőt úgy értelmeztük, mint testek kölcsönhatását. Földhöz kötött, álló koordináta-rendszerben (VI. fejezet 1.3.1. pontja) a testek mozgását az előbb értelmezett erőkkel – a Newton-törvények felhasználásával – megmagyarázhatjuk.

Továbbiakban tegyük fel, hogy a mozgás vizsgálatát olyan koordináta-rendszerben ($\xi \eta \zeta$) végezzük, amely a nyugvónak feltételezett rendszerhez képest mozog (120. ábra).

A VI. 1.3.3. fejezet (20) összefüggése szerint a gyorsulások között fennáll:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} + \vec{a}_{SZ} + \vec{a}_c .$$

Ezt a relatív gyorsulásra ($\vec{\alpha}$) megoldott alakban is felírhatjuk

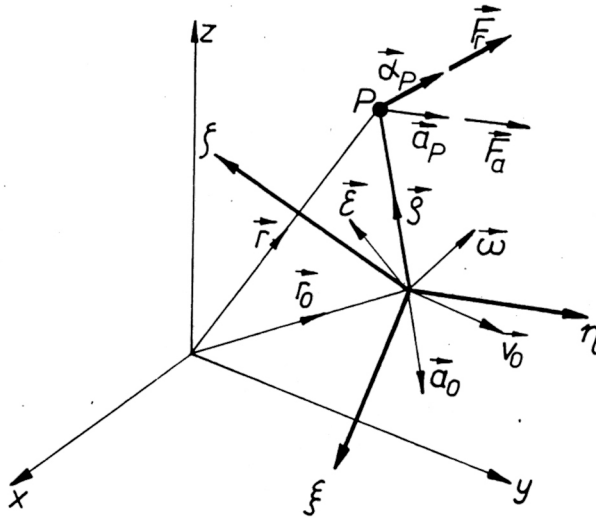
$$\vec{\alpha} = \vec{a} - \vec{a}_{SZ} - \vec{a}_c ,$$

és az egyenletet végigszorozva a mozgó anyagi pont tömegével

$$m \vec{\alpha} = m \vec{a} - m \vec{a}_{SZ} - m \vec{a}_c \quad (53)$$

összefüggés adódik.

120. ábra



A mozgó koordináta-rendszerben a gyorsulása $\vec{\alpha}$; tehát, hogy ebben a koordináta-rendszerben is érvényesek legyenek a Newton-törvények, az $\vec{\alpha}$ gyorsulású mozgást csak egy

$$\vec{F}_r = m \vec{\alpha}$$

relatív erő létezésével értelmezhetjük.

A tömegpontra a testek kölcsönhatásaként működő erők eredője:

$$\vec{F} = m \vec{a},$$

amelynek hatására futja be a tömegpont a valódi pályát, Ha bevezetjük az

$$\vec{F}_{SZ} = - m \vec{a}_{SZ}, \quad (53a)$$

$$\vec{F}_c = - m \vec{a}_c \quad (53b)$$

jelöléseket, és ezeket szállítóerőnek (első járulékos erő elnevezés is használatos kifejezés) és Coriolis-erőnek (második járulékos erő) nevezzük, akkor az (53) egyenlet

$$\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{F}_{SZ} + \vec{F}_c \quad (54)$$

alakban is írható. Vagyis a relatív erő \vec{F}_r a valódi erőnek \vec{F} a szállítóerőnek \vec{F}_{SZ} és a Coriolis-erőnek \vec{F}_c vektorösszege.

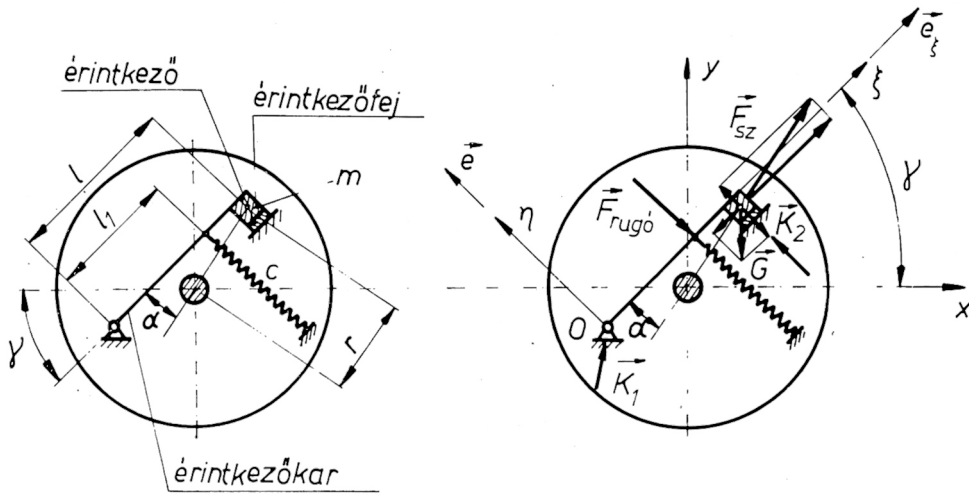
Mivel $\vec{F}_r = m \vec{\alpha}$ ugyanolyan alakú, mint Newton II. törvénye (dinamika alaptörvénye), az

abból levezetett összes tételek (pl. impulzustétel, D' Alembert-egyenlet) a mozgó koordináta-rendszerben is felhasználhatók. Csak arra kell ügyelni, hogy a mozgó rendszerben nem a valódi erőt, hanem a relatív erőt kell felhasználni.

33. feladat:

A 121.a) ábrán kisebb elektromotoroknál használatos fordulatszám-szabályozót látunk. A tengellyel együtt forog a tárcsa, amelyen egy forgatható érintkezőkar van elhelyezve. Ha a fordulatszám egy adott értéke meghalad, az érintkezőfej elválik az érintkezőtől.

121. ábra



$$l_1 = 50\text{mm} \quad l = 65\text{mm}$$

$$r = 32\text{mm} \quad \alpha = 15^\circ \quad \gamma = 45^\circ$$

Mekkora legyen az $F_{\text{rugó}}$ rugóerő, ha a maximált fordulatszám $n=1000/\text{min}$ és az érintkezőfej tömege $m = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$. Az érintkezőkar és a rugó tömegét elhanyagolhatónak vesszük. A geometriai adatok az ábráról leolvashatók. Azt a pillanatot vizsgáljuk, amikor az érintkezőfej még éppen nem válik el az érintkezőtől.

A forgó tárcsához kötött $\xi \eta$ koordinátarendszerben az érintkezőkar és fej még nyugalomban van, tehát egyensúlyi erőrendszer hat rá. Vagyis a mozgó koordinátarendszerben

$$\vec{F}_r = \vec{0},$$

$$\vec{M}_{\text{or}} = \vec{0}.$$

Írjuk fel most részletesebben a mozgó koordinátarendszerben az érintkezőkarra és fejre ható erőket (54) összefüggés szerint:

$$\vec{F}_r = \vec{G} + \vec{K}_2 + \vec{K}_1 + \vec{F}_{\text{rugó}} + \vec{F}_{\text{sz}} + \vec{F}_c,$$

ahol \vec{G} a súlyerő, \vec{K}_1 , \vec{K}_2 kényszererők (az elválás pillanatában $\vec{K}_2 = \vec{0}$), $\vec{F}_{\text{rugó}}$

a rugóerő, \vec{F} a szállítóerő és \vec{F}_c a Coriolis-erő.
 $K_2 = 0$), $F_{\text{rugó}}^{\text{SZ}}$ sz

Az (53a) és (53b) szerint:

$$\vec{F}_{\text{sz}} = -m\vec{a}_{\text{sz}} = \vec{e}_{\xi} mr\omega^2 \cos 15^\circ + \vec{e}_{\eta} mr\omega^2 \sin 15^\circ ,$$

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -m \cdot 2\vec{\omega} \times \vec{\beta} = \vec{0},$$

mert $\vec{\beta} = \vec{0}$.

Írjunk fel egy nyomatéki egyenletet a $\xi \eta$ forgó koordinátarendszerben a 0 ponton átmenő, $\xi \eta$ síkra merőleges tengelyre! (Az érintkezőfej vastagságát elhanyagoljuk).

$$M_{\text{or}} = 0 = \ell_1 F_{\text{rugó}} - \ell m r \omega^2 \sin 15^\circ + \ell G \cos 45^\circ .$$

Rendezve

$$F_{\text{rugó}} = \frac{\ell(m r \omega^2 \sin 15^\circ - G \cos 45^\circ)}{\ell_1} .$$

Először határozzuk meg ω értékét:

$$\omega = 2\pi n = 2 \cdot 3,14 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{60} = 105 \left[1/s\right].$$

Ezután helyettesítsünk be az előző egyenletbe

$$F_{\text{rugó}} = \frac{6,5 \cdot 10^{-2} (4,5 \cdot 10^{-2} \cdot 3,2 \cdot 10^{-2} \cdot 1,1 \cdot 10^4 \cdot 0,26 - 4,5 \cdot 10^{-2} \cdot 9,81 \cdot 0,705)}{5 \cdot 10^{-2}}$$

$$F_{\text{rugó}} = 4,92 \left[N \right].$$

Tehát a rugónak 4,92 N erőt kell kifejtenie, ahhoz, hogy az érintkező fej 1000 l/perc-nél nagyobb fordulatszám esetén elváljon az érintkezőtől.

VII. RUGALMAS TESTEKBŐL ÁLLÓ SZERKEZETEK MOZGÁSA

1. Ütközés

Ütközésről beszélünk, ha két test mozgásállapota egymásra hatás következtében – rugalmas, vagy részben rugalmas alakváltozás közben – rövid idő alatt megváltozik. Az alábbiakban síkmozgást végző testek (v. ö. V. fejezet 1.3. pontjával) ütközésével foglalkozunk.

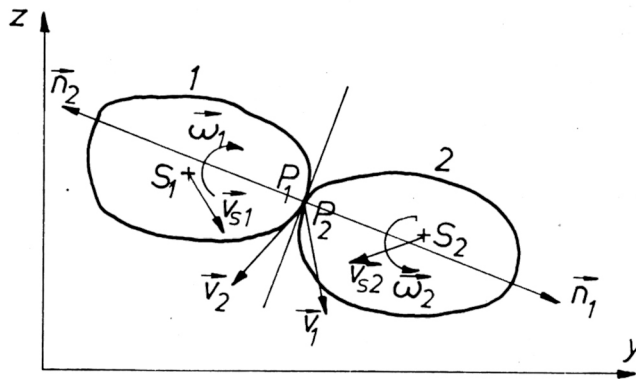
A 122. ábrán az m_1 és m_2 tömegű rugalmas testeket tüntettük fel az ütközést megelőző időpillanatban. Az érintkezés pillanatában a két test P_1 illetve P_2 pontjának sebessége \vec{v}_1 , illetve \vec{v}_2 , szögsebessége $\vec{\omega}_1$, illetve $\vec{\omega}_2$.

Ha \vec{n}_1 és \vec{n}_2 a két testet az ütközés pontjában érintő sík normálvektorai, akkor a két test ütközésének feltétele az alábbiak szerint fogalmazható meg.

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{n}_1 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n}_2 > 0. \quad (1)$$

Vizsgáljuk az ütközés folyamatát a lejátszódó alakváltozások figyelembevételével.

122. ábra



a) Összenyomódási (kompressziós) szakasz

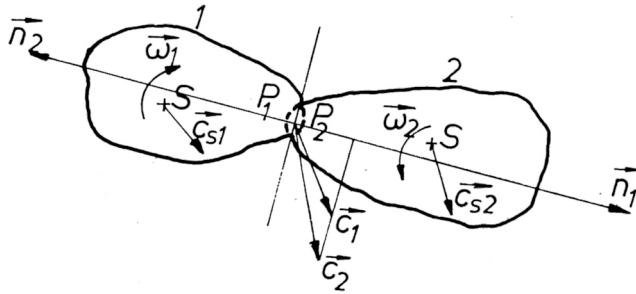
Mivel fennáll az (1) egyenlőség a testek egymásba igyekeznek hatolni, ezért \vec{v}_1 és \vec{v}_2 sebességük rohamosan változik, a belső erő növekszik.

Az összenyomódás befejeztével a belső erő maximális. Ekkor az érintkező pontok \vec{c}_1 és \vec{c}_2 sebességének c_{1n} és c_{2n} normálösszetevői azonosak. Azaz

$$c_{1n} = \vec{c}_1 \cdot \vec{n}_1 = c_{2n} = \vec{c}_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (2)$$

A 123. ábra a teljes összenyomódási állapotot tünteti fel, az alakváltozásokat felnagyítva.

123. ábra



b) Tágulási (expanziós) szakasz

A testek rugalmasságuk folytán fokozatosan, részben, vagy teljesen visszanyerik ütközés előtti alakjukat, miközben a belső erő csökken, a testek P_1 és P_2 pontjának sebessége \vec{c}_1 és \vec{c}_2 -ről rohamosan \vec{w}_1 és \vec{w}_2 -re változik. Az ütközési folyamatban elszenvedett alakváltozások egy

része – a testek anyagától függően – rugalmas, egy része maradó alakváltozás. A rugalmas alakváltozásra fordítódott mozgási energia az ütközés tág tágulási szakaszában visszaalakul mozgási energiává.

Hogy az alakváltozás során ütköző test elvesztett mozgásmennyiségének hányadrésze alakul vissza mozgásmennyiséggé, azt az ütköző testek anyagától függő k ütközési tényező fejezi ki.

Az előbbi fizikai ténytet az alábbi két egyenlet fejezi ki:

$$m_1(\vec{w}_{s1} - \vec{c}_{s1}) = k \cdot m_1(\vec{c}_{s1} - \vec{v}_{s1}), \quad (3a)$$

$$m_2(\vec{w}_{s2} - \vec{c}_{s2}) = k \cdot m_2(\vec{c}_{s2} - \vec{v}_{s2}), \quad (3b)$$

ahol \vec{v}_{si} , \vec{c}_{si} és \vec{w}_{si} a testek súlypontjainak sebessége az ütközési folyamat különböző szakaszaiban.

Ha $\vec{v}_1 \parallel \vec{n}_1$, illetve $\vec{v}_2 \parallel \vec{n}_2$ akkor egyenes ütközésről, ellenkező esetben ferde ütközésről beszélünk.

Centrikusnak mondjuk az ütközést, ha az érintkezési pont érintősíkjának normálisa illeszkedik az S_1 illetve S_2 súlypontokra.

Külponos vagy excentrikus ütközésről pedig akkor beszélünk, ha az érintkezési pont érintősíkjának normálisa nem illeszkedik az ütköző testek S_1 és S_2 súlypontjaira.

Feladatunk, hogy ismert ütközés előtti mozgásállapotok esetén meghatározzuk az ütközés utáni mozgásállapotokat.

Az ütközés közben lejátszódó folyamatok egyszerűbb leírása érdekében első lépésben a következő feltevésekkel élünk.

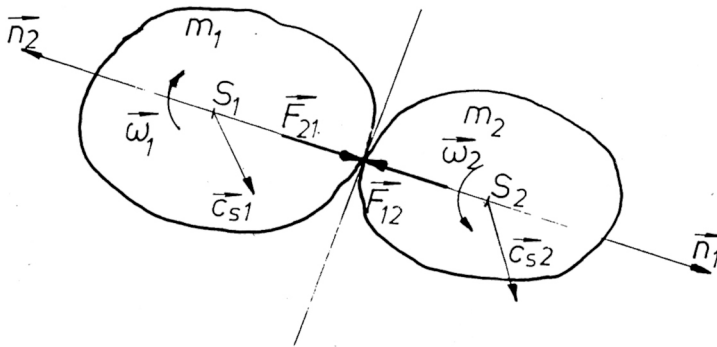
1. Az ütköző testek rugalmasak.
2. Az ütközés normálisa 3 mozgás síkjába esik és az alakváltozás során nem változtatja helyzetét.
3. Az ütközés centrikus.
4. A testekre közvetlen ütközés előtt működő külső erőrendszer eredője zérus, illetve a fellépő nagy belső erőkhöz képest elhanyagolható:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{0} .$$

5. Az ütköző testek felülete tökéletesen sima ($\mu=0$), azaz az ütközés során a testek által egymásra kifejtett erők normálirányúak. (124. ábra). Newton harmadik törvénye alapján írható:

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21} .$$

124. ábra



1.1. RUGALMAS TESTEK ÜTKÖZÉSE MOZDULATLAN (VÉGTELEN TÖMEGŰ) SÍK FELÜLETŰ FALBA

A 125. ábrán látható $m_1 = \infty$ tömegűnek tekinthető mozdulatlan falba ($\vec{v}_{s1} = \vec{0}$) m_2 tömegű test ütközik \vec{v}_{s2} sebességgel.

Az ütközés centrikus, mert \vec{n} hatásvonala illeszkedik az ütköző testek súlypontjára. Az ütközés pillanatában a 4. és 5. feltevések szerint egyetlen belső erő hat az m_2 tömegű testre, melynek

$$\vec{F}_{21} = -F_{21} \cdot \vec{n} .$$

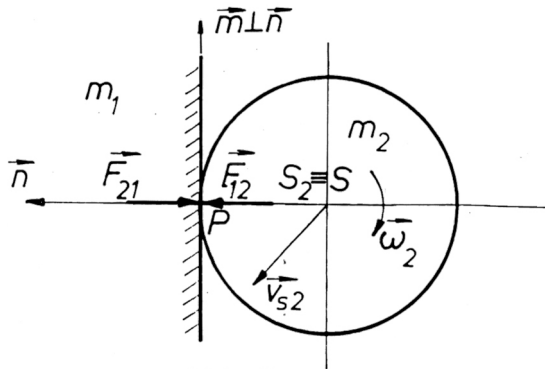
Alkalmazzuk a merev testre vonatkozó perdülettelét. Felírva az S_2 ponton átmenő, az ütközés síkjára merőleges tengelyre a

$$\dot{\vec{\pi}}_{s2} = \sum M_{i2} \quad \text{egyenletet,}$$

a $\sum M_{i2} = 0$ miatt a $\dot{\pi}_{s2} = 0$. Az egyenlet mindkét oldalának integrálásával a következő megállapítást tehetjük:

$$\pi_{s2} = \Theta_{s2} \cdot \omega_2 = \text{constans} \quad (4)$$

125. ábra



Tehát a *centrikusan ütköző testek szögsebessége az ütközés alatt nem változik.*

Most alkalmazzuk az ütközés egész idejére az impulzustétel integrális alakját (125. ábra):

$$m_2 \cdot \vec{w}_{s2} - m_2 \cdot \vec{v}_{s2} = -\vec{n} \int_{t_1}^{t_2} F_{21} dt \quad / \cdot \vec{m}$$

Az \vec{m} irányú vetületi egyenlet, az $m_2 \cdot w_{s2m} - m_2 \cdot v_{s2m} = 0$ felírásával nyerjük:

$$w_{s2m} = v_{s2m} \quad (5)$$

azaz az ütközés alatt az m_2 tömegű test súlypontja sebességének csak \vec{n} irányú komponense változik meg.

Az érintkezési pont \vec{v}_2 sebessége

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{s2} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{sp} \quad / \vec{n}$$

Képezzük a fenti vektoregyenlet n irányú vetületét:

$$v_{2n} = v_{s2n} \quad (6)$$

A (6) egyenletből következik, hogy a *centrikus ütközésnél a test \vec{n} hatásvonalán levő pontok \vec{n} irányú sebessége azonos.*

E megállapítás alapján a (2) egyenletet

$$c_{s1n} = c_{s2n} \quad (7)$$

alakban írhatjuk.

A (3b) egyenlet $\frac{\vec{n}}{m_2}$ -vel történő beszorzása után a

$$w_{s2n} - c_{s2n} = k (c_{s2n} - v_{s2n})$$

egyenletet nyerjük.

Ha figyelembe vesszük (7)-et és azt, hogy a mozdulatlan fal sebességének \vec{n} irányú vetülete $c_{s1n} = 0$, akkor az előbbi egyenlet az alábbiak szerint alakul:

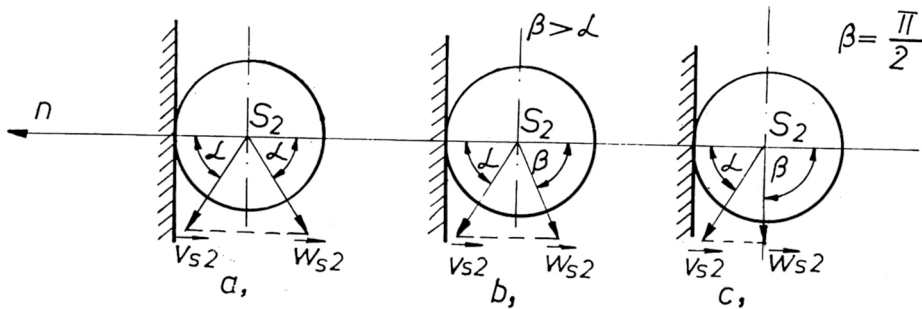
$$w_{s2n} = -k \cdot v_{s2n} \quad (8)$$

A (4), (5) és (8) összefüggések együttesen az m_2 tömegű test ütközés utáni sebességállapotát adják meg. Az ütközés után a súlypont sebessége tehát

$$\vec{w}_{s2} = v_{s2m} \cdot \vec{m} - k \cdot v_{s2n} \cdot \vec{n}$$

A gyakorlatban a következő esetek fordulnak elő (126. ábra).

126. ábra



1. $k = 1$ esetén tökéletesen rugalmas ütközésről beszélünk. Ilyennek tekinthető két acél anyagú test ütközése (126.a ábra).
2. $0 < k < 1$ rugalmas ütközés, mint például a betontestre eső keménység-mérő kalapács. (126.b ábra).
3. $k = 0$ rugalmatlan – pl. képlékeny – anyagok ütközése (126.c ábra).

Vizsgáljuk még meg az ütközés különböző fázisaiban az energiaviszonyokat!

Ütközés előtti mozgási energia

$$E_1 = \frac{m_2 \cdot \vec{v}_{s2}^2}{2} + \frac{\Theta_{s2} \cdot \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 (v_{s2m}^2 + v_{s2n}^2)}{2} + \frac{\Theta_{s2} \cdot \omega_2^2}{2},$$

Ütközés utáni mozgási energia

$$E_2 = \frac{m_2 \cdot \vec{w}_{s2}^2}{2} + \frac{\Theta_{s2} \cdot \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 (w_{s2m}^2 + w_{s2n}^2)}{2} + \frac{\Theta_{s2} \cdot \omega_2^2}{2}.$$

Felhasználva a (8) egyenletet

$$E_2 = \frac{m_2 (v_{s2m}^2 + k^2 v_{s2n}^2)}{2} + \frac{\Theta_{s2} \omega_2^2}{2}.$$

Mozgási energiavesztés

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m_2 (v_{s2m}^2 + v_{s2n}^2)}{2} - \frac{m_2 (v_{s2m}^2 + k^2 v_{s2n}^2)}{2}.$$

Az összevonást elvégezve

$$\Delta E = \frac{m_2 \cdot v_{s2n}^2 (1 - k^2)}{2} \quad (9)$$

A (9) összefüggés szerint adott testek ütközése esetén a mozgásienergia-vesztés csak a normálösszetevőtől függ. A VIII. táblázatban összefoglalva közöljük az ütközés utáni sebességösszetevőket és a mozgásienergia-vesztéseket különböző ütközések esetére.

VIII. táblázat

Mechanikai jellemző		Ütközési tényező		
Megnevezés	Jele	k=1	0 < k < 1	k=0
Az m_2 tömeg ütközés utáni súlyponti sebességének normál összetevője.	w_{s2n}	$-v_{s2n}$	$-k \cdot v_{s2n}$	0
Az m_2 tömeg ütközés utáni súlyponti sebességének érintő irányú összetevője.	w_{s2m}	v_{s2m}	v_{s2m}	v_{s2m}
Mozgási energia-változás	ΔE	0	$(1-k^2) \frac{m_2 \cdot v_{s2n}^2}{2}$	$\frac{m_2 \cdot v_{s2n}^2}{2}$
Szögsebesség nagysága	ω_2	ω_2	ω_2	ω_2

1.2. HALADÓ MOZGÁST VÉGZŐ RUGALMAS TESTEK CENTRIKUS ÜTKÖZÉSE

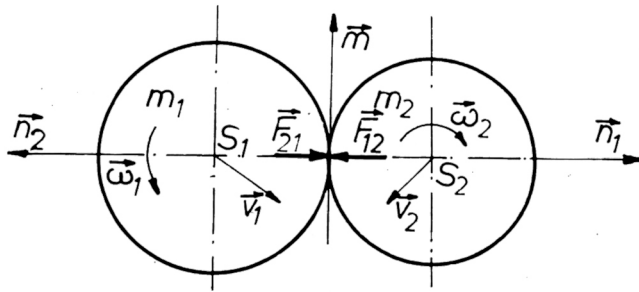
A 127. ábrán látható m_1 és m_2 tömegű testek ütközés előtt \vec{v}_{s1} és \vec{v}_{s2} súlyponti sebességgel mozognak.

Az ütközés folyamán fellépő \vec{F}_{12} illetve \vec{F}_{21} erők az 5. feltevés értelmében párhuzamosak \vec{n}_1 , illetve \vec{n}_2 vektorral.

A (4) és (5) összefüggések levezetéséhez hasonlóan mindkét testre bizonyítható:

$$\omega_1 = \text{constans}; \quad \omega_2 = \text{constans},$$

127. ábra



$$w_{s1n} = v_{s1n} ; \quad w_{s2n} = v_{s2n} . \quad (10)$$

Az ütközés utáni sebességvektorok \vec{n} irányú összetevőinek meghatározására a (3a) és (3b) egyenleteket használhatjuk fel.

Beszorozva a fenti két egyenletet \vec{n} vektorral és egyszerűsítve:

$$w_{s1n} - c_{s1n} = k (c_{s1n} - v_{s1n}) ,$$

$$w_{s2n} - c_{s2n} = k (c_{s2n} - v_{s2n}) .$$

Az elsőből a másodikat kivonva, majd ebbe a (7) egyenletet helyettesítve jutunk (11)-hez

$$w_{s1n} - w_{s2n} = -k (v_{s1n} - v_{s2n}) . \quad (11)$$

Továbbiakban alkalmazzuk a két testből álló rendszerre az impulzustételt:

$$\dot{\vec{I}} = \sum \vec{F}_i .$$

A 4. feltevés szerint az egész rendszerre ható külső erő, $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$.
Vagyis

$$\dot{\vec{I}} = \vec{0} . \quad (12)$$

A (12) egyenletet integrálva $\vec{I} = \text{constans}$ eredményre jutunk. A fenti eredmény az ütközés előtti és utáni mozgásmennyiségek egyenlőségét jelenti, tehát

$$m_1 \vec{v}_{s1} + m_2 \vec{v}_{s2} = m_1 \cdot \vec{w}_{s1} + m_2 \cdot \vec{w}_{s2} . \quad (13a)$$

A (13a) egyenletet szorozva \vec{n} vektorral:

$$m_1 \cdot v_{s1n} + m_2 v_{s2n} = m_1 \cdot w_{s1n} + m_2 w_{s2n} . \quad (13b)$$

Ez most a (11) összefüggéssel együtt, egy kétismeretlenes egyenletrendszer alkot, melyből W_{1n} és W_{2n} meghatározható:

$$w_{2n} = v_{2n} + \frac{m_1}{m_1+m_2} (1+k) (v_{1n} - v_{2n}) , \quad (14)$$

$$w_{1n} = v_{1n} - \frac{m_2}{m_1+m_2} (1+k) (v_{1n} - v_{2n}) . \quad (15)$$

Az eredményekből megállapíthatjuk, hogy az *ütköző testeknek az ütközési normálisra merőleges sebességösszetevőik nem változnak* [(10) egyenlet], a normális irányba eső összetevőik pedig a (14) és (15) összefüggésekkel számíthatók.

Egyenes ütközéskor egyszerűsödik a feladat, mert:

$$w_{1m} = v_{1m} = w_{2m} = v_{2m} = 0 .$$

A maradék alakváltozásra fordított mozgási energia a részletek elhagyásával, az 1.1. pontban leírtakhoz hasonló levezetés után:

$$\Delta E = \frac{1}{2} (1-k^2) \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (v_{1n} - v_{2n})^2 . \quad (16)$$

Összefoglalva az ütközésről tárgyaltakat, a centrikus ütközés utáni sebességállapotok meghatározásához elegendő felírni:

- Az egész rendszerre vonatkozó impulzustételt (13).
- A mozgásmennyiség visszalakulását kifejező összefüggést (3).

34. feladat:

Hány ütés szükséges a 24. ábrán bemutatott cölöpverő kossal ahhoz, hogy a cölöp $y_0 = 10$ cm mélyen kerüljön a földbe, ha 1 cm-es földbehatoláshoz $W_1 = 11540$ Nm/cm munka szükséges. A kos tömege $m = 450$ kg, az ütközési tényező $k = 0,45$.

A 7. feladatban kiszámított kossebesség az ütközés előtti pillanatban $v = 7,67$ m/s. Ezt az ütközést rugalmas test mozdulatlan, sík felületű falba történő ütközésének tekinthetjük. Így a mozgási energiavesztés, amely munkává alakul a (9) összefüggés szerint:

$$E = \frac{m v^2}{2} (1-k^2)$$

$$E = \frac{450 \cdot 58,86}{2} (1-0,2025) = 10580 \text{ [Nm]} .$$

A beveréshez szükséges munka

$$W = y \cdot w_1 = 10 \cdot 11540 = 115400 \text{ [Nm]} .$$

A szükséges ütések száma tehát

$$n = \frac{W}{E} = \frac{115400}{10580} = 11 .$$

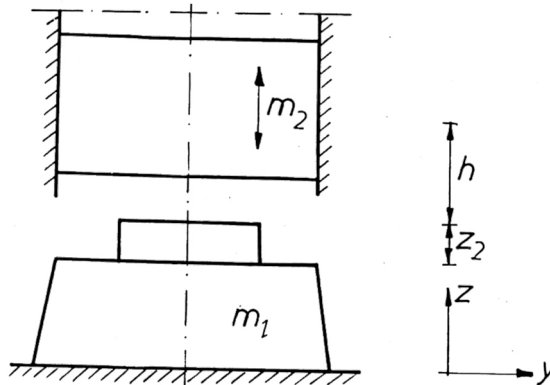
35. feladat:

Meghatározandó, hogy egy acéltuskó $z_1 = 66,5$ mm méretre kovácsolásához az $m_2 = 100$ kg tömegű medve hányszori leejtése szükséges $h = 1$ m magasságból, ha az acéltuskó 1 mm-es zömítéséhez $W_z = 100$ Nm/mm munka szükséges (128. ábra)! Az acéltuskó eredeti mérete $z_2 = 90$ mm, és az ütközési tényező $k = 0,45$.

A medve h magasságból történő szabadesés után a 34. feladathoz elvégzett sebességszámításhoz hasonlóan v_2 sebességgel rendelkezik:

$$v_2 = -\sqrt{2 g h} = -\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} = -\sqrt{19,62} = -4,43 \text{ m/s} .$$

128. ábra



Itt a negatív előjel a negatív tengellyel egyező értelmű sebességre utal.

A (9) egyenlet szerint számolható mozgási energiavesztés alakítási munkává alakul:

$$\Delta E = \frac{m_2 v_2^2}{2} (1 - k^2) = \frac{10 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}} \cdot 19,62 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2} \cdot (1 - 0,203) ,$$

$$\Delta E = 785 \text{ Nm} .$$

Az ütközések száma

$$n = (z_2 - z_1) \frac{W_z}{\Delta E} = \frac{(90 - 66,5) \text{ mm} \cdot 100 \text{ Nm/mm}}{785 \text{ Nm}} = 3 .$$

A méretre kovácsoláshoz tehát $n = 3$ ütés szükséges.

A medve ütközés utáni sebessége:

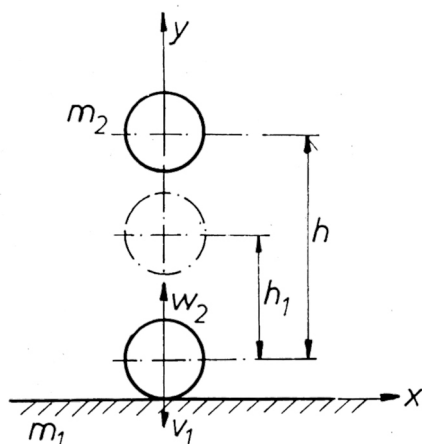
$$w_2 = -k \cdot v_2 = -0,45 \cdot [-4,43 \text{ m/s}] = 1,95 \text{ m/s},.$$

36. feladat:

Ütközési tényező gyakorlati meghatározása.

Elve: a h magasságból leejtett test visszapatтанása utáni h_1 magasságot ($v = 0$) mérjük (129. ábra).

129. ábra



A h magasságból szabadon eső test sebessége az előzőek szerint

$$v_2 = -\sqrt{2 g h}$$

Ütközés után a golyó h_1 magassáig jut vissza. Ezen magasság eléréséhez w_2 ütközés utáni sebességre van szükség, vagyis:

$$w_2 = \sqrt{2 g h_1}$$

A (8) egyenlet szerint

$$w_2 = -k \cdot v_2 \cdot$$

Behelyettesítés után $\sqrt{2 g h_1} = k \sqrt{2 g h}$ egyenlőséget nyerjük, amelyből k meghatározható:

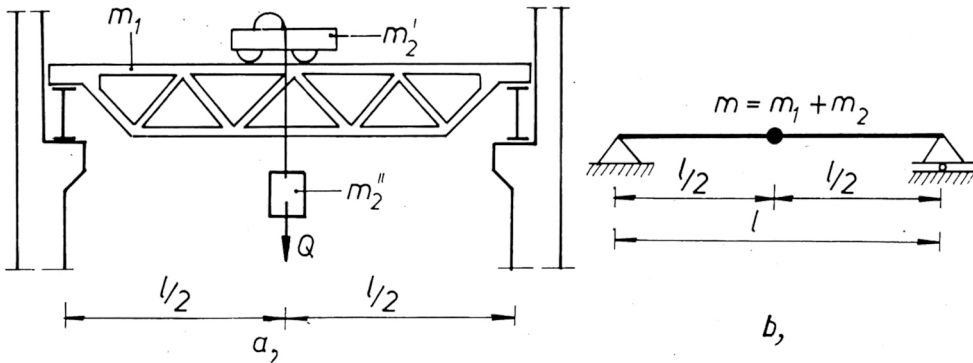
$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \cdot$$

2. Egyszabadságfokú lengőrendszer szabad lengése

A feladat megfogalmazása érdekében vizsgáljuk meg a 130. ábrán látható daruszerkezet viselkedését a daru működése közben.

Terheletlen állapotban a daruhidat a saját G_1 és az emelőszerkezet (macska) G_2 súlya terheli. Ezen terhelési állapotban kialakul egy nyugalmi helyzet. Amint a daru emelni kezdi az m_2'' tömegű Q súlyt a szerkezet kimozdul az előző egyensúlyi állapotból. A terhelésráadás időben gyorsan megy végbe (dinamikus). A szerkezetben az alakváltozás folytán belső (potenciális) energia halmozódik fel, melynek révén az emelendő tömegre a szerkezet visszatérítő erőt fejt ki, és így az mozgást végez. A mozgás jellege az alaphelyzet körül történő sajátlengés, miután az m_1 és $m_2 = m_2' + m_2''$ tömegekből álló rendszerre csak a G_1 és G_2 saját súlyok hatnak. A rugalmas szerkezet belső csillapításától eltekintve csillapítás nélküli lengőmozgásról van szó. A szabad lengés (sajátlengés) másodpercenkénti lengésszámát sajátfrekvenciának nevezzük. (Lásd még III. fejezet 3.1. pont).

130. ábra



E fejezetben a szerkezetek sajátfrekvenciájának meghatározásával foglalkozunk. Ennek érdekében bizonyos elhanyagolásokkal, feltevésekkel élünk, melyek a feladatnak egyszerűbb matematikai formában történő felírását és megoldását teszik lehetővé.

- A szerkezet tökéletesen rugalmasan viselkedik.
- A szerkezet m_1 tömegét koncentráltan vesszük figyelembe a szerkezet súlypontjában, azaz ún. egytömegű lengőrendszerként modellezzük.
- $m_1 \ll m_2$ esetén jó közelítéssel az m_1 tömeg hatása elhanyagolható.

A fenti szempontok figyelembevételével a 130.a) ábrán látható szerkezet modelljét a 130.b) ábrán rajzoltuk meg. Ez a lengőrendszer egyszabadságfokú, mert a rendszer tömegének helyzetét meghatározó független koordináták száma egy.

2.1. HAJLÍTÓ LENGÉS

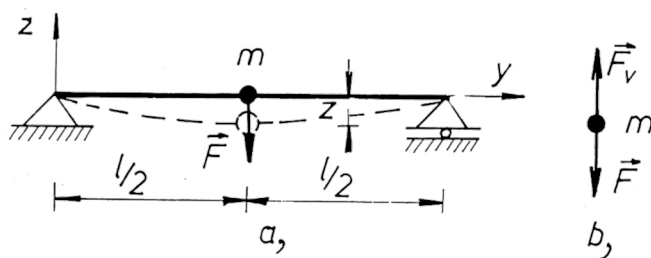
Bevezetőként vizsgáljuk meg a következő statikai feladatot. A 131. ábrán vázolt rugalmas tartóra helyezett m tömegre \vec{F} erő hat, melynek hatására létrejövő z elmozdulás nagysága:

$$z = F \cdot c_{11} \quad (17)$$

A c_{11} rugóállandó nagysága a rúd geometriai és rugalmassági jellemzőitől függ. Értelmezés szerint

$$c_{11} = \frac{z}{F} \left[\frac{\text{m}}{\text{N}} \right].$$

131. ábra



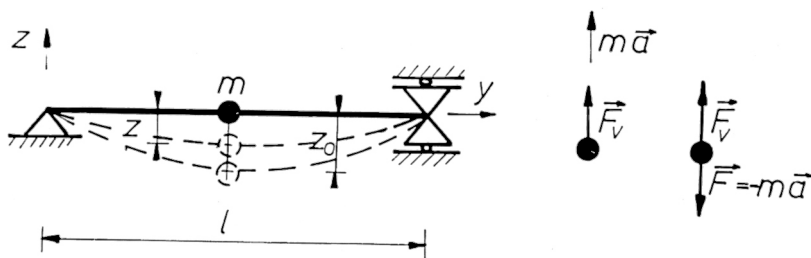
A rugóállandó mérőszáma megegyezik az egységérvő által létrehozott elmozdulás mérőszámával. A c_{11} mennyiség a szilárdságtan munkatételével meghatározható. A 131.b) ábrán feltüntettük az m tömegpontra ható egységnyi erőrendszert.

Felírható tehát az egyensúlyi egyenlet:

$$\vec{F} + \vec{F}_v = \vec{0}.$$

Most pedig tekintsük az egyensúlyi helyzetéből z_0 távolsággal függőlegesen kimozdított és magára hagyott anyagi pont szabad lengését (132. ábra). A statikai modell azonos a 100. ábrán levővel.

132. ábra



A z_0 koordinátával jellemzett helyen az anyagi pontra valamilyen visszatérítő erő hat, mely felfelé történő elmozdulást okoz. Egy bizonyos időpillanatban az anyagi pont helyzete z koordinátájával jellemezhető.

Ezen helyzetében a tartószerkezetről az anyagi pontra ható \vec{F}_v visszatérítő erő a gyorsulást hoz létre, amelyre az impulzustétel szerint az

$$m a = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = F_v \quad (18)$$

egyenlet áll fenn.

Bevezetve az

$$\vec{F}_I = - m \vec{a}$$

tehetetlenségi vagy inerciaerő fogalmát (mint képzelt erőt) a kinetikai feladatot D'Alembert-elv szerint (lásd III. fejezet 2.4. pontot) úgy vizsgálhatjuk, mintha az anyagi pontra egyensúlyi erőrendszer hatna. E szerint

$$\vec{F}_I + \vec{F}_v = \vec{0} \quad (19)$$

Felhasználva az előző pont (17) egyenletét írhatjuk:

$$z = F_I \cdot c_{11} \quad .$$

Ebbe helyettesítjük (19)-et és (18)-at

$$z = - F_v \cdot c_{11} = - m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} c_{11} \quad .$$

Átrendezés után

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{m c_{11}} z = 0$$

differenciálegyenletet nyerjük.

Bevezetve az $\alpha^2 = \frac{1}{m c_{11}}$ jelölést, a megoldás a III. fejezet (32) differenciálegyenletének megoldásához hasonlóan

$$z = A \sin(\alpha t + \varphi_0)$$

alakban adódik.

Itt a lengőmozgás körfrekvenciája tehát:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{m c_{11}}} \quad (20)$$

A rugóállandó az előzőek szerint

$$c_{11} = \frac{1}{EI} \int M^2 ds = \frac{l^3}{48 EI} .$$

Sajátfrekvencia

$$\nu = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{m c_{11}}} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi \sqrt{Q \cdot c_{11}}} , \quad (21a)$$

ahol $Q \cdot c_{11} = a_0$ mennyiség az m tömegű Q súlyú statikus teher által létrehozott lehajlás.

Így (21a) egyszerűbb alakra hozható:

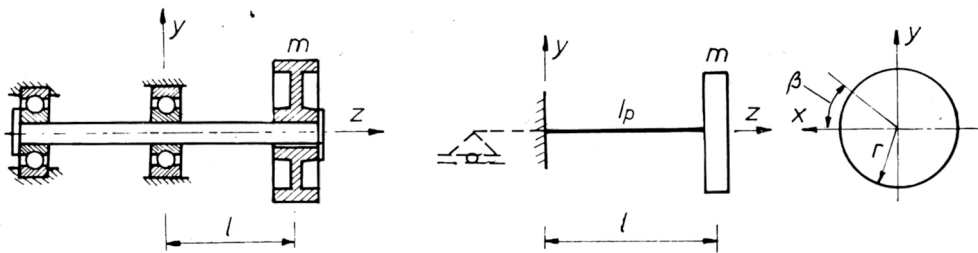
$$\nu = \frac{\sqrt{g}}{2\pi \sqrt{a_0}} = \frac{5}{\sqrt{a_0} [\text{cm}]} [\text{Hz}] = \frac{300}{\sqrt{a_0} [\text{cm}]} \left[\frac{1}{\text{min}} \right] . \quad (21b)$$

A (21b) összefüggés a gyakorlati számításokban nagyon előnyös, mert a sajátfrekvencia mindössze egy adattól függ, az a_0 statikus teher okozta lehajlástól, s melynek mérése vagy számítása is egyszerűen történik.

2.2. TORZIÓS LENGÉS

A 133. ábrán levő befalazott tengelyre rögzített tárcsát a z tengely körül elfordítunk β szöggel és magára hagyjuk. A tárcsa a rúttengely körül torziós lengőmozgást végez.

133. ábra



A tengelyről a tárcsára M_v visszatérítő nyomaték hat. Alkalmazva z tengelyre a perdülettételt:

$$\theta_z = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_v ,$$

amiből – az előző ponthoz hasonlóan –

$$\varphi + \Theta_z \cdot b_{11} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \quad (22)$$

differenciálegyenletre jutunk.

Itt a b_{11} rugóállandó az anyagi pontra ható, z tengely körül forgató egységnyi nyomaték által létrehozott szögelfordulással arányos mennyiség. (Mérőszáma azonos ezen szögelfordulással).

A differenciálegyenlet megoldása

$$\varphi = \Psi_0 \sin(\alpha t + \varphi_0)$$

alakban nyerhető.

A VII. fejezet 2.1. pontjának analógiájára a sajátkörfrekvencia

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Theta_z \cdot b_{11}}} \quad (22)$$

A Θ_z az V. fejezet 2.3.1. pontja szerint számítható.

A rugóállandó a szilárdságtan munkatétéleivel határozható meg:

$$b_{11} = \frac{1}{G I_p} \int_{(\ell)} M_c^2 ds = \frac{1}{G I_p} \quad [1/\text{Nm}].$$

A sajátfrekvenciát pedig

$$\nu = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Theta_z \cdot b_{11}}} \quad (24)$$

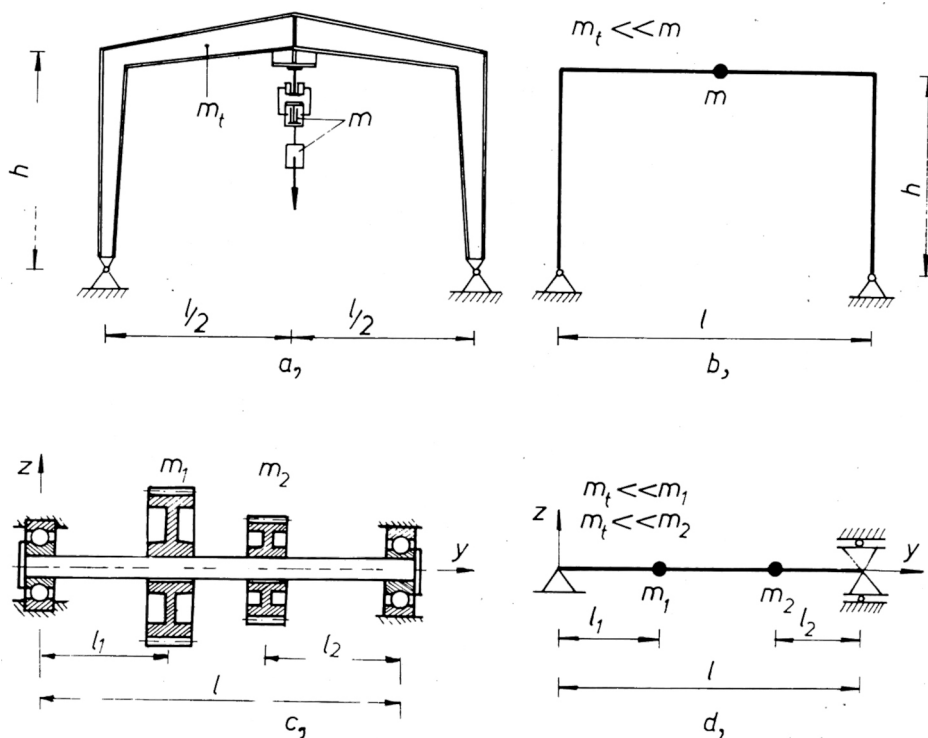
összefüggés adja meg.

3. Kétszabadságfokú hajlító lengőrendszer szabad lengése

Kétszabadságfokúnak nevezzük a lengőrendszert, ha a rendszer tömegeinek helyzetét meghatározó független koordináták száma kettő.

Így modellezhető például a keretre helyezkedő egytömegű, vagy az elhanyagolható tömegű tengelyre ékelt két fogaskerékből álló síkmozgást végző rendszer (134. ábra).

134. ábra



Foglalkozunk egy kicsit részletesebben a 134.d) ábrán látható modellel. A 135. ábrán feltüntettük a modell eredeti egyenes alakját, a kimozdított és magára hagyott rendszer egy közbeni helyzetét, valamint a két anyagi pontra ható valóságos és képzelt erőket.

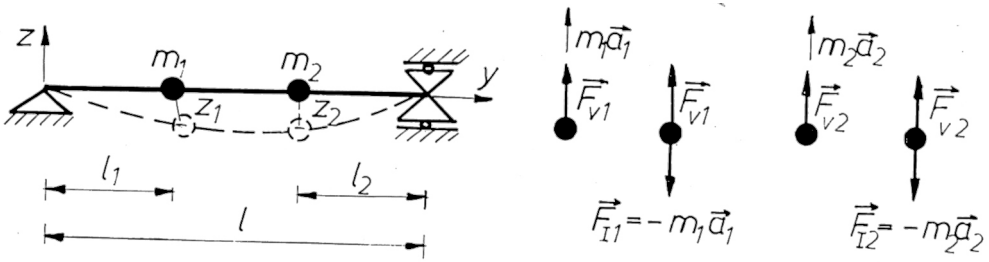
A z_1 és z_2 eltolódások a képzelt F_{11} és F_{12} erőkkel arányos elmozdulások szuperponálásával határozhatók meg:

$$\begin{aligned} z_1 &= F_{11} \cdot c_{11} + F_{12} \cdot c_{12}, \\ z_2 &= F_{11} \cdot c_{21} + F_{12} \cdot c_{22}. \end{aligned} \quad (25)$$

A (25) egyenletrendszerben szereplő c_{11} , c_{21} , c_{12} , c_{22} mennyiségek a tartóra jellemző állandók, a geometriai és rugalmassági jellemzőktől függenek és rugóállandóként értelmezhetők.

E fenti rendszer a zy síkban végez lengőmozgást.

135. ábra



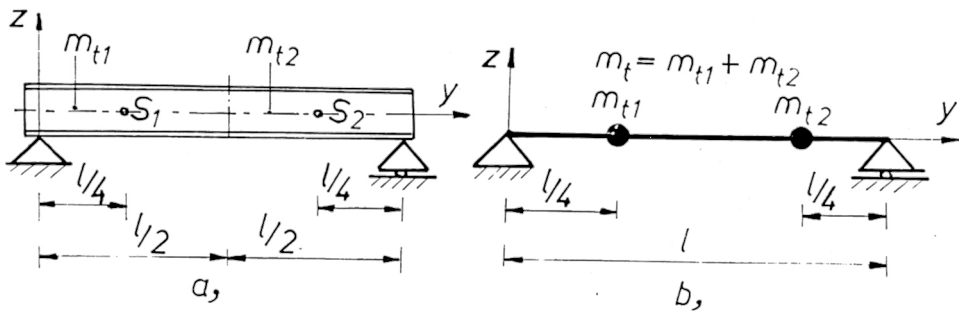
A 135. ábra alapján az egyes tömegekre alkalmazva az impulzustételt:

$$F_{v1} = m_1 \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad \text{illetve} \quad F_{v2} = m_2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dt^2} \quad (26)$$

Ha valamely tartószerkezethez kapcsolódó elemek tömege lényegesen nem nagyobb a tartó tömegénél, akkor ez utóbbit nem hanyagolhatjuk el. Pl. egy súlyos kéttámaszu tartó, vagy tengely sajátfrekvenciáit a tartó tömege befolyásolja. A modell úgy is megválasztható, hogy a folytatólagos rúdszerkezet lengését kéttömegű lengőrendszerrel közelítjük (136. ábra).

A tartót két részre bontva az egyes részek tömegét a részsúlypontokba redukáljuk, s kapjuk a kéttömegű lengőrendszert. A tartót minél több tömegpontra bontjuk, annál pontosabban határozhatjuk meg a sajátfrekvenciát.

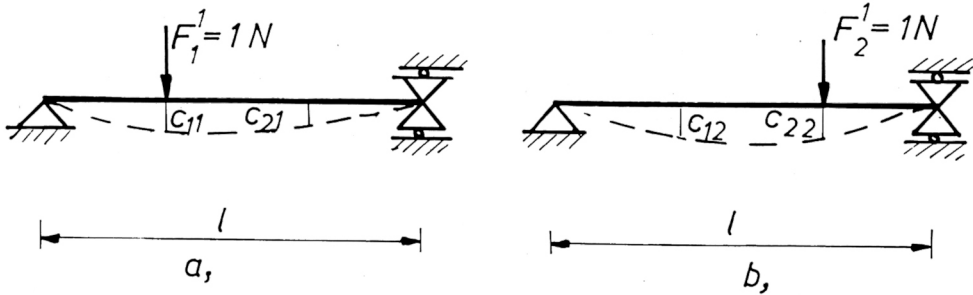
136. ábra



3.1. RUGÓÁLLANDÓK ÉRTELMEZÉSE ÉS MEGHATÁROZÁSA

A 137. ábrán tüntették fel a tömegpontokra ható egységerők hatására létrejövő alakváltozásokat. Az m_1 tömegre működő $F_1^1 = 1\text{ N}$ erő hatására az m_1 illetve m_2 tömeg eltolódása c_{11} illetve c_{21} .

137. ábra



Az m_2 tömegre működő $F_2^1 = 1\text{ N}$ erő hatására az m_1 , ill. m_2 tömeg eltolódása c_{12} illetve c_{22} .

A rugóállandók meghatározása a szilárdságtanból ismeretes.

Megjegyzés: A Maxwell-féle felcserélhetőségi tétel értelmében $c_{12} = c_{21}$. A fenti mennyiségeket egységtényezőkné is nevezik, ugyanis az egységerőből keletkező elmozdulások mérőszámát adják.

3.2. SAJÁTFREKVENCIÁK MEGHATÁROZÁSA

Helyettesítsük a (25) egyenletrendszerbe a (19) és (26) egyenleteket, rendezés után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$m_1 \cdot c_{11} \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} + m_2 \cdot c_{12} \cdot \frac{d^2 z_2}{dt^2} + z_1 = 0 \quad , \quad (27)$$

$$m_1 \cdot c_{12} \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} + m_2 \cdot c_{22} \cdot \frac{d^2 z_2}{dt^2} + z_2 = 0 \quad .$$

Ezen állandó együtthatós differenciálegyenlet megoldását

$$z_1 = A_1 \cdot \sin(\alpha t + \varphi_0) \quad ,$$

$$z_2 = A_2 \cdot \sin(\alpha t + \varphi_0)$$

alakban állíthatjuk elő.

Képezve a differenciálhányadosokat

$$\frac{d z_1}{dt} = A_1 \alpha \cos(\alpha t + \varphi_0); \quad \frac{d z_2}{dt} = A_2 \alpha \cos(\alpha t + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -A_1 \cdot \alpha^2 \sin(\alpha t + \varphi_0); \quad \frac{d^2 z_2}{dt^2} = -A_2 \alpha^2 \sin(\alpha t + \varphi_0)$$

és behelyettesítve a (27) egyenletrendszerbe kapjuk:

$$\begin{aligned} -m_1 \cdot c_{11} \cdot A_1 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha t + \varphi_0) - m_2 c_{12} A_2 \alpha^2 \sin(\alpha t + \varphi_0) + \\ + A_1 \cdot \sin(\alpha t + \varphi_0) = 0, \\ -m_1 \cdot c_{21} \cdot A_1 \cdot \alpha^2 \sin(\alpha t + \varphi_0) - m_2 c_{22} A_2 \cdot \alpha^2 \sin(\alpha t + \varphi_0) + \\ + A_2 \cdot \sin(\alpha t + \varphi_0) = 0. \end{aligned}$$

Egyszerűsítés és rendezés után:

$$\begin{aligned} A_1(1 - m_1 c_{11} \alpha^2) - A_2 m_2 c_{12} \alpha^2 &= 0, \\ -A_1 m_1 c_{21} \alpha^2 + A_2(1 - m_2 c_{22} \alpha^2) &= 0 \end{aligned}$$

alakú egyenletrendszert nyerjük.

A fenti egyenletrendszernek A_1 és A_2 -re számunkra érdekes, triviálistól különböző megoldása az egyenletrendszer determinánsának zérus értéke esetén lehetséges.

Az ún. karakterisztikus determináns

$$\begin{vmatrix} 1 - m_1 c_{11} \alpha^2 & -m_2 c_{12} \alpha^2 \\ -m_1 c_{21} \alpha^2 & 1 - m_2 c_{22} \alpha^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Kifejtve a determinánst, a műveletek elvégzése után a

$$0 = \alpha^4 m_1 m_2 (c_{11} c_{22} - c_{12}^2) - \alpha^2 (m_1 c_{11} + m_2 c_{22}) + 1$$

negyedfokú egyenlethez jutunk.

Az egyenlet megoldásaként két saját körfrekvenciát kapunk

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{m_1 c_{11} + m_2 c_{22} - \sqrt{(m_1 c_{11} - m_2 c_{22})^2 + 4 m_1 m_2 c_{12}^2}}{2 m_1 m_2 + c_{11} c_{22} - c_{12}^2}}, \quad (28a)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{m_1 c_{11} + m_2 c_{22} + \sqrt{(m_1 c_{11} - m_2 c_{22})^2 + 4 m_1 m_2 c_{12}^2}}{2 m_1 m_2 (c_{11} c_{22} - c_{12}^2)}} \quad (28b)$$

sajátfrekvenciák értéke

$$\nu_1 = \frac{\alpha_1}{2\pi}, \quad \text{és} \quad \nu_2 = \frac{\alpha_2}{2\pi}.$$

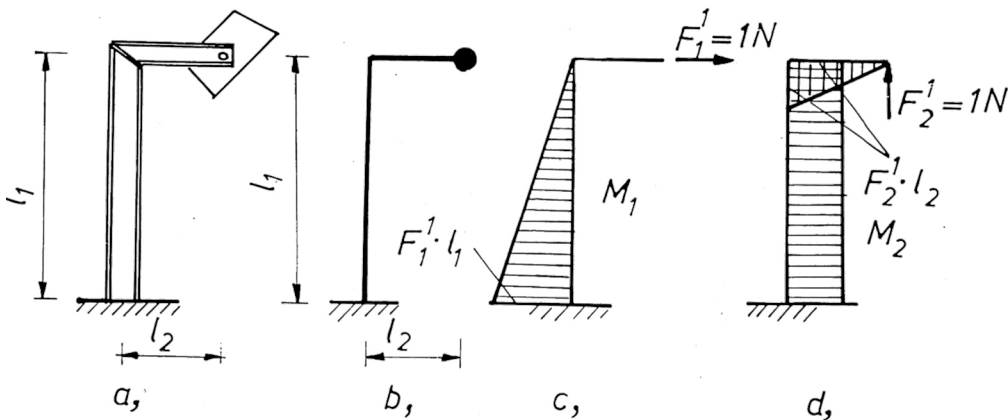
37. feladat:

Határozzuk meg a 138. ábrán levő törtvonalú tartóra szerelt $m = 500$ kg tömegű világítóoszlop sajátfrekvenciáit! Az egyes szakaszok hossza: $l_1 = 4$ m; $l_2 = 2$ m, a keresztmetszetek másodrendű nyomatékai: $I_1 = 5000$ cm⁴; $I_2 = 4000$ cm⁴. A tartó anyagának rugalmassági modulusa:

$$E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$$

A szerkezet modelljét a 138.b) ábrán láthatóan közelítettük a tartó tömegének elhanyagolásával.

138. ábra



Először határozzuk meg a rugóállandókat a szilárdságtanban tanultak felhasználásával:

$$c_{11} = \frac{1}{E} \int \frac{M_1^2}{I} ds = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{\ell_1^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \ell_1 = \frac{\ell_1^3}{3EI_1} = \frac{64 \cdot 10^6}{3 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^3} =$$

$$= 2,135 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{cm}}{\text{N}} \right],$$

$$c_{12} = \frac{1}{E} \int \frac{M_1 M_2}{I} ds = - \frac{1}{EJ_2} \cdot \frac{\ell_1^2}{2} \cdot \ell_2 = - \frac{\ell_1^2 \cdot \ell_2}{2EI_1} = c_{21} =$$

$$= \frac{16 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^3} = - 1,6 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{cm}}{\text{N}} \right].$$

$$c_{22} = \frac{1}{E} \int \frac{M_2^2}{I} ds = \frac{1}{E} \left[\frac{\ell_2^2 \ell_1}{I_1} + \frac{\ell_2^2}{2I_2} \cdot \frac{2}{3} \ell_2 \right] = \frac{\ell_2^2 \ell_1}{I_1 E} + \frac{\ell_2^3}{3EI_2} =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^3} + \frac{8 \cdot 10^6}{3 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^3} = 1,93 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{cm}}{\text{N}} \right].$$

Sajátkörfrekvenciák a VII. fejezet 3.2. pontja szerint, figyelembe véve, hogy esetünkben $m_1 = m_2 = m = 500 \text{ kg} = 0,05 \text{ Ns}^2/\text{cm}$ így a (28b) összefüggésben m értékével egyszerűsíthetünk:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{3,135 \cdot 10^{-4} + 1,93 \cdot 10^{-4} + \sqrt{(2,135 - 1,93)^2 \cdot 10^{-8} + 4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-8}}}{2 \cdot 0,05 \cdot (2,135 + 1,93 - 1,6^2) \cdot 10^{-8}}},$$

$$\alpha_2 = 53,7 \left[\frac{1}{\text{s}} \right],$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2,135 + 1,93 - \sqrt{0,205^2 + 10,24}}{2,52 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\alpha_1 = 18,4 \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$$

A szerkezet sajátfrekvenciái tehát

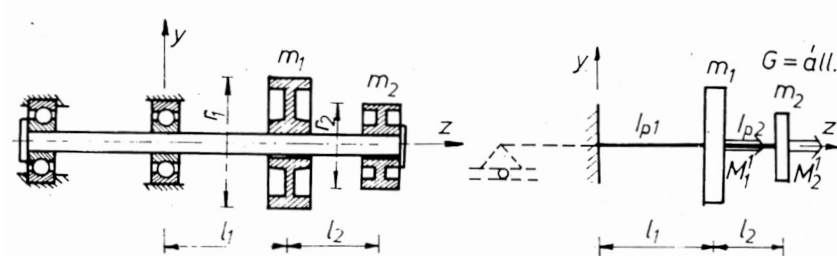
$$\nu_1 = \frac{\alpha_1}{2\pi} = \frac{18,4}{2\pi} = 2,92 \text{ [Hz]},$$

$$\nu_2 = \frac{\alpha_2}{2\pi} = \frac{53,7}{2\pi} = 8,55 \text{ [Hz]}.$$

4. Kétszabadságfokú torziós lengőrendszer szabad lengése

A 139. ábrán egy két csapággal rögzített tengely látható, melyre két szíjtárcsát helyeztünk el. A rendszer egy szíjmeghajtás közbenső elemeként dolgozik.

139. ábra



A szerkezet modelljét a 139.b) ábrán tüntettük fel. Üzem közben az egyenetlen meghajtás, valamint a meghajtásban szereplő tömegek tehetetlensége folytán a tárcsákon keresztül M_1 és M_2 csavarónyomaték hat a tengelyre. Ezek sohasem állandó értékűek, és változásuk olyan hatással van a rendszerre, mint mikor azt egyensúlyi helyzetéből kimozdítjuk. Vizsgáljuk meg, hogy viselkedik ilyen esetben a rendszer!

A nyugalmi helyzetből való kitérítés eredményeként a tengely a tárcsákra M_{v1} és M_{v2} visszatérítő nyomatékkal hat. (v.ö. a VII. fejezet 2.1.; 2.2. pontjával). A 139. ábra alapján felírjuk mindkét tárcsa tengelyére vonatkozó perdülettételt:

$$\theta_{z1} \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_{v1},$$

$$\theta_{z2} \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_{v2}.$$
(29)

Bevezetve a képzelt inerciaerők z tengelyre számított M_{I1} , illetve M_{I2} nyomatékait (D'Alembert-elv):

$$M_{I1} = - \theta_{z1} \cdot \ddot{\varphi}_1; \quad M_{I2} = - \theta_{z2} \cdot \ddot{\varphi}_2.$$
(30)

A VII. fejezet 2.1. pontjában felírt statikai analógiához hasonlóan az eredő elmozdulások:

$$\varphi_1 = M_{I1} \cdot b_{11} + M_{I2} \cdot b_{12} ,$$

$$\varphi_2 = M_{I1} \cdot b_{21} + M_{I2} \cdot b_{22} ,$$

ahol b_{11} , b_{22} , b_{12} rugóállandók.

4.1. RUGÓÁLLANDÓK MEGHATÁROZÁSA

A rugóállandót a VII. fejezet 3.1. pontban leírtakhoz hasonlóan értelmezzük.

b_{11} = Az m_1 tömegű tárcsára működő egységnyi nyomaték hatására az 1-es tárcsa elfordulása,

b_{12} = Az m_2 tömegű tárcsára működő egységnyi nyomaték hatására az 1-es tárcsa elfordulása,

b_{21} = Az m_1 tömegű tárcsára működő egységnyi nyomaték hatására a 2-es tárcsa elfordulása,

b_{22} = Az m_2 tömegű tárcsára működő egységnyi nyomaték hatására a 2-es tárcsa elfordulása.

Betti-tétel felhasználásával a rugóállandók a 139. ábra jelöléseivel:

$$b_{11} = \frac{1 \cdot \ell_1}{I_{p1} \cdot G} ; \quad b_{12} = \frac{1 \cdot \ell_1}{I_{p1} \cdot G} ; \quad b_{22} = \frac{1 \cdot \ell_1}{I_{p1} \cdot G} + \frac{1 \cdot \ell_2}{I_{p2} \cdot G} \quad (32)$$

4.2. SAJÁTFREKVENCIÁK MEGHATÁROZÁSA

Helyettesítsük be a (31) egyenletrendszerbe a (30) egyenleteket,

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \Theta_{z1} \cdot b_{11} \cdot \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \Theta_{z2} \cdot b_{12} \cdot \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= 0 , \\ \varphi_2 + \Theta_{z1} \cdot b_{21} \cdot \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \Theta_{z2} \cdot b_{22} \cdot \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= 0 . \end{aligned} \quad (33)$$

A (33) egyenletrendszer megoldása

$$\varphi_1 = \Psi_1 \cdot \sin (\alpha t + \varphi_0) ,$$

$$\varphi_2 = \Psi_2 \cdot \sin (\alpha t + \varphi_0)$$

alakban állítható elő.

A differenciálhányadosok képzése és a (33) egyenletrendszerbe való behelyettesítés után felírhatjuk az egyenletrendszer karakterisztikus determinánsát a VII. fejezet 3.2. pontjában leírtak analógiájára:

$$\begin{vmatrix} 1 - \Theta_{z1} \cdot b_{11} \alpha^2 & - \Theta_{z2} \cdot b_{12} \alpha^2 \\ - \Theta_{z1} \cdot b_{21} \alpha^2 & 1 - \Theta_{z2} \cdot b_{22} \alpha^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

A determináns kifejtése és rendezés után:

$$0 = \alpha^4 \cdot \Theta_{z1} \cdot \Theta_{z2} (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12}^2) - \alpha^2 (\Theta_{z1} \cdot b_{11} + \Theta_{z2} \cdot b_{22}) + 1 .$$

Az egyenlet megoldásai szolgáltatják a torziós lengőrendszer sajátkörfrekvenciáit:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\Theta_{z1} \cdot b_{11} + \Theta_{z2} \cdot b_{22} - \sqrt{(\Theta_{z1} \cdot b_{11} - \Theta_{z2} \cdot b_{22})^2 + 4 \Theta_{z1} \cdot \Theta_{z2} \cdot b_{12}^2}}{2 \Theta_{z1} \cdot \Theta_{z2} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)}}} \quad (34a)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\Theta_{z1} \cdot b_{11} + \Theta_{z2} \cdot b_{22} + \sqrt{(\Theta_{z1} \cdot b_{11} - \Theta_{z2} \cdot b_{22})^2 + 4 \Theta_{z1} \cdot \Theta_{z2} \cdot b_{12}^2}}{2 \Theta_{z1} \cdot \Theta_{z2} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)}}} \quad (34b)$$

A saját frekvencia értéke

$$\nu_1 = \frac{\alpha_1}{2\pi} \quad \text{és} \quad \nu_2 = \frac{\alpha_2}{2\pi} .$$

Torziós lengés általában forgómozgásnál jön létre. Tökéletesen egyetlen forgó rendszert sem lehet kiegyensúlyozni. A tengelyen átvitt nyomaték a fordulatszámmal periodikusan változik, ezért az ilyen rendszerek gerjesztési frekvenciája az üzemi fordulatszám. A sajátfrekvenciát is fordulatszám dimenziójúra számítjuk át, és ezt kritikus fordulatszámnak nevezzük:

$$n_{kr1} = \frac{\alpha_1}{2\pi} \cdot 60 \quad \text{és} \quad n_{kr2} = \frac{\alpha_2}{2\pi} \cdot 60 \quad [1/\text{min}] . \quad (35)$$

A sajátfrekvencia és az üzemi (gerjesztési) frekvencia ismerete a rezonanciajelenség elkerülése miatt szükséges. Ha e két érték megközelíti egymást vagy azonosak, akkor a lengőrendszer elhangolását el kell végezni, ami valamilyen formában a sajátfrekvencia esetleg az üzemi frekvencia megváltoztatását jelenti.

38. feladat:

Határozzuk meg egy kéttömegű torziós lengőrendszer sajátfrekvenciáit, ha a 139. ábra szerinti mennyiségek adatai a következők:

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell = 1,5 \text{ m}; \quad r_1 = r_2 = r = 40 \text{ cm}; \quad G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2,$$

$$I_{p1} = I_{p2} = I_p = 250 \text{ cm}^4; \quad m_1 = m_2 = m = 500 \text{ kg} = 5 \frac{\text{Ns}^2}{\text{cm}}.$$

Először határozzuk meg a rugóállandókat

$$b_{11} = \frac{\ell}{I_p \cdot G}; \quad b_{21} = \frac{\ell}{I_p \cdot G}; \quad b_{22} = \frac{2\ell}{I_p \cdot G}.$$

A tömegek z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{z1} = \Theta_{z2} = \Theta = \frac{mr^2}{2} = \frac{5 \cdot 1600}{2} = 4000 \left[\text{Ns}^2 \text{ cm} \right].$$

Sajátkörfrekvenciák a (34) egyenletek felhasználásával

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\Theta \cdot b_{11} + \Theta \cdot b_{22} - \sqrt{(\Theta \cdot b_{11} - \Theta \cdot b_{22})^2 + 4 \Theta^2 \cdot b_{12}^2}}{2 \Theta^2 (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12}^2)}},$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\Theta \cdot b_{11} + \Theta \cdot b_{22} + \sqrt{(\Theta \cdot b_{11} - \Theta \cdot b_{22})^2 + 4 \Theta^2 \cdot b_{12}^2}}{2 \Theta^2 (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12}^2)}}.$$

Összevonás és egyszerűsítés után

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{I_p \cdot G}{\Theta \cdot \ell}},$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{I_p \cdot G}{\Theta \cdot \ell}}.$$

kifejezéseket nyerjük.

Számszerűen

$$\alpha_1 = 0,618 \cdot \sqrt{\frac{250 \cdot 8 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^3 \cdot 150}} = 35,6 \text{ 1/s} ,$$

$$\alpha_2 = 93,2 \text{ [1/s]} .$$

A torziós lengésekre vonatkozó kritikus fordulatszámok tehát:

$$n_{kr1} = \frac{\alpha_1}{2\pi} \cdot 60 = \frac{35,6 \cdot 60}{2} = 340 \text{ [1/min]} ,$$

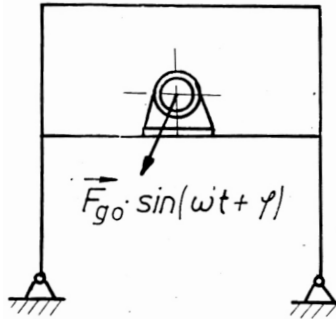
$$n_{kr2} = \frac{\alpha_2}{2\pi} \cdot 60 = \frac{93,2 \cdot 60}{2} = 890 \text{ [1/min]} .$$

5. Lengésvizsgálatok

5.1. LENGÉSVIZSGÁLATOK ALKALMAZÁSI TERÜLETE

A VII. fejezet 2–4. pontjában lengőrendszerek sajátfrekvenciáinak meghatározását végeztük. Ezek ismeretére a III. fejezet 3.3. pontjában már említett rezonancia jelenségének elkerülése miatt van szükség. Rezonancia gerjesztett lengőrendszerek esetében léphet fel. Gerjesztő hatást gyakorolnak például: valamely gép forgórészének kiegyensúlyozatlan tömegei az alapra, vagy a tartószerkezetre (140. ábra), a menetelő katonaság a hídszerkezetre, a tapsoló közönség a csarnok szerkezetére.

140. ábra



Ahhoz, hogy a szerkezetre nézve káros rezonanciajelenséget elkerülhessük, biztosítanunk kell, hogy a gerjesztőerő frekvenciája és a szerkezet valamely saját frekvenciája ne essen közel egymáshoz. Amennyiben a gerjesztő frekvencia adott a szerkezet saját frekvenciájának meg-

változtatásával – elhangolásával – (pl. bizonyos konstrukciós módosítással) érhetjük ezt el. A lengőrendszerek saját frekvenciáinak meghatározása történhet számítással – mint arra néhány egyszerűbb esetben az előző pontokban kitértünk –, vagy méréssel. Utóbbi főleg számítással nehezen követhető lengőrendszerek esetén alkalmazható (pl. folytonos tömegeloszlású szerkezeti elemek lengése).

5.2. LENGÉSMÉRÉSEK

A lengőmozgás meghatározásához annak bizonyos jellemzőit kell mérni. Elvileg bármelyik jellemző mérhető. A gyakorlatban a következő mennyiségek mérésével határozhatjuk meg a lengőmozgás mozgásjellemzőit.

1. Erőmérés, melynek során a lengés okát határozzuk meg.
2. Lengésmérés:
 - a) elmozdulás $z = z(t)$,
 - b) sebesség $v(t) = dz/dt$,
 - c) gyorsulás $a(t) = dv/dt = d^2z/dt^2$.
3. Nyúlásmérés: rugalmas elemeken a lengés által létrehozott alakváltozást (a lengés következményét) határozzuk meg.

5.2.1. Lengésvizsgálati módszerek

A lengésmérési gyakorlatban előforduló mérési elvek közül csak néhányat tárgyalunk. Ezeket a módszereket röviden az alábbiakban foglalhatjuk össze.

a) A lengőrendszert alkotó elemek mechanikai jellemzőinek közvetlen mérésénél a rendszert elemeire bontjuk és így mérjük a szükséges mennyiségeket. Ilyen módon mérhető a tömeg, a tehetetlenségi nyomaték, rugóállandó, csillapítás. A mérési adatok birtokában az adott lengőmozgás egyenletének ismeretében a lengésre legjellemzőbb sajátfrekvencia meghatározható.

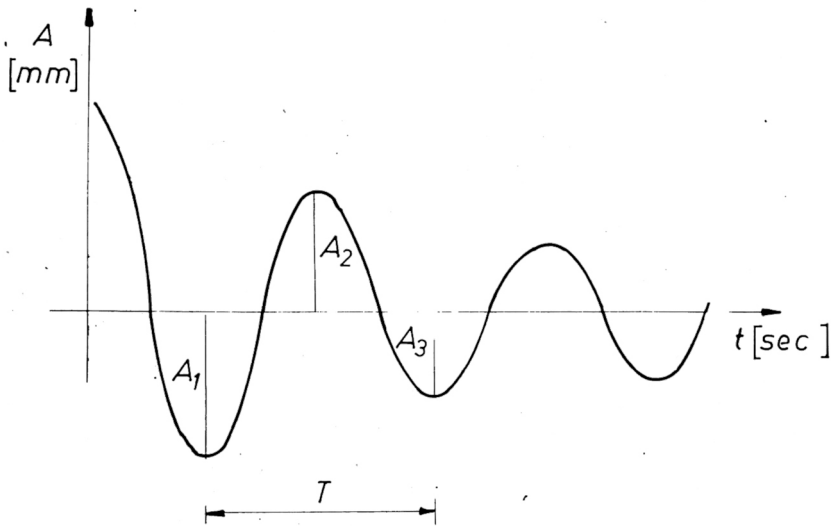
b) Egyszabadságfokú lengőrendszer egyszerűen vizsgálható kilengés alapján. A lengőrendszert kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből és magára hagyjuk. Az így létrehozott csillapított lengőmozgás lengésképét regisztráljuk (141. ábra). Ez az ún. kilengési görbe, melynek alapján a

sajátfrekvencia $\nu = \frac{1}{T}$ (III. fejezet 1.2.3. pont), a csillapítás pedig $k = \frac{A_1}{A_3}$ (III. fejezet

3.2.1. pont) összefüggés alapján számítható ki.

Kisebb lengésszámok és kis csillapítás esetén számlálóműszerrel megszámláljuk az adott időszakra eső lengések számát. A frekvencia ez alapján számítható.

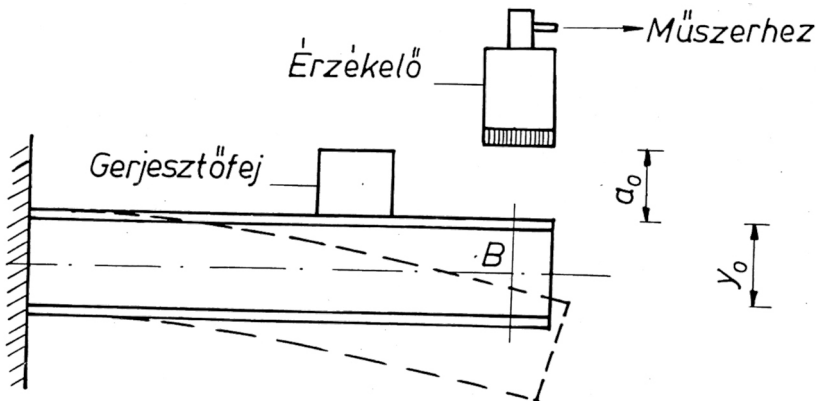
141. ábra



c) Többszabadságfokú rendszerek esetén célszerűen alkalmazható a lengető vizsgálat.

A 142. ábrán vázoltunk egy folytonos tömegeloszlású rendszert, melynél a B pont környezetében indukciós mérőfejjel érzékeljük a kitéréseket.

142. ábra



A gerjesztőfejjel a lengőrendszert lengésbe hozzuk. A gerjesztési frekvencia változtatható. Amikor a gerjesztési frekvencia értéke közelítőleg azonos a lengőrendszer sajátfrekvenciájával a rezonancia jelensége miatt a lengés amplitúdói maximálisak lesznek. Ez a maximális kitérés az induktív mérőfejen érzékelhető. A rendszer sajátfrekvenciája pedig azon gerjesztési frekvenciával lesz azonos, amelyhez a maximális kitérés tartozik.

A sajátfrekvencia és a maximális kitérés ismeretében a szerkezeti elem jóságára lehet következtetni. Mint azt a III. fejezet 3.4. pontjában is tárgyaltuk, $\alpha \approx \omega$ esetén a lengőrendszer elhangolására gondot kell fordítanunk, ahol α = sajátfrekvencia ω = gerjesztő frekvencia.

A maximális kitéréseket előírások szabályozzák, melyek szerint a legnagyobb kitérés nem haladhatja meg az előírások által korlátozott értékeket.