



Kővári Attila–Katona József (Szerk.)

A MARSRENGÉSEKTŐL

AZ ÉLMÉNYPEDAGÓGIÁIG



© Dr. Kővári Attila, Dr. Katona József editors 2019

© Agg Péter András, Árvai-Homolya Szilvia, Baille, W., Barreto, D., Béres Ilona, Csáky Antal, Csiszár Csaba, Csonka Bálint, Dukán Péter, Földes Dávid, Gambár Katalin, Goudarzy, M., Hudoba György, Imre E., Jakus Gabriella, Johanyák Zsolt Csaba, Kis Márta, Kovács István Béla, Kovács Márk, Kozsely Gábor, Körei Attila, Kővári Attila, Krutilla Zsolt, Lengyelne Szilágyi Szilvia, Lőrincz J., Magyar Tímea, Mihalovicsné Kollár Anita, Molnár Sándor, Nagy Péter, Nagy Simon, Nemes Teréz, Rahemi, N., Singh, V. P., Takács Anna Mária, Talata I., Tasnádi Péter, Tóth Attila, Tóth-Orosz Andrea, Váraljai Mariann, Wizner Krisztián, 2019

DUNAÚJVÁROSI EGYETEM

www.due.hu

DUE PRESS

Kiadóvezető: Németh István

Lektorálta:

Matematika: Dr. Nagy Bálint, Dr. Joós Antal, Dr. Búzáne Dr. Kis Piroska, Horváth Péter

Fizika: Dr. Horváth Miklós, Dr. Kiss Endre,

Informatika: Dr. Kővári Attila, Dr. Katona József

Közelekedésinformatika: Dr. Ágoston György

Felelős kiadó Dr. habil András István, rektor

Felelős szerkesztő Nemeskéry Artúr

Tördeleés Duma Attila

Készült a HTSART nyomdában

Felelős vezető Halász Iván

ISBN 978-963-9915-97-8

A MARSRENGÉSEKTŐL AZ ÉLMÉNYPEDAGÓGIÁIG

Kővári Attila – Katona József (Szerk.)

MOLNÁR SÁNDOR

A függvénytranszformációról

KOVÁCS ISTVÁN BÉLA

Riesz-terek típusairól röviden

TÓTH ATTILA – CSÁKY ANTAL

A kételemű számok, kvaterniók jelentősége a gyakorlatban

TAKÁCS ANNA MÁRIA

Művészet – narratívum – matematika

JAKUS GABRIELLA ET AL.

Szemléletváltás a matematikaoktatásban – Growth mindset

KOZSELY GÁBOR

A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

ÁRVAI-HOMOLYA SZILVIA ET AL.

Élménypedagógiai játékok konstruálása tanulást támogató matematikai nyári tábor délutáni foglalkozásainak

HUDÓBA GYÖRGY

Marskutatók otthonról – a „MarsRengések” program

NAGY PÉTER – TÁSNÁDI PÉTER

Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán

IMRE E. ET AL.

A szemeloszlás és a belső stabilitás kapcsolata

GAMBÁR KATALIN

Példa a hőmérséklet fogalmának általánosítására

KOVÁCS MÁRK ET AL.

Ötödik generációs mobilhálózatok forgalomirányítása és forgalomelosztása SDN és SDR használatával

TERÉZ NEMES

Blockchain – opportunities and risks

KRUTILLA ZSOLT

Banki előrejelző rendszer informatikai hátterének meghatározása

WIZNER KRISZTIÁN – KŐVÁRI ATTILA

Acélgvártás folyamatát elemző informatikai rendszer

KŐVÁRI ATTILA – DUKÁN PÉTER

Költséghatékony okosotthon megoldás

BÉRES ILONA ET AL.

Innovatív oktatási módszerek technológiai támogatása

MIHÁLYVICSNÉ KOLLÁR ANITA – VÁRALJAI MARIANN

Az elektronikus környezetben végzett hallgatói tevékenységek sikerességének összevetése a különböző munkaformák szempontjából

CSISZÁR CSABÁ ET AL.

A közlekedési informatika elméleti oktatása és kutatása a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén
FÖLDES DÁVID ET AL. A közlekedési informatika gyakorlati oktatása a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén

CSISZÁR CSABÁ – NAGY SIMON Személyközlekedési szolgáltatások elemzési módszerei

CSONKA BÁLINT ET AL. Elektromos autóbuszok statikus töltőberendezésének a teljesítmény optimalizálása



Dunakavics
KÖNYVEK 15.

DUE PRESS-Ú M K



Tartalom

Matematika	7
A függvénytranszformációról.....	7
(Molnár Sándor)	
Riesz-terek típusairól röviden	12
(Kovács István Béla)	
A kételemű számok, kvaterniók jelentősége a gyakorlatban	19
(Tóth Attila–Csáky Antal)	
Művészet–narratívum–matematika	39
(Takács Anna Mária)	
Szemléletváltás a matematikaoktatásban - Growth mindset	53
(Jakus Gabriella–Kis Márta–Magyar Tímea–Tóth-Orosz Andrea)	
A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével.....	64
(Kozsely Gábor)	
Élménypedagógiai játékok konstruálása tanulást támogató matematikai nyári tábor délutáni foglalkozásaihoz	82
(Árvai-Homolya Szilvia–Körei Attila–Lengyelne Szilágyi Szilvia)	
Fizika	95
Marskutató otthonról - a „MarsRengések” program	95
(Hudoba György)	
Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán	101
(Nagy Péter–Tasnádi Péter)	
A szemeloszlás és a belső stabilitás kapcsolata	116
(Imre E.–Barreto, D.–Talata I.–Baille, W.–Rahemi, N.– Goudarzy, M.–Lőrincz J.–Singh, V. P.)	
Példa a hőmérséklet fogalmának általánosítására	129
(Gambár Katalin)	



Informatika	137
Ötödik generációs mobilhálózatok forgalomirányítása és forgalomelosztása SDN és SDR használatával	137
(Kovács Márk–Agg Péter András–Johanyák Zsolt Csaba)	
Blockchain – opportunities and risks	145
(Téréz Nemes)	
Banki előrejelző rendszer informatikai hátterének meghatározása	154
(Krutilla Zsolt)	
Acélgyártás folyamatát elemző informatikai rendszer	163
(Wizner Krisztián–Kővári Attila)	
Költséghatékony okosotthon megoldás	171
(Kővári Attila–Dukán Péter)	
Innovatív oktatási módszerek technológiai támogatása	187
(Béres Ilona–Kis Márta–Magyar Tímea)	
Az elektronikus környezetben végzett hallgatói tevékenységek sikerességének összevetése a különböző munkaformák szempontjából	194
(Mihalovicsné Kollár Anita–Váraljai Mariann)	
 Közlekedésinformatika	208
A közlekedési informatika elméleti oktatása és kutatása a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén	208
(Csiszár Csaba–Csonka Bálint–Dr. Földes Dávid)	
A közlekedési informatika gyakorlati oktatása a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén	216
(Földes Dávid–Csonka Bálint–Dr. Csiszár Csaba)	
Személyközlekedési szolgáltatások elemzési módszerei	223
(Csiszár Csaba–Nagy Simon)	
Elektromos autóbuszok statikus töltőberendezésének a teljesítmény optimalizálása	230
(Csonka Bálint–Csiszár Csaba–Földes Dávid)	



MOLNÁR SÁNDOR *

M_{atematika}

A függvénytranszformációról

Összefoglalás: A hallgatóink jelentős része azzal a téves elképzeléssel érkezik a középiskolából, hogy a függvénytranszformáció abból áll, hogy megadjuk a függvényeknek egy olyan sorozatát, mellyel az f függvény grafikonjából az $F: F(x) = c \cdot f(ax + b) + d, (ax + b) \in D_f$ grafikonjához eljutunk. Hiányzik a szemléletükből, hogy a függvénytranszformáció a koordináta síknak egy olyan geometriai transzformációja (kölcsonösen egyértelmű leképezése), melyben a sík egy kiválasztott részhalmaza pontjainak, a $graph f$ halmaz pontjainak a mozgását figyeljük. Ráadásul a középiskolákban jellemzően, a végeredménynek transzformációk szorzataként való felírásnál, a számos lehetőség közül, a függvényérték kiszámításához alkalmazható műveleti erőssorrendben haladnak, amivel az egyik legnehezebb megoldást erőltetik a tanulóra. Írásunkban ennek egy ésszerű alternatívájára hívjuk fel a figyelmet.

Kulcsszavak: Geometriai transzformáció, függvénytranszformáció, transzformációk szorzatának sorrendje.

Abstract: A considerable part of students arrive from secondary school with the misconception that the transformation of functions means the sequence of functions through which we proceed from the graph of function f to the graph of $F: F(x) = c \cdot f(ax + b) + d, (ax + b) \in D_f$. They are missing the concept that the transformation of functions is a bijective geometric transformation of the plane, by which we are inspecting the motion of the set $graph f$. It is also characteristic of secondary schools that in the sequence of transformations they proceed by the rank of operations used to calculate the value of the function. Doing so, students are forced to apply one of the most difficult solutions. We call attention to a more reasonable alternative in our talk.

Keywords: Geometric transformation, transformations of functions, ordered sequence of transformations.

* Budapesti Gazdasági
Egyetem PSZK
E-mail: molnar.sandor@uni-
bge.hu



[1] Csernyák László (2010): *Matematika a közgazdasági alapkép-zés számára. Analízis.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Ha ismert az f függvény grafikonja és $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, akkor a függvénytranszformációk segítségével az f függvény grafikonjából az $x \mapsto c \cdot f(a \cdot x + b) + d$, $(a \cdot x + b) \in D_f$ függvény grafikonját tudjuk származtatni. A függvénytranszformáció során a koordináta síkot transzformáljuk és közben egy részhalmaz pontjainak, a grafikon pontjainak mozgását figyeljük. A témával az [1]-ben foglalkoztunk. A síktranszformáció a sík önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Ezért, amikor a függvénytranszformációs alaplépéseket a tételben megadjuk, az értelmezési tartományt nem írjuk ki újra meg újra, csak a hozzárendelési szabályt közöljük. A függvénytranszformációs alaplépések két eltolást, két tükrözést és két aránytartó leképezést (tengelyes affinitást) engedélyeznek. A középiskolából származó ismereteinket most egy tételben foglaljuk össze.

TÉTEL: Legyen az f függvény grafikonja egy Descartes-féle koordináta-rendszerben ismert.

a) Az $x \mapsto f(x+b)$, $(x+b) \in D_f$ függvény grafikonja az f függvény görbéje pontjainak x tengely irányú eltolásával származtatható. Az eltolás mértéke $|b|$ egység, $b > 0$ esetén negatív, $b < 0$ esetén pozitív irányba toljuk el.

b) Az $x \mapsto f(a \cdot x)$, $(a \cdot x) \in D_f$, $a > 0$ függvény görbéje úgy származtatható, hogy az f függvény görbéje pontjainak távolságát az y tengelytől $1/a$ szorosára változtatjuk, miközben a pontokat az x tengellyel párhuzamosan mozgatjuk, az y tengelyt nem átlépve.

c) Az $x \mapsto f(-x)$, $-x \in D_f$ függvény grafikonja az f grafikonjának y tengelyre vonatkozó tükröképe.

d) Az $x \mapsto -f(x)$, $x \in D_f$ függvény grafikonja az f grafikonjának x tengelyre vonatkozó tükröképe.

e) Az $x \mapsto c \cdot f(x)$, $x \in D_f$, $c > 0$ függvény görbéje úgy származtatható, hogy az f függvény grafikonja pontjainak távolságát az x tengelytől c szorosára változtatjuk, miközben a pontokat az y tengellyel párhuzamosan mozgatjuk, az x tengelyt nem átlépve.



A függvénytranszformációról

f) Az $x \mapsto f(x) + d$, $x \in D_f$ függvény grafikonja az f függvény görbéje pontjainak y tengely irányú eltolásával származtatható. Az eltolás mértéke $|d|$ egység, $d > 0$ esetén pozitív, $d < 0$ esetén negatív irányba toljuk el.

A tételben szereplő első három transzformációt változó-transzformációnak, míg az utolsó hármat érték-transzformációnak nevezzük.

Példa: Legyen $F: F(x) = 1 - 2\log_3(4 - 5x)$, $x < 4/5$. Adjuk meg a függvénytranszformációs alaplépések egy olyan sorozatát, mellyel az $f: f(x) = \log_3 x$, $x > 0$ függvény grafikonjából az F függvény grafikonját származtathatjuk.

MEGOLDÁS: A feladatnak nagyon sok megoldása létezik, melyből most kettőt közlünk. Reményeink szerint egyértelmű lesz, hogy a középiskolában távolról sem a legegyszerűbb megoldást tanítják.

Első megoldás

1. f grafikonját eltoljuk x^- irányba 4 egységgel, a) szerint adódik:

$$f_1(x) = f(x + 4) = \log_3(x + 4).$$

2. f_1 grafikonja pontjainak távolságát az y tengelytől $1/5$ szeresére csökkentjük, az y tengelyt nem átlépve (x tengellyel párhuzamos mozgás). A b) szerint kapjuk:

$$f_2(x) = f_1(5x) = \log_3(5x + 4).$$

3. Tükrözzük f_2 grafikonját az y tengelyre, ekkor c) szerint

$$f_3(x) = f_2(-x) = \log_3(5 \cdot (-x) + 4) = \log_3(4 - 5x).$$

4. Tükrözzük f_3 grafikonját az x tengelyre, ekkor d) szerint

$$f_4(x) = -f_3(x) = -\log_3(4 - 5x).$$

5. f_4 grafikonja pontjainak távolságát az x tengelytől 2 szeresére növeljük, az x tengelyt nem átlépve (y tengellyel párhuzamos mozgás). Az e) szerint adódik:

$$f_5(x) = 2 \cdot f_4(x) = 2 \cdot (-\log_3(4 - 5x)) = -2 \cdot \log_3(4 - 5x).$$



Molnár Sándor

6. Toljuk el f_5 grafikonját y^+ irányba 1 egységgel, akkor az f) alapján a feladatban szereplő függvény grafikonjához jutunk.

$$f_6(x) = 1 + f_5(x) = 1 + (-2 \cdot \log_3(4 - 5x)) = 1 - 2 \cdot \log_3(4 - 5x).$$

Lássuk most a feladatnak egy másik megoldását.

Második megoldás

1. f grafikonja pontjainak távolságát az y tengelytől $1/5$ szerezére csökkentjük, az y tengelyt nem átlépve (x tengellyel párhuzamos mozgás). A b) szerint kapjuk:

$$f_1(x) = f(5x) = \log_3(5x).$$

2. Tükrözzük f_1 grafikonját az y tengelyre, ekkor c) szerint

$$f_2(x) = f_1(-x) = \log_3(5(-x)) = \log_3(-5x).$$

3. f_2 grafikonját eltoljuk x^+ irányba $4/5$ egységgel, a) szerint adódik:

$$f_3(x) = f_2\left(x - \frac{4}{5}\right) = \log_3\left(-5 \cdot \left(x - \frac{4}{5}\right)\right) = \log_3(4 - 5x).$$

4. f_3 grafikonja pontjainak távolságát az x tengelytől kétszeresére növeljük, az x tengelyt nem átlépve (y tengellyel párhuzamos mozgás). Az e) szerint adódik:

$$f_4(x) = 2 \cdot f_3(x) = 2 \cdot \log_3(4 - 5x).$$

5. Tükrözzük f_4 grafikonját az x tengelyre, ekkor d) szerint

$$f_5(x) = -f_4(x) = -2 \cdot \log_3(4 - 5x).$$

6. Toljuk el f_5 grafikonját y^+ irányba 1 egységgel, akkor a feladatban szereplő függvény grafikonjához jutunk f transzformációval.

$$f_6(x) = 1 + f_5(x) = 1 + (-2 \cdot \log_3(4 - 5x)) = 1 - 2 \cdot \log_3(4 - 5x).$$



A függvénytranszformációról

Látható, most is eljutottunk a célunkhoz, éspedig a középiskolában megszokott útvonalon haladva, a helyettesítési érték kiszámításának sorrendiségét követve. A dolognak csak egy szépséghibája van. Hiába szerepelt a feladatban az argumentumban 4, az eltolás mértéke nem négy, hanem $4/5$ volt. Hiába pozitív az argumentumban a 4 előjele, nem x^- irányba kellett eltolni, mint a) alapján várhattuk volna. (Vigyázat, itt nem egyszerűen fordítva működik, az eltolás irányába ebben a sorrendben az x -et tartalmazó tag előjele is beleszól!) Az áttekintést az

$$f(x) = 1 - 2 \cdot \log_3(4 - 5x) = 1 - 2 \cdot \log_3(-5 \cdot (x - \frac{4}{5})) \text{ átalakítás segíti.}$$

Ez utóbbit transzformációs alaknak is szokták nevezni. Azzal együtt, megítélésünk szerint, a nagyszámú lehetőség közül a tételben megadott sorrendet követve kapjuk az egyszerűbb megoldást. E módszer választása a hallgatók teljesítményét érdemben javítja.

A középiskolai tanulmányaik nyomán hallgatóink jelentős része azzal a téves elképzeléssel érkezik a felsőoktatásba, hogy a függvénytranszformáció abból áll, hogy megadjuk a függvényeknek egy olyan sorozatát, mellyel az f függvény grafikonjából az

$$F: F(x) = c \cdot f(ax + b) + d, (ax + d) \in D_f \text{ grafikonjához eljutunk.}$$

Ennek persze semmi értelme, mert, ha nem adja meg, hogy az egyes grafikonok hogyan származtathatók az előzőből, akkor kezdhethetné a legutolsó megrajzolásával és a többire semmi szükség nincs. Ennek ellenére számtalanszor kaptam dolgozatban az „Ábrázoljuk függvénytranszformációval az

$f: f(x) = \frac{6x-1}{3x} \quad x \neq 0$ függvényt!” feladatra az alábbi választ.

$$f: f(x) = \frac{6x-1}{3x} = 2 - \frac{1}{3x} \quad x \neq 0 \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{3x}, \quad -\frac{1}{3x}, \quad 2 - \frac{1}{3x}$$

Aztán, ha rákérdeztem, hogy az $\frac{1}{x}$ -ből az $\frac{1}{3x}$ -et származtatva az $(1; 1)$ pont hová transzformálódott, többnyire nem kaptam választ. A válasz nem is egyértelmű. Ha a Tétel b) pontjában lévő transzformációt alkalmazzuk, akkor az $(\frac{1}{3}; 1)$ pontba, míg ha az e) pont szerinti transzformációt akkor az $(1; \frac{1}{3})$ pontba. Ez két különböző transzformáció. A graf $\frac{1}{x}$ halmaznak a képe mindkét esetben a graf $\frac{1}{3x}$ halmaz, de nincs olyan pontja a graf $\frac{1}{x}$ halmaznak, amely a két transzformáció során ugyanoda kerülne a graf $\frac{1}{3x}$ halmazban.

Ezzel a példával talán sikeresen meggyőzhetjük a hallgatót a transzformációs lépések leírásának fontosságáról.



M_{atematika}

KOVÁCS ISTVÁN BÉLA *

Riesz-terek típusairól röviden

* *Budapesti Gazdasági Egyetem, PSZK*
E-mail: kovacs.istvanbela@uni-bge.hu

[1] Aliprantis, Ch. D. – Burkinshaw, O. (20013): Locally solid Riesz spaces with applications to economics. *Mathematical surveys and monographs* 105. AMS.

Összefoglalás: A Riesz-terek egyes közgazdasági modellek alapját képező objektumok. Előadásunkban megvizsgáljuk a jellemző tulajdonságaik által elkülöníthető tereket, egymással való kapcsolatukat.

Kulcsszavak: Rendezett vektortér, Riesz-tér, rendezési tulajdonságok.

Abstract: Riesz spaces are the underlying objects of certain models on economy. We inspect the different kinds of Riesz spaces distinguished by their characteristic properties in our talk. We outline their relationships also.

Keywords: Ordered vector space, Riesz space, Order properties.

Bevezetés

A múlt század '80-as éveire derült ki, hogy a rendezett vektorterek, különösen a Riesz-terek közgazdasági modellek alapjául szolgálhatnak. Pontosabban, a topológiával ellátott Riesz-terekre hiteles gazdasági modelleket lehet építeni, melyek gyűjtő neve exchange economy [1].

Előadásunkban most még a topológia hozzáadása nélkül ismerkedünk a Riesz-terek fajtáival, vizsgáljuk viszonyukat. Bizonyítást csak mutatóban közlünk a levezetések jellegének érzékeltetésére. Célunk annak bemutatása, hogy még topológia nélkül is mekkora a terület objektumainak gazdagsága.

Történet

Riesz Frigyes 1928-ban a Bolognai Nemzetközi Matematikai Konferencián tartott előadása indította el a róla elnevezett terek kutatását. Freudenthal és Kantorovich rakták le az axiomatikus alapokat, és osztályozták a Riesz-tereket háló





Riesz-terek típusairól röviden

tulajdonságaik szerint. A következő évtizedekben a Nakano, Ogasawara, Yosida nevével jegyzett japán iskola, az oroszoknál Katorovich, Judin és Vulikh értek el fontos eredményeket. Luxemburg és Zaanen [2] az elméletet főleg a Banach-hálók keretében fejlesztették tovább. A hetvenes években jelentkezett az igény, hogy megvizsgálják a háló tulajdonságok kapcsolatát más lineáris topológiával ellátott Riesz-terekre is. Aliprantis és Burkinshaw, Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics című monográfiájukat [1] ennek a célnak szentelték. Előadásunk felépítését erre a könyvre alapoztuk.

[2] Luxemburg, W. A. J. –Zaanen, A. C. (1963 –1964): Notes on Banach function spaces. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, Notes I – XIII.

Fogalmak

RENDEZETT VEKTORTÉR, RIESZ-TÉR, NETEK, RENDEZÉS KONVERGENCIA

Egy valós vektortér E **rendezett vektortér**, ha adott rajta egy tranzitív, reflexív és antiszimmetrikus $\leq$ reláció, amely kompatibilis az algebrai struktúrával, azaz teljesíti a következő tulajdonságokat.

i) Ha $u, v \in E$ és $u \leq v$, akkor $u + w \leq v + w$ minden $w \in E$ mellett.

ii) Ha $u, v \in E$ és $u \leq v$, akkor $\lambda u \leq \lambda v$ minden $\lambda \geq 0$ számmal.

A vektortér null vektora 0 , az $u \geq 0$ vektorok pozitív elemek. $E^+ = \{u \in E: u \geq 0\}$ a rendezett vektortér **pozitív kúpja**, röviden kúpja. A kúpok definiáló tulajdonságai

a) $E^+ + E^+ \subset E^+$,

b) $\lambda E^+ \subset E^+$ bármely $\lambda \geq 0$ számmal,

c) $E^+ \cap (-E^+) = \{0\}$.

Az i) ii) tulajdonságú rendezések és az a) b) c) tulajdonságú kúpok kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.



Definíció: Egy L rendezett vektorteret **Riesz-térnek** nevezünk, ha L bármely véges, nemüres részhalmazának létezik szuprémuma L -ben.

Ismert, hogy ekvivalens definíciót kapunk, ha a véges, nemüres részhalmazok infimumának létezését követeljük meg. A szokásos jelöléssel $u \vee v = \sup\{u, v\}$ és $u \wedge v = \inf\{u, v\}$.

Az L Riesz-térben $u \in L$ fölbontható pozitív és negatív részének különbségére: $u = u^+ - u^-$, ahol $u^+ = u \vee 0$ és $u^- = (-u) \vee 0$. u abszolútértéke pedig $|u| = u^+ + u^-$ sok más érdekes tulajdonság mellett kielégíti a háromszög egyenlőtlenséget.

Harmadik megfogalmazásban, egy L rendezett vektortér Riesz-tér pontosan akkor, ha bármely $u \in L$ elemhez létezik u^+ .

Egy Riesz-tér u, v elemeit **merőlegeseknek** (vagy diszjunktaknak) nevezzük, ha $|u| \wedge |v| = 0$.

Jelölése $u \perp v$.

Az irányított halmaz, ha értelmezett rajta egy $\triangleleft$ bináris reláció, amely reflexív, tranzitív és a következő tulajdonságot is kielégíti. Bármely $\alpha, \beta \in A$ párhoz létezik $\gamma \in A$, hogy $\alpha \triangleleft \gamma$ és $\beta \triangleleft \gamma$. Egy X halmazon értelmezett net egy leképezés $u : A \rightarrow X$, ahol A irányított halmaz.

A net szokásos jelölése $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$, vagy csak $\{u_\alpha\}$. Egy $\{u_\alpha\}$ net növekvő, ha bármely $\alpha \triangleleft \beta$ indexpárra $u_\alpha \leq u_\beta$. Jelölése $u_\alpha \uparrow$. Megfelelően definiáljuk a csökkenő neteket. Ha $\{u_\alpha\}$ növekvő net elemeinek létezik szuprémuma u , azt $u_\alpha \uparrow u$ jelöli, míg $u_\alpha \downarrow v$ szerint a csökkenő net infimuma v .

Definíció: Az L Riesz-térben $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ net **rendezésben konvergál** $u \in L$ elemhez, ha létezik $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ net L -ben, mellyel $|u_\alpha - u| \leq v_\alpha \downarrow 0$. Jelölése $u_\alpha \xrightarrow{o} u$, u pedig az $\{u_\alpha\}$ net rendezés határértéke.

Állítás: Riesz-térbeli netnek legfeljebb egyetlen határértéke lehet.

Bizonyítás: Tegyük föl, hogy $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ és $u_\alpha \xrightarrow{o} v$. Definíció szerint léteznek L -ben $\{x_\alpha\}$ és $\{y_\alpha\}$ netek, hogy $|u_\alpha - u| \leq x_\alpha \downarrow 0$ és $|u_\alpha - v| \leq y_\alpha \downarrow 0$.

Ekkor a háromszögegyenlőtlenség miatt $|u - v| \leq |u - u_\alpha| + |u_\alpha - v| \leq x_\alpha + y_\alpha \downarrow 0$.

Így $0 \leq |u - v| \leq 0$ miatt $u = v$. Legyen S részhalmaza L Riesz-térnek. S zárt a rendezésre, ha tartalmazza netjeinek rendezés határértékét.

IDEÁLOK, SÁVOK, ALTEREK

Legyen S részhalmaz L Riesz-térben. S **szolid**, ha bármely $u \in L$ és $v \in S$ vektorokra igaz, hogy ha $|u| \leq |v|$, akkor $u \in S$. Bármely $A \subset L$ halmazhoz létezik a legkisebb A -t tartalmazó szolid halmaz, az A szolid burka: $Sol A = \{v \in L : \exists u \in A, \text{ hogy } |v| \leq |u|\}$.



Riesz-terek típusairól röviden

Definíció: Egy Riesz-tér szolid lineáris altereit **ideáloknak** nevezzük. A rendezett zárt ideálok neve **sáv**.

Definíció: Egy L Riesz-tér K lineáris alterét **Riesz alternék** nevezzük, ha tetszőleges $u, v \in K$ elemeivel együtt K tartalmazza azok L -beli szuprémumát és infimumát is, azaz L háló műveleteire zárt.

Az L Riesz-tér K Riesz altere **rendezés sűrű** L -ben, ha bármely $0 < u \in L$ elemhez létezik $v \in K$ mellyel $0 < v \leq u$. K **szuper rendezés sűrű** L -ben ha bármely $0 < u \in L$ elemhez létezik v_n sorozat K -ban, hogy $0 \leq v_n \uparrow u$ L -ben.

Riesz-terek típusai

ARCHIMÉDESZI TULAJDONSÁG ÉS DEDEKIND-TELJESSÉG

Definíció: Az L Riesz-tér **Archimédesszi**, ha bármely u, v pozitív elemeire $n \cdot u \leq v$ minden n természetes számra csak $u = 0$ esetén teljesülhet.

Tétel: Az L Archimédesszi Riesz-tér K Riesz alterére ekvivalensek

- (i) A K rendezés sűrű L -ben.
- (ii) Bármely $u \in L^+$ vektorra érvényes $u = \sup\{v \in K : 0 < v \leq u\}$.
- (iii) Bármely $u \in L^+$ elemhez létezik $\{v_\alpha\}$ net K -ban, hogy $0 \leq v_\alpha \uparrow u$.

Egy további fogalom bevezetéséhez szükséges definiálnunk a Riesz-homomorfizmus fogalmát.

Legyenek L, M Riesz-terek. $\pi : L \rightarrow M$ lineáris operátor **Riesz-homomorfizmus**, ha $\pi(u) \wedge \pi(v) = 0$ M -ben, valahányszor $u \wedge v = 0$ L -ben (π háló homomorfizmus).

Most már bevezethetünk újabb típusú Riesz-tereket.

Definíció: Az L Riesz-tér

- (1) **Dedekind teljes**, ha felülről korlátos nemüres részhalmazainak létezik szuprémuma.
- (2) **Dedekind σ -teljes**, ha felülről korlátos, nemüres, megszámlálható részhalmazainak létezik szuprémuma.



(3) **Majdnem Dedekind σ -teljes**, ha L Riesz-izomorf valamely Dedekind σ -teljes Riesz-tér szuper rendezés sűrű Riesz alterével.

Nyilván fennálnak az $1) \rightarrow 2) \rightarrow 3)$ implikációk. A Dedekind-teljesség újabb változatához még egy fogalomra van szükségünk.

Definíció: L Riesz-tér rendelkezik a **megszámlálható sup tulajdonsággal**, ha bármely szuprémummal rendelkező S részhalmazának van megszámlálható részhalmaza, amelynek szuprémuma az S szuprémuma. A megszámlálható sup tulajdonsággal rendelkező Dedekind teljes Riesz-tereket **szuper Dedekind teljes** Riesz-tereknek nevezzük.

PROJEKCIÓS TULAJDONSÁGOK

Legyen A az L Riesz-tér nemüres részhalmaza. Jelölje $A^d = \{u \in L : u \perp A\}$ az A részhalmaz merőleges (diszjunkt) komplementerét. Az A^d minden esetben sáv. Teljesül továbbá, hogy $A \cap A^d = \{0\}$, $A \subset A^{dd}$, illetve, hogy $A \subset B$ esetén $B^d \subset A^d$. Igaz továbbá a következő fontos állítás.

Tétel: Ha A ideál L Riesz-térben, akkor $A \oplus A^d$ rendezés sűrű L -ben.

Egy L Riesz-tér B sávja **projektív** sáv, ha $B \oplus B^d = L$. Bármely projektív sáv meghatároz egy sáv projekciót a következő természetes módon. Ha $u = u_1 + u_2$, ahol $u_1 \in B$, $u_2 \in B^d$, akkor $P_B(u) = u_1$. Egy L Riesz-tér u elemét projektív elemnek nevezzük, ha az általa generált sáv projektív.

Definíció: Azt mondjuk, hogy az L Riesz-tér

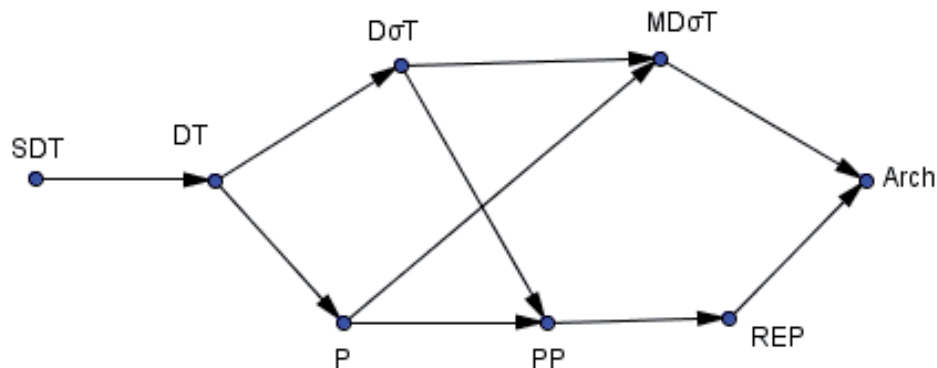
- (i) projektív, ha minden sávja projektív,
- (ii) principálisan projektív, ha az egy elem generálta sávjai projektívek,
- (iii) rendelkezik elegendő projekcióval, ha bármely nemzéró sávja tartalmaz nemzéró projektív sávot.



A Fő Tartalmazási Tétel

Ez a tétel foglalja össze a fent felsorolt terek közötti összefüggéseket. Jelölje SDT a szuper Dedekind teljes, DT a Dedekind teljes, $D\sigma T$ a Dedekind σ -teljes tulajdonságot, míg $MD\sigma T$ a majdnem Dedekind σ -teljességet. Legyen továbbá P a projektív, PP a principálisan projektív, REP a rendelkezik elegendő projekcióval tulajdonság rövidítése. Arch jelenti az Archimédieszi tulajdonságot. Az alábbi ábrában a nyilak a tulajdonságok közötti implikációkat jelölik.

1. ábra.



Az itt össze nem hasonlított tulajdonságú objektumok példákkal szétválaszthatók.

A majdnem Dedekind σ -teljesség kivételével a diagram következtetéseit Luxemburg és Zaanen adták meg [4]. A majdnem Dedekind σ -teljesség fogalmát Aliprantis és Langford [3], tőlük függetlenül Quinn [5] vezették be.

[3] Aliprantis, Ch. D.–Langford, E. (1974): Almost σ -Dedekind complete Riesz spaces and the main inclusion theorem. *Proc. Amer. Math Soc.* 44. Pp. 421–426.

[4] Luxemburg W. A. J.–Zaanen, A. C. (1971): *Riesz Spaces I*. North Holland, Amsterdam.

[5] Quinn, J. (1975): Intermediate Riesz spaces. *Pacific J. Math.* 56. Pp. 225–263.



Példák

(1) Láttuk, hogy az osztályozásban szereplő terek mind Archimédieszi tulajdonságúak. A legismertebb nem Archimédieszi Riesz-tér $\mathbf{R}^2$ a lexikografikus rendezéssel: Lex, melyben $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ ha $x_1 < x_2$, vagy ha $x_1 = x_2$ és $y_1 \leq y_2$. Lexben bármely két vektor összehasonlítható.

Pozitív kúpja $Lex^+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x\} \cup \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\}$. Lex nem Archimédieszi, hiszen például $n \cdot (0, 1) \leq (1, 0)$ minden természetes számra, ám $(0, 1)$ mégsem a zéró vektor.

(2) Legyen L egy nem megszámlálható halmazon értelmezett valós függvények tere a pontonkénti rendezéssel. Az L Dedekind teljes Riesz-tér, ám nem szuper Dedekind teljes. Álljon S az egy elemű halmazok karakterisztikus függvényeiből. Ekkor $\sup S$, a konstans 1 függvény nem állítható elő S megszámlálható részhalmozainak szuprémumaként.

(3) Legyen L a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett valós, Lebesgue mérhető függvények tere. Pontonkénti rendezéssel Riesz-tér. L Dedekind σ -teljes, mivel monoton növekvő korlátos sorozatok rendezésben is tartanak a szuprémumukhoz. Belátjuk, hogy L nem Dedekind teljes.

Ha L-ben $u_\alpha \xrightarrow{o} u$, azaz $|u_\alpha - u| \leq v_\alpha \downarrow 0$, akkor u_α pontonként tart u -hoz. Legyen E nem Lebesgue mérhető részhalmaza $[0, 1]$ -nek, $\{\chi_\alpha\}$ pedig E véges részhalmazai karakterisztikus függvényeinek netje. Ekkor $\{\chi_\alpha\} \uparrow$ fölülről korlátos. Ha létezne szupremuma, ahhoz pontonként kellene tartania, azonban $\{\chi_\alpha\}$ pontonkénti határértéke $\chi_E \notin L$, úgyhogy L nem Dedekind teljes. Belátható továbbá, hogy L nem projektív Riesz-tér, de a Fő Tartalmazási Tétel szerint principálisan projektív.

(4) Legyen $L = c$, a konvergens valós sorozatok tere a pontonkénti rendezéssel. Az előadásunk anyagán túl mutató okok miatt L majdnem Dedekind σ -teljes, rendelkezik elegendő projekcióval, ám nem principálisan projektív.

(5) Kis módosítással legyen L a konstanssá váló valós sorozatok tere a pontonkénti rendezéssel.

Az L majdnem Dedekind σ -teljes, de nem Dedekind σ -teljes. Továbbá nem projektív, de principálisan projektív.

(6) Legyen $L = C[0, 1]$ a pontonkénti rendezéssel. Az L nem rendelkezik elegendő projekcióval, de majdnem Dedekind σ -teljes.

A fenti példák nem választják szét a Fő Tartalmazási Tétel összes típusát, de jól mutatják a tulajdonságokat hordozó terek sokféleségét.



TÓTH ATTILA *-CSÁKY ANTAL **

A kételemű számok, kvaterniók jelentősége

Összefoglalás: A tanulmányban foglalkozunk a 2 elemű számok típusaival. Főleg azok gyakorlati alkalmazásán keresztül mutatjuk be a komplex számok kialakulását, és pl. az analitikus geometriában való felhasználását. Mint kiderült a 2 elemű számok fantasztikusan alkalmazhatóak a villamosságtanban is, ahol a képzetes tengely egyfajta időt képvisel. A 2 elemű számok forgatásának is nagy szerepe lett a helymeghatározásnál, valamint a kvadratikusan felhasználhatók az optimalizálásban is. Megvizsgáltuk a kvantummechanika és tér-idő leírását kételemű számokkal, de szerepük van a végtelen, valamint az új típusú kételemű számok leírásánál is. Ferenczi sejtette már a Nyitrán magyarul, 1887-ben kiadott könyvében, hogy a kételemű számoknak nagy gyakorlati felhasználása lesz a tudományokban.

Kulcsszavak: Kételemű számok, gyakorlati felhasználás; tudományok.

Abstract: The study deals with types of dual numbers. Especially through their practical application, we show the formation of complex numbers, and e.g. its use in analytical geometry. As it turned out, the dual numbers can be applied fantastically in electrosience, where the imaginary axis represents a kind of time. The rotation of 2-element numbers also played a major role in positioning, and quadratic formulas can also be used in optimization. We have described the description of quantum mechanics and space time with two-digit numbers, but they also play a role in the description of infinite and new type dual numbers. In his book published in 1887 in Nitra, Ferenczi suspected that the dual numbers would be of great practical use.

Keywords: Dual numbers, practical application, sciences.

M_{atematika}

* Konstantin Filozófus Egyetem, Közép-európai Tanulmányok Kara, Nyitra
E-mail: atoth2@ukf.sk

** Konstantin Filozófus Egyetem, Közép-európai Tanulmányok Kara, Nyitra
E-mail: acsaky@ukf.sk



[1] Papp, E. (2017): „Kettős kvaternió a geodéziában”. In: *Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája*. Budapest: Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar.

[2] Ferenczi, J. (1887): *Előiskola a Hamilton-féle Quaterniók elméletéhez*. Dr. Odršič, J.–Kelland, P.–Tait P. G. művei nyomán. Nyitra: Schumpek Ede és Huszár István Nyomda.

[3] Csepregi, Sz.–Gyenes, R.–Tarsoly, P. (2013): *Geodézia I.* (jegyzet). Székesfehérvár. 2013. [Online], Available: <https://docplayer.hu/16498950-Geodezia-i-dr-csepregi-szabolcs-gyenes-robert-dr-tarsoly-peter.html> [Accessed Január. 18, 2019].

[4] Sydsaeter, K.–Hammond, P. I. (2003): *Matematika közgazdászoknak*. Budapest: Corvinus Egyetem.

Bevezető

A MAFIOK 2017-es konferencián volt hallható egy előadás, ahol Papp Erik a kvaterniók geodéziai alkalmazásáról adott elő. [1] A kvaterniókról, mint kiderült már 1887-ben adtak ki magyar tankönyvet Nyitrán [2] és minden bizonnyal tanították is „középtanodai intézményekben”, mint pl. a kegyesrendi (piarista) nyitrai gimnáziumban is. A mi korunkban, 130 évvel később a középiskolákból kivonjuk a differenciálszámítást, nem tesszük közérthetővé az integrálokat, nem eléggé hangsúlyozzuk, hogy a számok nemcsak önmagukért vannak, hanem gyakorlati alkalmazásaik sok mindenre rávilágítottak, sok érthetetlen dolgot varázsoltak érthetővé és a felfedezések zöme egy megfigyelt esemény „mellékterméke”. Már a főiskolákon is csak óvatosan emlegetjük az operátorokat, amit gyakorlatilag visszalépésként értelmeznek. Pedig talán nem lennének foglaimaink olyan dolgokról sem, mint amilyen a GPS, a kamatos kamat, a digitális kamera, a DNS, a nukleáris fegyverek, vagy akár az opciók. Ugyanis mindegyik alapját híres tudósok és matematikusok egyenletei jelentik. Tudósok, fizikusok és matematikusok maradandót alkottak [3]. Nem tudjuk elbírálni még a fontosságukat, de rangsorba kezdik már helyezni a fontos egyenleteket, amelyek megváltoztatták a világot. Egyesek szerint a 10 legfontosabb egyenlet a következő: a Pitagorasz-tétel, a logaritmusfüggvény és az azonosságok, Calculus, a Newton-féle gravitáció vagy tömegvonzás, a **komplex számok**, az Euler-féle poliédertétel, a normális eloszlás Fourier-transzformáció, Einstein relativitáselmélete és a Black-Scholes modell. Értelemszerűen egy modern tudósnek, szakembernek ismernie kell ezeket a törvényszerűségeket, amelyek ismerete átfogó képet adhat az ismert, és az általunk még csak sejtett világról.

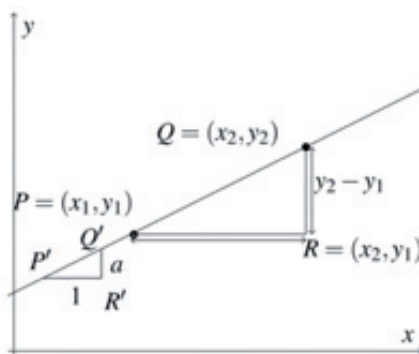
Matematikai, halmazelméleti szempontból a kvaterniók a komplex számok önmagukkal vett direktorzozataként értelmezhetők. Az egyik irodalom szerint a kételemű számok azok komplex számok. „Testvér-számaikra” pedig jellemző, hogy az egyik additív elemük valós szám, a másik additív elemük olyan nem valós, képzetes szám, melynek négyzete valós szám. A gyakorlatban azonban változik a képzetes és valós rész, attól függően, hogy mi okozza a változást, ami φ szöggel való „elforgatást” igényelhet. A következőkben azt szeretném bemutatni, hogy a matematikában egyértelműen eldöntött értelmezése a képzetesnek és valósnak a gyakorlatban mennyire sokrétűen alkalmazható [4].



Kételemű számok az analitikus geometriában és idősorokban

Az analitikus geometriában az egyenes irányítányezős egyenlete az x és y változók közötti lineáris hozzárendelés az $y=ax+b$ egyenlettel fejezhető ki, ahol az a a meredekség, a b pedig az eltolás [5].

1. ábra. A P, Q pontokon áthaladó l egyenes meredeksége.



A P és Q pontokon áthaladó l egyenes meredeksége (1), amit gyakorlatilag φ forgatásaként is értelmezhetjük, hiszen $a = \tan \varphi$.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Egy makroökonómiai tanulmányban pedig a C teljes fogyasztási kiadást az Y nemzeti jövedelem függvényeként szintén kételemű számokkal számítják (2), ahol 0,712 az ún. fogyasztási határhajlandóság, ami szintén lehet változó meredekségű. [5]

$$C = 95,05 + 0,712Y \quad (2)$$

Ilyen hasonló lineáris modellekkel számították Európa népességi számadatát, az 1975-ös adatok szerint a (3) képlet szerint egy idősoros becsléssel. Eléggé pontosan jelezték előre az ezredforduló népességét. Az időtengelyt pedig az idősorokban ildomos képzetes egységnek tekinteni, ami általában itt a vízszintes tengely.

[5] Fecenko, J.–Pinda, E. (2006): *Matematika*
I. Bratislava: Jura
Edition.



[5] Fecenko, J.–Pinda, E. (2006): *Matematika 1*. Bratislava: Jura Edition.

Tehát a közgazdasági gyakorlatban, a demográfiai számításokban a vízszintes tengelyre visszük az időt, ami tulajdonképpen időt. [5]

$$P=641+6,4t \quad (3)$$

Kvaterniók az előiskolákban

A kvaterniókat Hamilton fedezte fel 1843-ban, egy térbeli vektor ábrázolására, amit egy egységnyi sugarú gömbön alkalmazott. A Q kvaternió egy valós és képzetes részből áll (4), ahol q a képzetes rész, amelyik egy térbeli vektor. Az i, j, k -ről a (5) ismeretese. A konjugált kvaternió pedig a (6).

$$Q = q_0 + q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (4)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k, \quad jk' = -kj = i \quad (5)$$

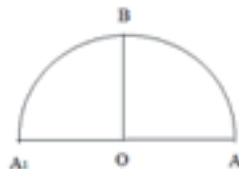
$$ki = -ik = j$$

$$Q^* = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k = q_0 - q \quad (6)$$

De nemcsak merev képzetes lehet az egyik rész, hiszen például a merev test transzformációjához ezeket a kételemű számokat Clifford továbbfejlesztette és alkalmazta, ahol a kettős kvaternió 8 skalár értékből áll. Az ilyen leírásnál a kvaternió $q=r+$ és s mindkettő valós, a kettős művelet jele pedig ε .

Ferenczi József kegyestanítórendi (piarista) szerzetes könyvében, amelyet 1887-ben nyomtattak ki Nyitrán a mennyiségtant kedvelő középtanodai ifjúság számára, így vezetik le a kvaterniók fogalmát:

2. ábra. Az 1 sugarú körülírt félkör és a forgatás a Ferenczi-könyv nyomán.





A kételemű számok, kvaterniók jelentősége a gyakorlatban

„Hogyha a derékszöget záró két vectoregység hányadosának tengelye más hasonlatos vector hányadosának tengelyével egyenlő, akkor ezen hányadosok egyenlők és megfordítva. Az egymásra merőleges két vectoregység hányadása skaláris nem lehet; különben azok párhuzamosak volnának. Minőségére és természetére nézve szolgáljon fölvilágosításul a következő szemléltetés: vegyük föl az 1 sugárral körülírt ABA_1 félkört, s legyenek $OA=\alpha$, $OB=\beta$, $OA_1=-\alpha$.

Hogyha $q = \frac{\beta}{\alpha}$ bizonyára $q = \frac{-\alpha}{\beta}$, ekkor a baloldalak szorzata $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{-\alpha}{\beta} = -1$.

Míg a jobboldalaké $q \cdot q = q^2$ eszerint $q^2 = -1$. A szerzetes így fogalmaz erről a kvaternióról: az O pont körüli forgatás kétféle és pedig az óramutatóval ellentétes, vagy megegyező lehet; miértis a független távolságok viszonyát kifejező szám a mérték emez elforgatásának föltüntetésére végett kettős jellel látható el. Ez a jel nem egyéb, mint a tényező gyanánt vett képzetes egység $\pm i = \pm \sqrt{-1}$. Erre azután könnyen rájött a kutató szellem, hogy a bármely φ szöget bezáró két egyenes hányadosának föltüntetésére a $\cos\varphi + i\sin\varphi$ tényező szolgálhat, mely egyszersmind azt is kimutassa az abszolút távolságok viszonya mellett, hogy mérés előtt a mértéket előbb φ szöggel kellett helyzetéből kiforgatnunk. Az így nyert számok az egybefoglaltak, melyek az algebraiéknál is általánosabbak, mivel ezeket is magukba zárják. Nagy hasznát és sok gyümölcsöt termelt már az egybefoglalt számok ismerete az algebraiban és analysisben, mindamellett hiányosak, a mennyiben egyedül az egy síkban fekvő egyenesek viszonyát tartják szem elé; s még nem sikerült két külön síkban fekvő számot egybekapcsolni. Már pedig a tér minden irányban kiterjedt, és folytonos mozgás mellett bármely egyenesből a másiknak helyzetébe juthatni” [2].

A tudós szerzetesnek fantasztikus meglátásai voltak, hiszen amint az alábbiból kiderül, a kettős kvaterniók elvégzik a műveletet, de ezen felül a képzetes egységnek a villamosságban is óriási szerep jutott, hiszen az időben késik, vagy siet hatást is számítani lehet pontosan a 130 éve magyarul is publikált levezetés alapján. De a kételemű számok az idő, a tér és a végtelen összefüggéseire is magyarázatul szolgálhatnak.

[2] Ferenczi, J. (1887): Előiskola a Hamilton-féle Quaterniók elméletéhez. Dr. Odstrčil, J.–Kelland, P.–Tait P. G. művei nyomán. Nyitra: Schumpek Ede és Huszár István Nyomda.



[6] Szittyá, O.–Domonkos, S. (2007): *Villamosságtan*. (Felsőoktatási jegyzet). Budapest: Inok Kft.

Kvaternió a villamosságtanban

A komplex számok halmazának jelentősége, hogy a valós számok halmazát bővíti úgy, hogy ebben már értelmezhetővé és elvégezhetővé válik a negatív számból történő négyzetgyökvonás. Vannak, akik úgy vélik, hogy a komplex számok ismerete nélkül az elektromos világítást vagy a digitális kamerákat fel sem tudták volna találni, miután a komplex számok az elektromos rendszerek megértésének alapját képezik. Az időben változó, pillanatnyi értékeket kisbetűvel jelöljük, míg az állandókat nagybetűvel. Így leírhatjuk az időben változó mennyiségek periodikus szinusz függvénnyel [6]. Mint pl. (7), ahol (8) a körfrekvencia.

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi) \quad (7)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (8)$$

Előnyösebb azonban a komplexebb megismeréshez a Hamilton operátorokból kiindulva a komplex számokat alkalmazni $j = \sqrt{-1}$, ahol értelmezni lehet a valós tengelyen az időben állandó mennyiségeket, és az időben változó imaginárius (képzetes) tengelyt, ahol értelmet kaphat a gyorsítás és lassítás, valamint pl. egy múltbeli esemény, vagy időbeli csúsztatás. A komplex számok (kvaternió) kanonikus alakjában (9) az a valós komponens (Re), a b egyértelműen az időben változó képzetes (imaginárius) komponens (Im), valamint (10) a valós tengelyre tükrözött konjugált, és így érvényes (11) illetve az Euler reláció (12).

$$\mathbf{q} = \bar{z} = a + j \cdot b \quad (9)$$

$$\bar{z}^* = a - j \cdot b \quad (10)$$

$$z = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = Re \bar{z} = z \cdot \cos \varphi; b = Im \bar{z} = z \cdot \sin \varphi$$

$$\bar{z} = z(\cos \varphi + j \sin \varphi), \text{ és } \bar{z}^* = z(\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad (11)$$

$$\bar{z} = z \cdot e^{j\varphi} \quad (12)$$

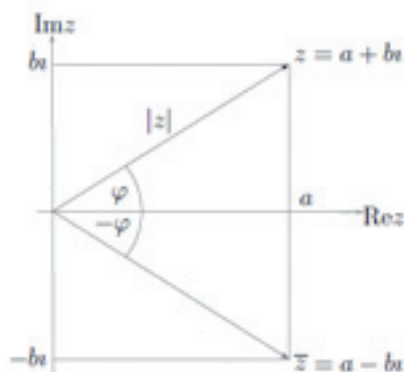


A kételemű számok, kvaterniók jelentősége a gyakorlatban

A φ szög pontos meghatározása a $\varphi \in (-\pi, \pi)$ intervallumon (13).

$$\begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi, \\ \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (13)$$

3. ábra. A komplex impedancia az elektrotechnikában.



Megfigyelhető a hasonlóság az egyenes analitikus kifejezése és az ún. eredő ellenállás (komplex impedancia) között. Annyi a különbség csak, hogy x, y helyett a z komplex impedancia valós, illetve képzetes része van feltüntetve [6]. Nézzünk egy soros kapcsolású RLC áramkört, ahol a feszültség változása az (14) függvény alapján írható le.

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (14)$$

[6] Szittyá, O.–Domonkos, S. (2007): *Villamosságtan*. (Felsőoktatási jegyzet). Budapest: Inok Kft.



Ebbe a függvénybe behelyettesíthetünk (15) értéket, illetve felírható a komplex időfüggvény (16) behelyettesítésének a végeredménye is. A komplex feszültségek maximális értékei a (17)

$$u(t) = (\bar{U}_{Rm} + \bar{U}_{Lm} + \bar{U}_{Cm}) \cdot e^{j\omega t}, \text{ ahol érvényes (18).}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (15)$$

$$\bar{i}(t) = I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi)} \quad (16)$$

$$u(t) = (\bar{U}_{Rm} + \bar{U}_{Lm} + \bar{U}_{Cm}) \cdot e^{j\omega t} \quad (17)$$

$$\bar{U}_{Rm} = R \cdot \bar{I}_m; \bar{U}_{Lm} = j\omega L \cdot \bar{I}_m; \bar{U}_{Cm} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{I}_m \quad (18)$$

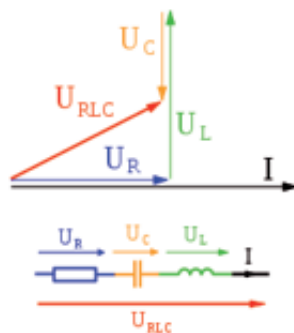
Felírhatók a komplex effektív értékek, valamint az Ohm törvény alapján a komplex impedancia (19) illetve komplex (20) összetevőkkel.

$$\bar{U} = (\bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C) \bar{I} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad (19)$$

$$\bar{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + j(X_L - X_C) \quad (20)$$

Így érzékeltethető, hogy a siettetés és a gyorsítás az időtengelyen egymással ellentétes előjelűek. Egy általános RLC áramkörben így ábrázolható a forgóvektoros módszer (az eredő vektor az $\bar{U}_{RLC}$). Időben jobban késleltet, mint siettet, ennek az eredőjéhez tolódik a feszültség az RLC rezgőkörben:

4. ábra. Sorba kapcsolt RLC-áramkör és annak forgóvektoros ábrája.

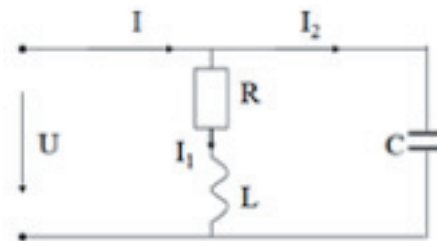




A kételemű számok, kvaterniók jelentősége a gyakorlatban

Most mindkét módszerrel vizsgáljunk meg egy áramkört, ahol a soros kapcsolású ellenállás és tekercs a kondenzátorral párhuzamosan van kapcsolva:

5. ábra. RLC-áramkör, ahol az áram Kirchhoff törvénye értelmében változik.



Az RL-C áramkör adatai: $U=20V$, $\omega=100\pi$, $R=4\Omega$, $L=12,7mH$ és $C=455\mu F$. Könnyen kiszámíthatóak az adatok alapján, hogy $X_L=4\Omega$ és $X_C=7\Omega$. Ezekből kifolyólag (21) az I_1 , I_2 részáramok, (22) pedig a mennyiségek komplex értékei.

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{20}{\sqrt{16 + 16}} = 3,53A; \quad (21)$$

$$I_2 = \frac{U}{X_C} = \frac{20}{7} = 2,86A$$

$$\bar{U} = U + j0 = U = 20V; \bar{Z}_R = R + j \cdot 0 = R = 4\Omega; \quad (22)$$

$$\bar{Z}_C = \frac{X_C}{j} = -jX_C = -7j; \bar{Z}_{RL} = 4 + 4j$$

És ebből kiszámítható (23), illetve felhasználható a konjugálási szabály (24). Itt kerül valós felhasználásra a Hamilton-féle felfedezés, és a gyakorlatban áramkörökkel is bizonyítható és fizikailag mérhető a konjugálás. [6]

$$I_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{RL}} = \frac{20}{4 + 4j} = \frac{5}{2} - j\frac{5}{2} \quad (23)$$

$$I_1 = \sqrt{\bar{I}_1 I_1^*} = 3,53A \quad (24)$$

[6] Szittyá, O.–Domonkos, S. (2007): *Villamosságtan*. (Felsőoktatási jegyzet). Budapest: Inok Kft.



[3] Csepregi, Sz.–Gyenes, R.–Tarsoly, P. (2013): *Geodézia I.* (jegyzet). Székesfehérvár. 2013. [Online], Available: <https://docplayer.hu/16498950-Geodezia-i-dr-csepregi-szabolcs-gyenes-robert-dr-tarsoly-peter.html> [Accessed Január. 18, 2019].

[6] Szittyá, O.–Domonkos, S. (2007): *Villamosságtan.* (Felsőoktatási jegyzet). Budapest: Inok Kft.

Összegezve a klasszikus időfüggvényes leírási módot és a komplex számos leírási módot természetesen mindkét módszer ugyanazt az eredményt kell, hogy adja. Az általam és kollégáim megfigyelései szerint az egyszerű feladatoknál az ún. forgóvektoros módszer alkalmazása előnyösebb. Bonyolult feladatok esetén azonban nemcsak jobb, hanem szükséges is a komplex módszer alkalmazása, a fázis szögét (φ) is egyszerűbb a komplex módszerrel számítani, így az elektronika általában ezt a módszert használja. Ha az előiskolákban már több mint száz évvel ezelőtt tanították a kvaterniókat, akkor mennyivel lehet könnyebb a számítógépes forradalom után megértetni a fiatalokkal az elvont időtengelyt, és hogy például a deriváció és integrálszámítás mennyire szépen alkalmazható az időben változó rezgőkörökben, ha behelyettesítjük az $i(t)$ –t a feszültség egyenletébe (25). A villamosságtanban általában tehát a vízszintes tengelyen halad a valós rész, ahol nincs sem lassítás, sem gyorsítás, ami a klasszikus ellenállás és az azon áthaladó áram és feszültség. [6]

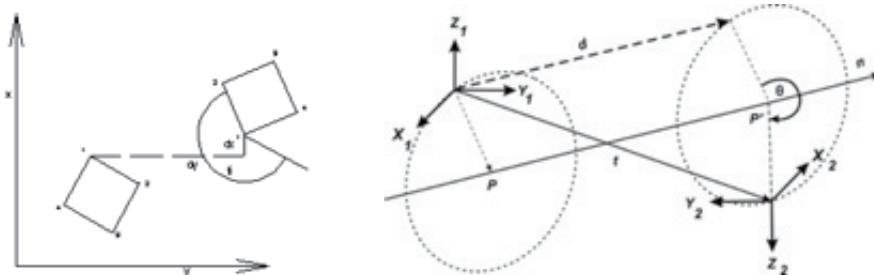
$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (25)$$

Kvaternió-forgatás alkalmazása a helyzetmeghatározástól a közgazdasági matematikában

A forgatás mestere, Csepregi Szabolcs számos cikket írt a térbeli elmétszésről, a térbeli forgatásról, a kiegyenlítő számítások alkalmazásáról. Tudományos eredményeit alkalmazták a gyakorlati geodézia területén. A 2017-ben megrendezett MAFIOK konferencián Papp Erik mesterien már dátumtranszformációt mutatott be, valamint TH2 programban végzett algoritmusokat, amelyek legnagyobb előnye, hogy tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazhatóak a transzformációs paraméterek számításához [3].

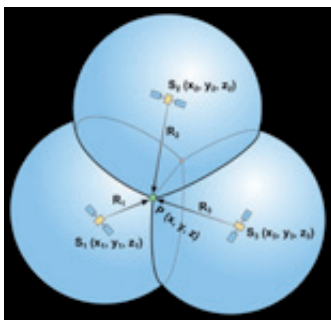


6. ábra. Forgatás; elforgatás és eltolás kettős kvaternióval.



[16] IHLS, [Online],
Available: <https://i-hls.com/archives/64586>
[Accessed May. 2, 2019].

7. ábra. Helyzetmeghatározás. A GPS helymeghatározás elve és elektronikus érzékelői, illetve helyzetmeghatározás az MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézetének inSAR adatai alapján. [16]



Érdekes megfigyelni, hogyan Csepregi munkáiban írja fel Euler négy szimmetrikus paraméterrel a forgató-mátrixot. Ez a ferdén szimmetrikus paraméterekből is származtatható. A négy paraméter között fennáll az (26) és (27) feltétel.

$$l^2 + m^2 + n^2 + r^2 = 1 \quad (26)$$



[7] Fecenko, J.–Sakalová, K. (2004): *Matematika 2*. Bratislava: Jura Edition.

$$R = \begin{bmatrix} l^2 - m^2 - n^2 - r^2 & 2(lm - nr) & 2(ln + mr) \\ 2(lm + nr) & m^2 - l^2 - n^2 + r^2 & 2(mn - lr) \\ 2(ln - mr) & 2(mn + lr) & n^2 - l^2 - m^2 + r^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ezt leggyakrabban a kvaternió algebra segítségével vezethető le. A térbeli forgatás a (28) kvaternió szorzás segítségével végezhető el, ahol (29) az elforgatott pont vektora, (30) az eredeti pont vektora, (31) nem skalár egység kvaternió, a forgatás kvaterniója (32) a kvaternió inverze egység kvaternió esetén, konjugáltjával egyezik meg.

$$\bar{Y} = q \cdot \bar{X} \cdot q^{-1} \quad (28)$$

$$\bar{Y} = x' \cdot i + y' \cdot j + z' \cdot k \quad (29)$$

$$\bar{X} = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k \quad (30)$$

$$q = r + l \cdot i + m \cdot j + n \cdot k \quad (31)$$

$$q^{-1} = r - l \cdot i - m \cdot j - n \cdot k \quad (32)$$

Érdemes belegondolni, hogy a vektorszorzat a mátrixoknál milyen más jellegű szakmákba is megjelent. Például a többváltozós függvények alkalmazásánál, a közgazdászoknak szánt matematika fejezeteiben van jelen. A kvadrátikus formulánál egy többváltozós függvény extrém típusának keresésénél szenzációs jelentősége. A (33) egyenletben például könnyedén megállapítható az extrém ($f'=0$; x_1, x_2 szerint) és ez az $x_1=0$; $x_2=0$ értéknél van. Ahhoz, hogy meg tudjuk, hogy ez az extrém maximum, vagy minimum-e, rendezni kell a függvényt, majd mátrixot rendelünk hozzá (34). [7]

$$f(\vec{x}) = 3x_1^2 - 8x_1x_2 + 6x_2^2 \quad (33)$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \quad (34)$$



A kételemű számok, kvaterniók jelentősége a gyakorlatban

Az eredeti függvény a quaterniók szorzás mintájára jön ki (35). Illetve felhasználható még az ettől bonyolultabb kvadratikussal is (36).

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T C \vec{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\vec{x}^T C \vec{x} = (\sqrt{3}x_1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x_2)^2 + \frac{2}{3}x_2^2; \quad (\vec{x} \neq \vec{0}) \quad (36)$$

De sokkal egyszerűbb a közgazdasági gyakorlatban nagyon gyakran előforduló példánál alkalmazni tehát a $\vec{x}^T C \vec{x}$ szorzatot, aminek a definítségétől függ az extrém típusa. Ha tehát $\vec{x} \neq \vec{0}$, akkor már csak a szubdeterminánsok (minorok) pozitív, vagy negatív voltát kell megállapítani.

Az adott példában az össze minor pozitív, valamint a C mátrix determinánsa is, ami annyit jelent, hogy a feladványnak minimuma van.

A közgazdászoknak ismerniük kellene, hogy milyen termékszám mellett van a legkisebb befektetés, avagy a legkisebb veszteség. A fordított jellegű számításoknál pedig pl. maximum nyereséget szeretne minden magánvállalkozó előteremteni. Tehát a (28)-ból eredő adottságokat a többváltozós függvények menetének vizsgálására alkalmazhatjuk. Ami érdekes, hogy ebben az esetben is valós számokkal dolgozunk.

Hamilton-féle kvaterniók a kvantummechanikában

A komplex konjugáltat elő tudjuk állítani a hullámfüggvényre is, nemcsak a villamoságban, ahol a képzetes rész az időtengelyt jelenti. Figyeljük meg, hogy a valós áramot (37) alapján kapjuk meg. A kvantummechanikában egy 1 szabadságfokú részecske impulzusára fel tudjuk írni a hullámfüggvényt az elektrotechnikában alkalmazott Euler reláció segítségével (38). Egy ma is vitatott interpretáció szerint a hullámfüggvény önmaga konjugáltjának szorzatával kiszámítható, hogy milyen valószínűséggel tartózkodik a részecske az $a < x < b$ tartományban (39).

$$I_1 = \sqrt{\bar{I}_1 \bar{I}_1^*} \quad (37)$$

$$\psi(x) = e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\right)px} \quad (38)$$

$$P(a, b) = \int_a^b \psi * \psi dx = \int_a^b e^{+\left(\frac{2\pi i}{h}\right)px} e^{-\left(\frac{2\pi i}{h}\right)px} dx = \int_a^b dx = b - a \quad (39)$$



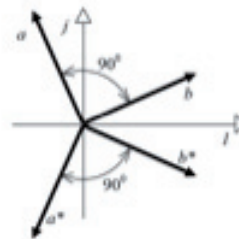
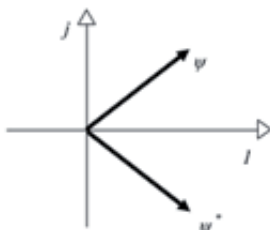
[8] Feynman, R. P. (1968): *Mai fizika 2.* Budapest: Műszaki Könyvkiadó.

[9] Hudason, A.–Nelson, R. (1990): *University Physics.* Orlando, Florida: Saunders Collage Publishing.

[10] Mlakár, K. (2011): *A kételemű számok és a végtelen.* [Online], Available: <http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/34-ak%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html> 36 A <http://arxiv.org/pdf/1203.4141.pdf> [Accessed May. 22, 2019].

Érdekes módon a valószínűség nem függ x -től, hanem csak az intervallum értékeinek a különbségétől [8]. Ennek az értelmezése pedig az, hogy ismervén a részecske impulzusát, akkor az x koordinátának már nincs fizikai realitása, vagyis a részecske a világon akárhol lehet. Sőt, azt is mondhatjuk, hogy a részecske egyidejűleg mindenhol van, és sehol sincs [9]. De nézzük meg a kvaterniók hasonlóságát is. Van azonban ezzel egy kis gond, hiszen a hullámegyenlet megoldása komplex függvényt eredményez, amelyiknek lenne valós és imagináris összetevője. A komplex számoknak a reális fizikai világban nincs értelmük, hiszen a fizikai mennyiségek számszerűen csakis valós számokkal adhatóak meg. Tehát a komplex jellegből az adódhat csupán, hogy a hullámfüggvény komplex konjugáltját megszorozzuk az eredeti hullámfüggvénnyel.

8. ábra. Bal oldalon a képzetes hullámfüggvény, és képzetes s konjugáltja is. Jobb oldalon pedig a komplex kifejezések vannak ábrázolva. [10]



Ebben az esetben a kvaterniónk a (40) egyenlettel írható fel, ami a ψ hullámfüggvény x koordinátához tartozó t időpontbeli pillanatnyi értékét jelenti. Annyit jelent, hogy az egyenletből ugyanis a komplex konjugáltat úgy lehet kiszámítani, hogy az idő előjelét megfordítjuk [9]. Hogy pontosabban miről van szó, azt az alábbiakban részletezzük.

$$a(x,t)=j.b(x,t) \quad (40)$$

Érdekes módon eltávolodtunk a Ferneczi szerzetes kvaternióitól, illetve fantasztikusan új közegbe juttattuk. Hiszen az ún. hullámegyenlet egyenlet szerint itt az a és b komplex kifejezések abszolút értéke mindig azonos, fázishelyzetük azonban 90 fokkal eltér oly módon, hogy az a kifejezés fázishelyzete a nagyobb. [10]



A kételemű számok, kvaterniók jelentősége a gyakorlatban

Ezen komplex kifejezések a^* és b^* konjugáltjait úgy kapjuk, hogy az a és b komplex vektorokat a fenti ábrán a valós tengelyre tükrözzük. Emiatt a^* és b^* között a fázisszög különbség továbbra is 90 fok lesz, de most a b^* kifejezés fázishelyzete lesz nagyobb. Ennek a látszólagos matematikai trükknek lehet fizikai jelentése. Egyes fizikusok szerint tudományfilozófiai értelme is van, amely kapcsolatba hozható az emberi tudat működésével is. A már említett koppenhágai modell szerint egy részecske, amíg nem kerül kapcsolatba a megfigyelővel, ún. szuperponált állapotban van, és állapotát a komplex hullámfüggvény, más szóval állapotfüggvény jellemzi. Ha a részecske mérése megtörténik, a hullámfüggvény összeomlik, és helyette megjelenik a fizikai világban egy valószínűségi tapasztalható reális részecske. Roger Penrose ezzel kapcsolatban felteszi a kérdést, hogy hol a határ nagy és kicsi között, vagyis egyfelől a kvantumfizika, másfelől a klasszikus és relativisztikus fizika között [11]. Makro méretekben ugyanis nem tapasztaljuk a hullámfüggvény jelenségét, a mikrorészecskék világában azonban igen. Ha pedig a megfigyelés szünetel, a magára hagyott hullámfüggvény szétterül és egyre több potenciális lehetőségre terjed ki. Más véleményen van Fred Alan Wolf amerikai fizikus. Szerinte a hullámfüggvény, és ezzel a koherens szuperponált állapot nem omlik össze [12]. Az állapotok párhuzamosan léteznek, és mi a legvalószínűbb állapotok szuperpozícióját tapasztaljuk valóságként.

Kételemű kvaterniók és a komplex, duális és perplex számok

A kételemű számok újfajta megközelítését Mlakár Katalin tette közzé. Szerinte a kételemű számok gyakorlatilag $a+bw$ számok, ahol a és b valós számok, w -re pedig érvényes lehet $w^2=-1$ vagy 0 vagy 1. Értelemszerűen az eddig felvázolt egyenletekben így ezek a számok komplex számok, vagy Study-féle duális számok, illetve hiperbolikus (vagy perplex) számok. Ezek tulajdonságainak összehasonlításáról ennyit ír [10]:
 $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ a komplex számokra (vagy elliptikus számokra)
 $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$ a parabolikus számokra (vagy Study-féle duális számokra)
 $|z_1+z_2| \geq |z_1| + |z_2|$ a hiperbolikus számokra
(vagy más néven perplex számokra)

Ezt a következőképpen írnanék le közérthetően:
 $z=a+bi$ esetében a komplex számoknál $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ez az elektrotechnikában is alkalmazott, időeltolásokra alkalmas szám.

[11] Penrose, R. (2017): A giant of physics takes string theory, quantum mechanics and inflation to task, In: *Reviews Physics*. [Online], Available: <https://cosmosmagazine.com/physics/a-giant-of-physics-takes-string-theory-quantum-mechanics-and-inflation-to-task> [Accessed May. 8, 2019].

[12] Wolf, F. A. (2019): *The Soul and Quantum Physics* (An interview with Dr. Fred Alan Wolf) [Online], Available: <https://www.unariunwisdom.com/the-soul-and-quantum-physics/> [Accessed May. 13, 2019].



$z=a+bj$ esetében a parabolikus számoknál $\|z\| = \sqrt{a^2}$

$z=a+bk$ esetében a hiperbolikus számoknál $\|z\| = \sqrt{a^2 - b^2}$

Ezekkel a számokkal jutunk el a gömbi felület trigonometriájához, figyelembe véve a komplex számok és hiperbolikus számok összehasonlítását (41), melyek segítségével az r sugarú kör kerületét g -vel jelölve a (42), (43) és (44)-t kapjuk.

$$\sin yi = i \sinh y \quad \sin yi = i \sinh y \quad \sin yk = k \sinh y \quad (41)$$

$$\text{ha } \rho = Ri \quad \text{akkor } g = \frac{2\pi\rho}{i} \sin \frac{ir}{\rho} = 2\pi\rho \sinh r / \rho \quad (42)$$

$$\rho = Rj \quad \text{akkor } g = \frac{2\pi\rho}{j} \sin \frac{jr}{\rho} = 2\pi r \quad (43)$$

$$\rho = Rk \quad \text{akkor } g = \frac{2\pi\rho}{k} \sin \frac{kr}{\rho} = 2\pi\rho \sinh r / \rho \quad (44)$$

Kételemű kvaterniók hiperbolikus (perplex) számok felhasználása a téridő leírásánál

A Lorentz transzformáció szorzószámában (45) v a két rendszer egymáshoz viszonyított sebessége, c pedig a fénysebesség. A koordináta-transzformáció felírható Einstein algebrai leírásával a mozgó inerciarendszerben az (46) egyenletek segítségével, valamint hiperbolikus számok segítségével (47).

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (45)$$

$$x' = \frac{x - \frac{v}{c} tc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad ct' = \frac{ct - \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (46)$$



$$x' = x \cosh \theta - ct \sinh \theta; \quad ct' = -x \sinh \theta + ct \cosh \theta. \quad (47)$$

Illetőleg az előbb értelmezett hiperbolikus számok tulajdonságai alapján, ha (48) felírható (49) segítségével, ami nem más mint úgyszintén egy kételemű szám (50) és ezek a számok a (51) tengelyen elhelyezkedett egységhiperbolán helyezkednek el, amellett, hogy tudjuk, hogy $k^2=1$.

$$\theta = \frac{b}{a} \quad (48)$$

$$\sqrt{a^2 - b^2}(\cosh \theta + \mathbf{k} \sinh \theta) \quad (49)$$

$$a + b\mathbf{k} = \sqrt{a^2 - b^2}(\cosh \theta + \mathbf{k} \sinh \theta) \quad (50)$$

$$\rho = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (51)$$

Kételemű kvaterniók felhasználása a végtelen leírásánál

Mlakár Katalin leírja az ún. túlsordulás problémáját, illetve magyarázza pl. a kilencesek túlsordulását: „9999²=1. Az ún. transzfinit számoknál – azaz minden természetes számnál nagyobb ábrázolása akkor áll elő, ha – a számábrázolásunk nem terjed ki ezen transzfinit számok helyiértékeinek ábrázolására. Cantor fogalmait használva ez az a végtelen, amit 10^μ formában írhatunk fel, ahol μ a természetes számok számossága, azaz olyan végtelen, melynek „helyiértékes ábrázolásában” a sorrendben 10^μ-dik helyiértéken értékes, azaz nem 0 számjegy áll. Ugyanakkor vannak olyan végtelen nagy számok, melyek minden természetes számnál nagyobbak, de kisebbek a transzfinit helyiértékeken is értékes – azaz nem 0 – számjegyeket is tartalmazó számoknál. Ezen számok egyike a [10] [13] [14]-ben megnevezett ...999 szám is, tehát általában azok a számok, melyeknél a transzfinit helyiértéken lévő esetlegesen értékes számjegyekkel nem számolhatunk, mert „nincs rá helyünk”, de tetszőlegesen nagy természetes számhoz tartozó helyiértéken van nem 0 számjegyük [10] [13].

[10] Mlakár, K. (2011): *A kételemű számok és a végtelen*. [Online], Available: <http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/34-ak%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html> 36 A <http://arxiv.org/pdf/1203.4141.pdf> [Accessed May. 22, 2019].

[13] Tóth, A. (2015): *A végtelenül nagy és végtelenül kicsik világa*. In: Komzsik, A.–Szabó T.: *Ab ignem*. Nyitra: FSS UKF.

[14] Trembeczki, Cs. (2007): *A Végteleen Világvége Hotel és más történetek*. Kaposvár: Magánkiadás.



[10] Mlakár, K. (2011): *A kételemű számok és a végtelen*. [Online], Available: <http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/34-ak%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok%C3%A9s-v%C3%A9gtelen.html> 36 A <http://arxiv.org/pdf/1203.4141.pdf> [Accessed May. 22, 2019].

[13] Tóth, A. (2015): *A végtelenül nagy és végtelenül kicsik világa*. In: Komzsík, A.–Szabó T.: *Ab igne ignem*. Nyitra: FSS UKF.

[14] Trembeczki, Cs. (2007): *A Végtelen Világvége Hotel és más történetek*. Kaposvár: Magánkiadás.

Így jutunk a hiperbolikus számokhoz, azaz azokhoz a számokhoz, melyek az (52) alakban írhatók fel. Így a hiperbolikus számok azt a fajta végtelent modellezzik, amikor végtelen sok olyan végtelen nagy szám van, amely egyben a 10^u transzfinit számnál kisebb. A k -val jelölt ...999 aktuálisan létező szám, és valamennyi valós számmal való szorzata ilyen számot ad.

$$x+yk, \text{ ahol } k^2=1, \quad (52)$$

A parabolikus számok egy olyan végtelent modellezhetnek, ahol egyetlen olyan végtelen nagy szám van, amely egyben a 10^u transzfinit számnál kisebb. Ezt a számot is el lehet képzelni helyiértékes alakban, mégpedig ...000 formában, ahol a nullák úgynevezett értékes nullák, mivel a helyiértékek transzfinit tartományában vannak nem nulla számjegyek, de ezek ábrázolására „nincs helyem”. Itt is egyfajta túlsordulásként képzelhető el a ...000 négyzetre emelés, és ezt „0000²=0-val fejezhető ki. Így máris a parabolikus számokhoz jutottunk. A komplex számok pedig azt modellezzik, amikor nincs egyetlen egy végtelen szám sem, amely egyben a 10^u transzfinit számnál kisebb [10] [13] [14].

Az intenzív végtelenről elmondható: A hiperbolikus számok azt a fajta intenzív végtelent modellezzik, amikor a sok végtelen kicsi infinitezimális szám létezik, amely egyben 10^u transzfinit számnál nagyobb. Az (1,000...-0,999....) és egy valós szám szorzata ilyen ad. A parabolikus számok egy olyan végtelent modellezhetnek, ahol egyetlen olyan végtelen kis szám van, amely egyben a 10^u transzfinit számnál nagyobb. A komplex számok pedig azt is modellezhetik, amikor nincs egyetlen egy végtelen kicsi szám sem, amely egyben 10^u transzfinit számnál nagyobb lenne.

Kételemű kvaterniók felhasználása „A tér, mint a végtelen idő fogalom” bevezetésénél

A téridő hiperbolikus függvények használatával történő ábrázolásában a (53) összefüggés kapható a koordinátákra. Ahol θ tangenshiperbolikus függvénye egy sebesség-jellegű mennyiség. A „nem vesszős” koordinátarendszerből nézve a „vesszős” koordinátákkal jelölt rendszer sebességét v -vel jelölve igaz (54), ahol (55) a két koordinátarendszer relatív sebessége.



A kételemű számok, kvaterniók jelentősége a gyakorlatban

$$z' = z \cosh \theta - ct \sinh \theta; ct' = -z \sinh \theta + ct \cosh \theta \quad (53)$$

$$\tanh \theta = \frac{z}{ct} = \frac{v}{c} \quad (54)$$

$$v = \frac{z}{t} \quad (55)$$

Válasszuk meg úgy a mértékegységeket, hogy a c fénysebesség legyen 1-gyel egyenlő, így: $\tanh \theta = v$ itt már a v sebesség mértékegység nélküli szám, a fénysebesség v -szeresét jelöli. Mivel a θ -ra a következő igaz a hiperbolikus számsíkon: y/x .

A Lorentz transzformáció modellezése a kvaterniók egyik fajtájával hiperbolikus számokkal egy érdekes következtetésre vezet, hogy a hiperbolikus szám valós része az idő-dimenzió, az imaginárius része pedig a tér-dimenzió az ábrázolása. A kvaterniók hiperbolikus változatának és a végtelen kapcsolatának tulajdonságából következhet, hogy a tér végtelen időként fogható fel.

[15] Taylor, E. F. – Wheeler, J. A. (2006): *Téridőfizika*. Budapest: Typotex, [Online], Available: http://books.google.hu/books?id=9KfpAy3zEZkC&printsec=frontcover&dq=t%C3%A9rid%C5%91fizika&hl=hu&sa=X&ei=_cPhT6PaEcWrgbBxOCcAw&ved=0CDkQ6wEwAA#v=onepage&q=t%C3%A9rid%C5%91-fizika&f=false 13 [Accessed May. 27, 2019].

A kételemű számokkal – kvaterniókkal levezetett új téridő szemlélet leírható

A tudósok csak sejtik, vagy sejtetni szeretnék a téridő új szemléletét, amit vázlatosan a következő tulajdonságokkal fogalmazhatnánk meg, ami valójában a végtelen számmodelljének és a téridő kapcsolata:

1. A valós terünk geometriájának – a három tér-dimenziót egy dimenzióra szűkítve vett – egyszerű modellje lehetnek a hiperbolikus számok.
2. A hiperbolikus számsíkon az y koordinátatengelyt képzelhetjük – az egydimenziósra szűkített – tér dimenziójának, és az x koordinátatengelyt gondolhatjuk az idő megfelelőjének.
3. A fentiekből általánosan elmondható, hogy a kételemű számok számsíkjai a téridő egyfajta geometriáját modellezzik, ahol az x tengelyen mindig az idő van ábrázolva, az y képzetes tengely pedig térdimenzió.
4. A kételemű számok egyúttal a végtelenek modellje is, így a tér az idő végtelenjének képe.
5. A kételemű számok, mint végtelen-modellek a kontinuum-hipotézis három lehetséges változatát újítják [15].



Tóth Attila–Csáky Antal

Összefoglalás

Ez a cikk megpróbálja összefoglalni az elmúlt 130 évben kialakított fogalmat a kvaterniókról. Az első fejezetekben az analitikus geometria egyenleteit mutattuk be, ahol a változók valós számok, valamint ugyanúgy valóságosak a kettős kvaterniók, amelyek gyakorlati alkalmazása sikeres a geodéziában és GPS-es útkeresésben. 170 éve Hamilton megsejtette a képzetes tengelyt, amit egy-két évtizeden belül magyarul is oktatnak a közép fokú tanodában, és ennek óriási felhasználása lett a villamoságtanban, a váltakozó áram egyenletei kijönnek képzetes időtengely segítségével. Itt használjuk fel a konjugáltakat, kifejezhető az időeltolódás és a fázisszög is. Ma is vitatottak még a kvantummechanikában a hullámfüggvény egyenletei, ahol érdekes és izgalmas módon a kvaternió a és b paramétere is komplex, és eltolás nélküli. Az általános relativitáselméletben is van képzetes időtengely, felfelé a jövő, az origóban a jelen, és elhagyjuk a múltat (fénykúp ábrázolás). A kvaterniók a számok körében is vitatható közegbe kerültek, hiszen megalapozták új számok (komplex, parabolikus és hiperbolikus) világát, új fejezetet nyithatnak nemcsak a matematikában, hanem az elszakosodott területek, természettudományok fúziós ágával. Ezek a számok alkalmasnak mutatkoznak a téridő új modelljeinek és a végtelen leírására is. Újfajta téridő modell bontakozhat ki a kvaterniókkal a tudásra vágyó elme előtt; miszerint a teret, mint a végtelen időt sejteti velünk. Érdekes módon azonban a képzetes tengely nem idő, hanem egy dimenzióra szűkített tér (háromtér). Ferenczi szerzetes Nyitrán már a 19. században sejteti vélte, hogy a kvaterniók segítségével eljuthatunk olyan független (absolut) számokhoz, melyek a számtan (arithmetic) alapját vetik meg; de ki gondolta volna, hogy elszakosodott visszafuzionált tudomány is leírható a kvaterniókkal. 1600 évvel ezelőtt Szent Ágoston filozófiai gondolkodással is eljutott idáig: „Látom, hogy valami kiterjedés az idő. Látom-e, vagy csupán úgy látszik, hogy igazán látom”.



TAKÁCS ANNA MÁRIA *

M_{atematika}

Művészet–narratívum–matematika

Összefoglalás: Mit jelent a „szépség” a matematikában? Mi a szép egy matematikus, illetve egy hallgató számára a matematikában? Mit jelent a szépség egy hétköznapi ember számára?

Pszichológiai kutatások eredményeit gyűjtöttem egy csokorba. A digitális oktatás forradalmát éljük. Előadásainkba milyen módon vonhatjuk be a digitális eszközöket? Milyen élményekhez juttathatjuk általuk a hallgatókat matematikából?

Előadásokon utalhatunk a művészet és matematika kapcsolatára. Ilyen szempontok alapján elemezzük Van Gogh néhány festményét.

Kulcsszavak: Pszichológiai kutatások, Fibonacci-sorozat, élményalapú oktatás.

Abstract: What is 'beauty' in mathematics? What attracts a mathematician or a student in mathematics? What is beauty for an ordinary person?

I have gathered the results of psychological investigations in a bouquet. We are living in the era of digitalized training methods. How can we utilize digital appliances in our lectures? What experiences can we convey by them to our students in mathematics?

We may refer to the interaction of art and mathematics in lecture. We analyse some paintings of Van Gogh from this point of view.

Keywords: Psychological research, Fibonacci sequence, Experience based teaching.

* Budapesti Gazdasági Egyetem,
Pénzügyi és Számviteli Kar
E-mail: takacs.anna@uni-bge.hu



Takács Anna Mária

A matematika szépsége

„Aki nem ismeri a matematikát, annak nehéz megértenie a természet legmélyebb szépségét...”

Az idézet Richard Feynman-tól származik, aki a 20. század egyik legnagyobb fizikusa volt.

G. H. Hardy, angol matematikus, a számelmélet és a matematikai analízis kiemelkedő kutatója a következőket mondta: „A matematikus mintáinak a festő vagy a költő mintáihoz hasonlóan álomszépnek kell lenniük. Az elméletek között is, mint megannyi szó vagy szín között, összhangot kell teremteni. A legelső szempont a szépség: csúnya matematikának nincs helye a világban. A matematikai szépséget nehéz ugyan meghatározni, de minden szépséggel így van az ember – nem tudjuk, mit értünk szép vers alatt, de ez nem akadályoz meg minket abban, hogy felismerjük őket.”

Azért is fontosak a fenti sorok, mert a szépművészetre is utalnak. De nem csak a festmények, művészeti alkotások lehetnek szépek. Minden tudományterületnek megvan a maga szépsége, a matematikának is. A matematikusok agya másként működik. A matematikusokban bizonyos matematikai formulák ugyanolyan kellemes érzéseket keltenek, mint a szépművészeti alkotások vagy a zene. A jelenség titka az agy neurológiai működésében keresendő: a matematikusok agyában bizonyos összefüggések láttán az „érzelmi agyterületek” aktiválódnak.

A *University College London* kutatói 16 matematikus (3 nő, 13 férfi; életkoruk: 22–32 év) részvételével vizsgálták, milyen agyi ingereket keltenek, és ezzel párhuzamosan milyen érzéseket váltanak ki különféle matematikai formulák. A matematikai doktorátust szerzett vagy felsőfokú matematikai végzettségű résztvevők 60-féle matematikai képletet értékelték aszerint, hogy szépnek, közömbösnek vagy csúnyának találják azokat. A látott kép által kiváltott agyi aktivitást funkcionális mágnesesrezonancia (fMR-) vizsgálattal figyelték.

Minden bonyolult matematikai képlet megtekintését és értelmezését igen nagyszámú agyterület aktiválódása kísérte, de a szépnek ítélt matematikai formulák az agy emóciókért felelős területét – az orbitofrontális kéreg medialis régióját – is aktiválták. Sőt, minél szebbnek találtak egy egyenletet, annál nagyobb jelintenzitást láttatott az fMR-felvétel ezen a területen.

A nem matematikusokból álló 12 fős kontrollcsoportban nem tapasztaltak hasonló érzelmi reakciókat. Itt a megkérdezettek alig néhány matematikai képletet találtak ránézésre szépnek, többségük bevallottan nem értette, mit takarnak a felvillantott bonyolult egyenletek.



Két héttel később meg kellett ismételniük a feladatot fMRI-vizsgálat közben. Mind közül az Euler-képlet, a Pitagorasz-tétel és a Cauchy–Riemann-egyenletek örvendtek a legnagyobb népszerűségnek, amelyek közül az elsőt a hamleti monológ szépségéhez hasonlították. [2]

A matematikai szépség ismérveit a következőkben foglalhatjuk össze: kellemes a megjelenése, szimmetrikus, meglepő, váratlan (paradox), összefügg különböző szabályszerűségekkel, elegáns, (tömör és mégis teljes) egyszerű, tömör, harmonikus, hasznos, a természetben előforduló. [3]

Ezért is gondoltam, hogy matematika előadásokon a fentiek és a Z-generáció sajátosságainak ismeretében, példákat mutatok a szépművészet és a matematika összekapcsolásával.

Pszichológiai kitekintés

Az oktatás elméletének a tudással és a képességekkel kapcsolatos modelljei különböző forrásokból származnak. A kutatási trendeket meghatározó elméleteket és az oktatás napi gyakorlatáról való gondolkodást egyaránt átszövik azok a nézetek, amelyek több mai tudományág közös eredetéig nyúlnak vissza, illetve a más tudományágakból származnak. Ebből a szempontból mindenekelőtt a filozófia és a pszichológia hatása meghatározó jelentőségű, de az utóbbi évtizedben már számottevő a szociológia, az informatika, a kognitív tudomány és a közgazdaságtan néhány ágának az oktatás kutatására gyakorolt hatása is. A tudással kapcsolatos pedagógiai nézetekben mind a mai napig felismerhetők a filozófiai gyökerek.

A képességekkel kapcsolatos álláspontok fejlődését több pszichológiai irányzat is befolyásolja. Ezek közül három olyat érdemes kiemelni, amelyik folyamatosan fejlődő elméleteivel és kutatási eredményeivel egészen napjainkig hat az iskolai oktatással kapcsolatos kutatások képesség-felfogására is: a pszichometria, a Piaget-iskola és a kognitív pszichológia. A pszichometria (az egyéni különbségek pszichológiája) elsősorban a képességek kvantitatív jellemzőivel foglalkozik. Piaget és követői az emberi értelmesség lényegét a művelti gondolkodásban látták. Az elmélet szerint az értelmi fejlődés az egyszerű művelet előtti sémáktól a konkrét művelti gondolkodáson át a formális gondolkodásig vezet. A kognitív pszichológia, mint a megismerést információ-feldolgozásként leíró irányzat jelenik meg. [1]

[1] Csapó Benő (2001): *A kognitív képességek szerepe a tudás szervezésében. Tanulmányok a neveléstudomány köréből.* Budapest: Osiris. Pp. 270–293.

[2] A matematikus agy másként működik, http://pharmaonline.hu/cikk/matematikus_agy_maskent_mukodik [Accessed 2014. március 6.]

[3] https://tudomany.blog.hu/2017/07/27/a_matematika_szepsege [Accessed 2017. július 27.]



[4] Bruner, J. (2004): *Az oktatás kultúrája*. Budapest: Gondolat. Pp. 14–51.

[5] Klingné Takács Anna (2011): Kognitív kategóriák az analízis számítógépes oktatásában. *Kitekintés–Perspective Magyar–román–szlovák periodika*. Különszám. Békéscsaba: Szent István Egyetem Gazdasági Kar.

A kognitív forradalom óta, mely a kilencvenes évekre tehető, folyamatosan módosulnak az elgondolások az emberi elme természetéről. Ezek az elgondolások a kognitív működésről szóló két élesen eltérő elgondolásból nőttek ki. Ezek közül az első az a feltevés volt, mely szerint az elmét el lehet képzelni komputációs szerkezetként is. A másik feltevés szerint az emberi kultúra egyfelől alkotóeleme az elmének, másfelől az elme az emberi kultúra használata során valósul meg.

Az első, komputációs nézet az információfeldolgozással foglalkozik, azzal, hogy a világról szólóvéges, kódolt, egyértelmű információt hogyan vési be, szűri, tárolja, kapcsolja össze, állítja helyre, és általában kezeli egy komputációs szerkezet. Az információt úgy veszi, ahogy kapja, olyasvalamiként, ami már beágyazódott valamilyen eleve létező, szabályok által korlátozott kódba, amely a világ állapotait fedi le.

A második megközelítés, a kulturalizmus ihletője az az evolúciós tény, hogy az elme nem tudna létezni, ha nem lenne kultúra. Hiszen az emberszabású elme evolúciója egy olyan életmód kialakulásához kapcsolódik, ahol a valóságot egy olyan szimbólumrendszer képviseli, melyet az adott kulturális közösség minden tagja ismer. Ebben a közösségben ez a szimbólumrendszer egyszerre szervezője és létrehozója a technikai-szociális életnek. [4]

A narratív tétel: Milyen gondolkodásmód, illetve érzések segítenek a gyerekeknek vagy a felnőtteknek abban, hogy a világnak egy olyan verzióját hozzák létre, amelyben számolhatnak majdani helyükkel- ez a saját világuk. Bruner úgy véli, hogy a történetmesélés, a narratívum szükséges ehhez. A narratívum mint gondolkodásmód és a jelentésalkotás közvetítőközegeként jelenik meg. Úgy gondolja, hogy két nagy útja van annak, ahogyan az emberi lények kezelik és szervezik a világról való tudásukat, ahogyan közvetlen élményeiket strukturálják. Az egyik inkább a fizikai „dolgok” kezelésére szakosodott, a másik pedig az emberek és állapotuk kezelésére. Az egyiket a szaknyelv logikai-tudományos, a másikat pedig narratív gondolkodásnak nevezi. Egyik kultúrából sem hiányoznak, de a kettőt a különböző kultúrák másképpen részesítik előnyben. [4]

Egy tanulmányban már foglalkoztam kognitív szemléletű kérdéssel, nevezetesen azt vizsgáltam, hogy definiált univerzális kognitív kategóriák és a Bruner-féle reprezentációs síkok milyen hierarchiát mutatnak a függvényjellemzés folyamatában. A struktúrát Galois-gráffal jelenítettem meg. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a számítógép bekapcsolása az analízis tanulás-tanítás folyamatába az ellenőrzési fázisban, a konkrét cselekvések szakaszában célszerű. [5]



DIGITALIZÁCIÓ

Milyen generációkat és elméleteket ismerünk?

A generációkutatások megjelenése a 20. század második felére tehető: az egyes nemzedékek és jellemzőik csoportosítására többféle megközelítés létezik, melyek közül a legmeghatározóbb elméleteket foglalja össze az alábbi táblázat. Az 1925-től napjainkig születettek generációs jellemzőinek áttekintése alapján láthatóvá válnak a motiváció és kommunikáció meghatározó aspektusai, azonban fontos megjegyezni, hogy a generációk e felosztása továbbra is vita tárgyát képezi.

Csendes vagy veterán generáció (1925–1942)

Tagjaira a pálya széléről figyelő (óvatos, visszafogott), biztonságra törekvő magatartás jellemző. Magánéletükben a családi értékek kiemelt fontossággal bírnak. Nehezen tudnak megbirkózni a digitális társadalom kihívásaival, a „felgyorsult világgal”.

Próféták/Idealisták – Baby-boomerek (1943–1960)

Tagjaik a háború után születtek, ifjúkorukat a civil mozgalmak határozták meg. Gyermek- és fiatal felnőttkorukat a lázadás, a szabálytagadás jellemezte (pl. hippikorszak). Motivációs struktúrájuk elemei: megfelelés, mély szakmai tudás, a sokoldalúság igénye.

Nomádok/Reaktívak/Digitális bevándorlók – X-generáció (1961–1981)

Az ébredés, a „lelkiismereti forradalom” ciklusának gyermekei: a hírnök-nemzedék/átmeneti generáció fiatalkorát a relatív béke és jólét korszakában töltötte. Megoldáskereső, megbízható, kontrollált magatartás jellemzi őket, mely elmélyült szakmai igényességgel és tudással párosul. Motivációs struktúrájuk elemei: státus, pénz, a társadalmi ranglétrán való előrejutás.

Hősök/Civilek/A digitális bennszülöttek első generációja – Y-generáció (1982–1995)

A posztmodern világ szülöttei, akik a 2001. 09. 11. utáni krízisperiódusban éltek fiatalkorukat. Tagjai magabiztos, energikus, kifejezetten tehetséges, kreatív személyek, akik a korábbiaktól jelentősen eltérő viselkedést mutatnak a tanulás és a munkavégzés területén. Együtt nőttek fel a modern technika fejlődésével, információéhségük kifejezett, a multikulturális környezetet könnyedén, laza attitűddel kezelik, és jellemző rájuk a „multitasking”. Motivációs struktúrájuk elemei: a kortárs csoportok hatása erős, szívesen dolgoznak társakkal együtt, ugyanakkor jellemző rájuk a céltalanság és a kiszámíthatatlanság is.

Művészek/Alkalmazkodók/Netgeneráció/Digitális bennszülöttek – Z-generáció (1996–2010)

A terrorizmus krízisperiódusában, a globális válság és a klímaváltozás idején születtek. Életüket „bedrótozva” éltek (szimultán több médium felhasználói): bátrak, kezdeményezők, kevésbé kételkednek saját képességeikben és korlátaikban, praktikus szemléletűek. Motivációs struktúrájuk elemei: „Beleszülettek” az internet világába, mely emberi kapcsolataikat és kommunikációjukat is átalakítja: az online világ kitágítja énjük határait, és alakítja identitásukat. Az offline vagy „való” világban konfliktuskezelési készségük



[6] Komár Z. (2017): Generációelméletek. *Új Köznevelés folyóirat*. Pp. 8–9.

[7] Fülöp H. (2018): Digitalizáció az oktatásban: mindig csak egy lépést – interjú Horváth Ádámmal, a Digitális Pedagógiai Módszertani Központ vezetőjével. *Modern Iskola*. <https://moderniskola.hu/2018/02/digitalizacio-az-oktatásban-mindig-csak-egy-lepest-interju-horvath-adammal-digitalis-pedagogiai-modszer-tani-koz-pont-vezetojével/> [Accessed 2018. február 21.]

hiányos (pl. indulatkezelési nehézségek, agresszió, a tekintélyhez való megváltozott viszony).

Alfa generáció (2010–)

A 2010 után születettek korosztálya, amelyről még nagyon kevés információ áll rendelkezésünkre. Több helyen „új csendes” generációként említik, mivel családi és óvodai viselkedésükre a korábbiakhoz képest csendesebb, visszafogottabb viselkedés jellemző (ugyanakkor egyes tagjainál az agresszió erősödése is megfigyelhető).

Mindebből látható, hogy a generációk közötti különbségek akár a harmonikus kommunikáció, az egymást értő és megértő együttélés akadályává is válhatnak. A meg nem értésből adódó generációs szakadék családi és oktatási szituációkban egyaránt gondot okozhat, különös tekintettel a kulturális, motivációs és szocializációs különbségekre. A millenniumi generációk (Y és Z) „digitális bennszülöttként” könnyen és gyorsan eligazodnak a digitális világban, melynek jellemzői elsősorban nem technikai, sokkal inkább kulturális értelemben meghatározottak: az így létrejövő digitális kultúra komplex, megfoghatatlan, interaktív (kölcsonös, közvetlen kapcsolaton alapuló) és interkonnectív (a folyamatos összekapcsoltság érzetét kelti), elemei testre szabhatóak. [6, 7]

*A DIGITÁLIS jólét kormányprogram a felsőoktatásról –
Tanulásintenzív felsőoktatás kialakítása*

A felsőoktatási digitális stratégia egyik legfontosabb célja a globális digitális világ által kikényszerített oktatási-tanulási kultúraváltásra vonatkozik, amit a digitális eszközök oktatásban való felhasználása támogat. Ez a cél szoros összefüggést mutat a stratégia második céljával, amely a digitális felsőoktatási tér kialakítására vonatkozik – a kettő egymás nélkül elképzelhetetlen és megvalósíthatatlan. A tanulásintenzív felsőoktatásra vonatkozó cél főként az oktatói-hallgatói viszony mikéntjére, illetve az oktatási módszertanokra, az oktatási eredményességet szolgáló felsőoktatás kialakítására vonatkozik. A javasolt beavatkozások mindkét cél elérését támogatják. A felsőoktatás módszertanáról főként nemzetközi tapasztalatok állnak rendelkezésre, a hazai oktatói réteg felkészültségével kapcsolatban kevés bemeneti adat állt elő. Ezért fontos olyan kutatások kivitelezése, amelyek ezt a területet vizsgálják, fejlesztik. A kiemelt kutatás-fejlesztési projekt a digitális tanulás tudományterületeihez kapcsolódó doktori iskolákat működtető felsőoktatási intézmények, kutató-



tóhelyek és vállalatok összefogásával, hálózatosodásával és nemzetköziesítésével valósulhat meg leghatékonyabban – oktatási innovációk, módszertani kutatások, a nemzetközi online oktatási-kutatási térbe való kilépés támogatása. E kutatások kiterjedhetnek a nemzetközileg már működő multinacionális cégek képzési gyakorlatainak adaptációjára, nagy volumenű online képzésmenedzsment rendszerek megismerésére és megismertetésére. A kutatások eredményeként kialakítható a digitális tanulás K+F+I adatbázisa, amelyen keresztül a jó gyakorlatok közzététele is folyhat. Emellett szükséges a digitális tanulással kapcsolatba hozható tudományterületek összekapcsolása, a meglévő ilyen tematikájú felsőoktatási kutatóközponti tudás erősítésével, új, releváns tapasztalattal rendelkező intézmények, szervezeti egységek bevonásával – ennek a folyamatban be kell tagozódnia a kialakítandó digitális módszertani központba. A fent javasolt kutatások felhalmozzák azt a tudást, amely az oktatók módszertani kultúrájának fejlesztését támogató továbbképzések, felkészítések megalapításához szükségesek. Az oktatói kar korfája nem optimális, az idősebb generációk pedig teljesen más oktatás-technológiai környezetben szocializálódtak, mint a jelenlegi hallgatók. Ezért az oktatói kar továbbképzésének két fő területe az oktatásmódszertan (oktatástechnológia), illetve az általános digitális kompetenciák fejlesztése kell, hogy legyen. [8]

[8] Digitális jólét program, www.kormany.hu, [Accessed 2016. június 30.]

Matematikai szorongás és digitalizáció

Sok diáknak a matematika a „mumus”. Az alsóbb osztályokban kedvelik a tantárgyat, aztán később ez átalakul. Gyakran a reklámokban is azt sugározzák, hogy a matematikától fáj a fejed, beteg leszel. Ha a tanító néni vagy bácsi is „fél” a matematikától, ezt a félelmet az oktatás során tovább adja. Ezt segítheti leküzdeni, ha matematikai játékokat játszunk a gyerekekkel. Ezek lehetnek hagyományosak, de számítógépes alkalmazások is. Az oktatásba is vonjunk be interaktív alkalmazásokat. Ennek jó példája hazánkban a GEOMATECH-projekt keretében elkészült tananyagelemek.

Magát a tanulási és tanítási folyamatot is újra kell tervezni, és ez talán még nagyobb kihívást jelent. Itt ugyanis nem technikai szempontból kell megküzdeni azaz, hogy hogyan használjunk egy számítógépet, egy tabletet vagy egy mobil eszközt arra, hogy információkat szerezhessünk. Hanem azzal a pedagógiai problémával, hogy – a tanulás kognitív folyamatát megismerve – hogyan lehet a diákok érdeklődését felkeltve olyan környezetet teremteni, amelyben a tanulás a digitális eszközök



[9] Barak B.: *Az új, felpörgött generáció felőrli a tanárokat?* https://haon.hu/kozelet/helyi-kozelet/az-uj-felporgott-generacio-felorli-a-tanarokat-3368081/?fbclid=IwAR1POaIcJ-TVb2vJ0ejfM-ZfOqr93DkT15ySoo_qs4LiA5Qp-CN2fUpq8luc [Accessed 2019. június 8.]

[10] Bernáth L. (2018): *Miért mumus a matek? – Matematikai szorongásról és tantárgyszorongásról* dr. Bernáth Lászlóval, *Modern Iskola*. <https://moderniskola.hu/2018/02/miert-mumus-matek-matematikai-szorongasrol-es-tantargyszorongasrol-dr-bernath-laszloval/>, [Accessed 2018. február 26.]

segítségével, de nem kizárólag azok által, a diákok számára az eddigieknél izgalmasabban és hatékonyabban tud megvalósulni.

Ann Dowker elég sokat foglalkozott ezzel a témával, neki van erről egy érdekes elképzelése, ő azt gondolja például, hogy nincs különbség a férfiak és a nők szorongása között, csak a nők érzékenyebbek. Ők már azt a szintjét veszik a szorongásnak, ami még egy férfinak fel sem tűnik. Ez azért problematikus, mert ha a szorongás beindul, az rongálja a munkamemória működését, így aztán a gondolkodás, a feladatmegoldás minősége is romlik. [9, 10]

Van Gogh és a sorozatok a matematika előadáson

A Z-generáció a kutatások szerint 8 percig képes tartós figyelésre. 8 perc után valami mást kellene mutatnunk előadáson. Tapasztalatom, hogy a 90 perces előadásban a gondolatmenetet 3–4 alkalommal kell érdekességgel, telefonos játékkal, humorral megszakítanom. Bruner narratív elméletét alkalmazva, célszerű a megszakításokat tematikusan megtervezni. A sorozatokhoz Van Gogh képeit felhasználva, gyűjtöttem érdekességeket úgy, hogy elég, ha csak szemlélik a látottakat. Úgy fognak emlékezni az előadásra, hogy az az óra volt, amikor Van Gogh-ról beszélgettünk.

ARANYMETSZÉS

Az aranymetszés a természetes szépérzékünk aránya, értéke $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. A festészetben, szobrászatban előszeretettel alkalmazzák a művészek a mondanivaló elhelyezésére.



1. ábra. Országút ciprussal és csillaggal, Van Gogh [11]



[11] Sunflowers,
www.vggallery.com, a
képek forrása.

A ciprus törzse mind hosszában, mind szélességében az aranymetszés arányában van. A kép jobb oldalán a lovaskocsi a ciprus és a festmény széle között szintén az aranymetszés arányában helyezkedik el.

FIBONACCI-SOROZAT

A Fibonacci-sorozat $f_1 = 1$ $f_2 = 1$ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ hányados-sorozatának hárterértéke szintén az aranymetszés aránya

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Van Gogh több napraforgó témájú képet is festett. Ezekből is előállíthatjuk a Fibonacci-sorozat első néhány elemét. Ha lenne 13 napraforgós festménye, még egy taggal tudnánk folytatni.



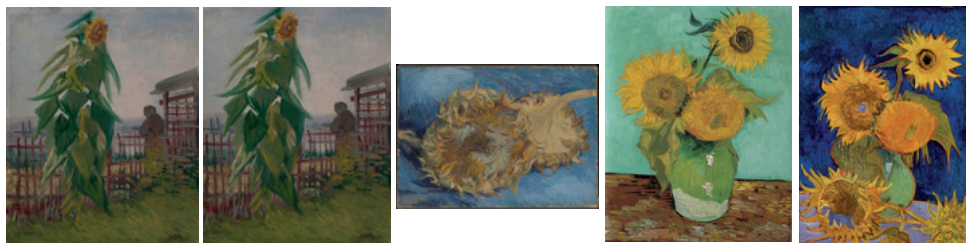
[11] Sunflowers,
www.vggallery.com, a
képek forrása.

[12] Kelly Richman-
Abdou (2019): *How
Van Gogh's Love of
Painting Sunflowers
Blossomed During His
Short Career*. [Accessed
16 June, 2019]

[13] Barak B.: *Az új,
felpörgött generáció
felőrli a tanárokat?*
[https://haon.hu/ko-
zelet/helyi-kozelet/
az-uj-felporgott-
generacio-felori-
a-tanarokat-
3368081/?fbclid=
IwAR1POaIcJ-
TVb2vJ0ejfM-
ZfOqr93DkT15ySoo_
qs4liA5QpCN2fUp
q8luc](https://haon.hu/kozelet/helyi-kozelet/az-uj-felporgott-generacio-felori-a-tanarokat-3368081/?fbclid=IwAR1POaIcJ-TVb2vJ0ejfM-ZfOqr93DkT15ySoo_qs4liA5QpCN2fUpq8luc) [Accessed
2019. június 8.]

[14] Simonovits A.
(2007): *Matematika-
történeti vázlat*. BME,
Matematika Intézet,
[http://docplayer
hu/7557427-Mate-
matikatoriteneti-vaz-
lat-bme-matemati-
kai-intezet-e-mail-
simonov-econ-core-
hu-2007-junius-26.
html](http://docplayer.hu/7557427-Matematikatoriteneti-vazlat-bme-matematikai-intezet-e-mail-simonov-econ-core-hu-2007-junius-26.html), [Accessed 2007.
június 26.]

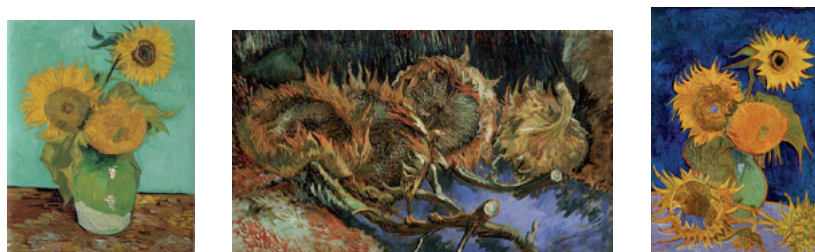
2. ábra. A napraforgós képek alapján a Fibonacci-sorozat néhány első tagja: 1, 1, 2, 3, 5 [12, 11]



PITAGORASZI-SZÁMHÁRMASOK ÉS NÉGYESEK

Az x, y, z pozitív egész számokat pitagoraszi számhármasként nevezzük, ha $x^2 + y^2 = z^2$.
A pitagoraszi számhármaskok a következő alakúak: $x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2$, ahol
 m, n természetes számok, amelyekre $m > n$, különböző paritásúak és $(m, n) = 1$. [14]

3. ábra. Pitagoraszi számhármask a napraforgós képekből 3; 4; 5 [11]



Az x, y, z, t pozitív egész számokat pitagoraszi számnégyesnek nevezzük, ha
$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2,$$

ahol x, y, z, t -re a következő összefüggések igazak: $x=p^2-q^2-r^2, y=2pq, z=2pr,$
 $t=p^2+q^2+r^2$, p, q, r egymástól független pozitív egész számok, amelyekre
$$p^2 > q^2 + r^2. [13]$$



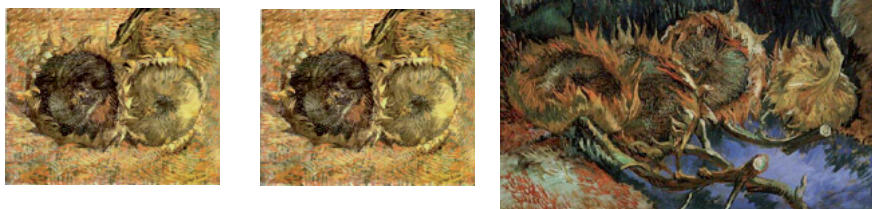
4. ábra. Pitagorasz számnégyes a napraforgós képekkel 2; 2; 1; 3 [11, 12]



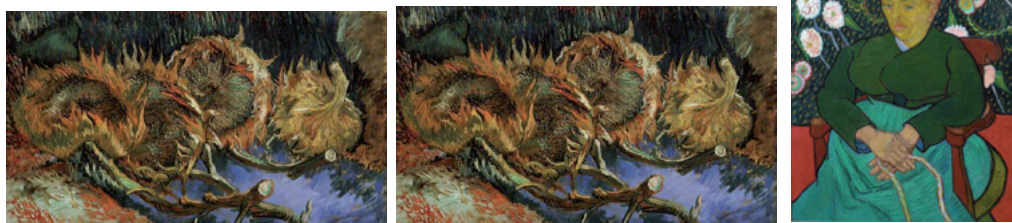
Ha lenne 13 napraforgós festménye, még egy számhármast (5; 12; 13) és még egy számnégyest ki tudnánk rakni (3; 12; 4; 13).

SZORZÁS, HATVÁNYOZÁS, ÉRDEKES SZÁMOK

5. ábra. $2^2=4$ napraforgókkal [5]



6. ábra. $4^2=16$ napraforgókkal [4, 5]



[3] https://tudomany.blog.hu/2017/07/27/a_matematika_szepsege [Accessed 2017. július 27.]

[4] Bruner, J. (2004): *Az oktatás kultúrája*. Budapest: Gondolat. Pp. 14–51.

[5] Klingné Takács Anna (2011): Kognitív kategóriák az analízis számítógépes oktatásában. *Kitekintés–Perspective Magyar–román–szlovák periodika*. Különszám. Békéscsaba: Szent István Egyetem Gazdasági Kar.



[11] Sunflowers,
www.vggallery.com, a
képek forrása.

[15] Karlik Zs. (2009):
A tökéletes számok.
Szakdolgozat, ELTE,
2009. https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mat-tan/2009/karlik_zsuzsanna.pdf [Accessed 2009]

Az n pozitív egész számot majdnem tökéletes számnak nevezzük, ha $\sigma(n) = 2n - 1$.

Tétel: A 2-hatványok majdnem tökéletes számok.

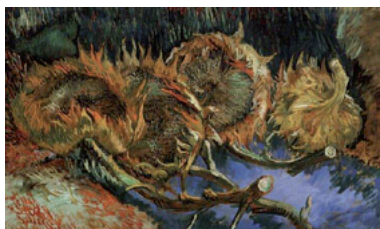
$$\text{Bizonyítás: } \sigma(2^k) = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^k - 1$$

Tehát egyelőre egy páratlan majdnem tökéletes számot ismerünk, a $2^0 = 1$ -et, a többi mind páros. [15]

Nem tudjuk, hogy a kettő hatványain kívül vannak-e más majdnem tökéletes számok. De az előzőkben mutatott 4 és 16 majdnem tökéletes számok. Például 16-ra $\sigma(16) = 2 \cdot 16 - 1 = 31$, ugyanakkor $\sigma(16) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.

A szorzásra más példát nézünk:

7. ábra. $3 \cdot 4 = 12$ napraforgókkal [11]



Egy pozitív egész számot bővelkedőnek nevezünk, ha osztóinak összege nagyobb a szám kétszeresénél, azaz $\sigma(n) > 2n$. Másképpen megfogalmazva, egy szám bővelkedő, ha a nála kisebb osztóinak összege nagyobb a számnál. A 12 bővelkedő szám, mert a nála kisebb osztóinak összege $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$.

8. ábra. $3 \cdot 5 = 15$ napraforgókkal [11]



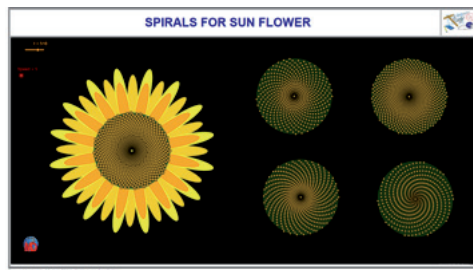
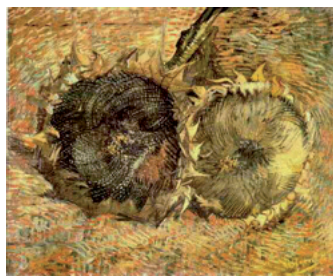


A 15 ikerprímek szorzataként áll elő. Két természetes számot ikerprímnek mondunk, ha prím számok és a különbségük 2.

VAN GOGH ÉS A GEOGEBRA

A napraforgó szemek a Fibonacci-spirál szerint követik egymást. Van Gogh egyik festményén megfigyelhető, ahogyan matematikai pontossággal próbálta megfesteni a spirált. A spirált GeoGebrában is modellezték.

9. ábra. A napraforgó spiráljairól gyönyörű GeoGebra animáció készült [11, 16]



LOVING VINCENT

A Loving Vincent a világ első teljes egészében kézzel festett animációs filmje, amelyben minden egyes képkockát (65.000 db!) festőművészek készítettek, olajjal, vászonra, ahogy maga Vincent Van Gogh festette volna. A heroikus vállalkozás, mely 2011-ben kezdődött, az angol Hugh Welchman és felesége, a lengyel Dorota Kobiela filmje, Van Gogh lenyűgöző világában játszódik. Több ezer festményen keresztül elevenednek meg életének legismertebb helyszínei és megfestett figurái, miközben világ egyik legkedveltebb festőjének, Vincent Van Gogh-nak ellentmondásos életét és halálát vizsgálja a film. Kibontakozik az utolsó napok drámája és végre fény derül rejtélyes halálának körülményeire. A filmforgatás után, több mint 100 képzőművész dolgozott egyszerre a közel 6 évig tartó folyamatban, hogy Van Gogh egyedi stílusában láthassuk ezt a lebilincselő történetet.[17]

[16] Mentrard, D. (2014): *Spirals vor sun flower*, Geo Gebra, http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/export4.25/Sunflower.html?fbclid=IwAR2bbBqB8b6b7V_dwOtlI92v5BE0bvGDzpZv8BLI3eemcZDmTXLeoyGWFE [Accessed 13 June, 2014]

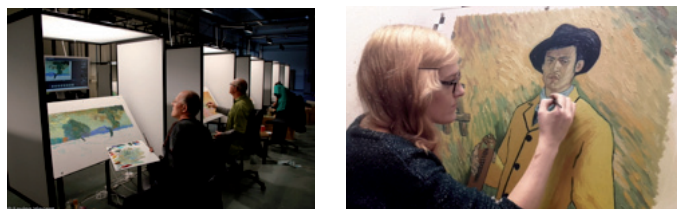
[17] <https://www.youtube.com/watch?v=CGzKnyhYDQI> [Accessed 29 August, 2017]



[18] O'Falt, C. (2017): 'Loving Vincent': How 125 Artists and 65,000 Paintings Made the World's First Oil-Painted Movie. https://www.indiewire.com/2017/08/loving-vincent-125-painters-first-hand-oil-painted-animation-1201867696/?fbclid=IwAR1O4yFC_3BvNg_1SWIatfP5JEMmERfWnx88h2htLDFePsE3HPP-FdXgV_zs, [Accessed 21 August 2017.]

[19] P. Rodinson: "Loving Vincent" — How the Ignorati Killed a Masterpiece in Oil... and once again quashed a medium they fear. <https://medium.com/@Penseur/loving-vincent-how-the-ignorami-killed-a-masterpiece-in-oil-c533c80262d3?fbclid=IwAR1HZxWQ6kXGKHlaKl6BU N9MwjDKFXbmI->

10. ábra. Hogyan készültek a filmkockák? [18]



11. ábra. Jerome Flynn, mint Doctor Gachet [19]



Összegzés

Néhány olyan példát gyűjtöttem össze, amelyeket felvillantásszerűen meg lehet mutatni előadáson. A Nofertitírről szóló részt már mutattam hallgatóimnak, nagy tetszést váltott ki az elemzés, főleg, hogy a hozzáfűződő narratívum kapcsolódik a lányomhoz is. Ha tematikusan, a témához kapcsolódóan látnak példákat diákjaink, lehet, hogy könnyebben előhívják az előadáson hallottakat is. Fontos, hogy vizuális példa is legyen és esetleg valami új ismeret, vagy alkalmazás a mindennapi gyakorlatból. Vizsgán előfordult már, hogy úgy jutott eszébe a hallgatónak a megoldási módszer, hogy a „mellékes dolog”-ra emlékezett először, aztán a tanult sémára. A számítógépes animációkat is kedvelik, az okostelefonos játékok is élményszerűvé teszik a tanulást.



JAKUS GABRIELLA *-KIS MÁRTA **

-MAGYAR TÍMEA ***-TÓTH-OROSZ ANDREA ****

Szemléletváltás a matematikaoktatásban – Growth mindset

Összefoglalás: Az oktatással nem csupán a klasszikus tudásátadás a célunk, szeretnénk, ha olyan kihívásként élnék meg a tanulást a diákok, amiben ők maguk fejlődhetnek, kibontakozhatnak, sikerélményeket érnek el; függetlenül attól, hogy előtte milyen szinten álltak, illetve milyen volt a viszonyulásuk a matematikához. Az új megközelítésben nem az ismeretátadáson van a hangsúly, hanem a fejlesztésen; nem vizsgáztatni akarunk, hanem a tanulást, fejlődést támogatni.

Kulcsszavak: Matematikaoktatás, growth mindset, coach-szemlélet.

Abstract: Our teaching aim is not only the classic knowledge transfer; our main goal is to change the nature of learning process as a challenge for students, in which they can develop themselves, improve their own knowledge, achieve success; no matter the prior knowledge, or their attitude to maths. The new approach not focus only on knowledge transfer but on progress; we not concentrate on examination; but to support learning and development.

Keywords: Math education, growth mindset, coach approach.

Bevezető

Számos kritika éri az egyetemistákat, hogy nem elég motiváltak, nincsenek meg a kellő matematikai alapjaik, nem eléggé kitartóak. Azonban lássuk be, ki szeret olyanul foglalkozni, amiről azt gondolja, hogy nem neki való, amiről nem tudja mire használhatja, illetve ahol már rengeteg kudarc érte és talán az is kimondásra került, hogy ehhez neki nincs tehetsége. Márpedig a mi diákjaink zömének soha nem volt erőssége a matematika, legalábbis ők így élték meg és a környezetük is ezt erősítette.

M_{atematika}

* Budapesti Metropolitan

Egyetem

E-mail: gjakus@metropolitan.hu

** Budapesti Metropolitan

Egyetem

E-mail: mkis@metropolitan.hu

*** Budapesti Metropolitan

Egyetem

E-mail: magyar@metropolitan.hu

**** Budapesti Metropolitan

Egyetem

E-mail: aorosoz@metropolitan.hu



[1] Tari A. (2011): „Z generáció”. Budapest: Tericum.

[2] HVG.hu: Klaszszikus módszerekkel nem lehet a Z-generációt tanítani. *hvg.hu*. 2014. 04. 24.

A Budapesti Metropolitan Egyetemen elhatároztuk, hogy ezen változtatunk, új szemlélettel közelítünk az oktatáshoz. Szakitunk a korábbi gyakorlattal, a tananyag és vizsgaközpontú oktatással.

Z-generáció az oktatásban

Felgyorsult a világ, elárasztanak minket újabbnál újabb technikai csodák. Szemünk előtt nő fel a világ első digitális nemzedéke. Villámgyors információáramlás, globális nemzedék, digitális bennszülöttek.

Ma már a Z-generációhoz tartozók (1996 után születettek) ülnek az egyetem padjai között, akik a modern technika világába születtek bele. Számukra a közösségi hálók, okos eszközök a mindennap részei. Ők azok, akik nem tudják elképzelni az életet internet nélkül. A digitális világnak köszönhetően számukra minden fontos információt könnyen és gyorsan elérnek.

A kérdéseikre a válaszokat azonnal az interneten, különböző fórumokon keresik. [1] Hozzá szoktak a gyors impulzusokhoz, jó a figyelemmegosztási képességük, könnyen eligazodnak a virtuális világban, gyorsan alkalmazkodnak az új dolgokhoz, ritkán jegyzetelnek tollal papírra az órákon, nem kedvelik a hagyományos módszereket. Ezért az oktatásban is szükség van arra, hogy változtassunk, az oktatási módszereket az új nemzedékre szabjuk.

Kihívást jelent a pedagógiai munka felzárkóztatása, megújítása az egyetemi oktatásban. Új módszerek kidolgozására van szükség. A hagyományos frontális oktatást mind inkább háttérbe szorítva, a készségek, képességek fejlesztése a cél. [2] Jó lenne úgy elérni ezeket a célokat, hogy eközben egy élményalapú oktatást biztosítsunk a Z-generációnak.

Ennek szellemében kezdtük egyetemünkön a METU Módszertani Intézetében átalakítani az oktatásunk módszereit, mind az előadásokon, mint pedig a gyakorlatokon.



Fejlődésfókuszú megközelítés

Legfontosabb megváltoztatni a szemléletünket és a viszonyulásunkat diákjaink, saját magunk és a kurzusok szerepét illetően. Az új megközelítésben kiemelt szerepet kap a fejlődésfókuszú szemléletmód (growth mindset), melynek elmélete Carol Dweck a Stanford Egyetem pszichológia professzorának nevéhez fűződik.

ELŐZMÉNYEK

Egyetemünkön 2018 őszétől új alapokra helyeztük az oktatásunkat (természetesen hosszas előkészítő munka után), így az idén elsőéves diákjaink 3–3,5 éves tanulmányai időszakuk alatt fel kell építsék a szakmai portfóliójukat, bemutatva mindazt amilyen tudásra, kompetenciákra szert tettek az egyetemen töltött időszak alatt. Ez az új koncepció nem csak a diákokkal, de a tanárokkal szemben is nagy kihívásokat támaszt, hiszen portfóliójuk építésében is támogatnunk kell hallgatóinkat a tananyag „átadása” mellett. [3, 4]

Az új kihívások támogatására egyetemünk mentorprogramot szervezett, ahol 12 különböző mentor, illetve mentortéma közül választhattak az oktatók, melyek segítséget nyújtottak az eddigi oktatási gyakorlatunk újragondolásában, új innovatív módszertanok, és az ezt támogató digitális eszközök megismerésében.

MÉRFOLDKÖVEK

Az új oktatási módszertan kidolgozását megelőzte egy olyan szemléletváltás, ami teljesen új alapokra helyezte a viszonyulásunkat az oktatáshoz. 5 mérföldkövet emelünk ki, ami jól mutatja milyen megközelítést tettünk magunkévá mielőtt a matematikaoktatás teljes átalakításának neki láttunk.

[3] Kis M.–Seres Gy. (2017): „Portfolio approach in higher education”. *Journal of Applied Multimedia* 3./XII./2017 http://www.jampaper.eu/Jampaper_E-ARC/No.3_XII_2017 [Letöltés dátuma: 2018. 03. 12]

[4] Prievára T. (2015): „A 21. századi tanár”. Budapest: Neteducatio.



[5] Sinek, S. (2019): „*Kezdj a miérttel! Az inspiráló vezetés titka*”. Javított, átdolgozott magyar kiadás, 2019 <https://hvgkonyvek.hu/konyv/kezdj-a-mierttel> [Letöltés dátuma: 2019. 05. 29.]

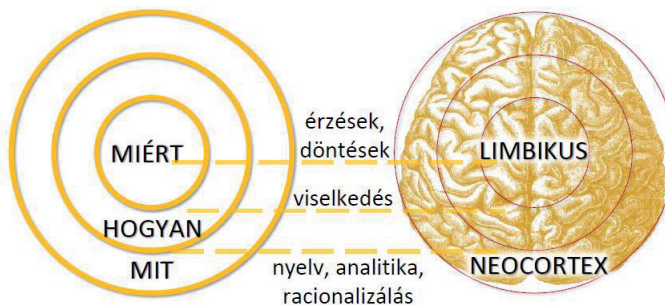
[6] Partridge, A. (2014): „*Executive Summary: The Golden Circle with Simon Sinek*”. August 27, 2014. <https://enviableworkplace.com/executive-summary-golden-circle-simon-sinek/> [Letöltés dátuma: 2019. 05. 29.]

ARANY KÖR

Első mérföldkönek tekinthetjük Simon Sinek arany kör filozófiáját. Sinek elmélete szerint a tervezéskor nem a Mit? és Hogyan? kérdésekkel kell kezdeni, hanem a Miért?-tel. Akkor tudunk igazán inspirálóan hatni a környezetünkre, és elérni a céljainkat, ha először azt a kérdést tesszük fel magunknak, hogy *Miért csináljuk amit csinálunk?* [5] Az oktatás esetében is elsősorban azt kell megválaszolnunk, hogy *miért* tanítunk például matematikát, mit szeretnénk ezzel elérni. Ha ezt megválasztottuk, utána átgondolhatjuk, hogy *hogyan* tudjuk mindezt megvalósítani, és csak ezután írjuk le, hogy pontosan *mit* tanítunk. Ez a megközelítés merőben eltér a korábbi gyakorlattól.

Agyunk felépítése is párhuzamba állítható az arany körrel. A Mit?-re a neocortex válaszol agyunkban, hiszen ő felel a racionális és analitikus gondolkodásért és a nyelvi készségekért. A limbikus rendszerünk tartalmazza a középső két részt, és felelős az érzelmeinkért, mint például a bizalom és a hűség. Agyunk ezen része felel minden emberi viselkedésért és a döntéseink meghozataláért is [6]

1. ábra. Párhuzam agyunk felépítése és az arany kör között.



Rögzült vs fejlődési szemlélet

Második mérföldkönek tekinthetjük a rögzült (fixed mindset) és a fejlődési szemlélet (growth mindset) összehasonlításából szerzett tapasztalatokat, de még inkább fontos, hogy miként tereljük diákjainkat a fejlődési szemlélet felé. Hiszen ekkor a



Szemléletváltás a matematikaoktatásban – Growth mindset

diák nem kerüli, hanem keresi a kihívásokat; kitart a probléma megoldása közben; az erőfeszítéseket nem tartja feleslegesnek; tanul a kritikákból; mások sikereit követendő példának tekinti, nem fenyegetésnek; és nagyobb sikereket ér el, hiszen kibontakoztathatja tehetségét (2. ábra).

2. ábra. A rögzült és a fejlődési szemlélet összehasonlítása.

RÖGZÜLT SZEMLÉLET		FEJLŐDÉSI SZEMLÉLET
kerüli	kihívás	keresi
védekező / feladó	akadály	kitart
felesleges	erőfeszítés	kiválóság felé út
nem törődik vele	kritika	tanul belőle
fenyegetés	mások sikere	követendő példa
nem bontakozik ki	eredmény	nagyobb siker

A két szemlélet teljesen eltérő alapokon nyugszik, így a kimenet is jól megkülönböztethető. Ennek összehasonlítását láthatjuk az alábbi táblázatban. (1. táblázat)

[7] Romero, C. (2015): „What We Know About Growth Mindset from Scientific Research”, *Mindset Scholars Network*. july 2015. <http://mindsetscholarsnetwork.org/wp-content/uploads/2015/09/What-We-Know-About-Growth-Mindset.pdf> [Letöltés dátuma: 2019. 05. 29.]



[7] Romero, C. (2015): „What We Know About Growth Mindset from Scientific Research”, *Mindset Scholars Network*, july 2015. <http://mindsetscholarsnetwork.org/wp-content/uploads/2015/09/What-We-Know-About-Growth-Mindset.pdf> [Letöltés dátuma: 2019. 05. 29.]

1. táblázat. A rögzült és a fejlődési szemlélet összehasonlítása. [7]

	RÖGZÜLT SZEMLÉLET	FEJLŐDÉSI SZEMLÉLET
Definíció	Meggyőződés, hogy a tehetség egy <i>fix</i> jellemvonás, amit nem lehet megváltoztatni.	Meggyőződés, hogy a tehetség <i>képlékeny</i> és fejleszthető.
Erőfeszítés értelmezése	Az erőfeszítés <i>rossz</i> ; ha okos vagy, nem kell keményen dolgoznod.	Az erőfeszítés <i>jó</i> ; törekedj arra, hogy jobba válj.
Iskolai motiváció	Fontos okosnak látszani, így <i>bizonyíthatod</i> a tehetségedet.	Fontos tanulni, így <i>fejlesztheted</i> a tehetségedet.
Válaszreakció a tanulmányi visszaesésre	<i>Tehetetlen</i> ség; a visszaesés egy jel, hogy nincs meg, amire szükséged lenne.	<i>Rugalmasság</i> ; a visszaesés egy jel, hogy keményebben kell dolgoznod, vagy ki kell próbálnod egy új stratégiát.
A kudarc értelmezése	A kudarc a <i>történet vége</i> : itt az ideje feladni.	A kudarc a <i>történet kezdete</i> : itt az ideje újratekdeni.

Az egyéni fejlődés dicsérete

Harmadik mérföldkő lehet a kommunikációnk tudatos megváltoztatása: nem a diákok tehetségét (ami nem változtatható, tehát rögzült szemléletre vall), hanem az egyéni fejlődését, az eredmény elérésére tett erőfeszítéseiket érdemes dicsérni. Így sokkal motiváltabbakká válnak a további erőfeszítésekre, örömmel dolgoznak, és nem teherként fogják fel egy-egy feladat megoldását. Erre mutat egy jó példát 2. táblázat.



Szemléletváltás a matematikaoktatásban – Growth mindset

2. táblázat. Példa arra, hogy a tehetség dicséretét hogyan lehet átfogalmazni a fejlődés dicséretére, ami fejleszti a fejlődési szemléletet. [7]

TEHETSÉG DICSÉRETÉNEK VÁLTOZTATÁSA...	...A FEJLŐDÉS DICSÉRETÉRE
Nézd, te jó vagy angolból. 5-öst kaptál a legutóbbi vizsgádon.	Te tényleg tanultál az angol vizsgára és az eredményed ezt tükrözi.
Megcsináltad! Megmondtam, hogy okos vagy.	Tetszik a módszer, ahogy minden stratégiát kipróbáltál a matematika problémád megoldásában, mígnem végül megtaláltad.

Önérvényesítő, együttműködő magatartás

Negyedik mérföldkő lehet, ha tudjuk, hogy a problémamegoldó viselkedés konfliktushelyzetekben (konfliktushelyzet egy matematikai feladat megoldása is) akkor érvényesül, ha az alany önérvényesítő és együttműködő magatartással bír. [8] Ennek tudatában kell az oktatásunkat tervezni, azaz olyan oktatási helyzeteket teremteni, ahol mindez kiemelt szerepet kap.

Oktatás jelentősége

Végezetül ötödik mérföldkövünkkel, egy idézettel zárnánk a sort, ami jól szimbolizálja, mekkora felelősség hárul ránk, amikor a diákokkal dolgozunk, motiváljuk őket, munkájukat, habitusukat értékeljük. [9]

„A hiedelmeid válnak a gondolataiddá, a gondolataid lesznek a szavaid, a szavaid válnak a cselekedeteiddé, a cselekedeteid lesznek a szokásaid, a szokásaid válnak az értékeiddé, az értékeid lesznek a sorsod.” – Mahatma Gandhi

[8] Rogers, C. R.–Freiberg, H. J. (2013): „A tanulás szabadsága”. Budapest: Edge 2000.

[9] Buchanan A. (2017): „The nature of mindsets. A primer on how our underlying beliefs, attitudes and assumptions create our everyday lives — and our shared world”. *Benefit Mindset*. March 16, 2017. <https://medium.com/benefit-mindset/the-nature-of-mindsets-18afba2ac890> [Letöltés dátuma: 2019. 05. 29.]



[10] Jakus G.–Kis M.–Tóth-Orosz A. (2012): „A Gazdasági matematika I. nehézségei egy hallgatói felmérés tükrében”, In: *Annales évkönyv*. Budapest: MET.

[11] Braun, B.–Bremser, P.–Duval, Art M.–Lockwood, E.–White, D. (2017): „What Does Active Learning Mean For Mathematicians?” <https://www.ams.org/publications/journals/notices/201702/rnoti-p124.pdf> [Letöltés dátuma: 2018. 05. 12]

Megvalósítás

A Gazdasági matematika oktatásunk szervezését tekintve nagylétszámú 150–200 fős előadásra és ehhez szorosan kapcsolódó 20–30 fős szemináriumokból áll, ami alapján meghatározza a lehetőségeket.

LEHETŐSÉGEK A NAGYLÉTSZÁMÚ ELŐADÁSOKON

A hagyományos előadás formába, ahol jellemzően az ismeretanyagot kapják meg a hallgatók igyekszünk becsempészni *problémafelvető* órákat vagy órarészleteket. Felvetünk egy gazdasági problémát, amire közösen keressük a választ, válaszokat ott az óra keretében. Alkalmazzuk azt a módszert is, hogy az előadások előtt megkapják a hallgatók az ismeretanyagot, feladatokat, majd ezekhez kapcsolódó nehézségeket, kérdéseket egy online fórumon jelezhetik, így az előadásokon a hangsúlyt azok a témakörök kapják, ami a hallgatóknak nehézséget, problémát okoztak.

Nagy kihívást jelent a nagyszámú előadásokon a hallgatók figyelmének fenntartása. [10] Ezért megpróbálunk az előadások alatt több interakciót beépíteni, a komfort zónájukból egy kicsit kibillenteni a hallgatókat. Ezt kezdetben nehezményezik, de aztán hamar belejönnek. Minden diák kezében még előadás alatt is ott vannak az okos eszközök. Szeretnénk a hátrányt előnyünkre fordítani, így olyan feladatokat adunk részükre, amit ezen eszközök segítségével oldanak meg. A digitális technológia ad nekünk, oktatóknak is lehetőséget arra, hogy még a nagyobb létszám mellett is tudjuk kommunikálni, véleményt kérni, vitát generálni, sőt akár csapatban vagy versenyszerűen együtt dolgozni. A kapott egyéni, illetve csoportos válaszokat pillanatok alatt a kivetítőn megnézhethetjük, összevethetjük, összesíthetjük az eredményeket. Így sokkal *interaktívabb* és izgalmasabb előadásokat tarthatunk.

GYAKORLATOKON ALKALMAZOTT ÚJ MÓDSZEREK

A gyakorlati órákon könnyebb a helyzetünk, hiszen sokkal kisebb létszámmal dolgozunk. Szemináriumokon a *feladatmegoldás közbeni tanulást* helyezzük a fókuszba. Itt a cél az előadás anyagának alkalmazása, gyakorlatba ültetése. Több lehetőség van a kezünkben arra, hogyan vonjuk be a diákokat, hogyan tegyük őket még aktívabbá. [11]



Hiszünk abban, hogy a *páros vagy csoportmunka* alkalmazása könnyebbé teszi a tanulást. A problémamegoldás van a középpontban, de mégis érdekesebb, különlegesebb, a figyelem is könnyebben fenntartható. A hallgatók szívesen hasonlítják össze, magyarázzák el egymásnak a megoldásaikat. És mindeközben észrevétlenül számos kompetenciájuk is fejlődik. Izgalmasnak találják azt is, ha ismerik egy probléma megoldását, de az odavezető utat nekik kell megkeresni. Itt lehetőség adódik az egyéni gondolkodásmód fejlesztésére, az érvelések összevetésére. Nem csak közlés által kapják az információt, a viták, eszmecserék által is tanulnak.

Nagyban növeli a hallgató bátorságát, hozzáállását a tantárgyhoz, ha lehetősége van kiállni a csoportársai elé, és bemutathatja a táblánál a saját feladatmegoldását, amit órán, vagy otthon kidolgozott, akár önállóan vagy kiscsoportban. *Projektfeladat*. Ez is egy olyan módszer, ami kibillenti a komfort zónából, de aztán az elismerés, dicséret, amit a munka után kap, kárpótolja, örömmel tölti el. Önbizalmat kaphat olyan diák is, akinek alacsony volt a motivációs szintje, azonban attól, hogy nagyobb figyelmet kap, több dicséretet, megerősítést, jelentős javulást érhetünk el.

A Z-generáció számára nagyon fontosak a visszajelzések. Tapasztalataink szerint ennek a generációnak nagyobb szüksége van az instrukciókra, rávezetésre és a pozitív visszacsatolásra, mint idősebb diáktársaiknak. Ettől a tanévtől bevezettünk a gyakorlati óráinkon egy *új értékelő, jutalmazó rendszert*, ami még játékosabbá és motiváltabbá tette a hallgatóságot. Az órai munkára „pluszokat” szerezhettek, amit a félév végén pontokká válthattak a diákok. Mindösszesen néhány pontot szerezhettek ezen a módon, mégis nagyon ösztönzően hatott rájuk. Kialakult egy egészséges versenyszellem a csoportban.

Az órákon kiemelt szerepe van a *gyakorlati megközelítésnek*, amikor a diáknak magának kell a problémát megfogalmaznia és ehhez megoldási utat keresnie, illetve mindezt értékelnie. Egyre nagyobb hangsúlyt kap az oktatásban a gyakorlati tudás megszerzése. Ahol lehetséges, igyekszünk az életből vett szituáción keresztül alkalmazni a tanultakat.

Gyakran alkalmazzuk a *szerepjátékokat*. Matematikánál például az operációkutatási feladatoknál, kedvelt eszköz, amikor szállítási költségeket szeretnénk optimalizálni.

Választunk mezőgazdasági termelőket, gyártulajdonost, szállítási feladatot végzőket. Csoportra szabva készítjük a szituációkat, ami természetesen feltételez némi információt a csoport összetételéről.

Nagyon kedvelik azt is, hogy gyakran alkalmazunk *digitális eszközöket, programokat*. Ezek megismerése, elsajátítása nem okoz nekik különösebb problémát, magabiztosan kezelik és alkalmazzák a különböző szoftvereket (Kahoot, GeoGebra, Solver). Kedvelik, ha azonnali visszajelzést kapnak a teljesítményükről, illetve, hogy nem kell elemi feladatokkal, egyszerű számításokkal bajlódni, e helyett fókuszálhatnak a gyakorlati alkalmazásokra, modellezésre, diszkusszióra. Ezen eszközökkel könnyen rávilágíthatunk ok-okozati problémákra, kiválóan szemléltethetünk vele gazdasági összefüggéseket, jól tudunk segítségükkel együtt gondolkodni.



Jakus Gabriella–Kis Márta–Magyar Tímea–Tóth-Orosz Andrea

Tapasztalatok

GAZDASÁGI MATEMATIKA I. ÉS II. GYAKORLAT

Gazdasági matematika I.-ből már az első órán csoportmunkával indítunk. Mivel a csoportban gyakran vannak olyan hallgatók, akik többször felvették a tárgyat, elsősorban őket jelöljük ki csoportvezetőnek. A többiek választhatnak, kivel szeretnének együtt dolgozni.

Tapasztalat: A csoportvezetők lelkesen magyaráznak, legtöbbjüknek jót tesz a kapott felelősség. A következő órai csoportmunkánál már választhatnak a hallgatók, kivel legyenek, a tapasztalat, hogy maradnak az előző órai csoport felállások.

A harmadik órán még mindig csoportmunkában deriválási feladatokat kell megoldani. Három szintet kell teljesíteni, de a következő szintre csak akkor juthatnak tovább, ha egy feladatsort teljesen hibátlanul megoldanak elsőre. Ha hiba van a megoldásban, akkor kapnak egy másik ugyanolyan szintű (nehézségű) feladatsort. Így van, aki óra végére az első szintű feladatsorból old meg hármat, van, aki eljut a harmadik szintig.

Tapasztalat: Nagyon lelkesen dolgoznak a hallgatók, mindenki szeretne „tovább jutni” magasabb szintre. (Gazdasági matematika II.-ből kombinatorikai feladatokat oldanak meg ugyanígy.)

Mindkét tárgyból egész félévben nagyon sokat dolgoztatjuk önállóan, illetve csoportban a hallgatókat. A félév második felében azzal próbáljuk ösztönözni a hallgatókat, hogy a jó feladatmegoldásért pecsétet lehet szerezni.

Tapasztalat: Leírhatatlanul lelkesen gyűjtögetik a pecsétet, az óra végén nem akarnak elmenni, szinte mindenki szeretné befejezni az utolsó feladatot, és még egy pecsétet kapni. A félév végén a pecsétet, és az órai munka értékeléseket pontokra váltjuk át. Egy hallgató maximum 5 pontot szerezhet.

Tapasztalat: Elmondható, hogy az eddigi félévekhez képest sokkal többen jutottak vizsgára, mint korábban. A rendszeresen órát látogatók közül a 30 fős csoportokban legfeljebb 6–8 olyan hallgató volt, akinek újból fel kell majd vennie a tárgyat a korábbi 10–15 főhöz képest.

GAZDASÁGI MATEMATIKA II. LEVELEZŐ ELŐADÁS

Levelező tagozaton előadás formájában oktatjuk a Gazdasági matematikát. Ennek ellenére itt is igyekszünk kreatív feladatokat is adni a hallgatóknak. Solver feladatkészítő versenyt hirdetünk. Két-három fős csapatokba összeállva mindenkinek egy-egy lineáris programozási feladatot kell megalkotnia, ami valahogyan összefügg a saját életével (munkájával, családjával, hobbijával kapcsolatos). Az önállóan alkotott feladatokat és a megoldásokat a félév végén prezentálják a hallgatók.



Összegzés

A játékoság mellett, talán azt kedvelik leginkább a hallgatóink, hogy sokkal nagyobb személyes odafigyelésben van részük, csoportban dolgozhatnak, megcsillanthatják kreativitásukat, több támogatást kapnak mind az oktatótól, mind a társaktól, így kevésbé érzik elveszettnek magukat, jobban fennmarad a motiváció.

Törekszünk arra, hogy minden óra legyen egy kicsit más. Az órák nemcsak tartalmukban, hanem módszertanukban is különbözzenek, változatosak legyenek. Miközben folyamatosan igazodunk a jelenlévők igényeihez, keresve az adott körülmények között leghatékonyabb eszközt, mely a hallgató fejlődését segíti. Ezáltal válik egyre színesebbé, élvezetesebbé, emberibbé a matematikaoktatásunk.



A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

* Dunaiújvárosi Egyetem, Mű-
szaki Intézet, Anyagtudományi
Tanszék
E-mail: kozselyg@uniduna.hu

Összefoglalás: Közismert tény, hogy a magyar népesedési helyzetet hosszabb idő óta kedvezőtlen demográfiai mutatók, negatív tendenciák jellemzik. A népesség létszámának közel harminc éve tartó csökkenésének egyik alapvető oka a születések igen alacsony száma. Céлом volt, hogy megfelelő modellt találjak és ezáltal én is saját számításokat tudjak végezni a népesség és ezen belül a korcsoportok számának becslésére. A választásom egy az ökológiában gyakran használt modellre esett, amelyet Leslie dolgozott ki. A modell egyik hátránya, hogy időben nem változó termékenységi és halandósági paraméterek esetén az exponenciális növekedést adó Malthus-modellhez tart. Ezért tudományosan megalapozott féket kellett a rendszerben tenni, ezt a Verhulst-modell szolgáltatta, a környezeti eltartóképességi paraméter bevezetésével. A szakirodalomban publikált, különböző bonyolultságú modellek becsléseivel jó egyezést mutat a Leslie-Verhulst-modell. Körülbelül 30 éves időtávra eredményesen használható mind az össznépesség, mind a korcsoportok számának becslésére.

Kulcsszavak: Népesség modellezés, Malthus- és Verhulst-modellek; kohorszkomponens módszer.

Abstract: It is a well-known fact that the population of Hungary has been characterized by unfavourable demographic indicators and negative tendencies for a long time. The very low number of births is one of the main reasons for the decline of the population nearly 30 years. My goal was to find the useful model, and so I will estimate the number of people in the population, including the age groups. My choice is a case of an ecology model that Leslie has worked out. One of the drawbacks of the model is that it maintains the exponential growth of the Malthus model in the case of time-dependent fertility and mortality parameters. That is why the system had to be scientifically based, provided by the Verhulst model, with the introduction of the environmental retention parameter. The



A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

Leslie-Verhulst model has a good match with the estimates of models of various complexities published in the literature. It can be used effectively to estimate the total population and age group for about 30 years.

Keywords: Population modelling; Malthusian growth model and Verhulst logistic growth model; Cohort component population projection method.

Bevezető

Közismert tény, hogy a magyar népesedési helyzetet hosszabb idő óta kedvezőtlen demográfiai mutatók, negatív tendenciák jellemzik. A népesség létszámának közel harminc éve tartó csökkenésének egyik alapvető oka a születések igen alacsony száma. A termékenység csökkenésének okai rendkívül összetettek, amelyek feltárásával számos demográfiai, közgazdasági és szociológiai kutatás foglalkozik. A tanulmányok részben társadalmi – a családalapítási szokások átalakulása, az iskolázottsági szint emelkedése, a születéskori életkor kitolódása, a személyes értékrend, illetve a nők társadalmi szerepének változása –, részben gazdasági – a munkaerőpiac beszűkülése, az egzisztenciális félelem, a gyermekellátó rendszer hiányosságai – tényezőkkel magyarázzák a gyermekvállalási kedv visszaesését.

Elméleti háttér, témához kapcsolódó információk

A demográfia görög eredetű szó a démosz (δῆμος) nép, népesség és a gráfó (γράφω) leírás, összeírás, mérés szavak összetételéből származik, azaz a népesség leírását jelenti.

A definíciója szerint a demográfia olyan tudomány, amely a népességet, a népesedési folyamatokat populációs szinten vizsgálja. Kiterjed a népesség méretére, szerkezetére és eloszlására, valamint a születések, halálozások, vándorlás és öregedés hatására történő változására. A demográfiai elemzés vonatkozhat a teljes társadalomra, vagy annak egyes – oktatási, nemzetiségi, vallási vagy etnikai szempontok alapján lehatárolt – csoportjaira.

A formális demográfia vizsgálódását leszűkíti a népesedési folyamatok mérésére, míg a tágabb értelemben vett népesedéstudomány a népességet befolyásoló gazdasági, társadalmi, kulturális és biológiai folyamatok összefüggéseit is vizsgálja. [1, 2, 3]

[1] L. Rédei Mária (2001): *Demográfia*. Budapest: ELTE Eötvös.

[2] Polónyi István (2002): *Oktatás gazdaságtana*. Budapest: Osiris.
<http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/oktatas-gazdasagtana/adatok.html>

[3] Siegel, J. S.– Swanson, D. A. (2004): *The Methods and Materials of Demography*, Second edition. San Diego: Elsevier Academic Press. P. 1–8.



Kozsely Gábor

A DEMOGRÁFIAI ADOTTSÁGOK ELEMZÉSE KÜLÖNFÉLE MUTATÓSZÁMOKKAL

A demográfiai helyzetkép elemzésére különböző általános és sajátos mutatószámok szolgálnak eszközként.

Az általános mutatószámok a népesség összetételének jellemzésére szolgálnak. A népesség összetételének tanulmányozásában a két legalapvetőbb ismerv: a nem és az életkor szerinti megoszlás.

A nemek arányát több tényező határozza meg. Az egyik a fiúszületési többlet, vagyis az a jelenség, hogy minden társadalomban általában több fiú születik, mint lány. A születéskori fiú-lány arány 52–48%. A másik alapvető tényező a két nem halandósági különbsége, az, hogy a modern társadalmakban minden korcsoportban magasabb a férfiak halandósága. Ezek alapján alakul ki egy népességben a nemek aránya, általában úgy, hogy a fiatal népességben férfitöbblet van, a korral előrehaladva pedig egyre nagyobb nő-többlet alakul ki. Általánosságban az is jellemző, hogy a fejlődő országokban férfitöbblet mutatkozik, az öregedő társadalmakban női.

A népesség életkor szerinti megoszlásának vizsgálatánál a népesség korcsoportok szerinti felosztásának több formája szokásos. Az emberi életkorokat leggyakrabban biológiai alapon osztják fel: gyermek-, felnőtt- és időskorra. Fontos tudnunk, hogy az egyes szervezetek által használt különféle korcsoportok tagolása nem egységes, ennek az a legfőbb oka, hogy egyes korok és társadalmak közvélekedése nagy különbséggel ítélte/ítéli meg, hogy meddig tart a gyermekkor, vagy például ki számít már idősnek.

A demográfusok nagyon gyakran használják számításaikban a szülőképes kor fogalmát, amely a 15–49 éves nőket jelenti.

A demográfiai helyzetkép alakulásában, a változások ok-okozati összefüggéseinek feltárásában olyan sajátos mutatószámok szolgálnak eszközként, mint a termékenységi-, a reprodukciós-, és a mortalitási mutatók.

Termelékenységi mutatók

A születési mozgalom vizsgálatánál alkalmazott mutatókat két csoportra szokás osztani. A születési arányszám a népesség egészéhez viszonyítva fejezi ki a születések gyakoriságát, amíg a termékenységi arányszámok nem a népesség egészéhez, hanem a szülőképes korú nőkhöz, vagy azok csoportjaihoz viszonyítva mutatják a születési gyakoriságot. A cikkben csak ezek közül a két legfontosabbat emeltem ki.

Korspecifikus termékenységi arányszám (ASFR; Age-specific fertility rate): egy adott életkorhoz tartozó nők termékenységét fejezi ki. Ezzel a mutatóval a gyermekvállalási magatartás életkor szerinti változását írjuk le, illetve hasonlítjuk össze. Így kiküszöbölhetők a korösszetétel változásából adódó hatások. Általában 15 és 49 év között öt éves korcsoportokat felölelő egységekre szokás kiszámítani (15–19; 20–24; 25–29; 30–34; 35–39; 40–45; 40–49).



A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

Így $n=7$ korcsoport keletkezik. Az adott korcsoportához tartozó kor-specifikus termékenységi arányszám az adott korosztályhoz tartozó anyák által szült gyermekek számának és az adott korosztályhoz tartozó nők számának hányadosaként számolható; (1) egyenlet. Általában ezre-lékben szokás megadni: [2, 6, 7]

$$ASFR_i = \frac{B_i}{N_i^F} \cdot 1000 \quad (1)$$

Teljes termékenységi arányszám (TFR; Total fertility rate): Makro-szinten egy ország termékenységének legrégebbi és az egyik leggyak-rabban használt, egy naptári évre vonatkozó mutatószáma. Azt mutatja meg, hogy ha az adott év termékenységi adatai állandósulnának, akkor egy nő élete folyamán átlagosan hány gyermeknek adna életet.

Egy adott év korszpecifikus élveszületési arányszámainak összegéből képezhető a teljes termékenységi arányszám, amit szintén általában 1000 nőre kifejezve szoktak megadni, bár gyakori az 1 nőre történő megadás is; (2) egyenlet. [2, 5, 6, 7]

$$TFR = \sum_{i=1}^n AFSR_i = \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{N_i^F} \cdot 1000 \quad (2)$$

A TFR-mutatót régóta bírálják azért, mert kiszámítási módja nem tükrözi azt a tapasztalatot, hogy a nők szülési valószínűségei az életko-rukön kívül a már meglévő gyermekeik számától, azaz – demográfiai szakkifejezéssel – a paritásuktól is függenek. Ezt részletesen a [8, 9] szak-irodalmak taglalják.

Mortalitási mutatók

Egy adott populációban megfigyelhető halálozások gyakoriságára vo-natkozó statisztika. A különböző társadalmi csoportokra számított ha-lálozási mutatók szoros kapcsolatban állnak az adott népesség fejlett-ségével, életszínvonalával és egyenlőtlenségi viszonyaival. A haláloki osztályozás a morbiditási mutatószámok számításánál is alkalmazott kódrendszer alapján történik.

[2] Polónyi István (2002): *Oktatás gazdaságtana*. Budapest: Osiris.
<http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/oktatas-gazdasagta-na/adatok.html>

[5] Dharmalingam, A (2004): Rep-rodutivity. In: Siegel, J. S.–Swan-son, D. A. (Eds.): *The Methods and Materials of Demography*. Second edition. San Diego: Elsevier Academic Press. Chapter 17. Pp. 429–453.

[6] Estee Sharon (2004): Natality. Measures Based on Vital Statistics. In: Siegel, J. S.–Swanson, D. A. (Eds.): *The Methods and Materials of Demography*. Second edition. San Diego: Elsevier Academic Press. Chapter 15. Pp. 371–405.

[7] Kapitány Balázs (Szerk.)(2015): *Demográfiai fogalomtár*. Budapest: KSH Népeségtudományi Kutató-intézet. 2015 www.demografia.hu/tudastar/fogalomtar

[8] Faragó Miklós (2011): Pari-tásfüggő összetett termékenységi mutatók Magyarországon és különbségeik dekompozíciója. *Közgazdasági Szemle*. LVIII. évf., 2011. november; Pp. 970–993.

[9] Berde Éva–Németh Petra (2015 június): A termékenységi arányszám kiszámításának külön-böző módszerei. *Köz-Gazdaság X*. évfolyam 2. szám.



[1] L. Rédei Mária
(2001): *Demográfia*.
Budapest: ELTE
Eötvös.

[7] Kapitány Balázs
(Szerk.)(2015): *De-
mográfiai fogalom-
tár*. Budapest: KSH
Népességtudományi
Kutatóintézet. 2015
[www.demografia.hu/
tudastar/fogalomtar](http://www.demografia.hu/tudastar/fogalomtar)

[11] Andersen, Paul:
Bozeman Science;
*Human Population
Dynamics*. [https://
www.youtube.com/
watch?v=DqKg5r
WlpEo](https://www.youtube.com/watch?v=DqKg5rWlpEo) (Közzététel:
2015. okt. 5.)

Nyers (általános) halálozási arányszám (még a halálozási ráta kifejezés is használatos)
(*CDR; crude death (mortality) rate*): ezer lakosra jutó halálozások száma az évközépi
népességre számítva; (3) egyenlet.

$$\text{Nyershalálozási arányszám} = \frac{\text{Az adott évi halálozások száma}}{\text{Évközi népesség száma}} \cdot 1000 \rightarrow \text{CDR} = \frac{D}{N} \cdot 1000 \quad (3)$$

Nem csak egy évre, hanem hosszabb periódusra (5–10 évre) is kiszámolható, ek-
kor az éves nyers halálozási arányokat az évek számával kell súlyozni. A mutató kü-
lönösen érzékeny a teljes népesség korösszetételére. Ebből adódóan országok közötti
összehasonlításra csak korlátozott mértékben alkalmas. Az összehasonlíthatóságot
ilyen esetben standardizálással biztosítjuk. [1, 7, 11]

Mivel a halálozás nemenként különbözik, a korszpecifikus halálozási arányszá-
mokat a nőkre és a férfiakra általában külön-külön készítik el és publikálják; (4. a;
b) egyenlet.

$$\text{CDR}_i^F = \frac{D_i^F}{N_i^F} \cdot 1000 \quad (4.a)$$

$$\text{CDR}_i^M = \frac{D_i^M}{N_i^M} \cdot 1000 \quad (4.b)$$

NÉPESEDÉSI ELMÉLETEK ÉS MODELLEK

A népesség számának alakulását az élveszületések és a halálozások, valamint a be-
vándorlások és kivándorlások számának alakulása határozza meg. Ezek a paramé-
terek az időben folyamatosan változnak. Ennek megfelelően a népesség számának
alakulása a tényezők figyelembevételével határozható meg; (5) egyenlet:

$$N_{t+1} = N_t + B_t - D_t + I_t - E_t \quad (5)$$

A zárt népesség esetén, illetve, ha elhanyagoljuk a be-és kivándorlást, akkor a
következő (6) egyenlettel leírt alapösszefüggést kapjuk.

$$N_{t+1} = N_t + B_t - D_t \quad (6)$$



A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

A fenti összefüggés felhasználásával további népességmodellek vezethetők le. Amint az előző alfejezetekben bemutatam, a demográfiai folyamatokat számtalan mutatószámmal, illetve matematikai eszközzel jellemezhetjük. Természetesen ezek egymástól nem függetlenek. A pillanatnyi népességszám csak az egyik jellemzője. Ez hosszú, akár évszázados folyamatok hatásainak lenyomata. A két generációval korábbi egyéni és társadalmi döntések határozzák meg a jelenleg népességi jellegzetességeit: az adott területi jellemzőket, a népsűrűséget, a kormegoszlást és a nemi arányokat. Ezek a számok képezik a jövőre vonatkozó népességbecslések alapjait is. [11]

Malthus- és Verhulst-modellek

A népesedésre vonatkozó biológiai elmélete szerint a népesedést szükségszerűen korlátozza az élelmiszer. A népesség mindig növekszik, ahol bőséges az élelmiszer, hacsak nem gátolja valami igen hatalmas és szembeszökő akadály. Megállapítása szerint a népesség, ha nincs gátolva, mértani haladvány szerint szaporodik, ugyanakkor az élelmiszerek előállítása csak számtani haladvány szerint növekedhet.

A népesség mértani sorozat szerinti növekedése a (4) egyenletből is megkapható, ha a nyers születési és halálozási arányszám időben lassan változik, tulajdonképpen állandónak tekinthető. E két mutatószám különbsége adja az úgy nevezett változási arányt (r); (7) egyenlet: [7, 12]

$$r = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = \text{CBR} - \text{CDR} = \frac{B_t - D_t}{N_t} \quad (7)$$

Ha a népesség számának valamilyen kezdeti, hipotetikus időpontban N_0 -nak vesszük, akkor a t -edik időpontban a népesség számát a mértani haladvány szerint a következő (8) egyenlet adja. [12]

$$N_t = N_0(1+r)^t \quad (8)$$

Ezt az összefüggést használja a KSH is az átlagos évenkénti szaporodás, illetve fogyás számítására, azaz változási arány becslésére; (9) egyenlet. [13]

[7] Kapitány Balázs (Szerk.)(2015): *Demográfiai fogalomtár*. Budapest: KSH Népeségtudományi Kutatóintézet. 2015 www.demografia.hu/tudastar/fogalomtar

[11] Andersen, Paul: Bozeman Science; *Human Population Dynamics*. <https://www.youtube.com/watch?v=DqKg5rWLpEo> (Közzététel: 2015. okt. 5.)

[12] Donovan, T. M.–Welden, Ch. W. (2002): *Spreadsheet Exercises in Ecology and Evolution*. Sunderland, Massachusetts USA: Sinauer Associated, Inc.

[13] KSH: Népszámlálás 2011 – Módszertani megjegyzések, fogalmak. www.ksh.hu/nep-szamlalas/docs/modszertan.pdf



[2] Polónyi István (2002): *Oktatás gazdaságtana*. Budapest: Osiris. <http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/oktatas-gazdasagтана/адatok.html>

[12] Donovan, T. M.–Welden, Ch. W. (2002): *Spreadsheet Exercises in Ecology and Evolution*. Sunderland, Massachusetts USA: Sinauer Associated, Inc.

$$r = \sqrt[t]{\frac{N_t}{N_0}} - 1 \quad (9)$$

A fenti egyenletek a Malthus-modell diszkrét alakját adják, amelyet a szakirodalomban geometriai vagy mértani növekedési modellnek is neveznek. [12]

Ha a népesség számának alakulását folytonos és egyszerűen differenciálható függvényként kezeljük, akkor az (5) egyenletet úgy írható fel, hogy a népességszám-változás sebességének, (népességfüggvény idő szerinti első deriváltjának) és a népesség hányadosának az értéke egy állandó lesz. Ennek alapján Malthus elképzelése úgy is megfogalmazható, hogy a populáció nagyságának megváltozása arányos annak pillanatnyi nagyságával. Matematikai formában ezt a (10) egyenlettel megadott közönséges elsőrendű differenciálegyenlet fejezi ki:

$$\frac{dN}{dt} = \rho \cdot N(t) \quad (10)$$

A differenciálegyenlet kezdeti feltétele pedig megadja, hogy a megfigyelés kezdeti (nulladik) időpontjában mennyi volt a populáció létszáma; $N(t = 0) = N_0$.

A differenciálegyenlet megoldása exponenciális növekedést ad; (11) egyenlet:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\rho \cdot t} \quad (11)$$

A (10) és (11) egyenletek a Malthus-modell folytonos alakját adják, amelyet a szakirodalomban exponenciális növekedési modellnek nevezik. [12, 2]

A népesség és az erőforrások kapcsolatának ezen klasszikussá vált modellje szerint az erőforrások határozzák meg a népesedést. Mivel az elsődleges erőforrás az élelmiszer, a népesség száma a rendelkezésre álló élelem mennyisége által megengedett mértékig növekszik.

Pierre-François Verhulst (1804–1849) belga matematikus 1838-ban tovább fejlesztette Malthus modelljét, amely lehetővé teszi, hogy figyelembe vegyük a populáció egyedei közötti erőforrásokért folytatott belső versenyt. A növekedés zárt környezetben, korlátozott erőforrások mellett folyik, amely visszahat a növekedésre és akadályozza azt. Az adott rendszer tehát jól jellemezhető a környezet eltartóképességével. [12]



A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

Ezt a szakirodalomban logisztikus modellnek is nevezik. Ez a modell a Malthus-modelljéből is származtatható olyan módon, hogy a születési ráta csökkenő módon, és a halálozási ráta növekvő módon arányos a népesség számával, (12.a) és (12.b) egyenlet:

$$\text{CBR} = b_0 + b_1 \cdot N_t \quad (12.a)$$

$$\text{CDR} = d_0 + d_1 \cdot N_t \quad (12.b)$$

A fenti egyenleteket a (6) egyenletbe helyettesítve a változási arány következőképpen számolható; (13) egyenlet:

$$r(N) = b(N) - d(N) = b_0 - d_0 - (b_1 - d_1) \cdot N = (b_0 - d_0) \cdot \left(1 - \frac{b_1 - d_1}{b_0 - d_0} \cdot N_t \right) \quad (13)$$

Amikor a változási arány nullává válik, azaz a növekedési és a halálozási ráta egyenlőségéből adódik a környezet eltartóképessége; (14) egyenlet:

$$r(N) = 0 \rightarrow b(N) = d(N) \rightarrow K = \frac{b_0 - d_0}{b_1 - d_1} \quad (14)$$

A fenti egyenletből adódik a Verhulst-modell diszkrét alakja; (15) egyenlet: [12]

$$\frac{\Delta N_t}{N_t} = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = r_0 \cdot \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \quad (15)$$

A Verhulst-modell folytonos alakját pedig az alábbi differenciálegyenlettel lehet felírni; (16) egyenlettel:

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (16)$$

A fenti differenciálegyenlet a megoldását a szokásos kezdeti feltételek mellett az alábbi logisztikus függvényt adja; (17) egyenlet: [12]

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) \cdot e^{-\rho_0 \cdot t}} \quad (17)$$



[14] Jensen, A. L. (1995): Simple density-dependent matrix model for population projection; *Ecological Modelling* 77. Pp. 43–48.

Kohorsz-komponens módszer; Leslie-modell

Ez a módszer kor szerinti arányszámokkal, valószínűségekkel dolgozik. A születésszámot a nők életkora szerinti általános korszpecifikus termékenységi arányszámok és a női népességszámok szorzatösszegeként állítjuk elő. A halálozások kor szerinti számát pedig az általános korszpecifikus elhalálozási valószínűségek és a kor szerinti népességszámok szorzataiból becsüljük. (Általában az arányszámokat, valószínűségeket egy adott év ismert adataiból számítják, feltételezve, hogy ez lesz érvényben a következő időszakban is.)

A kohorsz-komponens módszer egyik matematikai interpretációja az úgynevezett Leslie-modell. Ez a női populáció korcsoportokra osztható részét vizsgálja, és ennek az időbeli változását számítja ki.

A $t+1$ -edik időpontban megszületett női egyedek száma kiszámítható t időpontban női korosztályok egyedszámának és a lányszülés korszpecifikus termékenységi arányszámának szorzatösszegéből (értelemszerűen a nem termékeny korcsoporthoz tartozó ASFR-mutató nulla), (18.a) egyenlet: [14].

$$N_1(t + \Delta t) = \text{ASFR}_1^F(t) \cdot N_1(t) + \dots + \text{ASFR}_i^F(t) \cdot N_i(t) + \dots + \text{ASFR}_n^F(t) \cdot N_n(t) \quad (18.a)$$

A $t + \Delta t$ időpontban az $i+1$ kohorsz egyedszáma a t -edik időpontban i -edik kohorsz egyed egyedszámának és a kohorsz túlélési valószínűségének szorzatából számolható; (18.b)

$$N_i(t + 1) = p_i \cdot N_i(t) \quad i=2, \dots, n-1 \quad (18.b)$$

Ha a népességet n korcsoportra osztjuk, akkor egy n egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk, amely mátrix alakban a következőképpen néz ki; (19) egyenlet:

$$\mathbf{n}(t + \Delta t) = \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{n}(t) \quad (19)$$

Bizonyítható, hogy az Leslie-mátrixnak ($\mathbf{L}$) mindig van egy olyan pozitív sajátértéke, amelyet a szakirodalomban domináns sajátértéknek (λ_D) neveznek, és azt fejezi, ki, hogy az népességszám egy generációnyi idő alatt λ_D -szorosára változik.



A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

A Leslie-mátrix egy speciális alakú mátrix, ezért karakterisztikus polinomjának az együtthatói viszonylag könnyen meghatározhatók. A legmagasabb kitevőjű tagjának az együtthatója egy ($a_n=1$), a többi tag együtthatója a (20) egyenlettel megadott rekurzív képlettel kiszámítható:

$$a_{n-k} = \text{ASFR}_k^F(t) \cdot \prod_{i=1}^k p_i(t) \quad k=1 \dots n \quad (20)$$

A karakterisztikus polinomot pedig a (21) egyenlet adja:

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} - \dots - a_{n-k} \cdot \lambda^{n-k} - \dots - a_1 \cdot \lambda - a_0 \quad (21)$$

A modell további jellemzője, hogy ha paramétereket időben állandónak vesszük, és valamely t időpontban indítjuk a számítást, akkor $t_0 + k \cdot \Delta t$ időpontban közvetlenül is megkapható a népesség-korcsoport megoszlása; (22) egyenlet

$$\mathbf{n}(t + k \cdot \Delta t) = \mathbf{L}^k \cdot \mathbf{n}(t) \quad (22)$$

Tulajdonképpen a (22) egyenlet nem más, mint egy mátrixalakban felírt mértani sorozat, és teljesen analóg a (7) egyenlettel. A Malthus-moddal való rokonsága akkor válik még nyilvánvalóbbá, ha a (19) egyenletet következőképpen alakítjuk át:

$$\mathbf{n}(t + \Delta t) = \mathbf{n}(t) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(t) - \mathbf{n}(t) = \mathbf{n}(t) + (\mathbf{L}(t) - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}(t) \quad (23)$$

Az (23) egyenlet az (8) egyenlet mátrixos alakja. Ennek alapján a Leslie-mátrix és egységmátrix különbsége ($\mathbf{L} - \mathbf{I}$) megfelel az r változási aránynak. Nagyon nagy t esetén a Leslie-mátrix domináns sajátértékének (λ_D) t -edik hatványa arányos azzal a népességszámmal, amelyet az exponenciális növekedés ad; (24) egyenlet:

$$N(t) \approx \lambda_D^t = e^{r \cdot t} \quad (24)$$

A Leslie-modellnek az exponenciális növekedéssel való kapcsolata miatt csak korlátozottan használható a népességi folyamatok elemzésére és előrejelzésére. Leginkább csak rövidtávú, néhány lépéses iterációnál ad pontos becslést. Ezt a tényt a modell megalkotója is belátta úgy módosított modelljét, hogy alkalmas legyen a környezet eltartóképeségének kezelésére. Ezt azóta több kutató többféleképpen is módosította. Az egyik lehetőség például, ha az (23) egyenletet átalakíthatjuk úgy, hogy a növekedésért felelős ($\mathbf{L} - \mathbf{I}$) mátrixot beszorozzuk egy $\mathbf{D}(N(t))$ -vel jelölt úgynevezett sűrűségfüggő mátrixszal;



(25) egyenlet:

$$\mathbf{n}(t + \Delta t) = \mathbf{n}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{n}(t)) \cdot (\mathbf{L}(t) - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}(t) \quad (25)$$

Célok, módszer

Magyarországra is jellemző az az európai trend, hogy a nők későbbi életkorra halasztják a gyermekvállalást. A korszpecifikus termékenységi arányszámot (ASFR) grafikusán ábrázolva megkapjuk az úgynevezett korszpecifikus termékenységi görbét. 1990-ben a gyermekvállalási kor viszonylag homogén volt a női népesség körében, hiszen döntő többségüknek 21 és 25 éves korukban született gyermekük.

Célom volt, hogy megfelelő modellt találjak és ezáltal én is saját számítást tudjak végezni a népesség és a korcsoportok számának becslésére. A választásom egy az ökológiában gyakran használt modellre esett, amelyet Patrick Holt Leslie (1900–1974) dolgozott ki 1945-ben. A további szakirodalmi kutatások arra irányultak, hogy ezt a modellt a valóságnak megfelelő paraméterekkel töltssem fel, azaz megtaláljam a bemenő adatok szempontjából leghitelesebb forrásokat.

A Leslie-modell egyik hátránya, hogy időben nem változó termékenységi és halandósági paraméterek esetén az exponenciális növekedést adó Malthus-modellhez tart. Ezért valamilyen tudományosan megalapozott féket kellett a rendszerben tenni. Ezt a Verhulst-modell szolgáltatta, ennek a környezeti eltartóképességet kellett beépíteni a modellbe. Ezt önkényesen Leslie–Verhulst-modellnek neveztem. Így is tisztelgetve a két kutató munkássága előtt.

Vizsgálatok, téma kifejtése

A korcsoportok becslését először módosított Leslie-moddellel számoltam. Az eredeti modell csak a női népességgel számol. A nemi arányt 50%-osnak veszi, és becslésből adódó számokat meg kell szorozni, hogy megkapjuk a korcsoportokra vonatkozó népesség számot. A KSH adatai alapján, Magyarországon születéskor 100 nőre körülbelül 106 férfi jut.

Továbbá az is igaz, hogy a férfiak és nők halandósága eltér.

A Leslie-modellt úgy módosítottam, hogy ezeket a tényeket is figyelembe veszi. Ennek alapján módosulnak az (18.a) és (18.b) egyenletek további egyenletekkel egészülnek ki, amelyek az anyák által szült fiúgyermek számával számolnak; (24.a) egyenlet.



A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

$$N_1^M(t + \Delta t) = \text{ASFR}_1^M(t) \cdot N_1^F(t) + \dots + \text{ASFR}_i^M(t) \cdot N_i^F(t) + \dots + \text{ASFR}_n^M(t) \cdot N_n^F(t) \quad (26.a)$$

A fenti egyenlet vektor-mátrixos alakját a (21.b) egyenlet adja:

$$\begin{bmatrix} N_1^M(t + \Delta t) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^M(t) & f_2^M(t) & \cdot & \cdot & f_i^M(t) & \cdot & \cdot & f_n^M(t) \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1^F(t) \\ N_2^F(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ N_i^F(t) \\ N_{i+1}^F(t) \\ \cdot \\ N_n^F(t) \end{bmatrix} = \mathbf{F}^M(t) \cdot \mathbf{n}^F(t) \quad (26.b)$$

A férfi népességre is igaz, hogy $t + \Delta t$ időpontban az $i + 1$ kohorsz egyedszáma a t -edik időpontban i -edik kohorsz egyed egyedszámának és a kohorsz túlélési valószínűségének szorzatából számolható; (27.a) egyenlet:

$$N_{i+1}^M(t + 1) = p_i^M \cdot N_i(t) \quad i=2, \dots, n-1 \quad (27.a)$$

A (27.a) egyenlet mátrixos alakját a (27.b) egyenlet adja:

$$\begin{bmatrix} N_1^M(t + \Delta t) \\ N_2^M(t + \Delta t) \\ \cdot \\ \cdot \\ N_i^M(t + \Delta t) \\ N_{i+1}^M(t + \Delta t) \\ \cdot \\ N_n^M(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ p_1^M(t) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & p_2^M(t) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_i^M(t) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & p_{n-1}^M(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1^F(t) \\ N_2^F(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ N_i^F(t) \\ N_{i+1}^F(t) \\ \cdot \\ N_n^F(t) \end{bmatrix} = \mathbf{L}^M(t) \cdot \mathbf{n}^M(t) \quad (27.b)$$



[15] Magyar
statisztikai
évkönyv 2012.

A (26.b) és (27.b) egyenletek összeadásával határozható meg a férfi népesség korcsoportonként száma; (28) egyenlet:

$$\mathbf{n}^M(t + \Delta t) = \mathbf{F}^M(t) \cdot \mathbf{n}^F(t) + \mathbf{L}^M(t) \cdot \mathbf{n}^M(t) \quad (28)$$

A számításokhoz a női népességre felírt vonatkozó (19) mátrix egyenlettel Leslie-modellje nem módosult. A férfi népesség Leslie-modelljének mátrixos alakját a (28) egyenlettel adja.

A számításhoz felhasznált fiú és lányszületésekre vonatkozó korszpecifikus specifikus termékenységi arányszámot a [15] adataiból számoltam 5 évre vonatkoztatva.

1 táblázat. A módosított Leslie-modell számításához felhasznált fiú és lány ASFR-mutatók.

Anyai korosztály sorszáma; (i)	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Anyai korév intervalluma	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-
ASFR ^M	0,0461 92	0,1004 02	0,17971 6	0,19643 4	0,09545 8	0,01841 8	0,00058 1	0,04619 2
ASFR ^F	0,04357 7	0,0947 19	0,169544	0,185315	0,090055	0,017375	0,000548	0,043577

[15] adatai alapján saját számítás

A modell csak rövidtávú becslésre alkalmas, mert utána drasztikusan görbe. A további számításokhoz a sűrűségfüggő Leslie-modellt használtam. A női népességre vonatkozóan az (25) egyenletet használtam. A férfi népességre vonatkozóan a (28) egyenletet szintén sűrűségfüggővé alakítottam át; (29) egyenlet:

$$\mathbf{n}^M(t + \Delta t) = \mathbf{n}^M(t) + \mathbf{F}^M(t) \cdot \mathbf{n}^F(t) + \mathbf{D}(\mathbf{n}(t)) \cdot (\mathbf{L}^M(t) - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}^M(t) \quad (29)$$

A sűrűségfüggő mátrix $\mathbf{D}(\mathbf{N}(t))$ kiszámításánál a K környezeti korlátot szétoztottam a korcsoportok között. Azt tételeztem fel, hogy a népességszám a környezeti korlát közelében egyensúlyi állapotba kerül. Ekkor az úgynevezett harang alakú korfa alakul ki.



A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

A Leslie–Verhulst-modellből számolt aszimptotikus népességszám ehhez fog tartani. Ez alapján a sűrűségfüggő mátrix főátlójában lévő elemeket a következőképpen számoltam ki, módosítva a (30) egyenletet:

$$q_i(N_i(t)) = 1 - \frac{N_i(t)}{K_i} \quad (30)$$

A szakirodalmak [15; 16] alapján egyensúlyi korfához tartozó becsült férfi és női kormegoszlással számoltam.

Eredmények

Először az előző fejezetben ismertetett modelleket illesztettem az 1980–2016-os népességadatokra. A Malthus modell exponenciális függvényét a (31) egyenlet adja:

$$N(t) = 10709 \cdot e^{-0,023(t-1980)} \quad (31)$$

A modell változási aránya $\rho = -0,023$ -nak számoltam és a regressziós illesztés pontosságát jellemző determinációs együttható $R^2 = 0,9874$ -nak adódik. Ez alapján azt lehet mondani, hogy az exponenciális illesztés középtávú előrejelzésre alkalmas. Mint ahogy azt 1. fejezetben ismertettem a modell hátránya, hogy nincs korlátja, azaz növekedése, illetve csökkenése végtelenbe tart. Arra viszont megfelelő, hogy a további modellek paramétereikhez jó kiindulási alapot adjon.

Az adatsorra illesztett Verhulst-modellből származó logisztikus függvényt a (32) egyenletben mutatom be:

$$N(t) = \frac{62\,158}{1 + 0,01993 \cdot e^{-0,0199t}} \quad (32)$$

A modellből a változási arányt $\rho = -0,0199$ -nek és a környezet eltartóképességét $K = 65\,158$ ezer főnek számoltam, és determinációs együttható $R^2 = 0,9882$ -nek adódik.

A fenti modellek jól írják le a népesség összlétszámának és annak középtávú becslésére is alkalmasak, viszont az egyes korcsoportok népesség számának becslésére jellegükénél fogva nem képesek.

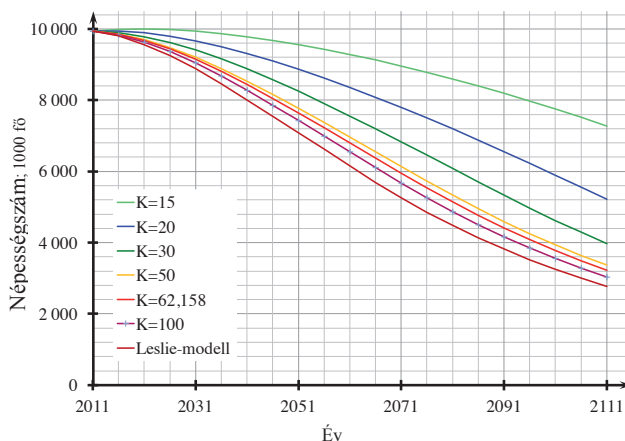
[15] Magyar statisztikai évkönyv 2012.

[16] Hobbs, Frank: Age and Sex Composition. In: Siegel, J. S.–Swanson, D. A. (Eds.): *The Methods and Materials of Demography*. Second edition. San Diego: Elsevier Academic Press. Chapter 7. Pp. 125–173.



A 1. ábra azt mutatja, hogy viszonyul egymáshoz a Leslie-modell és a Leslie–Verhulst-modell különböző környezeti eltartóképességre (15; 20; 30; 50; 62,158 és 100 millió) fő esetén. Ebből az ábrából is jól látszik, hogy a Leslie-modell az exponenciális növekedéssel rokon, amelynél végtelen a környezet eltartóképessége.

1. ábra. A módosított Leslie- és különböző környezeti eltartóképességű Leslie–Verhulst-modellek összehasonlítása.



Eredmények értékelése, következtetések

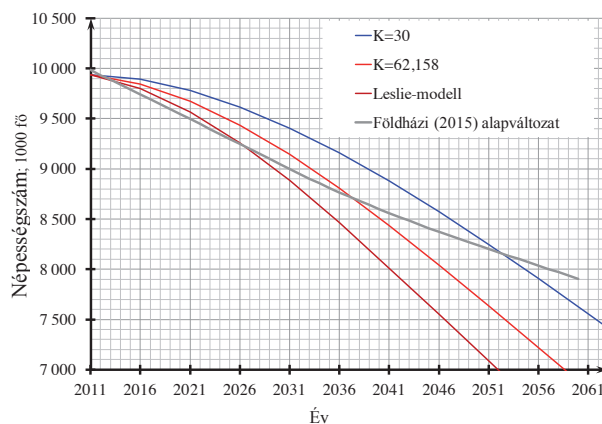
Az 1. ábrán különböző Leslie-modell és Leslie–Verhulst-modell két környezet-eltartóképességi hipotézissel készült számításokat hasonlítottam össze Földházi (2015) adataival. Ezek alapján az mondható, hogy a Leslie-modelllel történt becslésem körülbelül 2027-ig megegyezik a szakirodalmi becsléssel. Onnantól pedig a csökkenő környezeti eltartóképességi modellek egyeznek meg a szakirodalmi adatokkal. A Leslie–Verhulst-modell körülbelül 30 éves időtávra eredményesen használható. Ami viszont szembetűnő, hogy szakirodalom görbéje alulról domború (konkáv), a számításaim eredményeként kapott görbék pedig alulról homorúak (konvex). Az előbbinél a folyamat gyorsan indul (meredekebb a görbe) és azután lassul le, az utóbbi pont fordítva viselkedik. Ennek egyik oka, hogy lehet, hogy a szakirodalmi és az általam használt paraméterek és adatok hasonlóak, de kicsit más megközelítésben kezelik a folyamatot. A szakirodalmi



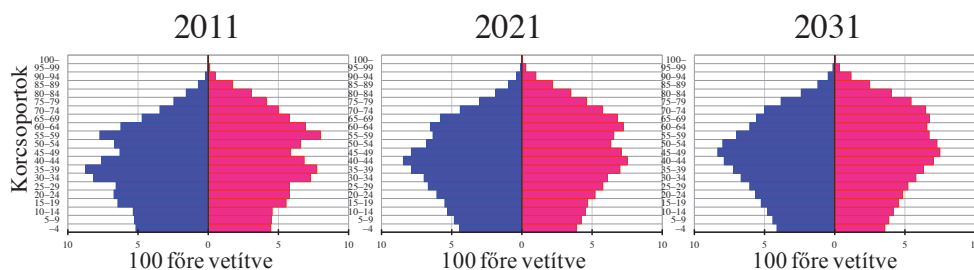
A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

modell egy exponenciálisan lecsengő függvényt ad viszonylag gyors lefutási idővel (100 éves). A Leslie- és még inkább Leslie-Verhulst-modellből adódó függvénynek az inflexióspontja körülbelül 200–500 év, ezután lesz csak konkáv a függvény. Ez a modellek sajátsága, a matematikában ezeket szigmoid függvény-családnak nevezik.

2. ábra. A saját számításaim és a szakirodalmi adatok összehasonlítása.

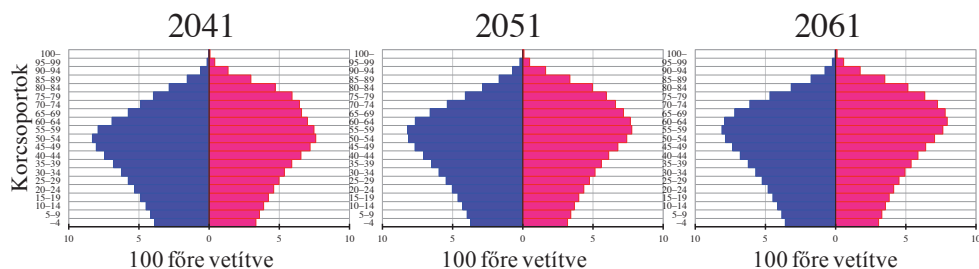


3. ábra. A Leslie-Verhulst $K=30$ modell által előrejelzett korfák; 2011-2061.





Kozsely Gábor



Forrás: Saját számítás és szerkesztés

A továbbiakban 30 milliós környezeti eltartóképességű ($K=30$) modellből adódó eredményeket ismertetem. A 3. ábrában modell által számolt korfákat mutatom be.

A modellből adódó korfák visszaadják azt a szomorú tény, hogy változatlan termékenységi és halandósági viszonyok mellett Magyarország népessége egy előregedő és fogyó trendet fog követni. A népesség-korcsoportok számának időbeli lefolyását pedig a 2. ábrában mutatom be. A szakirodalmi közölt és a saját becslésem csak a 70-en túli népesség számában mutat különbséget. A szakirodalom szerint ez egy folyamatos növekvő korcsoport, amíg a saját számításaim szerint 1,6 millió főnél stagnálni fog. Az eltérés a két modell adottságaiból erednek. A Leslie–Verhulst- $K=30$ modellben ez az 1,6 milliós szám az erre a korcsoportra bontott környezeti eltartóképesség, ezért nem lépi át ezt a számot, illetve a modell csak aszimptotikusan közelíti ezt a számot.

Összefoglalás

A számítási modellek hasonlóan írják le a népesség rövid- és középtávra vonatkozó népességszámot, illetve a nem- és koreloszlást. A számításokat azonos korszpecifikus termékenységi mutatóval és halandósági viszonyokkal. Természetesen a megfelelő, ha mindkét bemenő paraméternél vannak pontosabb, illetve flow-jellegű adatok (például becslőfüggvény, amely leírja ezek évenkénti változását), akkor az adatok pontosíthatók.

A számításokkal a következő eredményeket kaptam: A szakirodalmi adatokkal összehangban Magyarország népessége egy előregedő és fogyó trendet fog jelez a következő évtizedekre, ami jelentős kihatással lesz az iskoláztatásra, a munkaerő piacra, és nyugdíjrendszerre is.



A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

Összességében ez a tény a szakképzett munkaerő iránti munkaerőpiaci kínálat jövőbeni alakulásával kapcsolatos gazdasági stratégiák felülvizsgálatát is igényli.

Köszönetnyilvánítás

Itt ragadom meg az alkalmat, hogy köszönetet mondjak mindazoknak, akik segítségükkel hozzájárultak dolgozatom elkészítéséhez.

Őszinte tisztelettel köszönöm meg Pergel Dóra kolléganőmnek a tanulmány készítése során tett számtalan hasznos észrevételét és nem utolsósorban végtelen türelmét.



Élménypedagógiai játékok konstruálása tanulást támogató matematikai nyári tábor délutáni foglalkozásaihoz

* Miskolci Egyetem,
Matematikai Intézet
E-mail: mathszil@uni-miskolc.hu

** Miskolci Egyetem,
Matematikai Intézet
E-mail: matka@uni-miskolc.hu

*** Miskolci Egyetem,
Matematikai Intézet
E-mail: matszisz@uni-miskolc.hu

Összefoglalás: Ez év nyarán a Miskolci Egyetemen kísérleti jelleggel olyan matematikai felkészítő nyári táborban vehettek részt a műszaki, illetve informatikai képzési területre felvételt nyert fiatalok, ahol lehetőségük nyílt az egyetemi tanulmányaikhoz releváns matematikai alapok felfrissítésére, az esetleges hiányosságok feltárására, valamint ezek azonnali pótlására. A kötetlen légkörű matematikai készségfejlesztő foglalkozások során korszerű oktatási módszerek alkalmazását teszteljük. Az elméleti anyag mélyebb beépülésének érdekében inkluzív didaktikai alapokon nyugvó élménypedagógiai játékokat fejlesztettünk a hétnapos nyári tábor délutáni foglalkozásaihoz. Cikkünkben a nemformális pedagógia szellemében kidolgozott matematikai fejlesztőjátékaink egyikét mutatjuk be, amelyeket célzottan 4–8 fős csoportokkal történő hatékony készségfejlesztés céljából hoztunk létre.

Kulcsszavak: Élménypedagógiai játék; inkluzív didaktika; matematikai készségfejlesztés.

Abstract: In the University of Miskolc a summer mathematical camp is organized on an experimental basis for the admitted students in engineering and information science. The summer camp provides an opportunity for refreshing the students' mathematical knowledge, for exploring of potential deficiencies and for replacing them immediately. We test up-to-date pedagogical methods in the course of occupations where the mathematics skills are developed in an informal atmosphere. In order to engrave the theoretical knowledge we elaborated experiential education games based on inclusive didactics for the afternoon sessions of the summer camp. In this paper we present one of our mathematical developing games which is created in the spirit of non-formal pedagogy and definitely suitable for efficient skill development in groups with 4-8 members.

Keywords: Experiential education game, inclusive didactics, mathematics skill development.



Bevezető

A felsőoktatás reformjának következtében egyre hangsúlyosabb szerep jut a hallgatóközpontú oktatáshoz kapcsolódó tanulási stratégiáknak és módszereknek. A korszerű tanulási és tanítási folyamatban előtérbe került a hallgatók aktív szerepvállalásának fontossága a saját tanulási folyamatuk megtervezésében és kivitelezésében, tehát nemcsak az oktató, hanem a hallgató is aktív résztvevőként jelenik meg [1]. Megváltoztak az oktatói munkával kapcsolatos elvárások is, a tudásátadó szerep prioritása átértékelődött; segítségnyújtó, támogató, azaz mentori feladatokkal bővült a feladatkör. A haladó szellemiségű oktató kreatív, reflektáló, együttműködő, proaktív, ugyanakkor értékkövető. Fel tudja mérni a hallgatók képességeit és azt is, hogy milyen előzetes ismeretekkel rendelkeznek. Mindezek figyelembevételével alakítja ki az oktatáshoz a lehető legjobb módszert [2]. Számos publikáció emeli ki a kooperatív pedagógia tanítási-tanulási stratégiáinak sikerességét [3-6]. Bizonyított, hogy a közös gondolkodás és a csapatmunka segítségével fejlődik a csoportkohézió, amely jelentősen támogatja a tanulási folyamatok eredményességét megfelelő tanulási környezetben. Az innovatív módszereknek az oktatási folyamatba történő integrálása nyilvánvalóan azt célozza, hogy a hallgatók motivációs szintje emelkedjen, a tanulási folyamatban való részvétel pedig sikeressé váljon. A hallgatóközpontú gyakorlati órák során, az eredményes tanulás érdekében, a tanulók nagyobb felelősséggel tartoznak saját maguknak is, vagyis nem lehetnek csupán passzív befogadók.

A felsőoktatási képzések fontos faktora a gyakorlatban jól alkalmazható tudás, amelyet a hallgató már a képzése folyamán elsajátít. A kimeneti kompetenciákra történő fókuszálás a műszaki-informatikai képzési területen is igényként jelentkezett, azonban a felsőoktatásba kerülő fiatalok jelentős része a középiskolában felhalmozott hiányosságai miatt hátránnyal indul már a tanulmányok megkezdésekor. Az oktatóknak tehát arra is megoldást kell találniuk, hogy a lemorzsolódást megelőzzék.

1] Nyilatkozat a minőségi felsőoktatásért 2018. június 27. [Online]. Elérhetőség: <https://tka.hu/hir/10126/nyilatkozat-a-minosegi-felsooktatasert>

[2] Nikitscher Péter (2016): *Milyen a jó pedagógus? – elvárások, szerepek, kompetenciák az empirikus kutatások tükrében*. <https://ofi.hu/publikacio/milyen-jo-pedagogus-elvarasok-szerepek-kompetenciak-az-empirikus-kutatasok-tukreben#main>

[3] Bárdossy Ildikó–Dudás Margit–Pethőné Nagy Csilla–Priskinné Rizner Erika (2003): *Kooperatív pedagógiai stratégiák az iskolában*. Pécs: Pécsi Tudományegyetem BTK Tanárképző Intézet.

[4] Kagan, S. (2004): *Kooperatív tanulás*. Budapest: Ökonet.

[5] Arató Ferenc–Varga Aranka (2008): *Együtt-tanulók kézikönyve - Bevezetés a kooperatív tanulásszervezés rejtelmeibe*. Budapest: Educatio Társ. Szolg. Kht.

[6] Orbán Józsefné (2009): *A kooperatív tanulás: szervezés és alkalmazás*. Pécs: Orbán&Orbán Bt.



[7] Kollár Judit (2018): *Tanulásegítő tréningek?! In: Dobjánné–Antal Elvira–Nagy Péter (Szerk.): Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 42. Országos Konferenciája MAFIOK 2018: Konferencia absztraktok, Kecskemét: Neumann János Egyetem GAMF Műszaki és Informatikai Kar.*

[8] Bakonyvári Dávid–Bodnár Gabriella–Szilágyi Brigitta (2017): ZERO2HERO – Az alternatív felzárkóztatás. *Opus et Educatio*. Vol 4. No 3. Pp. 250–275.

[9] Sain Márton (1978): *Matematikatörténeti ABC*. Budapest: Tankönyvkiadó.

A félévközi felzárkóztatási kísérletek nem bizonyultak hatékonyak [7, 8], azonban a felvételt nyert hallgatók intenzív, nyári tábor keretei között történő készségfejlesztését a korábbi tapasztalatok alapján reménytelinek látjuk. A tematikus tábor matematikai készségfejlesztő foglalkozásaihoz olyan élmény-pedagógiai játékokat dolgoztunk ki, amelyek alkalmasak egy-egy releváns témakör esetén a hiányosságok feltérképezésére, valamint hathatós eszközei lehetnek az ismeretek átadásának, megvalósítva ezáltal a saját ütemben történő tanulás folyamatát. Cikkünkben a logaritmus fogalmához kapcsolódó játékunkat mutatjuk be.

A mumus logaritmus

A logaritmus szükségességét a 16–17. században kezdték felismerni a matematikusok. A legfőbb cél ekkor az volt, hogy ne kelljen nagy számokat összeszorozni és osztani egymással, ehelyett összeadásokat és kivonásokat tartalmazó képletekre törekedtek. Az alapgondolat azonban már az ókorban megjelent a számtani és mértani sorozatok valamilyen módon való egymáshoz rendelésének kapcsán [9].

A logaritmus fogalmával általában a 11. évfolyamon találkozunk a középiskolások. A Nemzeti Alaptanterv két helyen említi a logaritmust. Először a gondolkodás fejlesztése témakörön belül találkozhatunk vele, *Az aritmetikai műveletek újraértelmezése, kiterjesztése, új műveletek értelmezése (hatvány, gyök, logaritmus) témánál. Említést nyer továbbá az Ismeretek alkalmazása a gyakorlati életben és más tantárgyak keretében (pl. százalék, kamatos kamat, terület-, felszín-, térfogatszámítás, relatív gyakoriság, valószínűség, logaritmus függvény) témakör esetén is, amelyet számos fejlesztési területhez lehet hozzákapcsolni.*

Gondolhatunk itt például a térben és időben való tájékozódáshoz, tekintettel arra, hogy az exponenciális és logaritmus folyamatok az életben is előfordulnak, valamint a megismeréshez, a problémamegoldáshoz, és az ismeretek rendszerezéséhez nélkülözhetetlen.

Számos gyakorlati példán keresztül szemléltethető a fogalom, például a radioaktív izotópok bomlásával kapcsolatos számításokkal, kormeghatáro-



zással, a légnyomás változásának leírásával, a fény folyadékban terjedésével, a baktériumok szaporodásával, tavirózsás feladatokkal, gazdasági példákkal és még hosszan sorolhatnánk.

A kerettantervben a logaritmus függvény a 11. évfolyam tananyagában szerepel a *Számтан, algebra*, illetve a *Függvények, sorozatok* témakörön belül. A logaritmus tanítása, a fogalom bevezetése előkészületeket igényel. A hatványozás alapfogalmaival, a hatvány- és gyökfüggvények tulajdonságaival, a törtkitevőjű és irracionális kitevőjű hatványokkal kapcsolatos ismeretek elengedhetetlenül szükségesek, így felelevenítésük nélkülözhetetlen. Az exponenciális függvény tárgyalása, valamint az exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek témakör feladatainak megoldása előzi meg általában a logaritmus fogalmának bevezetését. Többféle megközelítéssel építhető fel a kitevő keresésének értelmezése. A logaritmusfüggvényt és az azonosságokat, valamint a logaritmusos egyenleteket, egyenletrendszereket, egyenlőtlenségeket ezt követően tartalmazza a tananyag.

Tapasztalataink szerint alapvető probléma, hogy a definíció nem rögzül, nem válik készséggé. Ezt a számológép, valamint a függvénytáblázat használata is visszaveti. Gondoljunk az alábbi, középszintű érettségien is előforduló feladatokra:

– Melyik a nagyobb: $A = \sin \frac{7\pi}{2}$ vagy $B = \log_2 \frac{1}{4}$? (2007. október 25.)

– Adja meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét! (2009. május 5.)

– Melyik a nagyobb: $A = \lg \frac{1}{10}$ vagy $B = \cos 8\pi$? (2011. május 3.)

Ezek a példák számológép használatával lényegében gondolkodás nélkül megoldhatók, a definíció ismerete nem szükséges, a számológép funkcióival kell csupán tisztában lenni. Az alábbi, 2011. október 18-ai középszintű érettségi vizsga egyik példájának megoldásához viszont még számológépre sincs szükség:

– István az $x \rightarrow \log_1 x$ ($x > 0$) függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).

Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

A) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.

B) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz -2 -t rendel.

C) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1.



[10] Árvai-Homolya, Szilvia–Lengyelne Szilágyi Szilvia (2017): Matematika emelt szintű érettségi vizsgák elemzése az informatikai és műszaki alapképzési szakokon elvárt matematikai tudásanyag szempontjából. In: Talata István (Szerk.): Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája MAFIOK 2017. Budapest: Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar. Pp. 79–87.

1. ábra. A 2011. október 18-ai középszintű érettségi vizsga 10. feladatának mellékelt ábrája.



Az azonosságok használatát ellenőrző feladatok esetén is találkozunk meglepően egyszerű kérdéssel, amelyre a válasz a függvénytáblázatból rögtön megadható:

– Mekkora x értéke, ha $\lg x = \lg 3 + \lg 25$? (2006. február 21.)

Természetesen összetettebb, gondolkodást igénylő feladatok is előfordultak a logaritmus függvénnyel kapcsolatban az érettségi vizsgákon, azonban a statisztikák szerint ezek száma meglehetősen alacsony [10].

A 18/2016. EMMI-rendeletben megfogalmazott képzési és kimeneti követelményekkel összhangban a Miskolci Egyetem valamennyi műszaki és informatikai alapképzési szakán a kötelezően teljesítendő tárgyak között szerepel – általában két féléven keresztül – analízis témakörű kurzus.

Az analízis tárgyak sikeres teljesítéséhez elengedhetetlenül szükségesek a középiskolában szerzett biztos matematikai alapok. Ezek hiányában a hallgatók lényegesen nehezebben tudják megoldani a zárthelyi dolgozatokban, illetve a vizsgadolgozatokban kitűzött feladatokat. A logaritmus fogalmának ismerete és magabiztos kezelése valamennyi matematikai kurzus esetén alapvető, ezért célszerűnek láttuk ennek a témakörnek a játékosítását.



Kártyajátékok az oktatásban

A játékok alkalmazásának fontossága elvitathatatlan az oktatásban, különös tekintettel arra, hogy általa a kevésbé jó képességű tanulók is sikerélményhez juthatnak, észrevétlenül sajátíthatják el azokat az ismereteket, amelyekkel a hagyományos frontális oktatás során gondjuk akadt. Természetesen a játékos tanulás a jó tanulók számára is lényeges, hiszen – többek között – fejleszti a logikus gondolkodást, a stratégiai szemléletet, a problémamegoldó készséget. Ezt a véleményt erősíti meg Johan Huizinga holland filozófus elmélete, aki az egész emberi társadalom fejlődését, a kultúra és a tudomány eredményeit a homo ludens (a játészó ember, a játékos ember) természetére vezeti vissza. Azt a ma divatos irányzatot, mely során az egész oktatási tevékenységet játékos keretbe ágyazzák, illetve játékos elemeket visznek be az oktatási folyamatba, játékosításnak, idegen szóval gamificationnek nevezzük [11].

A matematikaoktatásban alkalmazott játékok tárháza széles, a sakk, a tábla-, társas- és kártyajátékok, papír-ceruza játékok, mellett megjelenik a LEGO, mint innovatív készségfejlesztő eszköz, valamint vannak, akik a mai trendek szellemében csak IKT-környezetben tudják értelmezni a játékosítást.

A dolgozat keretein belül egy kártyajáték matematikai alkalmazására mutatunk példát. Golick [12] művében számos olyan képességet sorol fel, melyet kártyajátékok közben alkalmazunk, ezáltal ezen képességek fejlődnek:

- gyors verbális vagy motoros reakció,
- valószínűségi gondolkodás,
- számfogalom,
- vizuális diszkrimináció,
- ritmusérzés,
- nyelvfejlődés,
- motoros, szociális készségek, képességek,
- számsor ismerete,
- számolás,
- vizuális és auditív memória.

Sok népszerű kártyajáték fejleszti a fejben számolás képességét, gyakori elem a stratégiaalkotás, hiszen sok esetben nem mindegy melyik lapot játsszuk ki és melyiket tartogatjuk későbbre.

[11] Tóthné Szalontay Anna–Wintsche Gergely (2016): Játékos tanulás. *Új Köznevelés*. 72. évfolyam 8. szám. Online elérhetőség: <https://folyoiratok.ofi.hu/uj-koznevelos/jatekos-matematika>

[12] Margie Golick (1981): *Deal me in! The use of playing cards in learning and teaching*. New York: J. Norton.



[13] Arató Ferenc–
Árvai-Homolya
Szilvia–Bagota
Mónika–Czapné
Makó Zita–Lengyelne
Szilágyi Szilvia et.al.
(2018): *A Logikaalapú
alprogram koncepció-
ja*. Eger: EKE Líceum.
P. 68.

A logikus gondolkodás fejlesztése mellett kártyázás közben fejlődnek a kommunikációs képességek (hiszen sok játékban megengedett a beszélgetés), a kooperáció, sőt a vitarendezés képessége is (pl. időben mondta-e az ellenfél, hogy „SOLO” vagy „makaó”). A kártyajátékok alaptulajdonsága, hogy bár viszonylag kevés lap van, de mégis több, mint amire könnyű lenne emlékezni, sokszor viszont előnyös, ha fel tudjuk idézni, mely lapok mentek már ki, így a játék fejleszti a memóriát is [13]. Az előzőekben felsoroltak alapján számos kártyajáték módosítás nélkül, az eredeti alapszabályokkal is remekül alkalmazható az oktatásban.

2. ábra. Kártyajátékok: Makao, SET, SOLO.



Az élménypedagógiai módszerek között a kártya tehát kiemelt jelentőséggel bír, pozitív hatást gyakorol a diákokra, észrevétlenül tanít, miközben könnyen hozzáférhető eszköz.

Közismert, hogy a mindenki számára elérhető magyar és francia kártya is kiválóan használható az oktatásban. Európában egyre több országban vezették be a bridzs oktatását az iskolákban, hiszen a fordulatos kártyajáték amellett, hogy megköveteli a társakkal történő együttműködést, a koncentrációt, fejleszti az emlékezőképességet, a gyors és logikus gondolkodást, kimutathatóan jóteknő hatással van az iskolai teljesítményre is.

A klasszikus kártyák alapjaira támaszkodva új játékok is konstruálhatóak, jó példa erre a getSmart norvég gyártó által fejlesztett játékok egyike. A „getSmart Linar Functions” kártyát elsősorban 13–14 éveseknek ajánlják, a játék célja a lineáris függvényekre vonatkozó ismeretek elmélyítése.



3. ábra. getSmart: „Lineáris függvények”.



Forrás: <http://getsmart.no/en/products>

A már jól ismert játékokon túl azonban évről évre számos új termék is megjelenik a piacon, melyek a játékelmény mellett – a fentebb említett tulajdonságok okán – hatékonyan alkalmazhatóak az oktatásban is. A stratégiai kártyajátékok szintén átalakíthatóak a saját „igényeinkre”, erre példa a következőkben bemutatandó Halli Galli logaritmus témakörben történő felhasználása.

Log Halli Galli

AZ ALAPJÁTÉK

A Halli Galli játékcsaládhoz tartozó kártyajátékok közös jellemzője a dinamizmus. Gyorsaságot, figyelmet és ügyességet igénylő, alapvetően koncentrációfejlesztő játékokról van szó. Haim Shafir 1990-ben megjelent játéka 2–6 fő részére nyújt kiváló szórakozást kicsiknek és nagyoknak egyaránt. Az alapjáték kezdeti sikereire alapozva mára már több változatban is elérhető játékról van szó: *Halli Galli*, *Halli Galli Party*, *Halli Galli Extreme*, *Halli Galli Junior*.



[14] Blumberg, P. (2004): Beginning journey toward a culture of learning centered teaching. *Journal of Student Centered Learning*. 2(1). Pp. 68–80.

4. ábra. A Halli Galli játéksalád tagjai.



A játékszabályok nem mutatnak nagy eltérést, hasonló technikával játszható valamennyi kártyaparti. Egyszerűen, könnyen játszható játékokról lévén szó a szabályok gyorsan elsajátíthatók. A tanulási fázis ezeknél a játékoknál extrém rövid. Pozitív jellemzői miatt számos fejlesztő pedagógus használja a Halli Galli játékokat óvodás és kisiskolás korú gyermekeknél készségfejlesztő eszközként. A játékok nagy előnye, hogy egy parti kb. 10 percig tart, vagyis nagy lendületű, pörgős játékról van szó minden esetben. A játékmenet erősen épít a mintafelismerés képességére, valamint a játékosok gyors helyzetfelismerő képességére.

A 4 éves kortól 99 éves korig ajánlott játékot továbbfejlesztésre alkalmasnak gondoltuk, így készült el a logaritmus fogalmának mélyebb beépülését, valamint a fogalom helyes rögzülését támogató kártyajáték, amelynek a **Log Halli Galli** nevet adtuk. Az alapjáték kiválasztásánál figyelembe vettük, hogy a tanulóközpontú tanulás-szervezés már bizonyított. A fokozott hallgatói aktivitás jelentősen növeli a tanulási motivációt és az oktatással kapcsolatos elégedettséget, amely mindent összevetve hozzájárul a tanulási teljesítmény emelkedéséhez [14].

A JÁTÉK LEÍRÁSA

A Log Halli Galli-val egyszerre 4–8 játékos tud játszani. A standard kártyapakli 72 lapból áll. 70 kártyán logaritmusos matematikai kifejezés található, továbbá 2 kártyán mákvirág látható. 30 kiegészítő kártyát is tartalmaz a készlet, amely a differenciálás lehetőségét biztosítja, valamint a játék nehézségi szintjének variálását teszi lehetővé.



A 70 alapkártyán a logaritmus definíciója alapján könnyen számolható kifejezések kaptak helyet, például:

- $\log_2 4$; $\log_2 32$; $\log_3 1$; $\log_3 9$; $\log_5 25$; $\lg 10$; $\ln e^2$; stb.
- $\log_2 \frac{1}{4}$; $\log_2 \frac{1}{8}$; $\log_{\sqrt{3}} 3$; $\log_3 \sqrt{3}$; $\log_{\frac{1}{5}} 5$; stb.
- $\log_4 \log_2 2$; $\log_2 (2^5 - 2^4)$; $\log_3 \sqrt[3]{3}$; $\log_3 9 \cdot \ln 1$; $\lg \log_2 1024$; stb.
- $4^{\log_4 \frac{1}{4}}$; $2^{\log_4 1}$; $2^{\log_{13} 13}$; stb.

A 30 kiegészítő kártyán olyan kifejezések találhatók, amelyek fejben még számolhatók, de a logaritmus azonosságainak felhasználását is igénylik:

$$\lg 2 + \lg 5; 10^{\lg 2 + \lg 3}; \log_{12} 36 - \log_{12} 3; (\sqrt{10})^{4 \lg 2}; \text{ stb.}$$

Emellett 6 alapkártyát tartalmaz még a készlet és egy csengőre is szükség van a játékhoz. A játékidő kb. 25 perc.

Az alapkártyák kiosztásával kezdődik a játék, amely a logaritmussal kapcsolatos lényeges ismereteket tartalmazza: a definiáló összefüggést, a fontosabb azonosságokat, függvény grafikonokat és nevezetes értékeket. Ezt a kártyát minden játékos maga elé helyezi és szükség esetén tanulmányozhatja. Az alapjátékok szabályán nem változtattunk túl sokat, törekedtünk az egyszerűség megtartására.

A játékosok az asztal közepére, mindenki számára könnyen elérhető helyre teszik a csengőt. A kártyákat megkeverés után egyenlően szét kell osztani a játékosok között. 5 játékos esetén lesznek olyan játékosok, akik a játék elején több lapot kapnak, mint a többiek, de ennek kezdetben nincs jelentősége.

A játékosok egy lefordított paklit képeznek az átvett lapokból maguk előtt. A játékot például az a játékos kezdi, aki a legtöbb/legkevesebb pontot szerezte a matematika érettségén, de más szempont alapján is választható kezdő játékos.

Az éppen soron lévő játékos felfordítja a paklija legfelső lapját és azt a lefordított paklija és a csengő közé helyezi. A játékot rögtön folytatja a játékos baloldali szomszédja. A játékosok minden felfordított lapot a már korábban letett lapra tesznek, az 5. ábrán látható módon.



5. ábra. A lapok helyes lerakásnak módja.



Így minden játékos előtt egy felfordított pakli képződik, melynek csak a legfelső lapja látható. Azért, hogy a játékos ne kukucskáljon be a saját lapja alá, és így ne tegyen szert előnyre, a soron következő lapot mindig a felső sarkánál megfogva, magától kifelé fordítja fel, ahogy ezt a 4. ábra mutatja:

6. ábra. A kártyalapok felfordításának helyes technikája.



A kártyákon szereplő kifejezések értékét fejben ki kell számolniuk a játékosoknak és az alábbi három esetben kell csengetniük:

1. Ha legalább két kártyán ugyanaz a valós szám adódik értékként.
2. Ha a kártyákon szereplő kifejezések összege 0.
3. Rögtön csengetni kell, ha megjelenik a mákvirág.

7. ábra. Mákvirág lap.





Az a játékos, aki a fent leírt kártyakombinációk egyikének előfordulásakor a leggyorsabban csenget, lezár egy fordulót, így az összes felfordított lapot megnyeri. Jutalmul a megnyert lapokat a játékos lefordítva a saját paklija alá helyezi. Mielőtt ez megtörténik, igazolnia kell, hogy jogosan csengetett, vagyis meg kell mondania, hogy mely lapokon szerepel ugyanaz a valós szám értéként, illetve miért nulla a kártyákon található számok összege.

Amennyiben senki sem csenget, vagyis a három feltétel egyike sem teljesül, érdemes megbeszélni a lapokon lévő kifejezések értékét, ekkor mindenki bemondja az előtte fekvő kártyára írt valós számot. Az kezd, aki ebben a fordulóban először fordított fel lapot.

Ez a rész a játék tanulási fázisa, itt bátran lehet kérdezni is. Ezt követően a játékos új fordulót indít úgy, hogy felfordítja paklijának legfelső lapját. A játék alatt a játékosoknak kezeiket maguk előtt az asztalon kell tartaniuk és nem közvetlenül a csengő mellett. Nem szabad csengetni, ha a fent leírt feltételek nem teljesülnek. Ha egy játékos rosszul csenget, akkor a felfordított lapjait a csengő alá kell tennie. A játékosársak felfordított lapjai viszont az asztalon maradnak.

A játékot ekkor a játékos bal oldalán ülő szomszédja folytatja. Amikor egy játékos megnyer egy fordulót, akkor nemcsak a játékosársak felfordított lapjait veheti magához, hanem a csengő alatti lapokat is. Ha egy olyan játékos nyeri a fordulót, akinek van lapja a csengő alatt, akkor ebben az esetben a játékos csak a saját felfordított lapjait és a csengő alatti lapokat nyeri meg. A többi lap az asztalon marad a következő körre. Ha egy játékos már nem tud lapot felfordítani, mert lefordított lapjai elfogynak, kiesik a játékból. Az addig felfordított lapjai az asztalon maradnak, amíg egy játékosárs elnyeri azt. Akkor is kiesik a játékos, ha kétszer egymás után rosszul csenget.

Ebben az esetben a játékosnak az összes lapját a csengő alá kell tennie. A játéknak akkor van vége, ha már csak két játékos marad a játékban. Ők még a felfordított lapokért tovább játsszák a fordulót az első csengetésig, a következő szabályokkal:

- ha egy játékos az utolsó fordulóban jól csenget, akkor megkapja a felfordított lapokat;
- ha egy játékos az utolsó fordulóban rosszul csenget, felfordított lapjait játékosársra kapja meg, és a játék véget ér.

A játékot az a játékos nyeri, akinek a játék végéig a legtöbb lapja gyűlik össze. Egyforma lapszámok esetén a játékosok további fordulót játszanak, amiben eldöntik, ki a játék nyertese.



Árvai-Homolya Szilvia–Körei Attila–Lengyelne Szilágyi Szilvia

Összefoglalás

A kártyás játékoknak a matematikával való rendkívül szoros kapcsolata vitathatatlan, mert ez a sajátos ismeretszerzési módszer rendszerezésre, figyelemre és következtetésre nevel. A matematikatanítás célja és feladata a szaktárgyi alapismeretek átadásával párhuzamosan a hallgatók önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása.

A felsorolt kompetenciák fejlesztése fontos részét képezi valamennyi hallgatóközpontú oktatási technikának. A játékkal történő tanítási módszerek alkalmazása napjainkra már az egyetemi képzés számos szegmensében megtalálható. Felzárkóztatási célokra kifejezetten alkalmas olyan fejlesztő eszközöket használni, amelyek pozitív élmények megszerzésével kapcsolják össze a kívánt célok elérését és hozzájárulnak a hallgatók saját ütemben történő, önállóan véghez vitt, szándékos és önszabályozott tanulási folyamatához, ezért szükségesnek láttuk megfelelő, az adott szakmai tartalom elsajátítását erőteljesen támogató matematikai játékok létrehozását.

A csoportban történő munka ugyancsak fejlesztendő kompetencia valamennyi műszaki és informatikai képzési területre felvett hallgató esetén, így a 2–6 fővel játszható Log Halli Galli játék számos ponton biztosít fejlődési lehetőséget a logaritmus fogalmával kapcsolatos legfontosabb szakmai ismeretek megszerzése mellett.



HUDOBA GYÖRGY *

Fizika

Marskutatás otthonról – a „MarsRengések” program

Összefoglalás: A NASA InSight űrszondája 2018. november 26-án az Elysium Planitia régió sík, északi részén leereszkedett a Mars felszínére. A leszállóegység két szeizmométert is telepített a Marsra, melyek „élő” adatokat küldenek vissza a Földre. A várhatóan egy évig tartó misszió során a kutatók a talajrezgések tanulmányozása révén, a szeizmológia módszereivel kívánják felderíteni a Mars belső szerkezetét. A NASA a mérési adatokat publikussá teszi, és a „civil” kutatók segítségét is kéri az esetleges meteorit keltette becsapódási kráterek keresésében.

A „MarsRengések” program a 11–18 éves, a kutatás iránt érdeklődő diákokat szólítja meg. A programot „MarsQuake” néven a British Geological Survey, a National Space Academy és a Durham University kezdeményezte, melyet a magyar diákok számára is elérhetővé tettünk. Ennek során elkészült az oktatási anyagok és tantermi kísérletek leírásának fordítása, valamint két honlap (a Terkán Lajos Bemutató Csillagvizsgáló és az MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézete gondozásában), melyekről mindez, és még számos további információ is elérhető.

Kulcsszavak: InSight; Mars; marskutatás; marsrengés; földrengés; szeizmológia.

Abstract: The NASA InSight space probe has been landed on Mars at the Elysium Planitia region on November 26th in the year 2018. The probe installed two seismometers on the surface to send online data to the Earth. The mission scheduled to one year long for investigating the Martian insight. NASA will make public the data for “civil scientists”, to find meteorite impact craters on Mars.

The MarsQuake project is intended to provide a set of teaching resources and classroom activities that will use the latest data and images sent back from the NASA InSight mission to Mars. The British Geological Survey, the

* Óbudai Egyetem, Alba Regia
Műszaki Kar
E-mail: hudoba.gyorgy@amk.
uni-obuda.hu



Hudoba György

National Space Academy and the Durham University together published a background science booklet aimed at 11–18 year-olds students. The publications contained different activities including modeling and locating meteorite impacts known as 'marsquakes'. A translation of this book for Hungarian students has been prepared in 2018.

Keywords: InSight, Mars, Mars exploration, marsquake, earthquake, seismology.

Bevezető

InSight – az Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transport megnevezésből alkotott betűszó. Küldetésének célja a Mars hőháztartásának vizsgálata, valamint a meteorit becsapódások okozta talajrezgések, a marsrengések tanulmányozása révén a Mars belső szerkezetének a szeizmológia módszereivel történő felderítése.

Az InSight – a cikk írásának időpontjában már 228 napja – sikeresen leszállt a Mars felszínére. Az azóta eltelt időszakban robotkarja segítségével telepítette a szeizmométer egységet. A hőáram mérésére szolgáló műszert viszont eddig még nem sikerült a szándékozott öt méteres mélységbe juttatni. Az erre való erőfeszítések még jelenleg is tartanak. A szonda kalibrációs folyamata így a vártnál is több hónapot vesz igénybe, ami után megkezdheti a tudományos adatok rendszeres szolgáltatását.

Az InSight-misszió és a SEIS-szeizmométer

A NASA InSight egy olyan geofizikai leszállóegység, amelynek feladata a Mars bolygó belsejének és belső folyamatainak a felderítése. A végső cél valójában az, hogy megtudjuk, hogyan is keletkeznek és formálódnak a kőzetbolygók.

A Mars belsejének titkait többek között hatalmas erejű marsrengésekkel lehetne megfejteni. Míg a Földön a rengések túlnyomó többsége a lemeztektonikához kapcsolódik, a Marson lemeztektonika – ismerteink szerint – nem működik. Ezért arra számítunk, hogy a bolygó szeizmikus aktivitása körülbelül 100-szor kisebb lesz, mint a Földé, azaz a marsrengések kisebbek lesznek és a számuk is sokkal kevesebb lesz, mint a földrengéseké, és zömüket meteorit becsapódások okozzák.

A SEIS (Seismic Experiment for Interior Structure) a Mars felszínének apró rezdüléseit méri. A műszer valójában 6 szeizmométerből áll, amik két különböző típusú egységet tartalmaznak: három széles sávú szeizmométert, amelyek 0,005 Hz és 1 Hz közötti frekvenciákon érzékenyek és három rövid periódusú műszert, amelyek a 0,05 és 40 Hz közötti frekvenciákon mérnek.



Marskutató otthonról – a „MarsRengések” program

A szeizmométerek ingáit három különböző irányban helyezik el, hogy minden térsíkban mérjenek (fel-le, balra-jobbra és előre-hátra). A cél, hogy a 3 szeizmométer jelei alapján meg tudjuk határozni a rengéshullám beérkezési irányát.

A „MarsRengések” program

A „MarsRengések” program a „Szeizmológia az iskolában” kezdeményezés részeként indult el, mely révén igyekszünk elérni a földrengések és a csillagászat iránt érdeklődő fiatalokat. Ennek érdekében elkészült a Marsrengések – szeizmológia más bolygókon című ismeretterjesztő kiadvány [1], ami a British Geological Survey „MarsQuake” angol nyelvű kiadványának [2] szerkesztett fordítása. Eddig a témában cikkünk jelent meg az Élet és Tudományban [3], tartottunk több ismeretterjesztő előadást [4], [5], készült két honlap [6], [7], valamint megalakult egy Facebook-csoport is: „Marsrengések – kiből lesz marskutató?” [8] amely folyamatosan frissül az InSight híreivel. (A két ismeretterjesztő előadást a GalileoWebcast élőben közvetítette, melyek visszanezhetők az archívumból. A [4] eleve internetes előadás volt, az [5] pedig a Szkeptikusok XXIV. Országos Konferenciáján hangzott el). A fentieken túl részt vettünk tudománynépszerűsítő rendezvényeken is, úgymint

- Földtudományi Forgasztag a Magyar Természettudományi Múzeumban.
- Budapest a Tudomány fővárosa 2018.

A British Geological Survey „MarsQuake” programjához kapcsolódó „MarsRengések” program révén a tudományos ismeretterjesztés egy új távlatát szeretnénk elindítani a földtudományokat és a csillagászatot érintő tantárgyakban Magyarországon. A programban egy rövid tananyag, továbbá órai feladatok találhatók, melyek során a NASA 2018-as InSight Mars expedíció által visszaküldött valós adatokat és képeket használhatják fel a diákok. Célunk továbbá az is, hogy a résztvevők betekintést kapjanak a tudomány működésébe.

[1] Kiszely Márta (ford.) (2018): *Marsrengések – Szeizmológia más bolygókon*. Budapest: MTA CSFK GGI. P. 73.

[2] Denton, P.–Stevenson, J. P.–McMurray, A. (2017): *Mars-Quakes – Seismology on another planet*. Nottingham: British Geological Survey.

[3] Kiszely Márta (2018): A Vörös Bolygó megfúrása – Meteorbecsapódások marsrengésekkel. *Élet és Tudomány*. 73, 22. Pp. 678–680.

[4] Hudoba György: *Célkeresztben a Mars!* [2018. október 15., 1 ó 50 p] (http://www.galileowebcast.hu/live/live_20181015.html)

[5] Kiszely Márta: Kiből lesz marskutató? [2018. november 17., 22 p] (<https://www.youtube.com/watch?v=sV19m8okRV8&list=PLeNxi-TyRAb6ifbR10F9-IAQRhgTnaZkH&index=3>)

[6] <http://marskutatas.suliszeizmo.hu> (MTA CSFK GGI)

[7] <http://telapo.datatrans.hu/mars> (Terkán Lajos Bemutató Csillagvizsgáló)

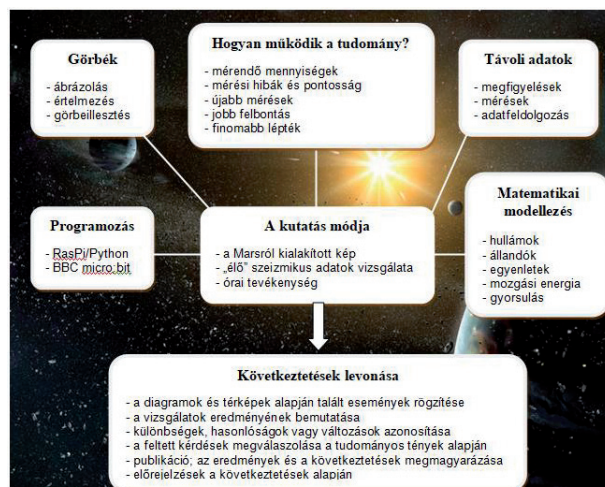
[8] <https://www.facebook.com/groups/224695551607155>

[1] Vermes M.–Wiedemann L. (1966): A rugalmas fonalú ingáról. *Fizikai Szemle* 16. P. 26.

[6] <http://marskutatas.suliszeizmo.hu> (MTA CSFK GGI)

[7] <http://telapo.datatrans.hu/mars> (Terkán Lajos Bemutató Csillagvizsgáló)

1. ábra. A tudomány munkamódszerei.



A program összetett. Egyrészt ismerni kell a Mars nagyfelbontású képeit kezelő programot (HiView) és az InSight SEIS műszere által regisztrált jeleket megjelenítő és feldolgozó programot (jAmaSeis). Fel kell ismerni a szeizmikus hullámok fajtáit, és sok-sok egyéb csillagászati és szeizmológiai témában is kell tájékozódni.

A célközönség a 11–18 éves korosztály. A program végrehajtásához készült 73 oldalas segédanyag [1] nyolc fejezetet tartalmaz. Megtalálható benne többek között a Föld és a Mars bolygó összehasonlítása, planetológiai, geológiai és szeizmológiai alapismeretek, az InSight szonda küldetésének és műszereinek ismertetése, valamint 11 tanulókísérlet, melyek során a diákok modellezhetik a meteorit becsapódásokat, és vizsgálhatják a becsapódások hatását. A kiadvány szabadon letölthető mind a [6] mind a [7] honlapról. A letöltés előtt statisztikai okokból egy regisztrációs lap kitöltése szükséges.



Az eddigi eredmények és tapasztalatok

A MarsRengések programot a 2018-as év őszén hirdettük meg, melyre lakóhelytől függetlenül bárki csatlakozhatott. A programhoz, eddig mintegy 25 jelentkezés érkezett, köztük egy csillagász szakkör is. Jelenleg az alábbi településekről vannak jelentkezők: Balatonfüred, Budapest, Dombóvár, Érsekújvár, Gödöllő, Gyál, Kerepes, Mátészalka, Sásd, Sopron, Szeged, Székesfehérvár és Szigetszentmiklós.

A programra jelentkezőknek nagy elszántságról kellett tanúbizonyságot tenniük, hiszen két, angol nyelvű programot is telepíteniük kellett a számítógépükre. Ezek a nagyfelbontású Mars képeket kezelő Hi-View és a süliszeizmometerek adatait feldolgozó jAmaSeis programok. Emellett meg kellett ismerkedniük a friss földrengések paramétereit közlő weblapokkal, és fel kell tudni ismerni a P- és S-hullámokat. A jelentkezők életkori sajátosságai miatt, a facebook csoportunkon keresztül lehet a legkönnyebben tartani egymással a kapcsolatot. Akik jelentkeztek a csoportba, az InSight programmal kapcsolatos, a twitteren közzétett legfrissebb híreket (<https://twitter.com/NASAINsight>) és képeket itt magyarul is megtalálják, és láthatják a többiek kérdéseit, eredményeit is.

Az ifjú „marskutatók” cselekvési kedvét és nehézségeit megismerni, valamint felkészíteni őket a SEIS adatainak elemzésére, feladatokkal szándékoztunk elérni. Eddig két feladatot kaptak a tagok, a legfrissebb földrengések jAmaSeis-program segítségével való folyamatos megfigyelése mellett:

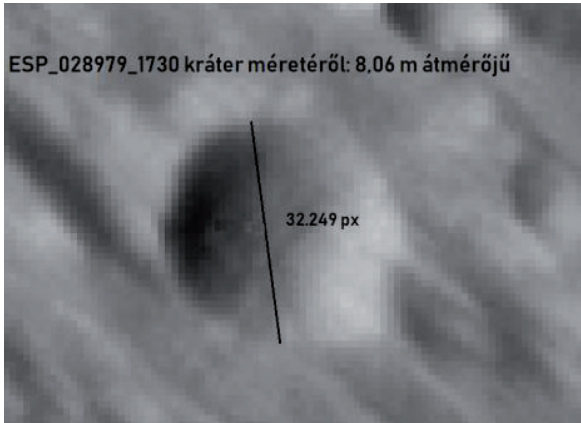
1. KRÁTER-KIHÍVÁS 2018: ez a feladat *Marsrengések – szeizmológia más bolygókon* kiadvány mellékletében található első tanulókísérlet elvégzését jelentette, azaz lisztre szórt kakaóporral kellett meteor becsapódásokat modellezni, és egy valódi marsi kráter nagyfelbontású képe alapján annak méretét meghatározni.

2. FELÜLETI SZEIZMIKUS HULLÁMOK A MARSON!: E feladat során meg kellett tanulni a felületi hullámok jellegzetességeit, és el kellett végezni egy számítási feladatot. Sajnos sokan lemorzsolódtak (kb. 50%), bár valószínűleg követik az InSight eredményeit. A legsikeresebb a mátészalkai Móricz Zsigmond Görögkatolikus Kéttannyelvű Általános Iskola csillagász szakköre volt Bardóczné Kocsis Erzsébet vezetésével és a székesfehérvári Lánosz Kornél Gimnázium fizika szakkörösei Újvári Sándor irányításával. Tapasztalatunk szerint a csapatban dolgozók – esetenként pedagógusi segítséggel – lelkesen tanultak bele a programba.

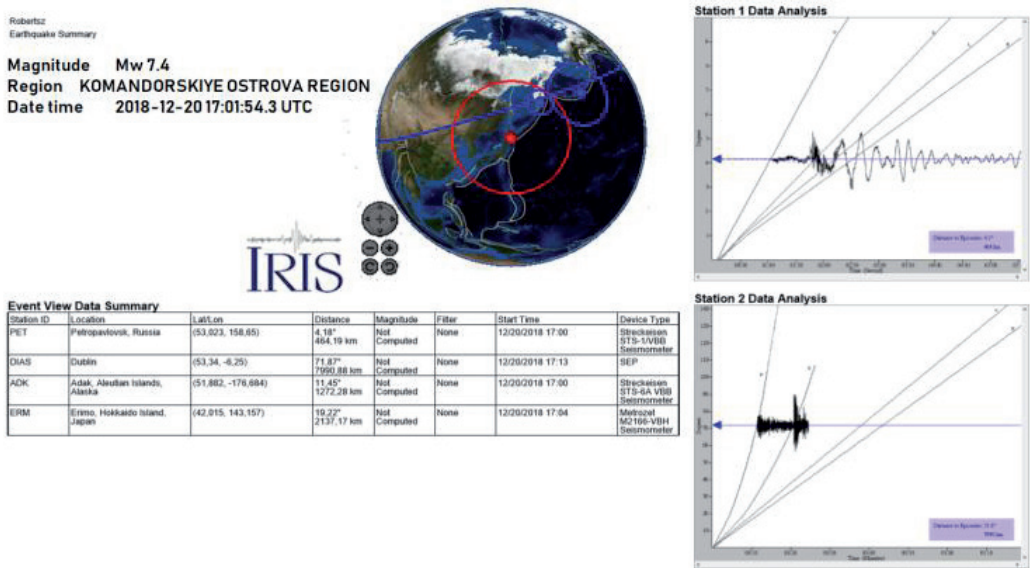


Hudoba György

2. ábra. Szabó Bence gödöllői marskutató KRÁTER-KIHÍVÁS 2018 megoldása.



3. ábra. Szerencsi Róbert kerepesi marskutató társunk földrengés-epicentrum meghatározása a jAmaSeis-program segítségével.





NAGY PÉTER *-TASNÁDI PÉTER**

Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán

Összefoglalás: Az 1965. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának egyik fizika feladatáról az OKTV bizottság csak a versenyzők dolgozatainak javítása közben vette észre, hogy a feladat általánosan nem megoldható! Egy korábbi cikkünkben a feladatban megfogalmazott (ma rugósinga néven ismert) modell kaotikus tulajdonságait tanulmányoztuk. Jelen dolgozatunkban az eredeti konzervatív mechanikai rendszer gerjesztett, disszipatív kiterjesztését (rángatott súrlódásos rugósinga) adjuk meg a modellalkotási folyamat részletes és több irányú tárgyalásával. A modell kapcsán bemutatjuk a dimenziótlanítás módját és jelentőségét a fizikai gondolkodásban.

Kulcsszavak: Rángatott rugósinga; modellalkotás; dimenziótlanítás.

Abstract: The Competition Committee of the National Secondary School Physics Competition in 1965 had perceived only during the evaluation of the competition tests that one problem of the second round of the Competition cannot be solved in general. The problem referred to a spring pendulum the chaotic properties of which were discussed in our previous paper. In the present paper the original problem which concerns on a conservative system is extended with switching on viscous damping force and a periodic driving force. The mathematical model of this system will be discussed using Newtonian physics and applying the Lagrangian second order equations. The dimensionless equations of the problem will be also discussed emphasizing the general importance of making dimensionless equations.

Keywords: Spring pendulum; physical and mathematical models, dimensionless equations, Lagrangian of a system.

Fizika

* Neumann János Egyetem,
GAMF Műszaki és Informatikai
Kar

E-mail: nagy.peter@gamf.uni-
neumann.hu

**Eötvös Loránd Tudomány-
egyetem, Természettudományi
Kar

E-mail: ttasipeter@gmail.com



[1] Vermes M.–Wiedemann L. (1966): A rugalmas fonalú ingáról. *Fizikai Szemle* 16. P. 26.

[2] Nagy P.–Tasnádi P. (2019): Rugósinga dinamikai vizsgálata – egy fizika versenyfeladat kaotikus utóélete. *Dunakavics* (a Dunaujvárosi Egyetem online folyóirata), VII. évfolyam VIII. szám Pp. 31–46. (http://dunakavics.uniduna.hu/Online_1908.pdf)

[3] csodafizika.hu/rugosinga_model.pdf

Bevezetés

Az 1965. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának egyik fizika feladata a következőképpen szólt [1]:

„Felfüggesztett L (nyugalmi) hosszúságú, elhanyagolható tömegű rugóra kisméretű testet akasztunk. A rugót a testtel együtt vízszintes helyzetbe hozzuk (a rugó akkor nyújtatlan állapotban van, hossza L) és elengedjük. Ismeretes a rugó D állandója, amely szerint a rugalmas erő arányos az x megnyúlással: $F = -Dx$. Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test éppen a felfüggesztési pont alatt halad át?”

Az OKTV bizottság csak a versenyzők dolgozatainak javítása közben vette észre, hogy a feladat általánosan nem megoldható. A probléma forrása az volt, hogy a feladat paraméteres megfogalmazású és a test mozgása bizonyos paraméterértékeknél furcsa véletlenszerű, előrejelezhetetlen jelleget mutatott. Ilyen roppant egyszerű mechanikai rendszerben ez akkoriban merőben meglepő viselkedésnek tűnt, ma már a kaoszelmélet alapján jól értelmezhető.

A [2] dolgozatban részletesen tárgyaltuk a fenti, napjainkban rugósinga néven ismert mechanikai rendszer kaotikus viselkedését egy nagyon felhasználóbarát szoftver (Dynamics Solver) segítségével. A versenyfeladatban megfogalmazott *konzervatív* mechanikai rendszer azonban nem kellően realisztikus, mivel hiányzik belőle a fizikai valóság két fontos eleme: a mozgást akadályozó súrlódás és a mozgás fennmaradásához szükséges gerjesztő erő. Érdemes tehát a fenti rugósinga-modellt e két effektus számbavételével kiterjeszteni. A súrlódást illesszük be a mozgó test sebességével arányos viszkózus (közegellenállási) erőként, a környezeti gerjesztést pedig a rugósinga felfüggesztési pontjának periodikus „rángatásával”, jelen tárgyalásunkban függőleges mozgásával („jojó”). A rendszer hétköznapi megvalósulásaként tekinthetjük a [3] letölthető anyagban levő *waterball_yo-yo.mp4* videón bemutatott mozgást. A rángatott rugósinga esetén már a mozgásegyenletek felírása sem egyszerű. Jelen tanulmányban a mozgásegyenletek felírását a newtoni mechanika alapján és a Lagrange másodfajú mozgásegyenletek felírásával is megadjuk. A kétféle leírás interpretációja tanulságos átvezetést jelenthet a középiskolában megszokott szemléletmód és a fogalmilag és matematikailag is kétségtelenül nehezebb, de igen általános és kis gyakorlattal már mechanikusan alkalmazható elméleti módszerek alkalmazása között. A kétféle szemléletmód összevetése gyakran segít a Lagrange-egyenletekből adódó erőtípusú tagok fizikai jelentésének megértésében.

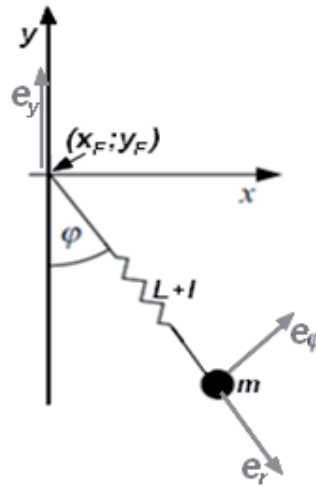


A rángatott rugósinga matematikai modelljének konstrukciója

Az eredeti feladatban megfogalmazott rugósinga négy dinamikai változója az l megnyúlás, a φ (kitérési) szög, mint *általános koordináták*, illetve ezek időderiváltjai a v hosszváltozási sebesség és az ω szögsebesség. A csillapított inga azért marad mozgásban, mert a környezete gerjesztő erőt gyakorol rá, esetünkben ezt a felfüggesztési pont függőleges irányú A amplitúdójú, T periódusidejű „rángatásával” vesszük figyelembe. A rángatott rugósinga teljes állapotának megadásához azonban további dinamikai változóra van szükség, hiszen a külső hatást is figyelembe kell venni, tehát az ötödik dinamikai változó a gerjesztés.

$$\theta = \frac{2\pi}{T}t = \Omega t \quad \text{fázisa} \quad \left(\Omega = \frac{2\pi}{T}\right):$$

1. ábra. A rángatott rugósinga és a vonatkoztatási rendszer.



A rugósinga $(x_F; y_F)$ felfüggesztési pontjának mozgása periodikus függőleges „rángatás” esetén:



$$\begin{cases} x_F(t) = 0 \\ y_F(t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = A \cdot \cos(\Omega t) \end{cases}$$

A rendszert 7 fizikai paraméter jellemezi (megadjuk az SI mértékegységeket is): az ingára erősített test tömege m ($[m] = \text{kg}$), az inga nyugalmi hossza L ($[L] = \text{m}$), a direkciós állandó D ($[D] = \text{kg/s}^2$), a viszkozus csillapítási tényező c ($[c] = \text{kg/s}$), a „rángatás” amplitúdója A ($[A] = \text{m}$), periódus ideje T ($[T] = \text{s}$), a gravitációs gyorsulás g ($[g] = \text{m/s}^2$).

A rángatott rugósinga mozgásegyenlet-rendszerének levezetésére, mint említettük több fizikai megközelítés létezik, tanulmányunkban két módszert mutatunk be: a *Newton-féle dinamika* illetve a *Lagrange-formalizmus* alkalmazását.

NEWTONI DINAMIKA

A hallgatók középiskolai ismereteik alapján tudják, hogy a testek mozgását az:

$$ma = \sum F$$

Newton-egyenlettel írhatjuk le. Az egyenlet felírása azonban nem egyszerű. Csak akkor jutunk áttekinthető és a fentebb számba vett dinamikai változókkal jól kifejezhető egyenletekhez, ha megfelelő koordináta-rendszert használunk. Esetünkben ez az inga felső (rángatott) pontjával együtt mozgó (gyorsuló) rendszerben felvett (r, φ) síkbeli polárkoordináta-rendszer, melynek radiális koordinátáját az inga felfüggesztési pontjától (a gyorsuló koordináta-rendszerben ez a pont nyugszik.), szögkitérését pedig a függőlegestől mérjük. A továbbiakban $\mathbf{e}_r$ a polárkoordináta-rendszer radiális, $\mathbf{e}_\varphi$ pedig a tangenciális egységvektora, és figyelembe vesszük, hogy $r = L + l$.

A mozgásegyenleteket a gyorsuló rendszerben kifejezett „rugónyúlási gyorsulást” és „szöggyorsulást” tartalmazó tagokra rendezzük. A polárkoordináta-rendszerben az egységvektorok változása miatt fellépő tagokat metrikus erőként vesszük figyelembe.

A rugó $(x_F; y_F)$ felfüggesztési pontjának kinematikai jellemzői ($\Omega = \frac{2\pi}{T}$):



Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán

$$y_F = A \cos \Omega t \quad ; \quad v_F = \dot{y}_F = -A \Omega \sin \Omega t \quad ; \quad a_F = \ddot{y}_F = -A \Omega^2 \cos \Omega t$$

A gyorsuló polárkoordináta-rendszerben háromféle erő lép fel, a valódi erők, a tehetetlenségi erő, és a polárkoordináta-rendszer bázisvektorainak változását figyelembe vevő metrikus erők. Fontos megjegyezni, hogy az utóbbiak nem tehetetlenségi erők, a feladatban nem használunk forgó koordinátarendszert!

Valódi erők:

A nehézségi erő:

$-m g \mathbf{e}_y$, ahol $\mathbf{e}_y$ a függőlegesen felfelé mutató egységvektor, amelynek koordinátái a polárkoordináta-rendszerben $(-\cos \varphi; \sin \varphi)$.

A rugóerő:

$$-D l \mathbf{e}_r.$$

A viszkózus csillapító erő:

Itt meg kell gondolni, hogy ez az erő a testnek a közeghez, azaz a nyugvó koordinátarendszerhez képest vett sebességtől függ (azzal arányos és ellentétes irányú), tehát:

$$-c \dot{l} \mathbf{e}_r - c(l+L) \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + c A \Omega \sin \Omega t \mathbf{e}_y.$$

A metrikus erők (a polárkoordináta-rendszer alapvektorainak változása miatt fellépő tagok):

$$(l+L) \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r - 2 \dot{l} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

A tehetetlenségi erő (a rángatás miatt lép fel):

$$-m a_F \mathbf{e}_y = m A \Omega^2 \cos \Omega t \mathbf{e}_y.$$

A mozgásegyenletek $\mathbf{e}_r$ és $\mathbf{e}_\varphi$ összetevői rendre:

$$\begin{cases} \ddot{l} = (l+L) \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi - \frac{D}{m} l - A \Omega^2 \cos \theta \cos \varphi - \frac{c}{m} \dot{l} - \frac{c}{m} A \Omega \sin \theta \cos \varphi \\ \ddot{\varphi} = \frac{-2 \dot{l} \dot{\varphi} - g \cdot \sin \varphi + A \Omega^2 \cos \theta \sin \varphi + \frac{c}{m} A \Omega \sin \theta \sin \varphi}{l+L} - \frac{c}{m} \dot{\varphi} \end{cases}$$



[4] Hraskó Péter (2002): *Elméleti fizika I.* Pécs: JPTE. elektronikus formában: <http://peter.hrasko.com/files/mechanika2.pdf>

Az egyenleteket linearizáljuk, ehhez bevezetjük a $\dot{l} = v$ és $\dot{\varphi} = \omega$ sebességet, illetve szögsebességet, amelyeket már említettünk a dinamikai változók számbavételekor, valamint a rángatás fázisát kifejező $\theta = \Omega t$ változót. Ezekkel a mozgásegyenletek sztenderd formája:

$$\begin{cases} \dot{l} = v \\ \dot{v} = (l + L)\omega^2 + g \cos \varphi - \frac{D}{m}l - A\Omega^2 \cos \theta \cos \varphi - \frac{c}{m}v - \frac{c}{m}A\Omega \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{-2v\omega - g \cdot \sin \varphi + A\Omega^2 \cos \theta \sin \varphi + \frac{c}{m}A\Omega \sin \theta \sin \varphi}{l + L} - \frac{c}{m}\omega \\ \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

LAGRANGE-FORMALIZMUS

A *Hamilton-féle hatáselv* a fizika egyik legmélyebb gondolata, amely szerint a fizikai rendszer időbeli változása (mozgása) során számított hatás stacionárius, azaz a pálya kis odébbtolására nem változik. Az elv a klasszikus mechanikában egyenértékű a Newton-törvényekkel, de a hatáselv alkalmasabb az általánosításra és fundamentális szerepet játszik a fizikában. A hatáselv alkalmazásához fejlődött ki a variációszámítás, ezért a hatáselv alkalmazásait szokás variációs elvekként is megfogalmazni [4]. A fizika számos problémája tárgyalható variációs elv formájában. Például így egyszerű megtalálni, hogy a parton álló úszómester hogyan választhatja meg a fuldoklóhoz leggyorsabban elvezető útvonalat. Variációs elvvel mutatható meg, hogy a szabálytalan geometriájú medencébe folyó víz úgy terül szét, hogy felszíne a lehető legalacsonyabban legyen. A fény szintén a leggyorsabb utat követi tetszőleges közeg(ek)en keresztül (Fermat-elv). A gravitációs mezőben a testek pályája (azaz szabadesés a téridőben) ún. geodetikus vonal, ami szintén a hatáselv segítségével határozható meg. A kvantumelmélet Schrödinger-egyenlete és a Feynman-féle útintegrál interpretáció is származtatható hatáselvből. A szimmetriák is jobban kezelhetők a hatáselvvvel, például a Noether-tétel, amely kimondja, hogy minden folytonos szimmetria megfelel egy megmaradási törvénynek és megfordítva.



Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán

A mechanikában a hatáselvből származtatható *Lagrange-formalizmus* szerint tetszőleges konzervatív dinamikai rendszer időfejlődése meghatározható a T kinetikus és a V potenciális energia különbségként definiált:

$$\mathcal{L} = T - V,$$

Lagrange-függvényből. Az időfejlődést a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_i} = 0,$$

Euler-Lagrange-mozgásegyenletek írják le, ahol Φ_i a rendszer általános koordinátáit (jelen esetben az l és φ változókat) jelöli. A disszipatív rendszerek esetén az Euler-Lagrange-egyenletek bal oldalát kell megfelelő taggal kiegészíteni. Ez a tag sebességgel arányos viszkózus erő esetén a:

$$F_R = \frac{c}{2} |\vec{v}|^2$$

Rayleigh-féle disszipációs függvényből származtatható.

Ekkor az általánosított Euler-Lagrange-mozgásegyenletek:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_i} = \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\Phi}_i},$$

jelen esetben:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial F_R}{\partial \dot{l}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varphi}} \end{cases}.$$

A kinetikus, illetve potenciális energia:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = m \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} D \cdot l^2,$$

ahol:

$$\begin{cases} x(t) = (L + l) \cdot \sin \varphi \\ y(t) = y_F(t) - (L + l) \cdot \cos \varphi \end{cases}.$$



Ezek időderiváltjai:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{l} \cdot \sin \varphi + (L+l) \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{y}_F - \dot{l} \cdot \cos \varphi + (L+l) \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases},$$

amellyel:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{l}^2 + (L+l)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{y}_F^2 + 2\dot{y}_F \cdot (L+l) \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - 2\dot{y}_F \cdot \dot{l} \cdot \cos \varphi.$$

A Lagrange-függvény tehát:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - V = & \frac{1}{2} m \cdot \dot{y}_F^2 + \frac{1}{2} m \cdot \dot{l}^2 + \frac{1}{2} m \cdot (L+l)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot \dot{y}_F \cdot (L+l) \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - \\ & - m \cdot \dot{y}_F \cdot \dot{l} \cdot \cos \varphi - m \cdot g \cdot y_F + m \cdot g \cdot (L+l) \cdot \cos \varphi - \frac{1}{2} D \cdot l^2 \end{aligned}$$

A Lagrange-függvény deriváltjai:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = m \cdot (L+l) \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot \dot{y}_F \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} + m \cdot g \cdot \cos \varphi - D \cdot l$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} = m \cdot \dot{l} - m \cdot y_F \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} = m \cdot \ddot{l} - m \cdot \ddot{y}_F \cdot \cos \varphi + m \cdot \dot{y}_F \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = m \cdot \dot{y}_F \cdot (L+l) \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + m \cdot \dot{y}_F \cdot \dot{l} \cdot \sin \varphi - m \cdot g \cdot (L+l) \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot (L+l)^2 \cdot \dot{\varphi} + m \cdot \dot{y}_F \cdot (L+l) \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 2m \cdot (L+l) \cdot \dot{l} \cdot \dot{\varphi} + m \cdot (L+l)^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot \ddot{y}_F \cdot (L+l) \cdot \sin \varphi + m \cdot \dot{y}_F \cdot \dot{l} \cdot \sin \varphi + m \cdot \dot{y}_F \cdot (L+l) \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$



Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán

Valamint a Rayleigh-féle disszipációs függvény deriváltjai:

$$\frac{\partial F_R}{\partial \dot{l}} = \frac{c}{2} (2\dot{l} - 2\dot{y}_F \cdot \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{c}{2} (2(L+l)^2 \cdot \dot{\varphi} + 2\dot{y}_F \cdot (L+l) \cdot \sin \varphi)$$

Ezekkel már megkonstruálhatjuk az Euler–Lagrange-egyenleteket:

$$m \cdot (L+l) \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot \cos \varphi - D \cdot l - m \cdot \ddot{l} + m \cdot \ddot{y}_F \cdot \cos \varphi = c \cdot \dot{l} - c \cdot \dot{y}_F \cdot \cos \varphi$$

$$-m \cdot g \cdot (L+l) \cdot \sin \varphi - 2m \cdot (L+l) \cdot \dot{l} \cdot \dot{\varphi} - m \cdot (L+l)^2 \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot \ddot{y}_F \cdot (L+l) \cdot \sin \varphi = c \cdot (L+l)^2 \cdot \dot{\varphi} + c \cdot \dot{y}_F \cdot (L+l) \cdot \sin \varphi$$

amelyeket rendezve kapjuk a másodrendű mozgásegyenleteket:

$$\begin{cases} \ddot{l} = \ddot{y}_F \cdot \cos \varphi + (L+l) \cdot \dot{\varphi}^2 + g \cdot \cos \varphi - \frac{D}{m} \cdot l - \frac{c}{m} \cdot \dot{l} + \frac{c}{m} \cdot \dot{y}_F \cdot \cos \varphi \\ \ddot{\varphi} = -\frac{g + \ddot{y}_F}{(L+l)} \cdot \sin \varphi - \frac{2}{(L+l)} \cdot \dot{l} \cdot \dot{\varphi} - \frac{c}{m} \cdot \dot{\varphi} - \frac{c \cdot \dot{y}_F}{m(L+l)} \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Behelyettesítve az $\dot{y}_F = -A \cdot \Omega \sin \theta$ és $\ddot{y}_F = -A \cdot \Omega^2 \cos \theta$ gerjesztési függvényeket, majd a sztenderd formátumhoz bevezetjük a $v = \dot{l}$ sebesség és $\omega = \dot{\varphi}$ szögsebesség változókat, így az elsőrendű mozgásegyenlet-rendszer (kiegészítve a θ gerjesztési fázissal):

$$\begin{cases} \dot{l} = v \\ \dot{v} = -A\Omega^2 \cos \theta \cos \varphi + (L+l)\omega^2 + g \cos \varphi - \frac{D}{m} \cdot l - \frac{c}{m} \cdot v - \frac{c}{m} A\Omega \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{A\Omega^2 \cos \theta - g}{(L+l)} \sin \varphi - \frac{2}{(L+l)} v\omega - \frac{c}{m} \omega + \frac{cA\Omega \sin \theta}{m(L+l)} \sin \varphi \\ \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$



Ez természetesen megegyezik az előző alfejezetben Newton-féle dinamikával kapott mozgásegyenletekkel. Látjuk tehát, hogy egy bonyolult fizikai rendszer mozgásegyenleteinek származtatására több ekvivalens mód létezik, ami az önellenőrzés szempontjából is előnyös. Bevezető elméleti kurzusokban a két-féle tárgyalás egymást erősítő lehet. A Newton-törvény alapján felírt mozgásegyenletből kiolvasható az jobboldalokon szereplő tagok fizikai tartalma, amire a Lagrange-függvényes módszer nem ad útmutatást. Világosabban érthető a Rayleigh-féle disszipációs függvény jelentése is. Ugyanakkor a Lagrange-függvény egyszerűen felírható és a mozgásegyenletek származtatása szinte pusztán deriválási csuklógyakorlattá válik. Ez technikailag sokkal könnyebb, mint a Newton-mozgásegyenlethez szükséges koordináta-rendszerre vonatkozó megfontolásokból adódó erőhatások kifejezése.

Dimenziótlanítás

Megfelelően választott változók segítségével a mértékegységek kitranszformálhatók a dinamikai egyenletekből. Az ún. *dimenziótlanítás* alap gondolata az, hogy minden rendszernek van saját jellegzetes hosszúság- és időskálája. A dimenziótlanítás egyfelől az egyenletek numerikus megoldásra alkalmas alakjának megtalálásában nagy gyakorlati jelentőségű (a számítógéppel végzett numerikus algoritmusok csak számokkal dolgoznak, nem tudnak mértékegységeket kezelni!). Másfelől nagyon mély analógiákra mutat rá, látszólag távol eső fizikai rendszerek, problémák közötti lehetséges kapcsolat felderítését teszi lehetővé.

A dimenziótlan mozgásegyenletekben ugyanis nem csak a változók mértékegység nélküliek, de a megjelenő új paraméterek is. Az új paraméterek száma kisebb mint az eredetieké, bár azokból kell „kikeverni” őket. Ez kiemeli a látszólag különböző rendszerek közötti analógiát: minden olyan rendszer időfejlődése ekvivalens (izomorf), amelyek dimenziótlan paraméterei azonosak, akármennyire is eltérőek az „eredeti” fizikai paraméterek. H. Poincaré szavaival: „A matematikai szellem tanít meg bennünket arra, hogy felismerjük az igazi, mély analógiát, melyet a szem nem lát, csak az ész sejt. A matematikai nyelv nélkül a dolgok belső analógiájának legnagyobb része ismeretlen maradt volna előttünk örökre.”

A RÁNGATOTT RUGÓSINGA-MODELL DIMENZIÓTLANÍTÁSA

A rángatott rugósinga esetében igen kézenfekvő a hosszúság- és időskála választása, a hosszúságlepték legyen az inga L nyugalmi hossza, az időlépték pedig a gerjesztés (rángatás) T periódusideje, tehát vezessük be az új dimenziótlan l és t változókat az: $l \rightarrow l \cdot L$ és $t \rightarrow t \cdot T$ helyettesítésekkel. Ekkor természetesen: $dl \rightarrow dl \cdot L$ és $dt \rightarrow dt \cdot T$, így az időderiváltakat is át kell írunk, pl.



Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán

$$\dot{l} = \frac{dl}{dt} \rightarrow \frac{dl \cdot L}{dt \cdot T} = \dot{l} \frac{L}{T}.$$

Az előzőekben kapott mozgásegyenlet-rendszerben elvégezve a helyettesítéseket:

$$\begin{cases} \dot{l} = v \\ \frac{L}{T^2} \dot{v} = -A\Omega^2 \cos \theta \cos \varphi + L(1+l) \frac{1}{T^2} \omega^2 + g \cos \varphi - \frac{D}{m} L l - \frac{c}{m} \frac{L}{T} v - \frac{c}{m} A\Omega \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \frac{1}{T^2} \dot{\omega} = \frac{A\Omega^2 \cos \theta - g}{L(1+l)} \sin \varphi - \frac{2}{L(1+l)} \frac{L}{T} v \frac{1}{T} \omega - \frac{c}{m} \frac{1}{T} \omega + \frac{cA\Omega \sin \theta}{mL(1+l)} \sin \varphi \\ \dot{\theta} = 2\pi \end{cases}$$

amit rendezve (és $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ beírásával) kapjuk a dimenziótlan mozgásegyenlet-rendszert:

$$\begin{cases} \dot{l} = v \\ \dot{v} = -2\pi R \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi + (1+l) \cdot \omega^2 + G \cdot \cos \varphi - K \cdot l - C \cdot v - C \cdot R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = -G \cdot \frac{\sin \varphi}{1+l} + 2\pi R \frac{\cos \theta \cdot \sin \varphi}{1+l} - \frac{2v\omega}{1+l} - C \cdot \omega + C \cdot R \frac{\sin \theta \cdot \sin \varphi}{1+l} \\ \dot{\theta} = 2\pi \end{cases}$$

ahol $G = \frac{gT^2}{L}$; $C = \frac{cT}{m}$; $K = \frac{DT^2}{m}$; $R = 2\pi \frac{A}{L}$ dimenziótlan paraméterek.

A rángatott rugósinga-modellben tehát a dimenziótlanítás után az „eredeti” 7 fizikai (mértékegységes) paraméterből (g , m , L , D , c , A és T) csupán 4 mértékegység nélküli paraméter (C , K , G , R) jelenik meg (a mértékegységek eltűnése könnyen ellenőrizhető például a 2. fejezet elején megadott SI mértékegységek alapján). Minden rendszer, amelynek ez a 4 dimenziótlan paramétere azonos értékű, tökéletesen azonos dinamikai viselkedést mutat, függetlenül a 7 „eredeti” fizikai paraméter értékétől.



A DIMENZIÓTLANÍTÁS FIZIKAI JELENTŐSÉGE

A tudományban általános értelemben valamely vizsgált valós R rendszer modelljének nevezünk egy realizált (megépített) másik M rendszert, amennyiben M rendszer könnyebben vizsgálható (mérhető, szabályozható) és M tanulmányozása információt szolgáltat az eredeti R rendszerre. A modellezés aspektusában a dimenziótlanítás fontos lehetőséget ad a kezünkbe, hiszen az izomorf rendszerek (amelyekben tehát a dimenziótlan dinamikai egyenletek és a bennük szereplő dimenziótlan paraméterek azonosak) alkotnak eredeti rendszer modell-rendszer párt, ha a modell rendszer könnyebben megvalósítható, vizsgálható.

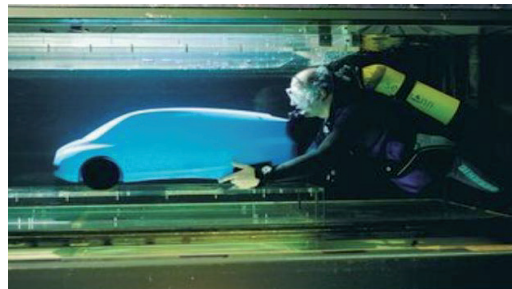
Nézzünk itt most csak egyetlen példát, a gyakorlati életben fontos áramlástan területéről. A cseppfolyós és légnemű közeg áramlását az ún. *Navier–Stokes-egyenletrendszer* írja le, amely matematikai szempontból nagyon bonyolult nemlineáris csatolt parciális differenciális egyenletrendszer. A dimenziótlanítás során megjelenő dimenziótlan paraméterek:

$$\text{Reynolds-szám: } Re = \frac{\nu \rho l}{\eta}, \quad \text{Froude-szám: } Fr = \sqrt{\frac{v^2}{gl}}, \quad \text{Rossby-szám: } Ro = \frac{v}{2\omega l},$$

ahol l a rendszer jellemző mérete, ρ , η és ν az áramló közeg sűrűsége, dinamikai viszkozitása és sebessége, és amennyiben nem elhanyagolható forgású vonatkoztatási rendszerben vagyunk (pl. a Föld nagy léptékű áramlásai), akkor ω a forgás szögsebessége.

A praktikus, dimenziótlanított mennyiségek megválasztása és a lényeges dimenziótlan számok azonosítása az adott áramlástan probléma modellezésének alapvető mozzanata, például járművek (gépkocsi, hajók, repülőgépek) tervezésekor. A prototípus és modell viszonylatában csak a Re Reynold-számok azonossága követelmény, ha az áramló közeg a vizsgált objektumot teljesen körülveszi, amennyiben nem veszi teljesen körül, akkor a Fr Froude-számok azonossága is megkövetelendő (ekkor a gravitációs erő is fontossá válhat).

2. ábra. Gépkocsimodell tesztelése vízcsatornában.





Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán

Például gépkocsi karosszériájának tesztelésekor az F_e közegellenállási erőkre teljesül, hogy:

$$\frac{F_{e_p}}{v_p^2 \rho_p l_p^2} = \frac{F_{e_m}}{v_m^2 \rho_m l_m^2},$$

ha a $Re_p = \frac{v_p \rho_p l_p}{\eta_p}$ és $Re_m = \frac{v_m \rho_m l_m}{\eta_m}$ Reynolds-számok azonos értékűek (p index

a prototípust, m index pedig a modellt jelöli).

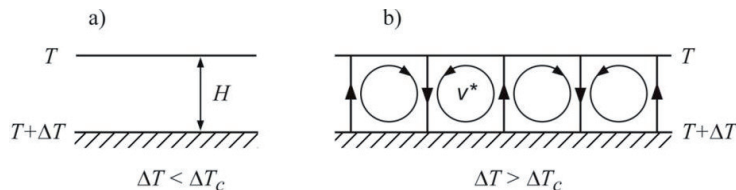
Végül mivel [2] cikkünkben az itt tárgyalt rugósinga-modell kaotikus tulajdonságait tanulmányoztuk, talán érdemes megemlíteni egy érdekes káoszelmélettel kapcsolatos tudománytörténeti epizódot. E. Lorenz a káoszelmélet „atyja” az elhíresült „pillangó” kaotikus attraktorra egy hőtani-áramlástani problémán keresztül talált rá.

Bénard-féle konvekció két vízszintesen elhelyezett hővezető lemez közötti közeg áramlását jelenti, amely akkor alakul ki (lásd pl. *rayleigh-benard_in_cacao.mp4* videó a letölthető anyagban), ha az alsó lemezt fűteni kezdjük, és a két lemez közötti hőmérsékletkülönbség egy kritikus küszöbértéket meghalad (3. ábra). A küszöb a határoló felületek közötti hőmérsékletkülönbség növelésével érhető el, de értéke függ a rendszerparaméterektől, azaz a β térfogati hőtágulási tényező, a D hődiffúzióvitás, az η dinamikai viszkozitás, a ρ sűrűség és a H rétegvastagság értékétől, valamint a g nehézségi gyorsulástól. E paraméterek dimenziótlan kombinációja az ún. *Rayleigh-szám*:

$$R = \frac{\beta g \rho H^3 \Delta T}{\eta D},$$

ami a vizsgált rendszer konvekcióra való hajlandóságát fejezi ki, és a konvekció beindulásához körülbelül 1700-as értékét kell elérnie.

3. ábra. A Rayleigh–Bénard-féle konvekció.



[2] Nagy P.–Tasnádi P. (2019): Rugósinga dinamikai vizsgálata – egy fizika versenyfeladat kaotikus utóélete. *Dunakavics* (a Dunai Egyetem online folyóirata), VII. évfolyam VIII. szám Pp. 31–46. (http://dunakavics.uniduna.hu/Online_1908.pdf)



[5] <https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/84612/12-006j-fall-2006/contents/lecture-notes/lecnotes11.pdf>

A jelenség matematikai leírásához a Navier–Stokes-egyenletrendszert kell használni, amely megoldhatatlanul bonyolult, de például a konvekció beindulási küszöbének közvetlen környezetében ($\Delta T \sim \Delta T_c$) használható közelítés esetén a dimenziótlanított egyenletrendszer lényegesen egyszerűsödik [5]:

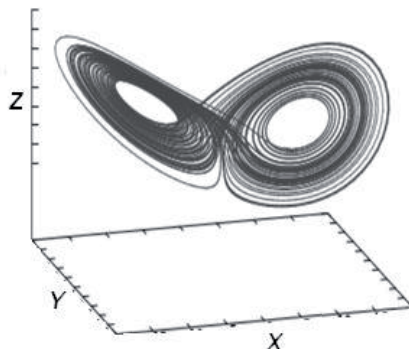
$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma \cdot (y - x) \\ \dot{y} &= x \cdot (r - z) - y \\ \dot{z} &= x \cdot y - b \cdot z \end{aligned} \right\}$$

ahol x a körbeáramlási sebesség, y és z a hővezetés erőssége, σ a közeg dimenziótlan

anyagi jellemzője az ún. *Prandtl-szám* ($\sigma = \text{Pr} = \frac{\nu}{D}$), $b=8/3$ és $r = \frac{|\Delta T - \Delta T_c|}{\Delta T_c}$,

ami jelen közelítés során tehát kicsi, jellemzően $r < 0.2$. Ebben a paramétertartományban tehát a fenti három egyenlet valós fizikai rendszert ír le, viszont semmilyen szabálytalan viselkedést nem mutat. Lorenz az r paramétert változtatva pl. $r = 28$ értéknél talált rá arra a döbbenetesen irreguláris viselkedésre, amely háromdimenziós fázistérbeli attraktora a híres pillangóforma (4. ábra) és amely újszerű és különös jelenséget *káosznak* nevezett el. Lorenz tehát olyan r paraméterértéknél talált rá a káoszra, ahol a levezetés során használt közelítés már nem érvényes, tehát elveszett a valós fizikai háttér a modell mögül. Lorenz zsenialitása, hogy ennek ellenére felismerte a jelenség univerzális jelentőségét.

4. ábra. Lorenz híres „pillangó” kaotikus attraktora ($\sigma=10$; $b=8/3$; $r=28$)





Fizikai modellalkotás – gondolatok egy versenyfeladat kapcsán

Dolgozatunkban megmutattuk, hogy viszonylag egyszerű rendszerek is különlegesen viselkedhetnek. A viszkózusan csillapított és periódikusan rángatott inga példáján illusztráltuk, hogy a mozgásegyenletek newtoni és a Lagrange-mechanika alapján történő felírása (természetesen) ekvivalens eredményre vezet, de a kétféle leírás kölcsönösen javíthat a mozgás mélyebb megértésén. Különösen a bevezető elméleti kurzusokban ez segíthet a hallgatóknak a hamiltoni legkisebbhatás-elv megértésében. Rámutattunk továbbá a mozgásegyenletek dimenzióatlanításának jelentőségére, és a fizikai modellalkotásban betöltött szerepére is. A rugósinga kaotikus viselkedését [2] cikkünkben elemeztük a kapott mozgásegyenletek számítógépes vizsgálatával.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Köszönettel tartozunk a kutatás támogatásáért, amely az EFOP-3.6.1-16-2016-00006 „A kutatási potenciál fejlesztése és bővítése a Neumann János Egyetemen” pályázat keretében valósult meg. A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, a Széchenyi 2020 program keretében valósul meg.

[2] Nagy P.–Tasnádi P. (2019): Rugósinga dinamikai vizsgálata – egy fizika versenyfeladat kaotikus utóélete. *Dunakavics*. (a Dunaiújvárosi Egyetem online folyóirata), VII. évfolyam VIII. szám Pp. 31–46. (http://dunakavics.uniduna.hu/Online_1908.pdf)

Grading curves and internal stability (*A szemeloszlás és a belső stabilitás kapcsolata*)

Óbudai Egyetem
E-mail: imre.emoke@kvk.
uni-obuda.hu

*Napier Egyetem,
Edinburgh, U.K.*
E-mail: d.barreto@
napier.ac.uk

*Ruhr Egyetem,
Bochum, Germany*
E-mail: wiebke.baille@
ruhr-uni-bochum.de

BME
E-mail: lorincz.1947@
gmail.com,

*Texas A&M Edinburg,
College Station, USA*
E-mail: vsingh@tamu.edu

Abstract: The measured grading curve is an empirical distribution function, a step function. This is considered here as a discrete distribution with fixed statistical cells. In the grading entropy theory it is characterized by the relative entropy resulting in two sets of entropy coordinates. These first and second grading entropy coordinates classify well the grading curves and are statistically more soundly based in terms of information content than the approximate quantile type parameters used at present. In the theoretical and experimental work on the grading entropy coordinates, the physical content of the parameters are analysed. The results can be summarized as follows. The first entropy parameter seems to be a continuous internal stability measure. The second one allows the definition of a unique, mean grading curve with finite fractal grain size distribution for fixed value of the first parameter. The first parameter is related to internal structure, proven here by DEM tools. It is shown by Math tools that the probability of a stable state of the grading entropy theory is very low. The generally occurring stable states in the nature are originated from the degradation which is deterministic. The internal stability of the engineering structures can be characterized by grading entropy.
Keywords: Grading curve and grading entropy, internal stability, fractal, DEM.

Összefoglalás: A szemeloszlási görbe empirikus eloszlási függvény, lépcsős függvény, rögzített statisztikai cellákkal. Diszkrét eloszlásnak tekintve, alkalmazva rá a relatív entrópia definícióját, levezethető két ún. entrópia-koordináta. Ezek jól osztályozzák az osztályozási görbéket, és statisztikailag jobbak információtartalom szempontjából, mint a jelenleg alkalmazott közelítő kvantilisok, vagy kvantilis típusú paraméterek hányadosai. Az elméleti és kísérleti munka elemezi a paraméterek fizikai tartalmát. Az eredményeket a következőképpen lehet összefoglalni.

Az első entrópia-paraméter egy folytonos belső stabilitásmértéknek tűnik. A második entrópia-paraméter lehetővé teszi egy átlagos szemeloszlási görbe meghatározását véges fraktál szemcseméret-eloszlással az első paraméter minden egyes értékére vonatkozóan. A mikromechanikai eredmények azt mutatják, hogy az első paraméter hogyan kapcsolódik a belső szerkezethez. Matematikai eszközökkel az az eredmény nyerhető, hogy a belső stabilitási szabály szerinti stabil állapot valószínűsége nagyon alacsony, a természetben a stabil állapot fordul mégis elő, ugyanis a talajok degradációja determinisztikus. A belső stabilitás a mérnöki földszerkezetek kulcsfontosságú paramétere.

Kulcsszavak: Szemcseeloszlás, belső stabilitás, fraktál, DEM.

[1] Lőrincz J. (1986): "Grading entropy of soils," *Doctoral Thesis, Technical Sciences*. TU of Budapest (in Hungarian).

Introduction

The grading curves of soils contain a large amount of data. This can render its use in the evaluation of soil properties awkward. Hence, rules based on a few nominated particle diameters have been developed (i.e. coefficients of uniformity and curvature, cu and cc , respectively). In more developed cases, some parametric functions are fitted to the grading curves or other approaches are used. However, these approaches are not valid for gap-graded grain size distributions. It is shown here that the two grading entropy coordinate pairs (base entropy and entropy increment), proposed by Lőrincz [1] may characterize the grading curves more effectively. They contain all measured data in terms of statistical means, and are related to internal stability.

Table 1. Fractions.

j [-]	1			23	24
Limits in d_o	1 to 2			2^{22} to 2^{23}	2^{23} to 2^{24}
S_{oj} [-]	1			23	24



[1] Lőrincz J. (1986):
“Grading entropy of
soils,” *Doctoral Thesis,*
Technical Sciences. TU
of Budapest (in Hun-
garian).

Grading entropy

SPACE OF GRADING CURVES

An abstract fraction system is defined. The diameter range for fraction j ($j = 1, 2, \dots, j$, see *Table 1*) is:

$$2^j d_0 \geq d > 2^{j-1} d_0, \quad (1)$$

where d_0 is the smallest diameter which may be equal to the height of the SiO_4 tetrahedron. The 2 base log of the diameter limits are integers, called abstract diameters. The relative frequencies of the fractions x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) for each grading curve fulfil the following equation:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad N \geq 1. \quad (2)$$

where the integer variable N – the number of the fractions between the finest and coarsest nonzero fractions– is used. The relative frequencies x_i can be identified with the barycentre coordinates of the points of an $N-1$ dimensional, closed simplex (which is the $N-1$ dimensional analogy of the triangle or tetrahedron, the 2 and 3 dimensional instances), and the space of grading curves with N fractions can be identified with an $N-1$ dimensional, closed simplex.

GRADING ENTROPY PARAMETERS

The grading entropy S is a statistical entropy, modified for the unequal cells (fractions are doubled). It can be separated into the sum of two parts [1]:

$$S = S_0 + \Delta S \quad (3)$$

where S_0 is base entropy and S is entropy increment. S_0 is a log “mean” of the diameter:

$$S_0 = \sum x_i S_{0i} = \sum x_i i \quad (4)$$



Grading curves and internal stability

where S_{oi} is the i -th fraction entropy (Table 1). The entropy increment:

$$\Delta S = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{x_i \neq 0} x_i \ln x_i \quad (5)$$

The relative base entropy A and normalized entropy increment B :

$$A = \frac{S_o - S_{o\min}}{S_{o\max} - S_{o\min}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i (S_{oi} - S_{o\min})}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i (i-1)}{N-1}, \quad B = \frac{\Delta S}{\ln N}. \quad (6)$$

where $S_{o\max}$ and $S_{o\min}$ are the entropies of the largest and the smallest fractions, respectively. Representing the space of the grading curves with N fractions by an $N-1$ dimensional, closed simplex, a secondary structure appear along to iso-surfaces of the normalised grading entropy parameters as follows. The grading entropy parameter A is a linear function, the $A = \text{constant}$ condition defines parallel hyper-plane sections of the $N-1$ dimensional simplex, which are disjunct subspaces in the space of the grading curves (Fig. 2). The grading entropy parameter B is a strictly concave function with a unique maximum for each $A = \text{constant}$ value, which is a mean („optimal”) point:

$$x_1 = \frac{1}{\sum_{j=1}^N a^{j-1}} = \frac{1-a}{1-a^N}, \quad x_j = x_1 a^{j-1} \quad (7)$$

where a is the root of the following equation:

$$y = \sum_{j=1}^N a^{j-1} [j-1 - A(N-1)] = 0 \quad (8)$$

The optimal grading curves have fractal distribution, the fractal dimension is as follows [2, 3].

$$n = 3 - \frac{\log g}{\log 2} \quad (9)$$

While a varies from 0 to 1 and 1 to ∞ , A varies from 0 to 0.5 and from 0.5 to 1, n varies from ∞ to 3 and from 3 to $-\infty$...respectively, at the two sides of the entropy diagram. Concerning the inverse image of a regular entropy diagram point $[A, B]$ in

[2] Imre E.-Talata I. (2017): “Some comments on fractal distribution,” Proc. MAFIOK. Pp. 22–32.

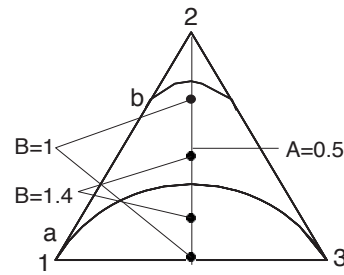
[3] Einav, I. (2007): “Breakage mechanics – Part I.” *Theory Journal of the Mech. and Physics of Solids*. 55: Pp. 1274–1297.



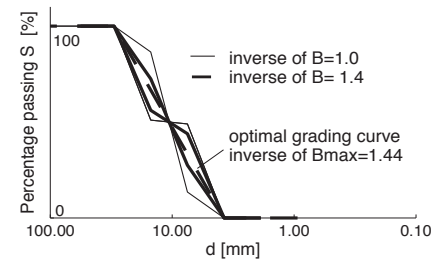
Imre E.–Barreto, D.–Talata I.– Baille, W.–Rahemi, N.–Goudarzy, M.–Lőrincz J.–Singh, V. P.

the simplex is an $N-3$ dimensional sphere, „centered” to the optimal point (of the $A = \text{const}$, $N-2$ dimensional hyperplane, *Figs. 1-2*).

Figure 1. $N=3$. (a) (b) The simplex points and the grading curves related to entropy parameters $A=0.5$ $B=1$, and $A=0.5$ $B=1.4$ which are topologically $N-3=0$ dimensional circles (point pairs and grading curve pairs).

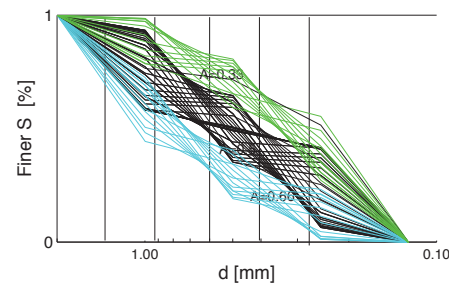
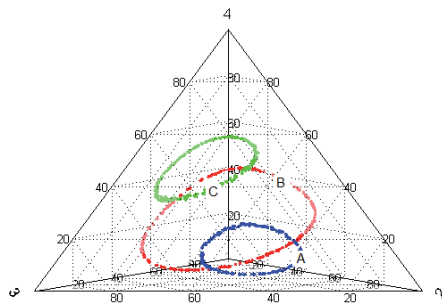


(a)



(b)

Figure 2. $N=4$. (a) (b) The simplex points and the grading curves related to entropy parameters $A=0.66$ $B=1.2$, and $A=0.5$ $B=1.2$, and $A=0.3$ $B=1.2$, which are $N-3=1$ dimensional topological circles (in the simplex and in the space of the grading curves).

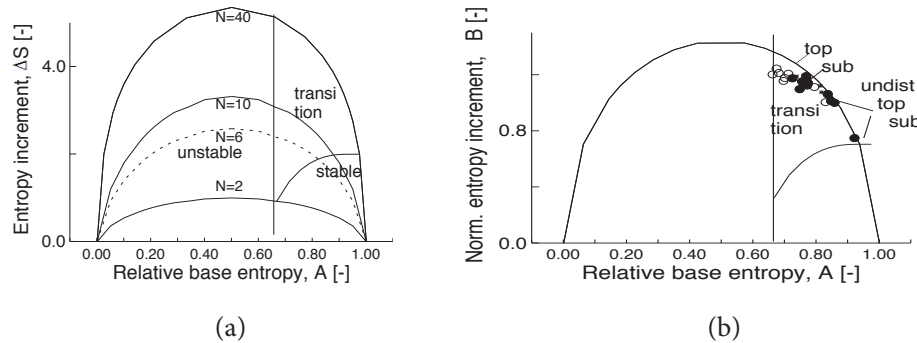


(b)



Grading curves and internal stability

Figure 3. (a) Internal or grain structure stability criterion in the non-normalized diagram. (b) Internal or grain structure stability criterion in the $N=17$ related normalized diagram, with the indication of the degradation example of waste rock in open pit mine rehabilitation (the top soil samples are more degraded). [10]



[1] Lőrincz J. (1986): “Grading entropy of soils,” *Doctoral Thesis, Technical Sciences*. TU of Budapest (in Hungarian).

[10] Imre E. –Fityus S. (2018): „*The entropy as a measure of soil texture maturity and internal stability*” DECGE 2018. Pp. 639–644.

GRADING ENTROPY TO DESCRIBE INTERNAL STABILITY

Four maps can be defined between a grading curve space ($N-1$ dimensional, open simplex) and the two dimensional space of the entropy coordinates: the non-normalized $\Delta \rightarrow [S_0, \Delta S]$; normalized $\Delta \rightarrow [A, B]$; partly normalized $\Delta \rightarrow [A, \Delta S]$ or $\Delta \rightarrow [S_0, B]$. Maps are continuous on the open simplex and can continuously be extended to the closed simplex for fixed N . The internal stability rule of the grading entropy theory [1] is defined by vertical flow tests on a partly normalized entropy diagram shown in Fig. 3(a). There are three main zones.

For $A < 2/3$, the mixtures are internally unstable, for $A = 2/3$ and $A > 2/3$ the soils are internally stable, the structure gradually builds up for elongated grading curves. Suffosion may occur in each zone. The rule can be interpreted such that in Zone I (if $A < 2/3$) the coarse particles „float” in the matrix of the fines and become destabilized when the fines are removed by piping.

In the complementer zone ($A = 2/3$ and $A < 2/3$), the coarse particles form a skeleton, total erosion cannot occur. In Zone III, the structure of larger particles is assumingly inherently stable.



Imre E.–Barreto, D.–Talata I.– Baille, W.–Rahemi, N.–Goudarzy, M.–Lőrincz J.–Singh, V. P.

Table 2. *The geometrical probability of the internally stable state in terms of the fraction.*

N [-]	2	5	10	20	50
$P(A>2/3)$	3E-01	1E-01	4E-02	6E-03	2E-05

Table 3. *Effect of grading entropy parameter A on the coordination number and critical friction angle - DEM and real experimental results.*

A [-]	Z [-]	Zm [-]	$\phi'_{\text{crit}} [^\circ]$	$\phi'_{\text{crit, real}} [^\circ]$
0.10	2.87	4.32	18.72	~33
0.33	2.34	4.41	18.43	~33
0.50	2.52	4.42	18.08	~34,5
0.66	2.83	4.47	17.85	~35.8
0.90	3.39	4.47	17.55	~36.5

Figure 4. *Liquefaction susceptibility of Houstun sand - fine mixtures, varying fine content. Tests of Negar Rahemi in partly normalized diagram. (a) Gradings with various fine content percentages. (b) Probability of sample liquefaction at the previous points. (Note: bracket means that only limited liquefaction may occur.)*

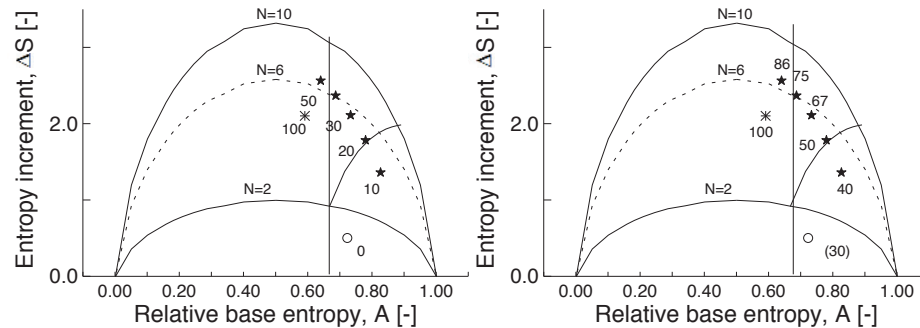
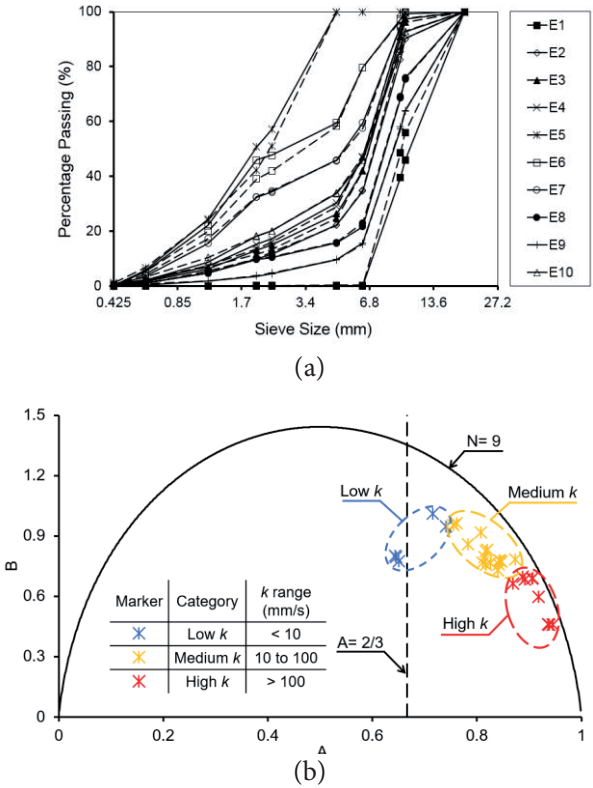


Figure 5. (a) Grading curve set out of three tested sets with varying fine content. (b) Permeability variation in normalised diagram [11].



[11] Feng, S.–Var-
danega, P. J.–Ibraim,
E.–Widyatmoko,
I. –Ojum, C. (2018):
„Permeability as-
sessment of some
granular mixture”
Géotechnique.



[4] Miao, G.–Airey, D. (2013): „Breakage and ultimate states for a carbonate sand” *Geotechnique* 63. No. 14. Pp. 1221–1229.

[5] Palmer, A. C.–Sander-son, T. J. O. (1991): „Fractal crushing” *Proc R Soc London A Math Phys Sci* 433. 1889. 469–477.

[6] Coop, M. R.–Sorensen, K. K.–Bodas Freitas, K. K.–Georgoutsos, G. (2004): Particle breakage during shearing of a carbonate sand. *Geotechnique* 54(3): Pp. 157–163.

[7] Imre, E.–Barreto, D.–Tala-ta, I.–Goudarzy, M.–Rahemi, N.–Baille, W. (2018): *Fractal and optimal gradings and their relationship to internal stability*. Atlanta. submitted.

[10] Imre E. –Fityus S. (2018): „The entropy as a measure of soil texture maturity and internal stability” DECCE 2018. Pp. 639–644.

[12] Lőrincz, J.–Imre, E.–Gálos, M.–Trang, Q. P.–Tel-ekes, G.–Rajkai, K.–Fityus, I. (2005): Grading entropy variation due to soil crushing. *Int. Journ. of Geomechanics*. Vol 5:4. P. 31–320.

Analysis of the internal stability rule

INTERNAL STABILITY AND PROBABILITY

The optimal or fractal grading curves have fractal dimension between $-\infty < n < \infty$. The fractal soil is stable if $n < 2$, unstable at $A < 2/3$ (n is varying in the function of N), transitional between these values. The natural soils [4, 5, 6] are generally fractal grading curves, the fractal dimension is between 2 and 3, being related to the stable-transitionally stable zones in terms of internal stability.

The geometrical probability expressed by the ratio of the volume of the simplex of the grading curves where $A > 2/3$ is met and the volume of the whole simplex tends to be zero (Table 2, [7]). This contradiction can be explained by the fact that the degradation process is deterministic but its discussion is beyond the scope of this paper (see eg., [12]).

Soil degradation in mine rehabilitation through degradation of waste rock over short time period is measured by studying the grading curve data ([10]). The grading curves are plotted in the transitional stability zone on the entropy diagram, with near fractal dimensions 2.5 to 2.8. A distinct difference for all sub and top samples is found: the topsoil is more degraded (Fig 3b).

INSIGHTS FROM DEM SIMULATIONS

Preliminary 3D DEM simulations of spherical particles using periodic boundaries were performed. Four fraction sizes were used: 0.125–0.25 mm, 0.25–0.5 mm, 0.5–1 mm, and 1–2 mm (uniform distribution was assumed within the limits). 2-fraction soils ($N=2$) were tested with various A values under drained triaxial conditions until the critical state was achieved.

These DEM specimens were isotropically consolidated to 200 kPa and subsequently sheared with an inter-particle friction coefficient of 0.3. As a result their initial density is close to minimum and the overall (Z) and mechanical (Z_m) coordination numbers reflect this, as shown in Table 3.



Grading curves and internal stability

Note the coordination numbers represent the average number of contacts per particle for the specimen at the critical state. The mechanical coordination number is of particular relevance as it indicates the average number of contacts per particle, but in contrast to the overall coordination number, it only includes the particles which effectively transmit stress (i.e. those that are part of strong force chains as normally reported in DEM studies).

Note that as A increases, Z_m also increases indicating that the number of particles effectively transmitting stress increases. Furthermore, as A increases, the difference between Z and Z_m decreases. This implies that as A increases the number of „rattlers“ (i.e. particles that are not part of the strong force chains) reduces. In other words, as A increases, the specimens become inherently more stable. In contrast, lower values of A indicate a higher likelihood of „rattlers“ -or fines- that are potentially erodible. Hence, there is a clear link between stability, base entropy and mechanical coordination number.

Furthermore, the critical angle of shearing resistance seems to be dependent of A . This dependence relates to the inherent stability of the strong force chains, but its discussion is beyond the scope of this paper. It must be noted that the range of variation is nevertheless limited.

EXAMPLES ON THE EFFECT OF FINES

A series of 60 conventional triaxial compression tests are conducted on Hostun sand –silt mixtures to investigate the effects of fines on the undrained monotonic response of sand [8]. *Fig. 4(a)* shows the mixtures with various fine content, *Fig. 4(b)* demonstrates that transitionally stable mixtures can increasingly be prone to liquefaction during static loading with increasing fine content if practically all possible initial relative densities are considered [9]. In a similar study, the boundary between the "fines-in-sand" and "sand-in-fines" micro-structure, the threshold fines content is found at around $A=2/3$ [9]. A correlation between the normalised grading entropy coordinates and the coefficient of permeability is presented [11]. Permeability depends on the voids. Some permeability zones are identified on the normalised entropy diagram on the basis of k values measured on 3 sets of grading curves. These zones follow rule that with decreasing A the fine content is increasing and the porosity is decreasing (*Fig. 5b*).

[8] Rahemi, N. (2017): „Evaluation of Liquefaction Behavior of Sandy Soils using Critical State Soil Mechanics and Instability Concept“ *Ph D Thesis, Faculty of Civil Engineering, Ruhr-U Bochum*.

[9] Goudarzy M. (2015): „Micro and Macro Mechanical Assessment of Small – Intermediate Strain Properties of Granular Material“ *Ph D Thesis, Faculty of Civil Engineering, Ruhr-U Bochum*.

[11] Feng, S.–Varadanega, P. J.–Ibraim, E.–Widyatmoko, I. –Ojum, C. (2018): „Permeability assessment of some granular mixture“ *Géotechnique*.



Discussion

THE STRUCTURE OF THE GRADING CURVE SPACE

Representing the space of the grading curves with N fractions by an $N-1$ dimensional, closed simplex, the $A = \text{constant}$ condition means $N-2$ dimensional parallel hyper-planes in the Euclidean space generated by the simplex. The $B = \text{constant}$ condition in addition is related to an $N-3$ dimensional, concentric topological circle around the optimal point on the $A = \text{constant}$ hyper-plane section.

The optimal point is defined by the maximum of B for the given A value. The optimal point is close to the mass center of the $A = \text{constant}$ hyper-plane simplex section.

The optimal grading curve is a kind of mean grading curve considering all grading curves with the same A . It is a fractal grading is with minimum arc length. Being the dimension of the optimal line (one) less than the dimension of the space of the grading curves ($N-1$), it is worthy to set up any relationship between the mean gradings (instead of the whole space of the grading curves) and a given physical parameter.

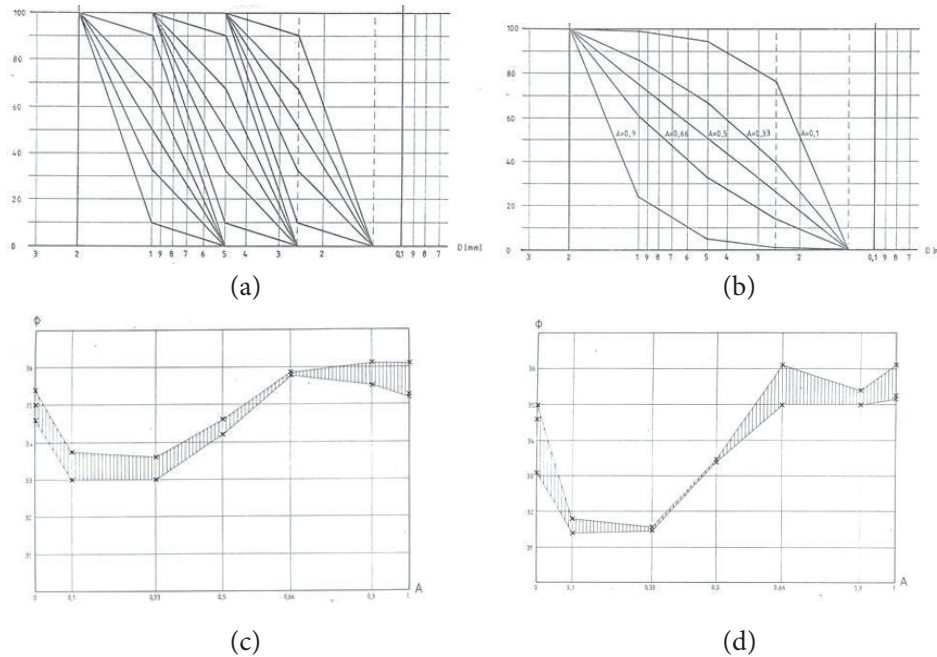
The grading entropy parameters are various statistical means. The base entropy S_0 is a kind of dimensionless mean log diameter, which is similar to d_m . Its normalized value the relative base entropy parameter A is a normalized mean log diameter, varying between 0 and 1 with a shift symmetry in the log diameter axis, the extremes are related to the minimum and maximum log diameters.

A indicates the relative distance of the mean and the minimum log d value. The base entropy S_0 is similar to d_m . Its normalized value, the relative base entropy A is a continuous internal stability measure, the $A < 2/3$ condition indicates internally (more) unstable soils (as A decreases).

The entropy increment ΔS and its normalized version B are log weighted generalized geometrical means of the x_j ($j = 1, 2, 3 \dots N$), having maximum values of $\ln N / \ln 2$ and $1 / \ln 2$, respectively. For those grading curves, in which all N fractions are well represented, the entropy increment is typically close to the maximum value. They reflect the actual effective number of fractions within the mixture (like the coefficient of uniformity c_u), and also reflect the degree of degradation.

Grading curves and internal stability

Figure 6. The relation of critical state friction angle and the entropy coordinate A in case of optimal sand soil mixtures ([15]). (a) and (b) grading curves of the 2-and 4-fraction sand mixtures. (c) and (d) critical state friction angle of the 2-and 4-fraction sand mixtures as A varies between 0 and 1.



THE INTERNAL STRUCTURE IN TERMS OF FINES

The influence of fine particles on sand force structure, from micro-structure point of view, was first presented by Mitchell (1976) [13] and then simplified by Thevanayagam (1998) [14] for other mechanical responses of transition soils. In two similar studies, the boundary between the "fines-in-sand" and "sand-in-fines" micro-structure was examined, and the threshold fines content was found at around $A=2/3$ [8, 9], supporting the internal stability criterion of. [1]

[1] Lőrincz J. (1986): "Grading entropy of soils," *Doctoral Thesis, Technical Sciences*. TU of Budapest (in Hungarian).

[13] Mitchell, J. K. (1976): *Fundamental of soil behavior*. London: Taylor & Francis.

[14] Thevanayagam, S. (1999): Intergranular contact and shear modulus of non-plastic granular mixes. In: '13th ASCE Conference on Engineering Mechanics. John Hopkins University.

[15] Göblyös, I. (1989): *The dependence of critical state friction angle on the entropy parameters*. MSc Thesis. Budapest: BME.



[1] Lőrincz J. (1986): "Grading entropy of soils," *Doctoral Thesis, Technical Sciences*. TU of Budapest (in Hungarian).

[13] Mitchell, J. K. (1976): *Fundamental of soil behavior*. London: Taylor & Francis.

[14] Thevanayagam, S. (1999): *Intergranular contact and shear modulus of non-plastic granular mixes*. In: '13th ASCE Conference on Engineering Mechanics'. John Hopkins University.

[15] Göblyös, I. (1989): *The dependence of critical state friction angle on the entropy parameters*. MSc Thesis. Budapest: BME.

CRITICAL STATE FRICTION ANGLE

Artificial - mixtures of natural sand grains (see Figure 6) were used to determine the critical state friction angle in [15]. The four fractions were: 0.125–0.25 mm, 0.25–0.5 mm, 0.5–1 mm, 1–2 mm (uniform distribution was assumed within the limits). The critical state friction angle measured on optimal 2-and 4-fraction soils are shown in Figure 6. Saturated, drained triaxial tests were made with sample dimension of 100mm diameter, 100 mm height until critical state. The samples were saturated after compaction. According to Figure 6, it was found that the critical state friction angle was dependent on A for each soil series in the same way. It can be noted that this dependence was similar to the dependence of the coordination number (see Table 3) but was not in agreement with the DEM critical state friction angle (see Table 3). Further research is suggested on this question, on the variation of the critical state friction angle in terms of the grading curve and the coordination number.

Conclusion

Originally the influence of fine particles on sand force structure, from micro-structure point of view, was examined [13, 14]. Lőrincz [1] generalized this idea to any grading curve using grading entropy parameter A , and connected it to internal stability of soils. The relative base entropy parameter A measures the distance between the mean and the minimum log diameters, varying between 0 and 1, it has a potential to be a criterion number for internal stability, based on the simple physical fact that if the mean grain diameter is large enough, then enough large grains are present in a mixture and these will form a stable skeleton. It follows from this sound physical basis that the two grading entropy coordinate pairs (normalized or non-normalized), proposed by Lőrincz [1] together with the integer variable N (the number of the fractions), S_{omin} – and d_{min} – (the entropy and diameter of the smallest fraction) may characterize the internal stability related phenomena like piping, liquefaction in terms of the grading curves more effectively than the usual diameter values. To establish relations between the entropy parameters and soil physical parameters are promising, real and DEM experiments are suggested to be performed and reevaluated in further research. Also, to describe soil degradation, soil modification, compaction or breakage both in laboratory and in nature condition, the grading entropy theory is useful tool.



GAMBÁR KATALIN*

Példa a hőmérséklet fogalmának általánosítására

Összefoglalás: Ebben a cikkben szeretnénk megmutatni hogyan lehetséges – természetes módon – a klasszikus térelmélet keretein belül bevezetni a dinamikai hőmérsékletet, mint termodinamikai változót. Bevezettünk egy olyan skalárteret (potenciálteret), amely dinamikus módon generálja a hőmérsékletet, mint terménnyiséget. Ezen potenciál segítségével képesek leszünk leírni a korai univerzum a termikus viselkedését az univerzum leírására ismert inflációs kozmológiai modellhez kapcsolódva. Megmutatjuk, hogy a modellben az inflaton tér lebomlik a bevezetett potenciáltérbe. A folyamat dinamikája változik, egy dinamikai fázisátalakulás jelenik meg: az energia terjedésének disszipatív és nem-disszipatív formái között. Jelen leírás összhangban van a már ismert kozmológiai modellek eredményeivel.

Kulcsszavak: Dinamikai hőmérséklet; Lorentz-invariancia; inflaton tér.

Abstract: In the present paper we would like to show how to introduce – in a natural way – the dynamic temperature as a thermodynamic variable within the framework of classical theory. Such a scalar field (potential field) is suggested that generates the temperature in a dynamic way. By the help of this potential we are able to describe the thermal behavior of the early universe connected to a known cosmological model. It is pointed out that the inflaton field decays into the introduced potential field. The dynamics of process changes, a dynamic phase transition appears: between the dissipative and non-dissipative forms of energy propagation. The presented study is in line with the results of known cosmological models.

Keywords: Dynamic temperature; Lorentz invariance; inflaton field.

F izika

* Óbudai Egyetem, Kandó
Kálmán Villamosmérnöki Kar,
E-mail: gambar.katalin@kvk.
uni-obuda.hu



- [1] Gambár, K.–Márkus. F. (1994): *Phys. Rev. E* 50 P. 1227.
- [2] Gambár, K.–Márkus. F. (2005): *Phys. Rev. E* 71. P. 066117.
- [3] Márkus, F. (2005): Hamiltonian formulation as a basis of quantized thermal processes. In: Sieniutycz S–Farkas H. (Eds.): *Variational and Extremum Principles in Macroscopic Systems*. Pp. 267–291. Oxford: Elsevier.
- [4] Gambár, K.–Márkus, F. (2008): *Phys. Lett. A* 361 P. 283.
- [5] Gambár, K.–Márkus, F. (2008): Példa a hőmérséklet fogalmának általánosítására. *Rep. Math. Phys.* 62 P. 219.
- [6] Márkus, F. (2011): Can a Lorentz invariant equation describe thermal energy propagation problems? In: Vikhrenko, V. S. (Ed.): *Heat Conduction - Basic Research*. Pp. 155–176. Rijeka: InTech.
- [7] Coleman, S.–Weinberg, E. (1973): *Phys. Rev. D* 7 P. 1888.
- [8] Salam, A.–Strathdee, J. (1974): *Phys. Rev. D* 9. P. 1129.
- [9] Frère, J.-M.–Nicoletopoulos. P. (1975): *Phys. Rev. D* 11. P. 2332.
- [10] Frishman, Y.–Römer, H.–Yankielowicz, S. (1975): *Phys. Rev. D* 11. P. 3040.
- [11] Guth, A. H. (1981): *Phys. Rev. D* 23 P. 347.

Bevezető

A gyorsan változó termikus folyamatok nem írhatók le a lokális egyensúly hipotézisére (sztatikus egyenletek) alapozva. Ezért a Lorentz-invariáns, dinamikus hőmérséklet bevezetése szükségessé vált. A Lagrange-formalizmus megfelelő matematikai alapokat teremt az egyszerű termikus folyamatok egy relativisztikusan invariáns leírásához [1–6]. A bevezetés után nyilvánvaló elvárás, hogy ezt a termikus skalárteret csatoljuk más fizikai terekkel. Ily módon a termikus viselkedés természetes módon jelenik meg a különböző fizikai folyamatokban. Ez a cikk egy példa ennek bemutatására: a kozmológiai inflaton tér és a termikus potenciáltér csatolására az univerzum kezdeti rövid időszakára [7–23]. Mindkét modellt a dinamikus hőmérséklet (DT) modellt és a Linde-féle inflációs modellt azonos matematikai keretben kell leírni, amelyet a Hamilton–Lagrange-formalizmus tud biztosítani.

A következő fejezetben röviden vázoljuk a termikus hőmérséklet bevezetését és matematikai hátterét. Majd bemutatjuk a Linde-modell leírását, ezután megmutatjuk az inflaton és a termikus tér kölcsönhatásának csatolását. A kapott mozgásegyenletek megoldásait mutatjuk meg (optimális paraméterezést választva) végül.

Termikus folyamatok Lorentz-invariáns leírása

Ahhoz, hogy ellentmondások nélkül egy teret csatolni tudjunk az inflaton térhez, a csatolandó térnek Lorentz-invariánsnak kell lennie. Ezért szükségszerű, hogy a disszipatív (termikus) energiatérjedést Lorentz-invariánsan tudjunk leírni [4, 5] függetlenül a konkrét esetektől. A leírás alapja, hogy a megfelelő Lagrange-sűrűségfüggvényt megadjuk

$$L_w = \frac{1}{2c^4} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Delta \varphi)^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Delta \varphi - \frac{1}{2} \frac{c^4 c_v^4}{16 \lambda^4} \varphi^2, \quad (1)$$



Példa a hőmérséklet fogalmának általánosítására

ahol φ a termikus skalár potenciál, c a vákuumbeli fénysebesség, v_c az állandó térfogat melletti fajhő és λ a hővezetési együttható. A Hamilton-elv alkalmazása után, megkapjuk a mozgásegyenletet

$$\frac{1}{c^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \Delta \Delta \varphi - \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Delta \varphi - \frac{c^4 c_v^4}{16 \lambda^4} \varphi = 0. \quad (2)$$

Legyen a dinamikai hőmérséklet definíciója:

$$T = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi + \frac{c^2 c_v^2}{4 \lambda^2} \varphi. \quad (3)$$

A hőmérséklet időbeli változása megadható a (2) és (3) egyenletek alapján

$$(4) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \Delta T - \frac{c^2 c_v^2}{4 \lambda^2} T = 0.$$

Ez az egyenlet egy Klein-Gordon-típusú egyenlet „negatív tömeg” együtthatóval (harmadik tag az egyenletben). Használva azt az egyszerűsítést, hogy $c = 1$; $\hbar = 1$ („természetes egység”), és bevezetünk egy „tömeg”-et a termikus térben

$$M_0 = \frac{\hbar c_v}{2 \lambda}, \quad (5)$$

a Lagrange-sűrűségfüggvény alakja

$$L_w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Delta \varphi)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Delta \varphi - \frac{1}{2} M_0^4 \varphi^2. \quad (6)$$

[12] Linde, A. (1982): *Phys. Lett.* B 108 P. 389.

[13] Albrecht, A.–Steinhardt, P. J. (1982): *Phys. Rev. Lett.* 48. P. 1220.

[14] Kolb, E. W.–Turner, M. S. (1990): *The Early Universe Addison-Wesley*. Massachusetts: Reading.

[15] Linde, A. (1994): *Phys. Rev. D* 49. P. 748.

[16] Kofman, L.–Linde, A.–Starobinsky, A. A. (1997): *Phys. Rev. D* 56. P. 3258.

[17] Felder, G.–Kofman, L.–Linde, A. (1999): *Phys. Rev. D* 60. P. 103505.

[18] Liddle, A. R.–Lyth, D. H. (2000): *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure. Cambridge Univ. Press*. Cambridge.

[19] Felder, G.–Kofman, L.–Linde, A. (2001): *Phys. Rev. D* 64. P. 123517.

[20] Felder, G.–Frolov, A.–Kofman, L.–Linde, A. (2002): *Phys. Rev. D* 66. P. 023507.

[21] Desroche, M.–Felder, G. N.–Kratichvil, J. M.–Linde, A. (2005): *Phys. Rev. D* 71. P. 103516.

[22] Hoyle, F.–Burbidge, G.–Narlikar, J. V. (2005): *A Different Approach to Cosmology. Cambridge Univ. Press*. Cambridge.

[23] Podolsky, D.–Felder, G. N.–Kofman, L.–Peloso, M. (2006): *Phys. Rev. D* 73. P. 023501.



Az Einstein-egyenletek és a mozgásegyenletek a Friedman–Robertson–Walker (FRW) metrikában

A Friedman-egyenletekhez tartozó Lagrange-függvény L_{FRW} , és a tér metrikája $\tilde{g}$, így a hatás

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L_{FRW} . \quad (7)$$

A Linde-féle inflációs modellben a Lagrange-függvény [7-23]

$$L_{FRW} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2a^2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) , \quad (8)$$

ahol ϕ az inflaton tér, $a(t)$ a tér metrikájához tartozik, az univerzum normált sugarát jelenti aznidő függvényében. Ebben a modellben $\tilde{g}$ a Friedman–Robertson–Walker (FRW) metrikus tenzor, amelynek determinánsa:

$$\sqrt{-\tilde{g}} = a^3 , \quad (9)$$

ahol

$$a = \frac{R(t)}{R_0} . \quad (10)$$

Az inflaton tér mozgásegyenlete a variációs technikát alkalmazva

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2} \Delta \phi + 3H \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi} . \quad (11)$$

Itt H a Hubble-paraméter

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} . \quad (12)$$

A különböző modellek abban térnek el egymástól, hogy miként választják meg a csatolt terek potenciálját. A hibrid inflációs modell (Andrei Linde), amely széles körben elfogadott modell

$$V(\sigma, \phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \sigma^2 + \frac{1}{4\lambda} (M^2 - \lambda \sigma^2)^2 . \quad (13)$$



Példa a hőmérséklet fogalmának általánosítására

Az első tag az inflaton térhez tartozik m tömeggel; σ a Higgs-tér, a második tag csatolja az inflaton és a Higgs-teret; a harmadik tag generálja a Higgs-mechanizmust. M a Higgs-bozon tömege (az LHC-kísérlet alapján $M = 125.3 \pm 0.6 \text{ GeV}/c^2$). A Hamilton-sűrűségfüggvény (energiasűrűség-függvény) ezek után könnyen származtatható

$$\tilde{H} = \rho_\phi = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2a^2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right). \quad (14)$$

A továbbiakhoz szükséges kiszámolni FRW metrikában az Einstein-egyenletet

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (15)$$

ahol ρ a tömegsűrűség, G a gravitációs konstans. Továbbá hasznos bevezetni a Planck-tömeget

$$M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}},$$

$\hbar$ a Planck konstans per 2π . Ezek után a Friedman-egyenlet, amely a sík univerzumhoz tartozik

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \rho_\phi \quad (16)$$

ahol ρ_ϕ az energiasűrűséget jelenti. Feltételezve, hogy csak egy homogén univerzum létezik, amelyben időben végbemenő események zajlanak, a mozgásegyenletek az alábbira egyszerűsödnek:

$$\frac{d^2 \phi_0}{dt^2} + 3H \frac{d\phi_0}{dt} = - \frac{\delta V(\phi_0)}{\delta \phi_0}, \quad (17)$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right)^2 + V(\phi_0) \right). \quad (18)$$

Nyilvánvaló, hogy a termodinamika hiányzik a leírásból.



[26] Sandoval-Villalobazo, A.–García-Colín, L. S. (2000): *Physica A* 286 P. 307.

[27] Frei Zsolt–Patkós András (2005): *Inflációs kozmológia*. Budapest: Typotex.

A termikus potenciáltér és a skalártér kölcsönhatása

A két folyamat együttes leírását a terek Lagrange-sűrűségfüggvényének csatolásával érhetjük el.

$$L_w = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)^2 + \frac{1}{2a^4} (\Delta \varphi)^2 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Delta \varphi - \frac{1}{2} M_0^4 \varphi^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2a^2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi, \varphi) \right). \quad (19)$$

Eközben figyelembe vesszük, hogy a $V(\phi, \varphi)$ potenciál már a termikus tértől is függ. Az elmélet elvárásainak megfelelően a legegyszerűbb választás:

$$V(\phi, \varphi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} g_0^2 \phi^2 \varphi^2. \quad (20)$$

Az első tag az inflaton tér, hasonlóan, ahogy a (13) egyenletben van, a második tag a két tér csatolása (inflaton tér és termikus tér). Mivel a disszipáció és a hőmérséklet része a leírásnak, így a *Termodinamika II.* főtétele természetesen tartalmazza. Alkalmazva a variációs számítást, a megfelelő mozgásegyenletek, melyek a homogén termikus-inflaton térre vonatkoznak, származtathatók

$$\frac{d^2 \phi_0}{dt^2} + 3H \frac{d\phi_0}{dt} = -(m^2 + g_0^2 \varphi_0^2) \phi_0, \quad (21)$$

$$\frac{d^4 \varphi_0}{dt^4} + 6H \frac{d^3 \varphi_0}{dt^3} = (M_0^2 + g_0^2 \phi_0^2) \varphi_0, \quad (22)$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} \right)^2 - \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial t^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} M_0^4 \varphi_0^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} g_0^2 \phi_0^2 \varphi_0^2 \right]. \quad (23)$$

A dinamikai hőmérséklet:
$$T = \frac{d^2 \varphi_0}{dt^2} + M_0^2 \varphi_0. \quad (24)$$

A csatolt differenciálegyenletek tartalmazzák mind a disszipatív, mind a nem-disszipatív energiaterjedést egyszerre [4, 6, 24, 25]. Úgy tűnik, hogy az inflaton tér kiterjedése, miközben hűl, sikeresen leírható ebben az általunk javasolt modellben, és a későbbi újra melegedő szakasz is. Így teljesül az általánosan elfogadott elv, hogy a disszipatív folyamatoknak nélkülözhetetlen szerepe van a korai univerzum evolúciójában [26, 27].



Példa a hőmérséklet fogalmának általánosítására

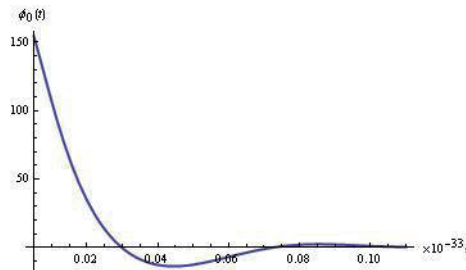
Eredmények és diszkusszió

Az előzőekben megmutattuk, hogyan lehet csatolni az inflaton teret (ϕ) és a disszipatív—nem-disszipatív energiaterjedés generátorteret (ϕ), kiszélesítve ezzel a Linde-féle inflációs modellt a korai univerzumra. A fenti egyenleteket Linde javaslatára a következő paraméterekkel, numerikusan megoldjuk:

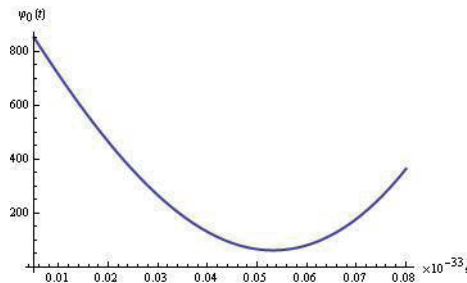
$m = 80\text{ GeV}$, $M_0 = 52.2\text{ GeV}$, és $g_0 = 0.120\text{ GeV}$.

Az eredmények azt mutatják, hogy az energiasűrűség a ϕ inflaton tartományból átváltozik (1. grafikon) a termikus tartományba (2. grafikon). Annak ellenére, hogy energiaátalakulás van ϕ termikus tér is csökken, mivel a lehűléses tágulás sokkal gyorsabb. Ennek a következménye lesz, hogy az inflaton tér oszcillálni kezd (1. grafikon), és ugyanekkor kiszámolt termikus tér (2. grafikon) és a hőmérséklet (3. grafikon) növekedni kezd az energia átalakulás miatt. A számolt és ábrázolt normált univerzum sugár (4. grafikon), az energiasűrűség (5. grafikon) és a nyomás (6. grafikon) ugyancsak egyeznek az irodalomból ismertekkel.

1. ábra. Az inflaton tér időfüggése, csökkenés, majd kezdődő oszcilláció.



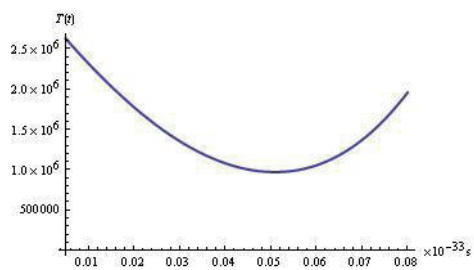
2. ábra. A termikus tér változása az idő függvényében.



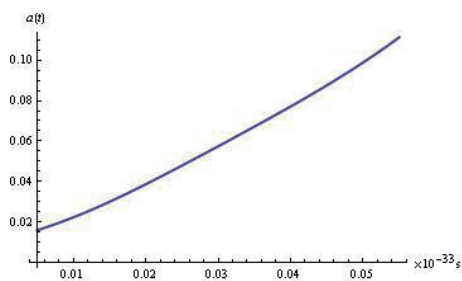


Gambár Katalin

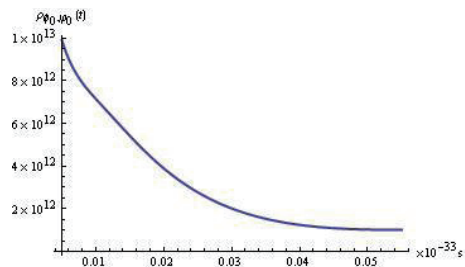
3. ábra. A hőmérséklet változása az idő függvényében.



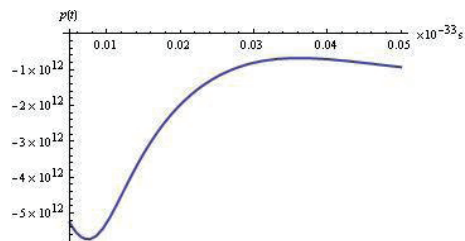
4. ábra. A táguló univerzum normált sugara az idő függvényében.



5. ábra. Az univerzum csökkenő energiasűrűsége



6. ábra. A nyomás időfüggése.





KOVÁCS MÁRK *-AGG PÉTER ANDRÁS **-JOHANYÁK ZSOLT CSABA ***

Ötödik generációs mobilhálózatok forgalomirányítása és forgalomelosztása SDN és SDR használatával

Absztrakt: A jelenlegi leggyorsabb negyedik generációs mobil hálózatok megjelenésével jelentősen megnőtt az okos készülékek száma, és ez számottevő igényt generált a webes tartalmak minőségi és gyors elérésére. A 4G további fejlesztésre szorult, ennek kapcsán jött létre a jelenleg is használt LTE-Advanced, amely a hozzáadott antennák számával erősítette a hálózat stabilabb működését. Ellenben ez a megoldás sem a legjobb, ezért szükség van a következő generációs hálózat kifejlesztésére és kialakítására, az 5G-re. Az új technológiához viszont kulcsfontosságú a jól megtervezett forgalomirányítás, forgalomelosztás.

Erre egy megoldást adhat a vezetékes hálózatoknál is alkalmazott szoftveren definiált hálózat (Software Defined Networking – SDN), ami lehetővé teszi, hogy az egyes fizikai kapcsolókat és forgalomirányítókat ne kelljen külön egyesével konfigurálni, hanem egy központosított vezérlővel tudjuk működtetni a hálózatunk minden egyes elemét az aktuális forgalom alapján. Cikkünk az 5G és az SDN, illetve a szoftveresen definiált rádió (Software Defined Radio – SDR) közötti kapcsolatot mutatja be.

Kulcsszavak: 5G; forgalomirányítás; forgalomelosztás; SDN; SDR.

Abstract: With the advent of today's fastest fourth generation mobile networks, the number of smart devices has increased significantly, creating a significant demand for high quality and fast access to web content. 4G needed further development, resulting in the LTE-Advanced, currently in use, which added more antennas to enhance the stability of the network. However, this solution is not the best, so we need to develop and build the next generation network, 5G. However, well-designed traffic management and traffic distribution are key to the new technology. One solution to this is Software Defined Networking (SDN), which allows you to configure each physical switch and router separately and operate each element of your network with

I
nformatika

* Neumann János Egyetem,
GAMF Műszaki és Informa-
tikai Kar
E-mail: kovacs.mark@gamf.
uni-neumann.hu

* Neumann János Egyetem,
GAMF Műszaki és Informa-
tikai Kar
E-mail: agg.peter@gamf.uni-
neumann.hu

* Neumann János Egyetem,
GAMF Műszaki és Informa-
tikai Kar
E-mail: johanyak.csaba@
gamf.uni-neumann.hu



[1] Kreutz, D.–Ramos, F. M. V.–Verissimo, P. (2015): Software-Defined Networking: A Comprehensive Survey. *Proceedings of the IEEE*. Vol. 103. Issue: 1. Jan. 2015. Pp. 14–76.

[2] Ramos, F. M. V.–Kreutz, D.–Verissimo, P. (2015): Software-defined networks: On the road to the softwarization of networking. *Cutter IT Journal*.

a centralized controller which based on the actual traffic. This article describes the relationship between 5G and SDN and Software Defined Radio (SDR).

Keywords: 5G; routing; traffic distribution; SDN; SDR.

Bevezetés

Számítógépes hálózatok használata szinte kikerülhetetlen a mai világban. Az élet minden területén megjelennek mind a vezetékes, mind a vezeték nélküli hálózatok, melyek segítségével számítógépeink, okos eszközeink kommunikálhatnak egymással. A 4. generációs mobilhálózatok megjelenése, majd azok továbbfejlesztése nagy előrelépést jelentett a vezeték nélküli eszközök fejlesztésében és elterjedésében is. A jelenleg használt technológiának köszönhetően már több mobiltelefon van használatban, mint a Föld teljes lakossága, és ez a szám várhatóan exponenciálisan tovább nő a jövőben is. Ehhez a számhoz még hozzáadódik az Internet of Things (IoT), azaz az a „dolgok internete”, ami hasonlóképpen nem elhanyagolható eszközszámot jelent.

Az egyre többet használt mobil eszközök miatt a jelenleg használt LTE-A technológia a közeljövőben további fejlesztésre szorul, meg kell találni a módját, hogy a lehető legkisebb válaszidő mellett a legjobb sávszélességet nyújtsák az eszközök kommunikációjához. Erre a vezetékes hálózatokban már alkalmazott SDN-hez hasonlóan az SDR alkalmazása adhat megoldást az ötödik generációs hálózatokban.

SDN- és SDR-technológiák

SDN

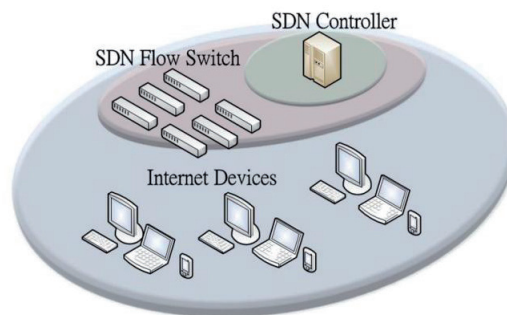
Napjaink egyik legelterjedtebb hálózati megoldása a Szoftver által definiált hálózatok (Software Defined Networks, SDN)[1, 2]. A hagyományos hálózatokkal ellentétben az SDN szétválasztja a vezérlős síkot (control plane) az adatsíktól (data plane), így hatékonyabban megvalósítást tesz lehetővé a központosított vezérlés terén. Az SDN hálózatoknál három fő réteget különítünk el. Ezek az: adatsík, vezérlősík, és az alkalmazási sík.





[4] Cho, H.-H.–Lai, C.-F.–Shih, T. K.–Chao, H.-C. (2014): Integration of SDR and SDN for 5G. *IEEE Access*. Vol. 2. Pp. 1196–1204.

1. ábra. SDN felépítése. [4]



SDR

Többféle vezeték nélküli rádiófrekvenciás kapcsolat létezik, ami nem túl hatékony megoldás, mert ha egyikből a másikba kell továbbítani adatokat, ahhoz különféle eszközök kellenek a kompatibilitási problémák miatt. Ilyenek például a szűrők, modulátorok, demodulátorok és különféle átalakítók, melyek sok esetben túl költségesek. Azonban, ha ezeket a különböző technológiákat egy közös rendszerbe foglalnánk, akkor könnyebben át lehetne hidalni ezeket a problémákat. Gondolva itt a WiMax, WiFi, GSM vagy az LTE különböző frekvenciasávokon működő jeleire.

A szoftver által definiált rádió (Software Defined Radio – SDR) egy vezeték nélküli kommunikációs rendszer, ahol a komponensek nem hardveres eszközként vannak jelen, mint például a modulátorok vagy szűrők és erősítők, hanem egy szoftverbe vannak implementálva. Az 5G hálózatban az alap koncepció az, hogy a forgalmat a frekvenciasávok között egységesen el kell osztani, és újra fel kell használni a már nem használt spektrumokat, a forgalmi torlódás elkerülése érdekében. Ezt a forgalomelosztást szoftveresen érdemes megoldani.



SDN és SDR összekapcsolása

A két technológia összekötésének az a várható előnye, hogy a tábbiakban nem kell szinte teljesen külön kezelni a vezetékes és vezeték nélküli hálózatok forgalomelosztását.

SDR RÉTEG

Egy külön rétegben helyezkednének el a vezeték nélküli rádiós hálózatra kapcsolódó mobil eszközök. Az ötödik generációs hálózati mobil eszközök képesek lesznek használni a Universal Software Radio Peripheral (USRP) technológiát, amivel megvizsgálják, hogy a spektrum mennyire van kihasználva. Természetesen nem a mobil eszköz fog egyedül dönteni az optimális csatlakozásról, hanem egy döntéshozó adminisztrációs vezérlő végzi el a feladatot.

SDN RÉTEG

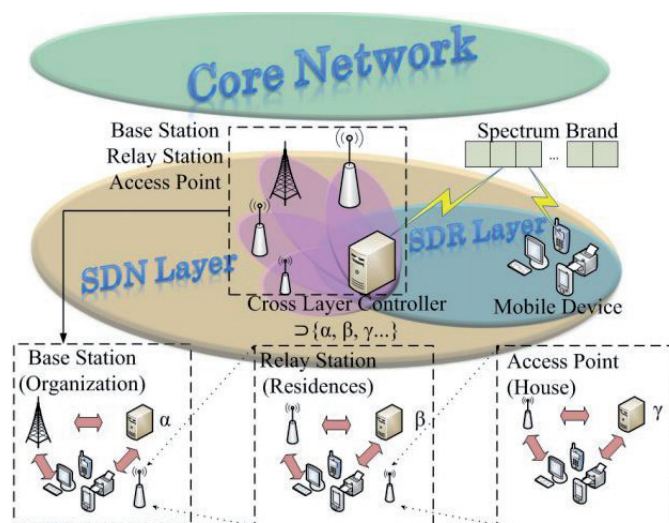
Az SDN réteg feladata a teljes küldendő és bejövő csomagok kezelése, mind vezetékes vagy rádiós kapcsolattal. A fő feladata, hogy a WiMAX, LTE és a 802.11 szabványokat az 5G kommunikációban kezelje és továbbítsa a vezérlő felé.

CROSS LAYER CONTROLLER

Egy központi vezérlő foglalja egybe a két réteget és szinte ez a legfontosabb eleme a rendszernek, hiszen a két rétegtől összegyűjtött információk alapján osztja ki az elérhetőséget minden egyes hálózatra csatlakozó mobil eszköznek. A központi egység meg tudja határozni minden hálózati eszköz helyzetét a hálózatban, és a legkevésbé használt csatornát osztja ki számára a forgalmi torlódások elkerülése érdekében.

[1] Kreutz, D.–Ramos, F. M. V.–Verissimo, P. (2015): Software-Defined Networking: A Comprehensive Survey. *Proceedings of the IEEE*. Vol. 103. Issue: 1. Jan. 2015. Pp. 14–76.

2. ábra. SDN és SDR hibrid technológiája. [1]



Ötödik generációs mobil hálózatok

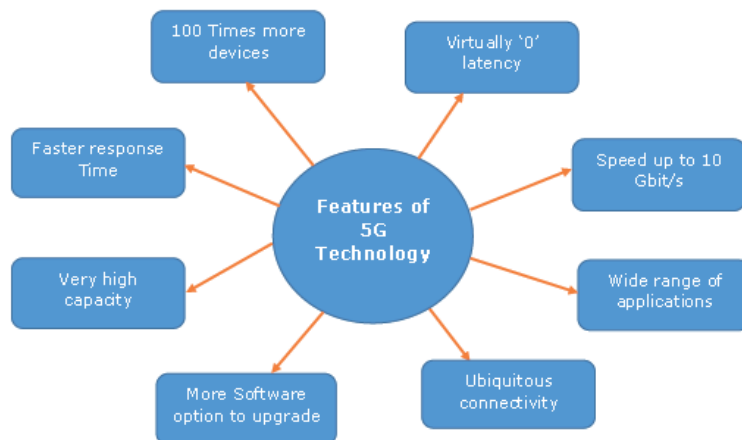
A negyedik generációs vezeték nélküli mobilhálózat megjelenésének köszönhetően már az átlag okostelefon használók is egyre többet használják az internetet, azonban ehhez olyan megbízható adatkapcsolatot várnak, amivel a nagyobb felbontású tartalmakat is megtudják tekinteni.

Az exponenciálisan növekvő mobil eszközszám és adatforgalom miatt a jelenlegi hálózatot tovább kell fejleszteni.



Ötödik generációs mobilhálózatok forgalomirányítása ...

3. ábra. 5G újításai.



A következő generációtól szembeni elvárás a nagy adatátviteli sebesség, ami az átlag 10 Gbit/s-t jelenti, de a minimum követelmény az 1 Gbit/s sebességet mindenhol meghaladja. A másik fő szempont a latency (válaszidő) 1 ms alá szorítása, ami nagy előrelépést jelentene. A jelenlegi technológia előreláthatóan nem fogja elbírní a rohamosan növekvő mobil eszközök számát, hiszen az elkövetkezendő néhány évben az aktuális szám többszörösére növekszik.

MILLIMÉTERES HULLÁMOK

A jelenlegi hálózati eszközök olyan frekvencián működnek, amely kezd már túl zajossá válni, ami akadályozza a megfelelő minőségű jel továbbítását. Egy lehetséges megoldás erre a problémára a magasabb frekvenciatartományok használata. Ezek eddig még nem voltak használatban, tehát nincs bennük zavaró jel. Ezek a frekvencia-tartományok egészen 300 GHz-ig is terjedhetnek. Hátrányuk azonban, hogy a hullámok nem képesek nagyobb akadályokon áthatolni, ezért kisebb a hatótávuk.



Kovács Márk–Agg Péter András–Johanyák Zsolt Csaba

KIS CELLÁK, MASSZÍV MIMO

Az akadályok okozta hatótávolság romlása miatt bevezetik a kis cellákból felépülő rendszert, ami annyit jelent, hogy a bázisállomás köré egymáshoz csupán pár száz méterre elhelyeznek kisebb jeltovábbító antennákat, melyek segítségével egy akadály (például fa, épület) könnyen kikerülhetővé válik.

Annak érdekében, hogy a bázisállomások egyszerre több eszközzel és több ponton tudjanak csatlakozni a jelenleg is alkalmazott MIMO-technológia továbbfejlesztése szükséges. A Massive MIMO többszörös kis cellák tömbjéből álló, akár 8x8-as vagy 16x16-as tömböket alkotó állomásokat jelent.

BDMA

Az 5G hálózatokban nagy valószínűséggel a Beam Division Multiple Access (BDMA) technológiát. Az antennaállomások bemérik, hogy hol van az aktuális eszköz, és egy külön nyaláb segítségével közvetlen kapcsolatot teremtenek vele. Ha mozgásban van az eszköz, például járműben használják, akkor képes kell legyen átkapcsolni egyik antennasugárzásból a másik legjobb jelerősségű sugárzásba. Ezt a technológiát szokás beamforming-nak, azaz nyalábformálásnak is nevezni.

Összefoglalás

Az ötödik generáció kidolgozása és tesztelése már Magyarországon is folyik, a legfrissebb tesztelés Győrben a Telenor közreműködésével zajlik, amit az egyetem összes hallgatója tesztelhet. 3600 MHz frekvencián és 100 MHz frekvenciasávon üzemel, 1,7 Gbps letöltési sebességgel, ami megfelel az új generáció kritériumának. A nagy letöltési sebesség elterjedésével még jobban megemelkedhet a mobil eszközök használata, amihez már szükséges egy jól megtervezett döntéshozó vezérlő, mint az SDR, SDN technológiák használata.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozunk a kutatás támogatásáért, amely az EFOP-3.6.1-16-2016-00006 „A kutatási potenciál fejlesztése és bővítése a Neumann János Egyetemen” pályázat keretében valósult meg. A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, a Széchenyi 2020 program keretében valósul meg.



TERÉZ NEMES *

I
nformatika

Blockchain – opportunities and risks

Abstract: What is a blockchain? Digital payment instruments, such as Bitcoin, are the largest, well-known project that uses this technology, but many other large systems can work on blockchain. Blockchain technology is not easy to understand for the first time and to predict its future. You can hear a lot about the fact that its application will revolutionize payment systems. In the future there might not need 3rd parties to audit transactions.

But blockchain technology can even reduce the cost of running a secure network as well. Using it can also lead you to substantially rethink how you conduct your business and handle competition. Blockchain, as a general-purpose technology, can offer a wide range of applications in various industries, such as banking, finance, transfer of money, or IoT and robotics technology, but there are more and more opportunities for use in everyday life.

However the development of the legal framework and security background is still not sufficiently established. Currently, the use of blockchain technology in different sectors is still largely in experimental phase, but marketable solutions are already on the horizon.

The purpose of this presentation is to examine the current state of blockchain technology and its applications and to discover how the characteristics of this technology can change the functioning of a wide range of activities, commerce or even digital payment instruments, paying particular attention to the limitations and the dangers arising from this usage.

Keywords: Blockchain technology; blockchain security; blockchain challenges.

* *Budapest Business School*
E-mail: nemes.terez@uni-bge.hu



[1] Casinoa, F.–Dasklisb, T. K.–Constantinos Patsakisa, C. (2019): A systematic literature review of blockchain-based applications: Current status, classification and open issues. *Tele-matics and Informatics*. 36. 55–81.

Introduction

What are blockchain and why is their knowledge important to an average user? In order to understand how blockchain works, first we need to distinguish among three things, the bitcoin, the cryptocurrency and the blockchain underlying it, and blockchains in general.

Bitcoin is the largest cryptocurrency that everyone knows that uses this technology, but numerous other cryptocurrencies have been created based on the blockchain methodology. Blockchain is a trusted public ledger without single user control or centralized authority, where the participants themselves collectively keep track of the system. In a blockchain, transactions are recorded chronologically and form a block which can be data of many types, for example currency, digital rights, identity, and these data are formed into blockchain and distributed across participants in the P2P network. There are two types of costs, the cost of verification and the cost of networking that blockchain can reduced. For instance a special application for blockchain is to upload customized data from about one million unique diamonds to a blockchain ledger in order to build a control system and help jewelers comply with regulations. With blockchain, money market services can also be solved without the need for a reliable third party such as a banking system, PayPal, etc. For example, Facebook uses this technology for the planned independent crypto currency named Libra.

Bitcoin's blockchain, for instance, keeps track of the transactions continuously and prevents double-spending [1]. Blockchain technology, most experts agree, is difficult to understand and predict its future role. Numerous paper also deal with the current and expected impacts, how blockchain technology can change our lives. But more and more research is on how to keep blockchain under control, and to regulate solutions based on it. More and more users and governments are drawn to the dangers of using blockchain. Managing the problem, besides IT experts, is also a challenge for economists and lawyers.

The purpose of my article is to review the current possibilities of blockchain from the perspective of an average user, to present the mathematical and technical background of the related concepts, paying particular attention to the dangers that are difficult to avoid in everyday life.



Who comes in contact with blockchain?

Blockchain technology enables transactions to be executed and tracked through a decentralized, distributed clearing system. The system stores all of the participants' verified transactions and their details in a way that they cannot be changed retrospectively. It is a new kind of high-level trust that builds on the co-operation of the masses rather than the mediator (such as a bank). Almost a decade ago Satoshi Nakamoto, the unknown person/group behind Bitcoin, described how the blockchain technology, a distributed peer-to-peer linked-structure, could be used to solve the problem of maintaining the order of transactions and to avoid the double-spending problem [2]. The majority of average users know bitcoin, BTC as cryptocurrency. One can think of, if they do not want to invest in Bitcoins, they have no relationship with this technology. However, the situation is even more complicated for an average user.

The new network security threat to be taught in 2019 is cryptojacking. In 2016, most IT experts did not know this type of attack. It has now taken over the ransomware attacks. Only in 2018 was there more than 5 million such attacks, while the latency of this attack was much higher than usual. In most cases, attackers nowadays hunt for data computing performance of our tools rather than data. There is often no need for malware to attack, just a browser. The computational power of the devices is secretly used for mining their own crypto currency. The victim does not usually notice the infection and the basic protection systems installed on the machine do not warn as well. At most, the machine slows down, heats up, and the fans work at full power even when there is no load. Unfortunately, most of the digital devices tend to slow down into normal use, so this is not a warning symptom often. Mobile devices, including smartphones, will run out of battery power much faster than usual. The hacker can make a significant income with a zero investment, as the power and hardware it consumes is provided by the unsuspecting user. However, the user may lose up to 80% of the CPU's or GPU's performance, and the lifetime of its devices may be significantly shortened or even destroyed due to stronger heating. In addition to PCs and laptops, routers, video cameras, smartphones, tablets and, of course, smartphones are at risk of this type of attack. Companies and organizations also need to count on this threat, because the infection can also affect terminals and server farms, or even causes users of cloud based system to overpay on the compu-

[2] Satoshi Nakamoto (2008): *Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System*. www.bitcoin.org



[1] Casinoa, F.–Daskalib, T. K.–Constantinos Patsakisa, C. (2019): A systematic literature review of blockchain-based applications: Current status, classification and open issues. *Tele-matics and Informatics*. 36. 55–81.

[5] Imran Makhdoom–Mehran Abolhasan–Haider Abbas–Wei Ni (2019): Blockchain's adoption in IoT: The challenges, and a way forward. *Journal of Network and Computer Applications*. 125. Pp. 251–279

tational power used. The energy demand for a transaction due to high computing power is estimated to be about 476kWh, which is compared to the daily energy demand of 16 average households [5].

So what are blockchain and what is the meaning of mining in blockchain? Why is this kind of attack a financial advantage for attackers?

The mathematical background of blockchain technology

What is blockchain, we need to first clarify this concept. There are several slightly different definitions in the literature. The blockchain is a computer data storage [1]. It means that we put different data into blocks. Only certain amount of data can be made into a block. From the data organized this way, we create a control code, hash code, which is characteristic only for this data set, but much shorter than the total data. At the beginning of the next block, this hash code will be built and then the rest of the data will come into the next block. In the end, a specific chain of data is generated, which is characterized by the fact that what is contained in this chain cannot be changed backwards or indirectly, because then the whole block chain is logically damaged. That is, the rules defined for the blocks are violated, and anyone who has access to blockchain can control this fact.

Therefore, the data that is included in the block chain can be considered as authentic in some way. By tracing the chain, we can also find out how long the sequence of transactions is from the beginning, and where is the point where some problem has arisen or has been included. At the same time, its technology solution ensures that anyone who uses this technology can control every other transaction stored in blockchain. The other element of blockchain technology is that the system works only between P2P networks if everyone sees the transactions of everyone. In case of bitcoin there is only one chain, and everyone sees that one chain and accounts for it. But how do you know which transactions have been entered into the chain and which have not yet been queued. At least such a problem is that a transaction should be booked only once. This is the double-spending problem [1].

It is important to ensure that the participants concerned can communicate through a P2P network so that there is no central organization that would direct or manage this communication from above. If so, the need for a reliable third party to



Blockchain – opportunities and risks

the system would be meaningless. A well-tried and well-functioning P2P system is very much in information technology, so it is only to be used in this type of communication system applications. This ensures that anyone can join a particular blockchain as a peer, without having to log in or register before, because such a center does not exist.

Members of the community run software based on the same set of rules, it is called node, and automatically join the new member when launching their own software system. The hash code does not provide the information on the transactions and the integrity of transactions in a given block. It only verifies it. The hash code is a checksum of a sufficiently long sequence based on a very complex algorithm that changes in a practically unpredictable way if the data from which this hash is made changes even only in one single bit. Practically the hash producing algorithms are trap door functions. That is, despite the hash code of the given data set with the applied algorithm is relatively easy to calculate, the original data set is cannot be calculated from the hash code Finding the origin of a hash code requires unreasonable amount of computational capacity, and the result is not even unique all time: two input can result in the same hash, which is called hash collision.. A hash code based on a given hash algorithm can be computed for a data set of any size so that the length of the hash code is the same, but there are practically no two sets of data that have the same hash code. This imprint thus clearly identifies the data set from which it is made. It is assumed, of course, if we know which hash is generated using the algorithm. Thus, in blockchain, this hash is formed from the data in that block, placed at the end of the block, and in order for the chain to be formed, this hash becomes the first part of the next block when the next block is generated. So it will be integrated into the next block, so the chain will be logically uninterrupted. But after a block, there can only be one next and everyone is working on the same blockchain.

So there must be a rule system to decide who can prepare the next block. It is also guaranteed that each transaction will be entered into the chain once and only once. In the case of public blockchains, there is definitely a consensus who is the one who can make the next block, and everyone will follow it. Anyone who does not accept this will be automatically excluded from blockchain. It may also happen that those who do not accept the rules of the rules are the majority and start to follow another.

This is called the 51% attack in the literature. The consensus achieved by the Proof of Work (POW) concept. The basic idea is that to some IT operations can be implemented, it must first prove that the person is prepared to deal with the solution of a problem so that it can then allow the implementation of the originally requested operation. The PoW solution generates a competition between the participants. It has been found that in addition to the block that is still in the process, the data contained therein, and the hash code of the previous block, a number must be added, called nonce, by inserting it into the block and hashing it with this number trained hash code with the nonce takes full block made up of special value. (N is a number once – nonce).



[3] <https://blockchain.info/charts/hash-rate>

For example, the value of nonce has to calculate to the hash code beginning with 8 zeros. Since changing one bit of data makes it unpredictable created a new hash code data in the block, so this time to be counted from the beginning again.

For example, the rules of bitcoin require a successful solution every 10 minutes to allow to create a block. In order to figure out this number, nonce, a lot of effort is needed. According to measurements, it results 1018 hash every second [3], (the value measured at the time of writing the article). However, this ensures that someone every 10 minutes indicates that they have the next block. At this point, everyone throws away their own assembled block, in which they also do a lot of work to be their first priority and the process starts from the beginning. Anyone who wants to create a block will try to compile a block from the selected transactions, the hash code of the previous block, and the nonce that was chosen to work hard. Those who have succeeded in this operation have permanently booked transactions in their block, all other losers return their transactions before the next 10-minute race starts.

This competition is called mining in literature. Very rarely, two or more may accidentally compile the next block with a small time difference, partly from different transactions. They try to send the block they have compiled to the other nodes. In this case, according to the rule system, if there were two successful mining in the same time, the winner whose block is connected to several blocks in a given time will be the final winner.

The system of rules has been designed so that whatever the computational capacity is, by automatically changing the difficulty of the task, a block will always be mined in about 10 minutes and closed. This is achieved by that it is needed to find a nonce number that provides more zeros at the beginning of the hash code, for example 10.

Risks resulting from the use of blockchain

Transactions entered into a blockchain-based chain are certified by everyone. The price that the system works slowly and expensively. However, robust, anyone connected to it or cancels its connection, the system remains stable and flawless, and the data stored in it remains the same for all participants and can be considered authentic. However, the confidentiality of data and transactions is not guaranteed. In the



Blockchain – opportunities and risks

case of crypto currencies, the public key cryptography system is used to allow everyone to check the authenticity of transactions in blockchain, while not being able to tell who and for what purpose exchanged data, crypto currency. Therefore, the data is visible, authentic, and it is not possible to know who is behind them. Except of course those who are participants in the transactions. Once a data series containing a particular currency has been used once in a transaction, it can no longer be used, as there is only one ledger and all transactions are included in it, and all of them have been checked, recorded in a block. Thus, ultimately, the system of rules itself ensures that there is a payment instrument with similar properties in the internet. Participants in transactions in the crypto currency system identify themselves with a randomly generated series of data. These random numbers are given to the other actor to give them crypto currency. This identifier series is called a wallet in the system, and should be referred to if somebody want to refer us to the crypto currency, electronically signing the transaction. So in the bitcoin system, everyone is responsible for their own digital signature, more specifically for its private key. This is the key that is stored in the wallet application in the bitcoin system and is kept secret by the users by password protection. If this is lost, we will never get more money than we would lose our wallet. If the private key with the mobile phone is stolen, it is as if cash-filled purse is stolen.

An important question is what will be any value of crypto currency. When the bitcoin system open source code was published, the first bitcoin was virtually no value either. Later, people began to use bitcoin to exchange real currency, exchange commodities at bitcoin value, and even the blockchain system received accounting commission for some transactions. Once each block has been successfully assembled, called mined, the system will generate a crypto currency reward for those who have successfully found the solution for that block. That is, the one who found the nonce with which the block hash has the desired properties. This reward was 50 bitcoin at the start of the system, which wasn't much at that time. The system is established, that after 216,000 block mining, the reward is be halved. This has happened twice so far, most recently in 2016, so today only 12.5 bitcoin is the reward for mining a block. The upcoming reward is expected by June 2020.

The system is designed to make a total of almost 21 million bitcoin in the system. This is similar to when a national central bank prints only a certain amount of cash [1].

Then, bitcoin began to be used as a payment tool that does not require the banks, is safe and of each other payers' identity remains secret. That's why the criminal has

[1] Casinoa, F.– Dasaklisb, T. K.–Constantinos Patsakis, C. (2019): A systematic literature review of blockchain-based applications: Current status, classification and open issues. *Tele-matics and Informatics*. 36. 55–81.



[4] <https://coinmarketcap.com/currencies/bitcoin/#charts>

started to use it, arms and drug dealers. Computer blackmail viruses also ask for ransom in bitcoin. Participants refer to each other, the movement of goods is carried out when the blockchain system records the transaction and all this is done in secret before any higher power. They began to use the bitcoin for tax avoidance, as it was an excellent tool for money laundering and for the elimination of money, for the trashless transfer to the other side of the world. This, in turn, appreciated the bitcoin. In fact, they started to use the bitcoin startup companies to increase the bitcoin value. So the reward for mining is getting more and more.

The price of a bitcoin at the time of writing the article is approx. \$ 9,200 [4]. Thus, the 12.5 bitcoin received for block mining is approximately HUF 26 million. This is the answer our question. This is a financial motivation for attackers.

Possibility of protecting an average user

There's no need for malware to set up a machine for an attacking mining. It can be downloaded as browser extensions that look like a useful accessory from the official Stores, which were mining in the background. But the most popular cryptojacking attacks work through seemingly harmless websites and unmodified browsers. Downloaded ads are used with JavaScript codes. Attackers often also offer a share of the operators of such websites. The next generation of malware can automatically search for infected devices through local networks, even creating botnets where the computing power of the found devices is added up. The crypt attack is enough to use 80% of the performance, the majority of users only complain about the slowness of the device or the operating system, and criminals gain huge profits.

What an average user can do to protect against mining?

- Be cautious about advertising, configuring appropriate ad blockers. If possible, it should be disabled full JavaScript, but this can cause more inconvenience when using some web pages.
- Use only reliable browser add-ons, and only if it is well-known and really need it.
- All software communicating with the network should be up to date with all necessary updates installed. This in itself may not be an easy task for a user.



Blockchain – opportunities and risks

- Choose a browser that is better protected against mining. Use extensions to protect against crypto-jacking.
- If the system slows down, don't be content with complaining. Try to get to know the reasons behind the slowdown.

If a user want to use blockchain-based enhancements such as crypto currencies, what he or she can do for the higher security? First and foremost, he or she should pay great attention to your private key and your wallet tool. But on the other hand there was the case of the bitcoin stock market leader who kept his key in his head was careful about it. When he died, anybody couldn't get access to the contents of the purses, so the total amount of £ 41 million was permanently unavailable to investors.

The mathematical base itself is fixed and well-defined. Of course, in the IT implementation, an accidental or unintentional error can slip, in fact, shortcomings or problems occur at any time during use. In such a case, the investor would complain in vain. It is such a system, and there is no deposit guarantee or investor protection fund behind it that would stand for any damage.

Conclusion

Blockchain can benefit financial service providers by new business models and cutting costs. There are already experimental solutions on the market, but the widespread application still has to be expected. The technology enables direct transactions to be executed on a decentralized, user-controlled network without intermediaries. The World Economic Forum estimates that by 2025 ten percent of the total global product will be stored in blockchain. However, there are still obstacles and shortcomings, the overcoming of which is essential for widespread acceptance. These include a common set of standards adopted jointly by countries, industries, and companies, as well as the establishment of a legal framework and security background, which is still under development.



I
nformatika

KRUTILLA ZSOLT *

Banki előrejelző rendszer informatikai hátterének meghatározása

* Dunaiújvárosi Egyetem,
Műszaki Intézet
E-mail: zskrutilla@freemail.
hu

Összefoglalás: A cikk célja egy előrejelző rendszer elkészítéséhez szükséges háttér-infrastruktúra meghatározása. Az előrejelző rendszernek az OTP Bank Nyrt. személyi kölcsön-igénylések beérkezési volumenére vonatkozó becslést kell adnia. A modellnek képesnek kell lennie legalább egy héttel előre, félórás bontásban megjósolnia a beérkező igénylések darabszámát, melynek alapján beosztástervezés készíthető (optimalizálva a munkaerőforrást), csökkenthető a működési költség, valamint növelhető az ügyfélelégedettség. Jelen cikkben az előrejelzést lehetővé tevő informatikai rendszer kerül bemutatásra.

Kulcsszavak: Adatbányászat; predikció; adatbáziskezelés.

Abstract: The target of this article that to define a back-end infrastructure for a predictive modelling system. This kind of predictive modelling system needs to take estimate for the incoming volume of personal loan of OTP Bank PLC. The model needs to do estimation by thirty minutes periodically interval for the incoming values at least one week advance whereby it possible to define a distribution of work time plan (optimize the source of labour), reducible the operation costs and increasable the consumer satisfaction too. In this article the IT infrastructure for predictive modelling is introduced.

Keywords: Data mining; prediction; database management.



Bevezető

A mai világban minden nagyobb vállalat piacvezető szerepét, vagy arra történő törekvését az adatok egyre részletgazdagabb tárolása, hatékonyabb felhasználása és az annak elemzésére épülő stratégiája határozza meg. A tanulmányban bemutatásra kerülő prediktív modellezési elmélet egy gyakorlati probléma megoldását szolgálja, melynek célja, hogy magas pontossággal és a szezonális tényező figyelembevételével legyen képes előre jelezni egy banki termék igénylésének volumenét. Egy olyan elmélet kidolgozása volt a cél, mely a gyakorlatban is megállja a helyét, magas pontossággal képes előre jelezni és valamennyi olyan területen használható, melyeknél szezonális figyelhető meg (például hotelek látogatottsága, éttermek forgalmának előrejelzése, kölcsönigénylések előrejelzése).

A hagyományos piaci elemzéseken túl, egyre inkább teret hódítanak a belső működéssel kapcsolatos elemzések, melyek segítségével csökkenteni lehet a működési költségeket a túlórák megszüntetésével és munkaerőforrás optimalizálásával. A kutatás célja, hogy a Bankhoz beérkezett személyi kölcsönre vonatkozóan, fél órás megbontással előre lehessen jelezni a várhatóan beérkező volumet, melynek segítségével előre meg lehet határozni a dolgozók beosztását és esetlegesen várható kiugrásokat. Egy magas pontosságú előrejelzéssel nem csak optimalizált beosztás elkészítésére nyílik lehetőség, mely jelentősen csökkenti a kiadásokat, hanem növelni lehet az ügyfélélményt is (egy megadott termékkel kapcsolatos ügyfélkiszolgálási gyorsaságának növelése, SLA-mutatók tartása és javítása).

Predikció, gépi tanulás, Big Data, modellezési elmélet

A mai közgazdaságtan vizsgálati módszertanának egyik fő befolyásoló és előre lendítő tényezője a modern számítógépek és informatikai eszközök által megteremtett elemzési lehetőségek. A modern közgazdaságtan fő eszköze a gépi tanulás által nyújtott predikciós lehetőségek kiaknázása, hogy egy adott minta alapján képesek legyenek előre jelezni bizonyos eseményeket. Minél nagyobb a korábbi adatkör, annál pontosabb eredmény születik a predikciós modellezés során. Egy Big Data környezet tökéletes lehetőséget nyújt a nagymennyiségű adattárolásra, így a különböző modellezési eljárások hatékonyságára is. [1]

A predikciós modellezés területén több elmélet is kialakult, melyek egy adott függvény tulajdonságát vizsgálják, annak differenciálhatóságát és egységgyöktesztjét.

[1] Muraközy Balázs (2018): Gépi tanulás, predikció és okság a közgazdaság-tudományban. *Magyar Tudomány* 179. Pp. 1027–1037.



Az egységgyöktesztek feltételezik a szezonális és nem szezonális tényezők függetlenséget, azonban egyes kutatások ennek elkülöníthetőségére irányulnak (periodikus autoregresszív modellezés).

A különböző modellezés-elméletek gyakorlati alkalmazását megelőzően szükséges a modell alapját képező adatbázisok kialakítása is. Az adatbázis megfelelő kialakítása nélkülözhetetlen a modellezés szempontjából, a leendő modellnek megfelelően illeszkednie kell a gyakorlati alkalmazhatóság érdekében. Az adatbázis nem csak az adatok tárolását szolgálja, hanem az egyes adatkörök tárolásának specifikusságát is, így az adatok tárolására tekintettel a későbbi felhasználhatóságra.

Fejlesztés célja

A fejlesztés célja egy emberi beavatkozás nélkül futni és tanulni tudó új predikciós modell készítése a Bank fogyasztási hiteltermékére vonatkozóan, mely első fázisban egy héttel előre képes kevesebb mint 30%-os eltéréssel, napi és fél órás megbontással előre jelezni a várható beérkező személyi kölcsönigénylésének számát. Az előrejelzés elsődleges célja, hogy optimalizálni lehessen a beosztástervezetet, illetve dolgozói létszámot, melynek segítségével csökkenteni a hitelbírálati időt (ügyfélélmény növelés) és optimalizálni a munkaerőforrás eloszlását. Az ügyfélélmény növeléséhez tehát szükségessé vált, hogy a kutatás első fázisa mintázatot találjon a beérkező adatokban, melynek segítségével az ügyfélviselkedési normák megfigyelése mellett lehetőség nyílik az előrejelző modell elkészítésére is. Az előrejelzés segítségével előre meg lehet határozni, hogy egy adott nap adott időpontjában – a korábbi adatok és mintázat alapján – mekkora beérkező volumennel lehet számolni és hogy annak feldolgozása mennyi emberi erőforrást igényel majd nem csak abban az időpontban, hanem arra az adott napra vonatkozó legoptimálisabb beosztásban.

A modellalkotás első lépcsőfoka a korábbi adatok elemzése. Az elemzést követően lehetőség nyílik a matematikai mintázat(ok) feltárása, a nullhipotézis és alternatív hipotézis felállítására. Az adatok Excell-formátumban álltak a rendelkezésemre, csak 9 hónapra visszamenőleg, így az előrejelzés kidolgozása során figyelembe kellett tartani, hogy nem áll majd legalább egy éves időintervallum a rendelkezésemre. Az elemzés első fázisa így a meglévő adatok feltérképezése és a lehetséges befolyásoló tényezők megállapítása, esetleges osztályok kialakítása. A termék sajátos jellegzetessége alapján a nullhipotézis, hogy személyi kölcsönök esetében szezonális figyelhető meg (iskolakezdés, nyaralások, ünnepek, stb.), így az előrejelzés alappillére az időszakosság, azaz maga a dátumok, időpontok és azok jellegzetességei, nem pedig a darabszám és idő függvényének folytonossága.

Adatforrások

Az adatok „nyers” formában nem elemezhetők, ezért szinte minden esetben szükséges azokat tisztítani, valamint a szükséges mezőkre megbontani, vagy éppen logikailag egységesíteni.

1. ábra. Nyers adatforrás.

D	E	F	G	H	I	J	
Várakozási érkezési időpontja - manuális	Levétele - manuális	Elért idő (perc)	darab	Manuális - időszek	Manuális - napi		Összesen
2018-MÁJ. -02 08.53.30	2018-MÁJ. -02 09.04.22	10,87	2	2018-MÁJ.	2018-MÁJ. -02		
2018-MÁJ. -02 09.03.32	2018-MÁJ. -02 09.11.59	8,45	1	2018-MÁJ.	2018-MÁJ. -02		
2018-MÁJ. -02 09.03.39	2018-MÁJ. -02 09.11.30	7,85	1	2018-MÁJ.	2018-MÁJ. -02		
2018-MÁJ. -02 09.08.27	2018-MÁJ. -02 09.17.01	8,57	1	2018-MÁJ.	2018-MÁJ. -02		
2018-MÁJ. -02 09.08.38	2018-MÁJ. -02 09.18.14	9,6	1	2018-MÁJ.	2018-MÁJ. -02		
2018-MÁJ. -02 09.08.42	2018-MÁJ. -02 09.17.26	8,73	1	2018-MÁJ.	2018-MÁJ. -02		
2018-MÁJ. -02 09.12.11	2018-MÁJ. -02 09.18.49	6,63	1	2018-MÁJ.	2018-MÁJ. -02		

Adatbányászat, vagy adatelemzések során mindig meg kell határozni az elemzéshez szükséges adatköröket, majd azokat olyan formára hozni, valamint rendezni, mely az elemzés szempontjából szükséges.

A jelenlegi cikkben szereplő adatkört is szükséges volt rendezni, különös tekintettel a modell alapját képező dátum és idő adatokat tartalmazó mezőkre (H0 értelmében). Az előkészítéshez az IBM SPSS szoftvert használtam, tekintettel arra, hogy az előre beépített elemzési lehetőségek mellett több adatforrást is képes egyszerre kezelni (adattranszformáció bemeneti és kimeneti ágon egyaránt), adatot tisztítani, valamint logai mezőket és értékeket létrehozni.

2. ábra. Input node.



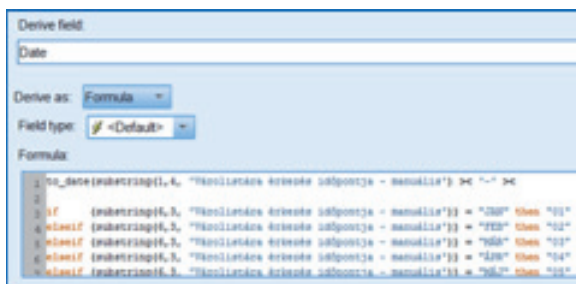
3. ábra. Idő kategória node-ok.



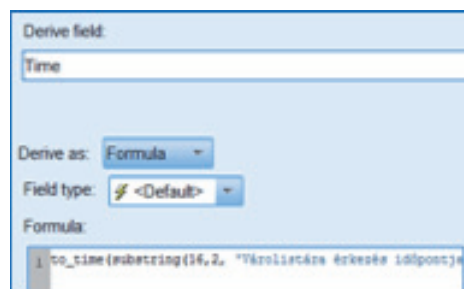


Krutilla Zsolt

4. ábra. Dátumok „tisztítása”.



5. ábra. Idő mezőérték.



A mezők szeparálását és formázását követően az időpontok kerültek csoportosításra, hogy rendelkezésre álljon a modellől elvárt perces idősav eloszláshoz szükséges mező és adatok.

Az előzetes információk szerint az adatokban nem található mintázat, azok teljesen random időpontokban és eltérő terjedelemmel rendelkeznek, azonban ez elemzés nélkül egyértelműen nem jelenthető ki. A nullhipotézis mentén kezdődtek meg az adatelemzések, melynek alappillérjét a napok és az azon belüli időpontok jelentették, tehát egy háromdimenziós eloszlás elkészítése volt a cél. A helyes adatkör kiválasztása és azok megfelelő összerendelése nélkülözhetetlen részét képezi a matematikai mintázat megállapításának. Az elemzés során tudnunk kell mit miért és hogyan kell összehasonlítani, melyik adatkört melyik adatkörrel kell összerendelni, hogy a helyes mintázatot kaphassuk.

Célok

Az alapkoncepció, hogy a numerikus adatokat grafikusán kell megjeleníteni, melynek segítségével azonnal megfigyelhető egy esetleges mintázat, kezdetleges jellegzetesség. A hipotézisvizsgálat és matematikai mintázat, illetve tulajdonság feltárása után szükséges volt a modellezési elmélet és eljárás kidolgozása. Az elméleti kidolgozást követően az infrastruktúra kialakítása került fókuszba, ugyanis magában egy elemzés és egy modellezési elmélet még nem teljesíti a további célkitűzéseket.

Ennek következtében került kialakításra egy külön erre a célra kialakított adatbázis, ahol az adatok tárolása mellett az automatikus modellezési eljárás úgynevezett alapegységei is kialakításra kerültek. A szerveres környezetnek köszönhetően további lehetőségek álltak a rendelkezésemre, mely nem csak a kutatási célfeladat szükséges, hanem elégséges feltételét is megteremtette.



Banki előrejelző rendszer informatikai hátterének meghatározása

A kutatás során szükségessé vált a különböző szerveres környezetek kialakítása, valamint azok összekapcsolása, a matematikai modellezési elmélet leprogramozása, a szükséges nyers- és metaadatok létrehozása, valamint tárolása, a megjelenítő felület kialakítása és természetesen a modellezés során kapott adatok – ez által maga a modell – visszamérése. A modellezési eljárás kialakítása során azonban további elvárásoknak is eleget kellett tenni.

Fontos szempont volt a gazdaságosság, azaz kizárólag a rendelkezésre álló infrastruktúrai erőforrások felhasználásával történhetett meg az eljárás kialakítása, valamint maradéktalanul teljesíteni kell az európai általános adatvédelmi rendeletben (GDPR) előírt adatkezelési és adattárolási elvárásokat. Ezen túlmenően törekedni kellett a modularitásra is, hogy a későbbi fejlesztések, vagy esetleges hibajavítások során csak az adott modulokat kelljen fejleszteni, ne az egész folyamatot.

Eljárás

A modellezési eljárás első lépése az adatok megértése, majd előkészítése. A modellezési eljárások legfontosabb eleme, hogy a bemeneti adatok maradéktalanul és úgynevezett „zaj” nélkül álljanak a rendelkezésünkre. Hiányos, vagy hibás adat esetén nem csak maga a modellezési elmélet lehet hibás, hanem az azt megelőző elemzés is téves következtetésekhez vezethet, ezért a jelen cikkben bemutatásra kerülő modellezési eljárást, valamint elemzést megelőzően a rendelkezésre álló adatok vizsgálata volt az első lépés.

Az adatok vizsgálatát követően került sor az elemzésre, majd a modellezési elmélet kidolgozására és későbbi megvalósítására is.

ADATFORRÁS

Ahogy a 3.2. pontban már előzetesen megemlítésre került, az adatok rendezésén, majd tisztításon estek át. Ez azt jelenti, hogy a kívánt predikciós modell eléréséhez szükséges volt az adatok egységesítése és „típus-specifikussá” tétele.

Az elemzéshez szükséges adatok Excel táblázatban álltak a rendelkezésemre, azonban a későbbi automatizálás lehetőségére való tekintettel, szükséges volt ezzel egyidőben kialakítani az SQL adatbázis alapú adatelérésének lehetőségét is.



Krutilla Zsolt

Az adatforrás előkészítése három fő lépésből tevődött össze:

1. Adattisztítás.
2. Adattranszformáció.
3. Adatkör bővítése (logikai mezők és értékeinek kialakítása).

Adattisztítás

Az elemzéshez szükséges korábbi adatok statikusan, Excel-táblázat formájában álltak a rendelkezésemre. Az adatok ugyan SQL-adatbázisból kerültek exportálásra, azonban az eltérő nyelvszerkezetek és serveres környezetekből adódóan bizonyos mezők, mint például a timestamp adatok, szöveges formában és elemzési szempontból felhasználhatatlan állapotban kerültek exportálásra.

Ezen mezőértékeket szükséges volt első körben tisztítani, valamint a felesleges, illetve üres oszlopokat eltávolítani.

Adattranszformáció

Az adattisztítást követően maga az adattranszformáció történt meg, azaz a mezők típus- specifikussá tétele (például a string típusként felismert numerikus adatokat tartalmazó mezők konvertálása integer típusra).

Adatkör bővítése

Az úgynevezett nyers adatforrásból hiányoztak azok az adatok, melyek az elemzés, modellezés, valamint hipotézisvizsgálat alappilléret képezik. Ezen adatok, mezők a meglévő adathalmazból kerültek „kimetszésre”, azaz szükséges volt az adathalmaz logikai és fizikai szeparálása, illetve azok típuskonverziója is.

KIUGRÓ ADATOK KEZELÉSE

Az elemzés alapján a modellezési eljárás során ügyelni kell a kiugró, vagy más néven az egyedi adatok kezelésére. Ennek kezelése SQL szinten történik, mégpedig a korábbi adatok meghívásakor. Amikor egy adott nap adott időpontjára fut le a leválogatás, úgy megvizsgálja, hogy arra az adott időpontra hány darab korábbi adat jellemző és ha ez a szám nem éri el a legalább 3 darabot a 12 hónapos mozgó időintervallumra vonatkozva, úgy azt figyelmen kívül hagyja („egy fecske nem csinál nyarat”).



Banki előrejelző rendszer informatikai hátterének meghatározása

INFORMATIKAI INFRASTRUKTÚRA

A modellel szembeni elvárás, hogy automatikusan, emberi beavatkozás nélkül kell tudnia lefutnia, valamint a korábbi adatok alapján folyamatosan „tanulnia”, ezért informatikai infrastruktúra szempontjából az MsSQL-adatbázist választottam ki, mint adattárolási és modellezési környezetet.

A modellezési fázisok az alábbi infrastruktúra szakaszokra bonthatók:

- a. Ütemezett adatátvitel, adattranszformáció: IBM SPSS modeler, MsSQL.
- b. Heti modellezés: Excel-táblázat mögött található SQL-utasítás futtatása VBA automatizálás.
- c. Havi automatikus modellezés: IBM SPSS modeler.
- d. Adatok exportálása, grafikonos megjelenítése és visszamérése: Excel.
- e. Adatok publikálása: SharePoint weboldal.

Az adatbázis alkalmazásával lehetőség nyílik a teljes modell átültetésére, valamint az esetlegesen hibás adatok jelölésére is, mely olyan esetekben nyújt előnyt, amikor egy egyedi hiba következtében megváltoznak a darabszámok, azonban nem szeretnénk, ha a modell a jövőben ebből „tanulna” (például rendszerhibák esetén, melyek a tényleges adatokat nagymértékben torzítják).

A gyakorlatban erre egy úgynevezett Flag és megjegyzés mező szolgál az adatokat tároló adatbázis táblájában, melyben részletesen és rekordonként rögzíteni lehet az adott adatra vonatkozó információkat.

Összefoglalás

A cikkben bemutatott rendszer és elérhető adatforrások megfelelő alapot nyújtanak egy predikciós modellezési eljárás alkalmazásához, mely felhasználható egy Bank fogyasztási hiteligénylések darabszámának előrejelzésére. A kidolgozandó predikciós eljárásban azonban tekintettel kell lenni arra, hogy az eljárás alapját a szezonáltságban megfigyelhető periodikusság képezi, ezért minden olyan területen alkalmazható, melyeknek szintén a szezonáltság képezi az alapját.

Tapasztalataim szerint szezonáltság szinte bárhol megfigyelhető, a kereskedelemről a banki szférán keresztül a gyártóiparig, így a kidolgozandó modellezési eljárás szinte bármilyen területen eredményesen alkalmazható lehet. Minden cég esetében fontos szempont a rendelkezésre álló humán erőforrás minél optimalizáltabb felhasználása és az ezzel járó esetleges plusz kiadások mérséklése (például túlórák), valamint azok mutatójának előrejelzése.



Krutilla Zsolt

A modell segítségével nem csak a darabszámokat lehetne előre jelezni, hanem annak alapján a létszámprognózist, vagy beosztástervezetet lehetne készíteni. Jelen cikkben a predikciós eljárás megvalósításához szükséges rendszer és adatforrások kerültek összegzésre.

Köszönetnyilvánítás

EFOP-3.6.1-16-2016-00003 K+F+I folyamatok hosszú távú megerősítése a Dunaújvárosi Egyetemen projekt által finanszírozott kutatás.



WIZNER KRISZTIÁN *-KÖVÁRI ATTILA **

Acélgyártás folyamatát elemző informatikai rendszer

Összefoglalás: A kifejlesztett elemző rendszer felhasználható az öntés során előállított adatok és diagramok szemléltető megjelenítésére, valamint az ISD DUNAFERR Zrt. Acélművének Öntőgépéhez kifejlesztett környezet megjelenítésére. A rendszer megkönnyíti az öntés során bekövetkezett rendellenességek elemzését az öntési folyamat paramétereinek felhasználásával. A kifejlesztett alkalmazás lehetővé teszi az öntési folyamat és a minőséget befolyásoló paraméterek alaposabb megismerését és megértését.

Kulcsszavak: Acélgyártás; acélöntés; web.

Abstract: The developed analyst system can be used to show illustratively the data and diagrams produced during casting, and visualize the environment developed for the casting machine of Steelworks ISD DUNAFERR Zrt. The system facilitates the analysis of anomalies occurred during casting using the parameters of casting process. The developed application allows more profound investigation and understanding of the casting process and the parameters that influence quality.

Keywords: Steelmaking; steelcasting; web.

Bevezető

Az ipari folyamatok átláthatósága, nyomon követése, elemezhetősége egyre nagyobb jelentőséggel napjainkban. A számítógépek és egyéb informatikai eszközök kapacitásának jelentős bővülésével és megfizethetőségével egyre nagyobb teret kap az Ipar 4.0 valamint az IoT (Internet of Things) koncepciója. Ezen irányelvek mellett nagy jelentőséggel bírnak a már meglévő akár több tíz éves adatok, melyek vizsgálatával modellek állíthatók fel az online

I
nformatika

* ISD Dunafer Zrt.

E-mail: wizner.krisztian@
isd-dunaferr.hu

** Dunaiújvárosi Egyetem,
Műszaki Intézet

E-mail: kovari@uniduna.hu



[1] Thomas, B. G. (2005): *Modeling of Continuous Casting Defects Related to Mold Fluid Flow 3rd Internat. Congress on Science & Technology of Steelmaking*, AIST, Warrendale, PA. Pp. 847–861. Charlotte, NC.

[2] Meng, Y.–Thomas, B. G. (2003): *Heat Transfer and Solidification Model of Continuous Slab Casting: CON1D, Metall. & Material Trans.*, Vol. 34B (5). Pp. 685–705.

[3] Zhang, L.–Pluschkell, W.–Thomas, B. G. (2002): *Nucleation and growth of alumina inclusion during steel deoxidation*. 85th Steelmaking Conference, Vol.85, ISS, Warrendale, PA, Pp. 463–476, Nashville, TN.

[4] Bai, H.–Thomas, B. G. (2001): Effects of Clogging, Argon Injection and Continuous Casting Conditions on Flow and Air Aspiration in Submerged Entry Nozzles, *Metall. & Material Trans. B.*, Vol. 32B (4). Pp. 707–722.

[5] Thomas, B. G.–Jenkins, M.–Mahapatra, R. B. (2004): Investigation of Strand Surface Defects Using Mold Instrumentation and Modeling, *Ironmaking & Steelmaking*. Vol. 31. Pp. 485–494.

[8] Rackers, K. G.–Thomas, B. G. (1995): Clogging in Continuous Casting Nozzles 78th Steelmaking Conference Proceedings, Vol. 78. *Iron & Steel Society, Warrendale, PA*. Pp. 723–734. Nashville, TN.

[9] Thomas, B. G.–Zhang, L. (2001): *Mathematical Modeling of Fluid Flow in Continuous Casting ISIJ International*. Vol. 41. No. 10. Pp. 1181–1193.

adatok vizsgálatához, valamint lehetőséget biztosítanak az ipari szakembernek, a statisztikusnak, valamint a gépi tanulással támogatott rendszereknek, hogy összefüggéseket fedjenek fel az ipari folyamatban. Ezen összefüggésekkel a termelés kiszámíthatóbbá, tervezhetőbb, ezáltal hatékonyabbá tehető.

Minden ipari folyamat optimalizációjához első lépésként az adott ipari terület, helyi viszonyok mélyreható ismerete szükséges, mely a helyi szakember sajátja.

A nyers adatok elemzése a szakember helyismerete, és szakértelme nélkül szinte mit sem ér. A szakemberek viszont többségében nem rendelkeznek mélyreható informatikai ismeretekkel. Ennek következtében nem képesek hatékonyan vizsgálni a gyártási folyamat során képződő adatokat.

Ezért fontos, hogy a szakember olyan informatikai rendszert kapjon, ami lehetőséget biztosít számára „könnyű”, nagy szabadságfokú vizsgálódásra amellet, hogy nem igényel tőle mélyreható informatikai ismeretek.

Az ismertetésre kerülő program elsődleges célja a szakemberek munkájának elősegítése, megkönnyíteni az adatok vizsgálatát azok vizualizációjával, valamint megteremteni az alapot mélyebb vizsgálatok (gépi tanulás) elvégzéséhez. [1]

Áttekintés

A program az ISD Dunafer Zrt. Folyamatosan Öntő művének öntési adatait használja. Az ISD Dunafer Zrt. 2 db vertikális elrendezésű öntőgéppel rendelkezik. Gépenként 2–2 szálon történik az öntés párhuzamosan.

Egy adag öntése ~60 percet vesz igénybe. Egymás után átlagban 4–5 adag öntése (szekvens) történik.

Az öntött szál belső és külső tulajdonságaira legnagyobb hatást a kristályosítói komplex folyamatok gyakorolják.

Kristályosító alatt a szálra hatással van még a megtámasztás, a másodlagos hűtés stratégiája, valamint a húzóhengerek nyomásai



Acélgártás folyamatát elemző informatikai rendszer

is, azonban ezen hatások nem változnak az öntési folyamat során.

A kristályosítóban az alábbi komplex folyamatok egymásra hatása történik, melyek befolyásolják a végtermék (bramma) belső és külső szerkezetét [2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 15]:

- Folyadékáramlás
- Hőáramlás
- Halmazállapot változások
- Súrlódás
- Kenés
- Pulzáló mechanikai mozgás
- Gáz és szilárd bezáródások áramlása
- Kémiai és kristálytani változások
- Zárványkirakódás/leválás

Az öntésindítástól eltekintve az öntési folyamat során optimális esetben az öntési sebesség, és a kristályosítóban lévő acélszint, valamint a közbenső üstben lévő acélátfolyás mértékét szabályzó dugó pozíciója a dugó (és környékének) kopásából fakadó mozgástól eltekintve nem változik.

Amennyiben ezen értékekben nagymértékű hirtelen változás áll be, az kihat a szál mind felületi, mind belső szerkezetére [6, 7, 10, 11, 14].

Ez a három jellemző (másokkal párhuzamosan) folyamatosan rögzítésre kerül az öntési folyamat során, ezért vizsgálatukkal javaslat, illetve előrejelzés is lehetséges, és így nagyobb üzembiztonság illetve alacsonyabb leminősülés érhető el a későbbi hengerelt készáruban.

[10] Zhang, Q.–Wang, L.–Wang, X. (2006): *Influence of Casting Speed Variation during Unsteady Continuous Casting on Non-metallic Inclusions in IF Steel Slabs* ISIJ International. Vol. 46, No. 10. Pp. 1421–1426.

[11] Wang, Y.–Zhang, L. (2010): *Transient Fluid Flow Phenomena during Continuous Casting: Part II—Cast Speed Change, Temperature Fluctuation, and Steel Grade Mixing* ISIJ International. Vol. 50, No. 12. Pp. 1783–1791.

[12] L. Zhang 2006: *Fluid Flow and Inclusion Removal in Molten Steel Continuous Casting Strands* 5th International Conference on CFD in the Process Industries CSIRO. P. 9. Melbourne, Australia.

[13] Shin, H.-J.–Lee, G. G.–Choi, W. Y.–S. M. Kang, S. M.–Park, J. H.–Kim, S. H.–Thomas, B. G. (2004): *Effect of Mold Oscillation on Powder Consumption and Hook Formation in Ultra Low Carbon Steel Slabs* AISTech, Assoc. Iron Steel Technology, Warrendale. PA. P. 14. Nashville, TN.

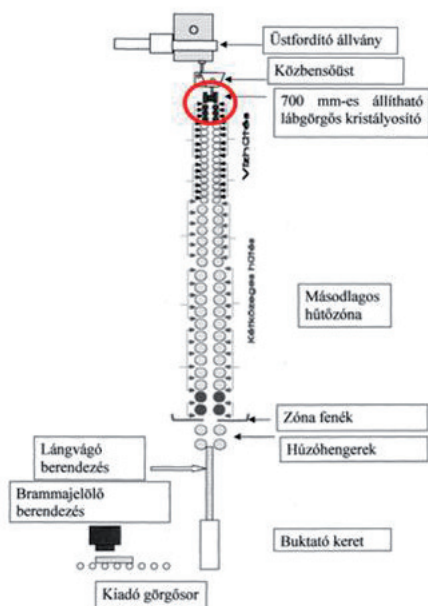
[14] Thomas, B. G.–Sengupta, J.–Ojeda, C. (2006): *Mechanism of Hook and Oscillation Mark Formation In Ultra-Low Carbon Steel*, Second Baosteel Biennial Conference. Vol. 1. Pp. 112–117. Shanghai, PRC.

[15] Sengupta, J.–Thomas, B. G.–Shin, H.-J.–Lee, G. G.–Kim, S.-H. (2006): *A New Mechanism of Hook Formation during Continuous Casting of Ultra-Low-Carbon Steel Slabs* Metallurgical and Materials Transactions. Vol. 37A Pp. 1597–1611.

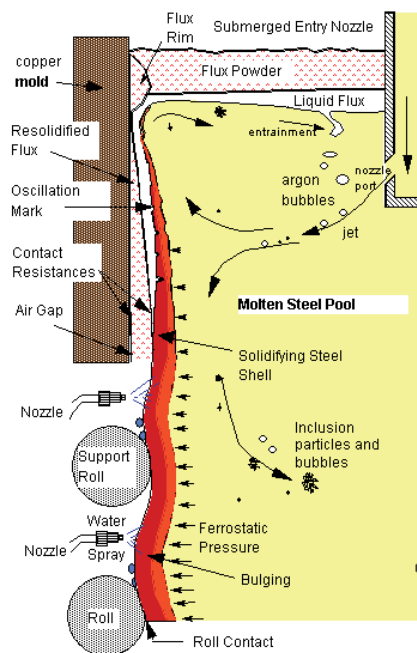


[1] Thomas, B. G. (2005): *Modeling of Continuous Casting Defects Related to Mold Fluid Flow* 3rd Internat. Congress on Science & Technology of Steelmaking, AIST, Warrendale, PA. Pp. 847–861. Charlotte, NC.

1. ábra. Öntőgép keresztmetszete.



2. ábra. Kristályosítói folyamatok. [1]



Lehetőségek

Sajnos az adatok elemzése sok akadályba ütközik, mert a Dunaferri adatstruktúrája, és adat-ábrázolási technikája adag szemléletű. A folyamatosan öntött szekvens esetén (~ 4–5 adag), ez a szemlélet nem használható.

A két szemléletmód közötti szakadékot az ismertetett program áthidalja, és az adag-szemléletű adatokat átülteti a szekvensszemléletre.

A program jelenleg két fő részből áll.



Acélgyártás folyamatát elemző informatikai rendszer

ELEMZÉS

Az adatbázis felhasználásával az öntési görbére illeszti az alábbi adatokat:

- Öntött brammák, kivágások, láb illetve fejevég kezdő- és végpozícióit
- Beavatkozások kezdő- illetve végpozícióit.
- Bekövetkező változások kezdő illetve vég pozícióit.
 - Öntési sebesség.
 - Kristályosító acélszint.
 - Közbensőüst dugó pozíció.

Az illesztés segítségével lehetőség nyílik:

- Öntés során felmerülő hibák jelzésére.
- Zárványkirakódás/leválás jelzésére.
- Felületi, illetve belső szövetszerkezeti hiba veszélyének jelzésére.
- Elemzések eredményei letárolhatók adatbázisban.

A lehetséges hibák lokalizálásával a szál kérdéses helyei vizsgálhatóvá, javíthatóvá, illetve eltávolíthatóvá válnak. Ezáltal csökkentve a hengerelt végtermék metallurgiai hiba miatti leminősülését.

Az elemzett adatok letárolásával alapot teremt további tetszőleges vizsgálat elvégzésére. A program szerkezetéből adódóan lehetőség van annak bővítésére, ezáltal további elemzések elvégzésére.

Megjelenítés

Az emberek többsége vizuális típus, ezért a megjelenítéssel nagyban elősegíthető az összefüggések feltárása.

A program lehetőséget biztosít előre összeállított, vagy akár tetszőlegesen összeállított görbekombinációk ábrázolására. Ezáltal egyszerűen válnak megfigyelhetővé olyan összefüggések, melyek áttekintése eddig hosszabb időt, és nagyobb figyelmet illetve szaktudást igényelt.



3. ábra. Gyors változásokkal terhelt öntési görbe.



Az idő alapján rögzített öntési görbék és a hossz alapján rögzített *bramma*, illetve beavatkozási adatok összefésülésével a program lehetőséget biztosít az öntési adatok hossz alapján történő ábrázolására. Így szemléletesen válik láthatóvá, hogy egy-egy anomália az öntött szál melyik részét érintette, és az adatok ellenőrzése is könnyebbé válik.

A brammahatárok, beavatkozások pontos jelölésével az öntési zavarok (ingadozások) könnyebben értelmezhetők, okaik könnyebben feltárhatók.

Az ingadozással terhelt öntésigörbe-szakaszok *lokalizálása* illetve jelölése segítségével azok hatása illetve együtthatása könnyebben megfigyelhető. Ezen szakaszok határainak azonosításával és letárolásával lehetőség nyílik különböző statisztikai vizsgálatok elvégzésére.

A megjelenítés lehetőséget biztosít az ingadozással terhelt görbeszakaszok szűrésére erősségük alapján. Az ábrázolt ingadozás minimális erőssége megadható mind idő-, mind pedig hosszegységre vonatkoztatva.

A minimális öntési sebesség alá lassított szálhúzás a meniszkusztól számított közel 10 m-es szálhosszt érinti. Ennek jelölésével a terhelt szakasz kiemelhető.

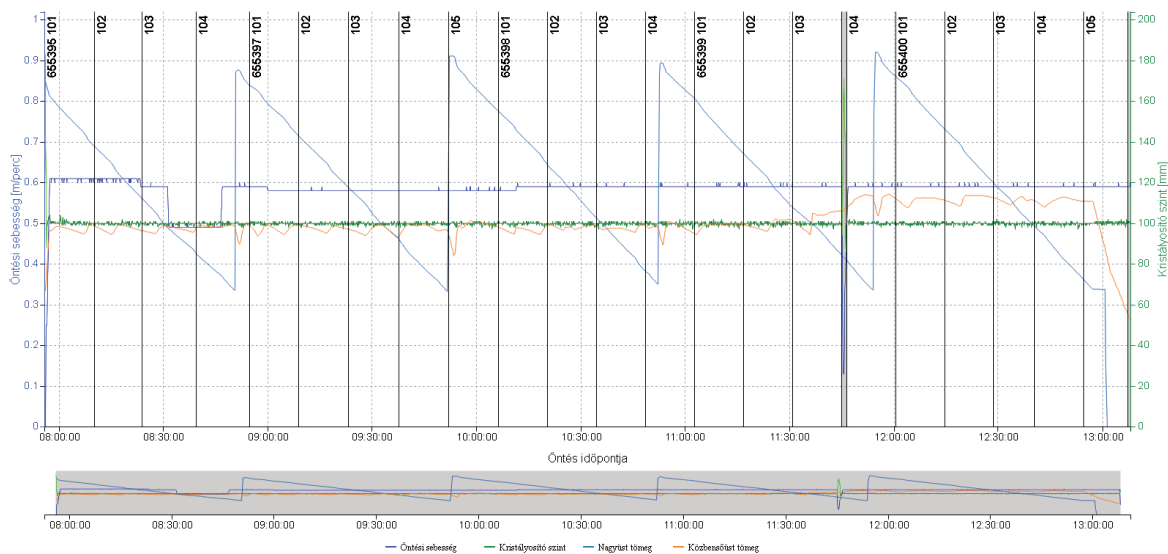
A jelölések egyidejű használatával szembetűnővé válnak a problémákkal halmozottan terhelt szálszakaszok, ezáltal lehetőséget adnak azok további vizsgálatára.

A közbensőüst dugópozíció változásának vizsgálata jelzést biztosít nagyobb, kirakódott zárványcsoportok leválásra. Amennyiben az öntési sebesség és a kristályosítói acélszint állandó, de a dugó hirtelen bezár, valószínűsíthető, hogy a kristályosítóba szakadt egy nagyobb zárványcsoport. Ezen esetekben szükségessé válhat az anomália környékének tüzetesebb vizsgálata, annak megállapítására, hogy az áramlási viszonyok hova sodorták, a zárványt a megszilárduló szálban. A dugómozgás mértéke utalhat még a levált zárvány nagyságára is.



Acélgyártás folyamatát elemző informatikai rendszer

4. ábra. Vegyes öntésű brammák az öntött szálon.



Az adagok és brammák azonosítása, és nyomon követése szempontjából minőségügyi problémát jelent, hogy az acélüstben lévő ~130 tonna acél nem brammahatárnál „fogy” el, ezért (jobb megoldás híján) a határon lévő bramma termelésszervezési szempontok alapján kerül regisztrálásra az előtte vagy az utána öntött adaghoz. Ezen felül külön problémát jelent, hogy a közbesőüst pufferv-funkciója miatt az egymás után öntött adagok keverednek. Ez abban az esetben nem jelent túl nagy problémát, ha egymás után azonos minőségű az acél, azonban időnként szükség van különböző minőségek egymásra öntésére. Ilyen esetekben különösen nagy problémát jelent a vegyes brammák kijelölése, beminősítése. A program elemzése alapján bejelölésre kerülnek a vegyes öntésű szálszakaszok is.



Wizner Krisztián–Kővári Attila

Összefoglalás

Az elkészített program az ISD Dunafer Zrt. öntési folyamatának elemzésével megteremti a szekvens szemléletű öntési folyamat vizsgálatának alapjait. Segítségével a folyamatosan öntött szálát érő hatások (beavatkozások, és egyéb anomáliák), adagra, illetve brammára specifikusan válnak automatizáltan vizsgálhatóvá. Az öntés során folyamatosan mért és rögzített adatok rugalmas ábrázolásával egyszerűbbé válik a vizuális összefüggés keresés azon szakemberek számára is, akik nem rendelkeznek mélyebb informatikai ismeretekkel.

Az elemzés támogatást nyújt a minőségügyi problémák feltárásához, valamint a karbantartások szükségességének előrejelzéséhez.

A program legnagyobb előnye azonban az, hogy további tetszőleges elemzés elvégzését teszi lehetővé. Ezáltal komplex adatelemzés valósítható meg akár a gépi tanulás eszközeinek felhasználásával a teljes acélgyártás/öntés folyamatára.

Köszönetnyilvánítás

EFOP-3.6.1-16-2016-00003 K+F+I folyamatok hosszú távú megerősítése a Dunaújvárosi Egyetemen projekt által finanszírozott kutatás.



KŐVÁRI ATTILA * –DUKÁN PÉTER **

I
nformatika

Költséghatékony okosotthon megoldás

Összefoglalás: Az IoT eszközök elterjedésével az okosotthon megoldások is egyre nagyobb teret kapnak. Az igazi okosotthonok nem csak kényelmesen távolról vezérelhetők, hanem önállóan irányítják az ingatlant a maximális energia megtakarításra, a kényelemre és a biztonságra törekedve. Számos gyártó kínál okosotthon rendszereket, de ezek mellett megjelentek olcsó megoldást kínáló rendszerelemek is mind szoftver, mind hardver tekintetében. Az előadás is egy olyan megoldást mutat be, amely költséghatékony kialakítása ellenére megfelel az okosotthonoktól elvárható funkcionalitásnak.

Kulcsszavak: Okosotthon, beágyazott rendszerek, otthon automatizálási rendszer.

Abstract: With the spread of IoT devices, smart home solutions are becoming more and more widespread. Real smart homes are not only conveniently remotely controlled, they also control the property independently for maximum energy savings, comfort and security. Many manufacturers offer smart home systems, but in addition to that, low-cost system components appeared in both software and hardware. The article also presents a solution that, despite its cost-effective design, meets the functionality expected of smart homes.

Keywords: Smart home, embedded systems, home automation system.

* Dunaújvárosi Egyetem,
Műszaki Intézet
E-mail: kovari@uniduna.hu

** ADMAXON Kft.,
E-mail: dukan@admaxon.
com



[1] Dr. Muhibul Haque Bhuyan (2015): *History of Electronics, 1st Bangladesh Electronics Olympiad 2015*. Tech Valley Solutions Limited. Pp. 21–29.

[2] James Gerhart (1999): *Home Automation And Wiring*. McGraw-Hill.

Bevezető

Bár az elektromosságot már a 17. században felfedezték, mégis csak a 19. században kezdtek aktívan foglalkozni vele. Mindezek mellett a háztartásokban csupán a 20. század elején jelent meg, így széles körű használata is ekkorra tehető. Természetesen az elektromosság használata még nem jelentette az elektronika megjelenését, ugyanis az elektronika csupán a világháborúk eredményeképp lett egyre fejlettebb. A modern elektronika kezdetének John Bardeen, William Brattain és William Shockley 1947-es felfedezését, a tranzisztorok korának beköszöntét tekintik, amiért 1956-ban meg is kapták a Nobel-díjat. Nekünk pedig meg kell említenünk a FET-tranzisztorok feltalálóját az Osztrák–Magyar Monarchia fizikusát, Julius Edgar Lilienfeld-et, aki nem publikálta az eredményét, és az ipar is figyelmen kívül hagyta, ezért 1934-ben egy német fizikus szabadalmaztatta találmányát. [1]

Ez után felgyorsult a fejlődés az elektronika területén, így az első integrált áramkör, valamint a MOSFET feltalálása után megjelentek a mikroprocesszorok, és a tranzisztorok száma minden második évben (ha éppen nem évente) megduplázódott bennük. 1968-ban Gordon Moore és Robert Noyce létrehozták az Intel vállalatot, hogy mikroelektronika területén alkossanak benne, mígnem 1971-ben kiadták a 4004-es processzort, amely 2300 tranzisztort tartalmazott egyetlen IC-ben. Az ezután megjelenő processzorok sorozata juttatta el a mikroelektronikát a kutató laboratóriumokból a háztartásokba. [1]

Az 1950-es évek vége felé kezdett az elektronika egyre népszerűbb lenni az iparban, ahol egyre gyakrabban alkalmazták automatizálási célokra. 1959-ben a Texaco cég megépítette az első automatizált, digitális elektronikai vezérlésű olajfinomítóját. A '60-as évek végén, '70-es évek elején a gyártások automatizálásának köszönhetően az integrált áramkörök ára is jelentősen csökkent, így elérhetővé vált az automatizálás a háztartásokban is. 1975-ben kifejlesztették az első otthonautomatizálási szabvány az X10, amely az elektromos hálózatot használta jelátvitelre, ahol rövid rádiófrekvenciás jelekkel továbbított digitális adatokat. Ez a hálózat a mai napig használatban van egyes helyeken. [2]

A '90-es évektől pedig a mikroelektronika terjedésével már nem csak ipari szakemberek, hanem a jó műszaki érzékkel rendelkező emberek számára is egyre átláthatóbbá, könnyebben beüzemelhetővé váltak az otthonautomatizálási rendszerek. Az okosotthon technológiák egyik előfutáraként szokták tekinteni az 1996-ban kifej-



Költséghatékony okosotthon megoldás

lesztett „taps kapcsolót”, amely hangvezérlést tett lehetővé a lakásokban. 1998-ban pedig az Egyesült Királyságban nyitottak meg egy házat „Millenium House” néven, amely példaként szolgált az otthonautomatizálásra a számítógép vezérelt fűtési körével, biztonsági monitorozásával, automatizált világításával és kertjével. [3]

A 21. század elején – részben a kínai elektronikai gyártás megerősödésének köszönhetően, részben az Internet és az internetes vásárlás elterjedése miatt – elárasztották a világot az olcsó, programozható mikrovezérlők, valamint különféle mini-atürizált szenzorok, amelyek eredményezték a szenzorhálózatok és az Internet of Things (IoT) megjelenését. Li és szerzőtársai szerint három generációjuk létezik az okosotthonoknak: [4]

1. Vezetéknélküli technológia és proxy-szerveres megközelítés: Az ilyen rendszerekben valamilyen vezetéknélküli technológiát (pl. WiFi vagy Bluetooth) használva kommunikálnak a szenzorok és az aktuátorok egy központi eszközzel, amely proxy-szerverként közvetít köztük és az Internet között.
2. Mesterséges intelligencia által vezérelt elektromos eszközök: A hagyományos otthon automatizálási rendszerek „felokosítása” felhő technológiát használó mesterséges intelligenciát alkalmazó ágensekkel.
3. Emberekkel interakcióba lépő robottársak: A jelenlegi trend a kiszolgáló robotok integrálása az otthonautomatizálási rendszerekbe. Amellett, hogy biztosítják az otthonautomatizálási rendszerek könnyebb, gyorsabb kezelését, lehetővé teszik az Interneten lévő információk, kommunikáció egyszerűbb elérését is.

Az otthonautomatizálások alapeleme jelenleg egy központiszerver-alkalmazás, amely egyrészt adatgyűjtőként, másrészt szabályzóként, harmadrészt vezérlő és monitorozó felületként szolgál. Ezt az alkalmazást otthonautomatizálási platformoknak vagy okosotthon szervereknek nevezzük. Manapság rengeteg ilyen szoftver létezik különböző hardverekre és operációs rendszerekre. Jellemzően az ingyenes változatok az elterjedtebbek. Ahhoz, hogy egy költséghatékony okosotthon-megoldást valósítsunk meg, első lépésként ezt a központi elemet kell meghatározunk. Nyomozásunk célja, hogy az egyik legnépszerűbb, könnyen kezelhető, ingyenes megoldást válasszuk.

Egy közelmúltban végzett biztonsági elemzés a Shodan-keresőmotor használatával próbálta felmérni az ilyen típusú alkalmazások elterjedtségét. Ahogy az alábbi ábrán is látszik, jelentős különbség mutatkozik a különböző fantázianevelű okosotthon szerverek között.

[3] Somfy (2018. 03. 07.): *A quick history of home automation*. (URL: <https://www.somfy.com.au/Blog/Post/2018-03-07-a-quick-history-of-home-automation>)

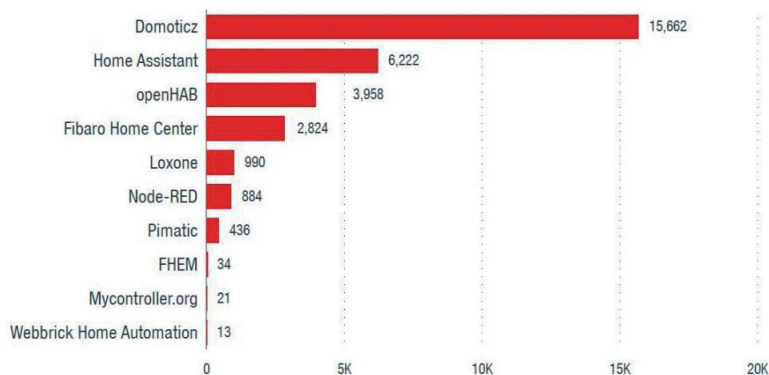
[4] Rita Yi Man Li (2016): Sustainable Smart Home and Home Automation: Big Data Analytics Approach. *International Journal of Smart Home*. Vol. 10. No. 8. Pp. 177–198.



[5] Trend Micro (2019. 02. 22.): *Cybersecurity Risks in Complex IoT Environments - Threats to Smart Homes, Buildings and Other Structures* (URL: https://documents.trendmicro.com/assets/white_papers/wp-cybersecurity-risks-in-complex-iot-environments.pdf)

[6] Smart Home Blog (2018. 03. 15.): *OpenHab vs Home Assistant vs Domoticz - Best Open Source Home Automation* (URL: <https://www.smarthomeblog.net/category/home-automation-ideas/>)

1. ábra. Okosotthon szerverek elterjedtsége (Shodan-keresőmotorral, 2019-ben.) [5]



Mivel az ingyenes változatokra koncentráltunk, ezért az első három szoftvert vetjük jobban szemügyre kutatásunk során. Összehasonlításunkban a különböző szempontoknak más és más súlyuk volt a kiválasztási rendszerünkben.

Először a *Domoticz* nevű alkalmazásról gyűjtöttük össze a fontosabb adatokat. A C++ nyelven írt programnak 2012-ben publikálták az első változatát. Valójában egy webszerver, amely HTML5-ös interfészen kezelhető. Moduljai viszont Lua nyelven írt szkriptek. [6]

Minden elterjedtebb operációs rendszerre lefordították, és GPLv3-as licenz biztosítja az ingyenes elérhetőségét. Felülete könnyen átlátható, és látványosan egyszerűsített. Egyedüli hátránya, hogy csak az elterjedtebb, szabványosabb eszközöket támogatja. A *Home Assistant* szoftver első változata 2013-ban jelent meg. Python nyelven írt (már a 3-as verziót használja) kódja Apache 2.0 licenst használ, és YAML konfigurációs fájlokra épül. [6] Tud minden fontosabb, szükségesebb funkciót, amit egy okosotthon szoftvernek tudnia kell, de igazán semmiben sem kiemelkedő.

Végül az *openHAB* szoftvert vizsgáltuk meg, amely a legkorábbi a három közül a 2010-es megjelenésével. Az akkoriban legnépszerűbb Java nyelven fejlesztették emiatt és egy speciálisabb licenst, az EPLv1-et használja. Talán pont a korának köszönhetően a legszéleskörűbb eszköztámogatással rendelkezik, ugyanakkor nagyon nehezen volt kezelhető a 2017-es új kiadásáig, amely újabb felhasználói felületeivel valamelyest egyszerűsított rajta, de még mindig nem éri el a konkurens alkalmazások egyszerűségét. [6]



Költséghatékony okosotthon megoldás

Az alábbi táblázatban látható egy összefoglalás az említett lényegesebb paramétereiről, amelyek alapján a választásunk végül a *Domoticz* otthonautomatizálási rendszerre esett.

1. táblázat: A legnépszerűbb ingyenes otthonautomatizálási rendszerek összehasonlítása.

	Domoticz	Home Assistant	openHAB
Megjelenés éve	2012	2013	2010
Programnyelv	C++	Python 3	Java
Licensz típusa	GPLv3	Apache 2.0	EPLv1
Képességek	++	++	+++
Kezelhetőség	+++	++	+

[7] Domoticz (2015. 02.): *Domoticz – Open Source Home Automation System* (URL: <https://www.domoticz.com/DomoticzManual.pdf>)

Domomticz otthonautomatizálási rendszer

A Domoticz otthonautomatizálási rendszer kifejlesztésekor az volt a cél, hogy egy általános központi vezérlő felületet nyújtson a különböző típusú szenzorokból való adatgyűjtéshez, és a különböző eszközök vezérléséhez. Emiatt használni lehet akár világítás kapcsolókhoz, ajtónyitás-érzékelőkhöz, csengőkhöz, biztonsági eszközökhöz, időjárás-érzékelőkhöz (pl. UV, eső, szél mérők), hőmérséklet-érzékeléshez, vagy akár milyen analóg vagy digitális bemenő jel feldolgozásához.

Az alkalmazás egyaránt telepíthető Unix/Linux alapú vagy Windows-os rendszerekre, és a minimális hardver követelménye csupán 256 MB RAM, és 200 MB háttértár, valamint egy böngésző (1280x1024-es felbontás javasolt). [7] Mivel elsősorban Raspberry Pi-re készült, ezért vannak olyan hardver-komponensek, amelyek csak arra csatlakoztatva használhatóak, de nagyon széles körű a támogatása. Telepítésének legegyszerűbb módja, ha valaki letölti az elkészített SD kártya képfájlt, és kiírja azt egy SD kártyára. De ezek mellett lehetőség van mind Unix/Linux környezetben, mind Windows-os környezetben telepítő futtatásával telepíteni. Frissítéskor nem javasolt az eltávolítás után telepítés, mivel ez esetben elveszne a teljes adatbázisa, így inkább felül kell írni az újratelepítéssel a régebbi fájlokat.



[7] Domoticz (2015. 02.): *Domoticz – Open Source Home Automation System* (URL: <https://www.domoticz.com/DomoticzManual.pdf>)

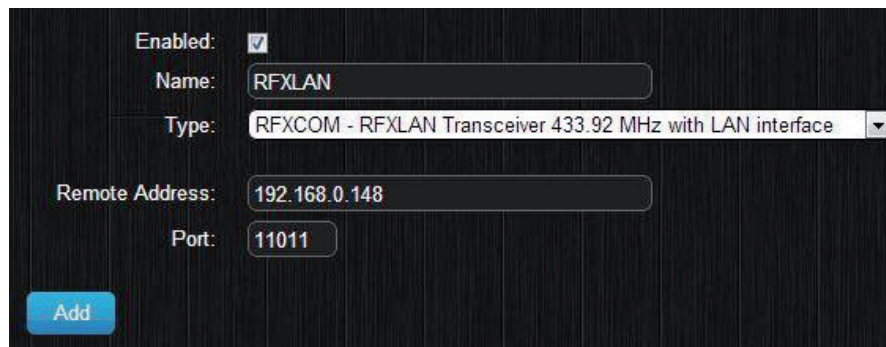
Maga az alkalmazás egy webszerverként üzemel a 8080-as TCP porton, így a felületét böngészőből lehet elérni. Az ablak tetején egy navigációs sor látszódik, és minden egyes ablaka általában 10 másodpercenként frissül (leszámítva az eszközöknél a hardverbeállításokat). Ugyanakkor az alkalmazás indításakor több paramétert is felül lehet bírálni (mint a portszámok, naplózás részletessége, adatbázisfájl elérési útvonala stb.). Amennyiben SSL-támogatással fordított változatot telepítünk, úgy akár SSL portszámot és tanúsítványt is konfigurálhatunk a rendszerhez a nagyobb biztonság érdekében.

2. ábra. A Domoticz menüsora.



A rendszer beüzemeléséhez első lépésként mindig a felhasználásra kerülő hardvereszközöket kell bekonfigurálni, hogy kommunikálni tudjon velük a Domoticz. Az USB-n elérhetőkkel általában egyszerűbb a dolgunk, mivel magától felismeri őket, de a hálózaton elérhetőknél is csupán a hálózati címüket, valamint a használni kívánt kommunikációs portjukat kell megadnunk.

3. ábra. Eszköz hozzáadása a Domoticzhoz. [7]



A Domoticz-cal lehetőség van a szenzorok másokkal megosztására is, persze ehhez már külön felhasználók létrehozása szükséges.

Ha viszont mi szeretnénk csatlakozni egy másik alkalmazás (azaz szerver) által megosztott szenzorokhoz, akkor erre a Domoticz Remote Server opcióval van lehe-



Költséghatékony okosotthon megoldás

tőségünk a távoli eszköz címének, portjának (alapból TCP 6641-es), és az ott lévő felhasználó nevünk és jelszavunk megadásával.

4. ábra. Domoticz Remote Server. [7]

The screenshot shows a configuration window for the Domoticz Remote Server. It includes the following fields and settings:

- Enabled:** A checked checkbox.
- Name:** A text field containing "RemoteDomoticz".
- Type:** A dropdown menu set to "Domoticz - Remote Server".
- Remote Address:** A text field containing "188.199.200.201".
- Port:** A text field containing "6641".
- Username:** A text field containing "username".
- Password:** A password field with 10 dots.

Ahhoz, hogy olyan funkciókat, mint a világítás éjszakai automatikus kapcsolása (fényérzékelő nélkül) tudjunk használni, szükséges az alkalmazás beállításoknál az órának és különböző paramétereinek a konfigurálása, mint például a pontos földrajzi pozíció. Így a pozíciónkból meghatározható, hogy mikor sötétedik be, és mikor kel fel a nap.

A szenzoroktól bejövő jelekhez határértékek is rendelhetők, és az átlépésük esetén értesítés generálható. Értesítésekhez konfigurálni lehet az e-mail szerver és fiók beállításait, ahol a hagyományos SMTP mellett a TLS és SSL alapú változatokat is használhatjuk. iPhone és iPad esetében a Prowl-rendszer, míg Androidos eszközök esetében az NMA-rendszer biztosítja ezt a szolgáltatást, amihez az alkalmazás legenerálja az API-kulcsot. Az előzmények alapértelmezetten rögzítésre kerülnek bizonyos ideig, de ezt is állítani lehet a webes felületen.

Raspberry Pi esetében ezen a webes felületen keresztül is lehet frissíteni a Domoticz-rendszert, amelynél azt is kiválaszthatjuk, hogy csak a kiforrott változatok jelenjenek meg, vagy már a béta állapotúak is.



Költséghatékony okosotthon megoldás

A különböző eszközöknek más-más beállításai vannak, de ezek mindig az adott modulban vannak fejlesztve, így nem részletezzük. Általában az eszközöknél megjelennek a főbb jellemzők, ami alapján azonosítani tudjuk a szenzorainkat, aktuátorainkat.

A hőmérsékletek fülön például lehet a hőmérsékletmérőhöz páratartalom-mérő is csatlakoztatva, amely esetben mindkettő értékét láthatjuk. Tipikus gombok itt a kedvenceket jelölő csillag, a naplót (mérési előzményeket) megjelenítő Log gomb vagy a szerkesztés (Edit) gomb, ahol a főbb paramétereit állíthatjuk.

Az értesítések (Notifications) gomb nem minden eszköznél jelenik meg, de ahol lehetséges az érték változása, ott határértékek adhatóak meg, amelyek átlépésekor értesítés generálódik.

7. ábra. Mérési előzmények (Log gomb).



Az időjárás fülön a széllel, esővel, UV-sugárzással kapcsolatos szenzorok, valamint a barométerek láthatóak. A Utility fülön pedig minden egyéb szenzorfajta megtalálható (pl. energia, gáz, feszültség, levegőminőség stb.).

A lámpák/kapcsolók fülön a lámpákon és kapcsolókon túl ajtócsengők, szirénák, biztonsági szenzorok is kezelhetők. Jellemzően ezeket a legbonyolultabb beállítani.



[8] Hobbytronics PK (2018. 06. 16.): *Domoticz Tasmota - Control Sonoff without Internet* (URL: <https://blog.hobbytronics.pk/control-sonoff-without-internet/>)

[9] MálnaSuli (2018. 11. 15.): *Hardveres óra (RTC) a Raspberry-hez* (URL: <http://www.malnasuli.hu/alapok/hardveres-ora-rtc-a-raspberry-hez/>)

8. ábra. Compact módban az összes szenzortípus látható.



Költséghatékony szerver-megoldás

Az előzőekben láthattuk, hogy az ingyenes Domoticz otthonautomatizálási webes alkalmazás számos operációs rendszert támogat és kis erőforrásigénye lehetővé teszi, hogy kis teljesítményű szerveren is problémamentesen futtatható legyen, mint például a Raspberry Pi. Az okosotthon-rendszer távvezérlését célszerű WiFi vezeték nélküli kapcsolat segítségével megoldani, amit már számos költséghatékony eszköz támogat, többek között a Sonoff-eszközcsalád. Ebben az esetben a szerverfunkciók megvalósítása céljából célszerű a Raspberry Pi termékcsalád Zero W beépített WIFI vezérlőt tartalmazó mikroszámítógépének választása (9. ábra). A mikroszámítógép operációs rendszere microSD kártyán helyezhető el. A rendszer úgy is kialakítható, hogy nem csatlakozik az internethez, mely nagyobb biztonságot jelent a rendszer számára [8]. Azonban ebben az esetben a Raspberry Pi egységhez külső valósídejű órát kell illeszteni (például DS3231), mivel az tápfeszültség kimaradás idejére belső órát nem tartalmaz (amennyiben internethez kapcsolódik ez nem szükséges, mert szinkronizálni tudja az órát). A külső óra általában I2C kommunikációt alkalmaz és a Raspberry Pi GPIO kimeneteihez csatlakoztatható [9].



Költséghatékony okosotthon megoldás

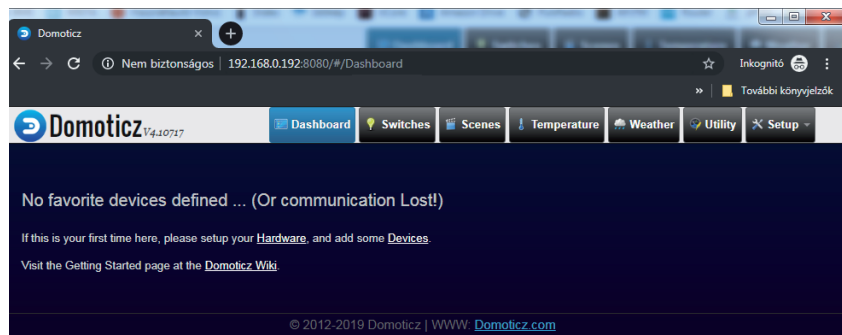
9. ábra. Raspberry Pi Zero W és Valósídejű óra modul.



A Raspberry Pi szerver számára előkészített Raspbian Lite Linux disztribúció a Raspberry weboldaláról letölthető [10]. A szerver számára grafikus felület nem szükséges, hisz a Domoticz weboldalának eléréséhez csak webszerverre van szükség. A Raspbian Lite rendszert tartalmazó képfájl microSD kártyára írása az Etcher szoftver segítségével egyszerűen megvalósítható [11].

Az otthonautomatizálási rendszer MQTT-protokollon [12] tart kapcsolatot a hozzá illesztett eszközökkel, amely kapcsolat kialakításához egy MQTT-bróker telepítése is szükségessé válik a szerveren. Természetesen a Domoticz szoftvert is telepíteni kell a szerveren [13]. Sikeres telepítés után a 10. ábrán látható felület jelenik meg. A felület nyelve magyarra is változtatható.

10. ábra. Domoticz kezdőképernyője.



[10] Raspberry Pi Foundation (2019. 09. 05.): Downloads (URL: <https://www.raspberrypi.org/downloads/>)

[11] Balena (2019. 09. 05.): balenaEtcher (URL: <https://www.balena.io/etcher/>)

[12] MQTT.org (2019. 09. 06): MQTT.org Home Page (URL: <http://mqtt.org>)

[13] Domoticz (2019. 09. 04.): Domoticz Wiki – Raspberry Pi (URL: https://www.domoticz.com/wiki/Raspberry_Pi)



[14] SONOFF (2019. 09. 06.): *SONOFF Home Page* (URL: <https://sonoff.tech>)

[15] SONOFF (2019. 09. 06.): *SONOFF TH10/TH16 Wi-Fi Smart Switch* (URL: <https://sonoff.tech/product/wifi-diy-smart-switches/th10-th16>)

[16] SONOFF (2019. 09. 06.): *SONOFF eWeLink* (URL: <https://sonoff.tech/ewelink>)

[17] GitHub/arendst (2019. 09. 09.): *Sonoff-Tasmota Wiki* (URL: <https://github.com/arendst/Sonoff-Tasmota/wiki>)

[18] GitHub/espressif (2019. 09. 09.): *esptool* (URL: <https://github.com/espressif/esptool/releases>)

Költséghatékony érzékelő, vezérlőmegoldás

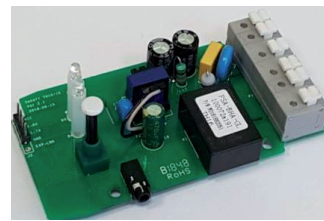
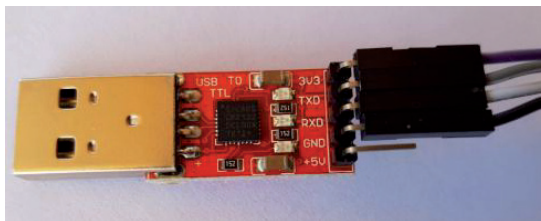
Az utóbbi időben megjelentek olyan olcsón beszerezhető okosotthon automatizálási rendszerekhez illeszthető eszközök, melyek WIFI-kapcsolaton képesek kommunikálni, valamint mind a vezérlő, mind pedig az érzékelő szerepét betöltik. A Sonoff termékcsalád is ebbe a kategóriába sorolható [14], a Sonoff TH10/TH16 [15] okos kapcsolóhoz külső hőmérsékletérzékelő is illeszthető (11. ábra). A Sonoff egységek vezérléséhez a gyártó által készített mobil alkalmazás, az eWeLink szükséges [16].

11. ábra. Sonoff TH10/TH16 okos kapcsoló.



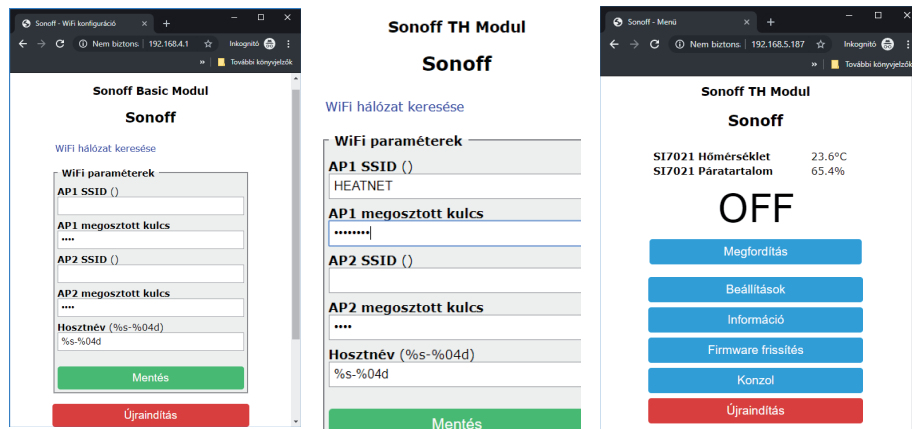
Ez a megoldás közvetlenül nem teszi lehetővé az alternatív okosotthon megoldásokhoz való illesztését, azonban a Sonoff egységek firmware-e lecserélhető olyan megoldásra, amely ezt az illeszthetőséget biztosítja, ilyen például a TASMOTA [17]. A firmware cseréhez meg kell bontani az egység házát és a belső csatlakozó kivezetésekhez USB-UART átalakítóval csatlakozva (12. ábra) például az Esptool szoftver segítségével feltölthető [18] (megjegyzés: SonOTA segítségével ez az egység házának megbontása nélkül is megoldható, ezt nem próbáltuk).

12. ábra. USB-UART átalakító és Sonoff-egység.



A firmware feltöltése után az eszközt újra kell indítani és kapcsolódni hozzá WIFI-kapcsolaton, így a konfigurálása webes felületen keresztül megoldható (13. ábra). A Raspberry Pi szervert célszerű Access Point-ként konfigurálni, így a kapcsolódó külső eszközök ezen keresztül tudnak kommunikálni a szerverrel, nincs szükség külön Router beüzemelésére.

13. ábra. Sonoff TASMOTA WIFI konfigurálása.



Szintén a webes felületen keresztül konfigurálható a külső hőmérsékletérzékelő [19] (14. ábra), amennyiben az a Sonoff-egységhez csatlakoztatva van (például Si7021), valamint az MQTT-bróker elérésének beállításai. Az MQTT-bróker beállításait a Domoticz felületén is meg kell adni.

A Domoticz felületén a kapcsolók és érzékelők virtuális eszközként kell létrehozni, és az eszköz webes konfigurációs felületén a Domoticz-alkalmazáson belüli Idx-azonosítóval párosítani a virtuális eszközt a valós eszközzel (15. ábra). A Domoticz webes felületének megjelenése a képernyőhöz optimalizált, így mobil eszközön is megfelelően jelenik meg.

[19] ITEAD (2019. 09. 09.): *Sonoff TH10/TH16: Temperature and Humidity Monitoring WiFi Smart Switch* (URL: <https://www.itead.cc/sonoff-th.html>)

14. ábra. Sonoff TASMOTA hőmérsékletérzékelő, MQTT konfigurálása.

Sonoff TH Modul

Sonoff

Modul paraméterek

Alkalmazott modul (Sonoff Basic)

Sonoff TH (4)

GPIO1 Soros KI

Nincs (0)

GPIO3 Soros BE

Nincs (0)

GPIO4

Nincs (0)

GPIO14 Szensor

SI7021 (3)

Mentés

Beállítások

Sonoff TH Modul

Sonoff

SI7021 Hőmérséklet

23.7°C

SI7021 Páratartalom

65.6%

ON

Megfordítás

Beállítások

Információ

Firmware frissítés

Konzol

Újraindítás

Sonoff TH Modul

Sonoff

MQTT paraméterek

Hoszt ()

192.168.5.1

Port (1883)

1883

Kliens (DVES_52C17D)

DVES_%06X

Felhasználó (DVES_USER)

pi

Jelszó

Topic = %topic% (sonoff)

DVES_52C17D

Teljes topic (%prefix%/%topic%/)

%prefix%/%topic%/

Mentés

15. ábra. Virtuális és valós eszköz párosítása.

Domoticz

192.168.5.1:8080/#/Devices

Domoticz V4.4.0717

Kezelőfelület

Kapcsolók

Események

Hőmérséklet

Időjárás

Vegyes

Beállítás

Használt

Minden eszköz

Nem haszn.

Felfrsítés

Show 25 entries

Idx	Hardver	ID	Unit	Név	Típus	Altípus	Adat	Frissítve
1	RPI	0000044D	1	RPI_CPU_Usage	General	Percentage	1%	2019-05-26 21:41:05
2	RPI	0001	1	RPI_Internal Temperature	Temp	LaCrosse TX3	46.5 C	2019-05-26 21:40:05
3	RPI	0000044C	1	RPI_Memory Usage	General	Percentage	8.22%	2019-05-26 21:40:15
4	RPI	000000DC	1	RPI_Process Usage	General	Custom Sensor	16.31 MB	2019-05-26 21:40:15
5	RPI	0000044E	1	RPI_HDD /boot	General	Percentage	50.97%	2019-05-26 21:38:25
6	RPI	0000044F	1	RPI_HDD /	General	Percentage	4.06%	2019-05-26 21:38:25
7	HEAT1	00014057	1	HEAT1	Light/Switch	Switch	Off	2019-05-26 21:29:03
8	TEMP1+HUM1	14058	1	TEMP1+HUM1	Temp + Humidity	THGN122/123/132, THGR122/228/238/268	0 0 C, 50 %	2019-05-26 21:38:36

Showing 1 to 8 of 8 entries

First Previous 1 Next Last

© 2012-2019 Domoticz | WWW. Domoticz.com

Költséghatékony okosotthon megoldás

Sonoff TH Modul

Sonoff

Domoticz paraméterek

Idx 1	7
Key idx 1	0
Szenzor idx 1	Hőmérséklet
Szenzor idx 2	Hőmérséklet, páratartalom
Szenzor idx 3	Hőmérséklet, páratartalom
Szenzor idx 4	Teljesítmény, energia
Szenzor idx 5	Fényerő
Szenzor idx 6	Szám/PM1
Szenzor idx 7	Feszültség/PM2.5
Szenzor idx 8	Áram/PM10
Szenzor idx 9	Légminőség
Frissítési időzítő (0)	0

Mentés

16. ábra. Domoticz kezelőfelülete mobil eszközön.

192.168.5.1:8080/#/Da

04:53 ▼ 20:31

Világítás/Kapcsolók

HEAT1 Be Ki

OKOSFUTES1 - Thermostat C Off Auto Forced

OKOSFUTES1 - Thermostat M Normal Economy

OKOSFUTES1 - Thermostat Pause Be Ki

Hőmérséklet érzékelők

TEMP1+HUM1 24.9° C, 64 % (Kellemes)
Harmatpont: 17.62° C

Vegyes érzékelők

OKOSFUTES1 - Setpoint Normal 25.0° C

OKOSFUTES1 - Setpoint Economy 20.0° C



Kővári Attila–Dukán Péter

Összefoglalás

Az eddigi tapasztalataink alapján a Domoticz/Raspberry Pi és Sonoff/TASMOTA segítségével felépített otthonautomatizálási rendszer megfelelően működik, könnyen konfigurálható lehetőséget biztosít azok számára, akik ilyen költséghatékony rendszer kialakítását tűzték ki célul. Azonban az eddigi használat során úgy gondoljuk, hogy a Domoticz kezelőfelületét lehetne még könnyebben kezelhetővé tenni, valamint az eszközök konfigurálása is egyszerűsíthető lenne, ennek ellenére jelen kialakításában is megfelelő alternatívát biztosít a drágább megoldásokkal szemben.

Köszönetnyilvánítás

A munkát az EFOP-3.6.2-16-2017-00018 „Termeljünk együtt a Természettel-az Agrárerdészeti mint új ki-törési lehetőség” program támogatta.



BÉRES ILONA *-KIS MÁRTA **-MAGYAR TÍMEA ***

I
nformatika

Innovatív oktatási módszerek technológiai támogatása

Összefoglalás: Napjainkban nem a lexikális tudás elsajátítása a fő cél, hanem egy rugalmas, kreatív tudásbázis létrehozása, ami a többi órán, majd később a munkahelyen is jól alkalmazható. Ezen célkitűzés elérése érdekében a hagyományos kontakt tudásátadás helyett innovatív oktatási/tanulási módszereket alkalmazunk egyetemünkön, melyeket különböző digitális technológiákkal támogatunk.

Kulcsszavak: Innovatív oktatás, aktív tanulás, technológia.

Abstract: Nowadays the aim of learning is not to acquire lexical knowledge, but to generate a flexible, creative knowledge base that can be used in different courses and later in the workplace. In order to achieve this goal, we use innovative teaching / learning methods at our university instead of traditional contact knowledge transfer, supported by various digital technologies.

Keywords: Innovative teaching, active learning, technology.

Bevezető

A Budapesti Metropolitan Egyetemen az elmúlt években több innovatív oktatási/tanulási módszert is meghonosítottunk. Ilyenek például a projekt-alapú tanulás, kollaboratív tanulás, problémaalapú tanulás, a tükrözött osztályterem módszere [1], a hallgatói profil/preferencia alapú csoportalakítás, hallgatói projektek egyéni és csoportos értékelése. Mindezen módszerekhez igyekeztünk megtalálni azon digitális eszközöket, amelyek az adott oktatási módszer, adott résztvevői csoport és környezet számára alkalmazhatóak. Cikkünkben ezen alkalmazásokat gyűjtöttük össze rendszerezve.

* Budapesti Metropolitan

Egyetem

E-mail: iberes@metropolitan.hu

** Budapesti Metropolitan

Egyetem

E-mail: mkis@metropolitan.hu

*** Budapesti Metropolitan

Egyetem

E-mail: tmagyar@metropolitan.hu

[1] Béres I.–Kis M.–Magyar T. (2017): „Innovatív módszerek a felsőoktatásban – Tükrözött osztályterem a METUn”. Informatika a felsőoktatásban Konferencia, Debrecen.



[2] Béres I.–Turcsányi-Szabó M. (2009): „Multimédia anyagok szerkesztése” kurzus hatékonyságnövelése web alapú projekt módszer alkalmazásával. Multimédia az oktatásban 1995–2006, lektorált konferencia kiadvány.

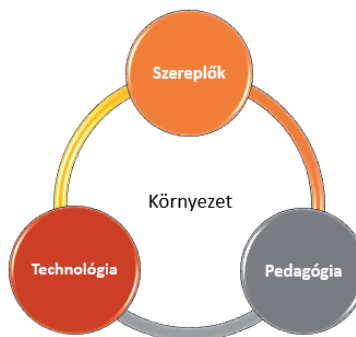
A webes alkalmazások lehetővé teszik a hallgatók közötti interakciókat, a tartalmak kollaboratív létrehozását, megosztását, a projektmunkák online szervezését, részfeladatokhoz felelős és határidő rendelését. Az elkészült munkák egyéni, illetve kollaboratív értékelését. [2] A cikkben az alábbi kérdések megválaszolására fókuszálunk: Melyek azok a technológiák, amelyek hatékonyan támogatják az innovatív tanulási megközelítéseket? Hogyan lehet ezeket integrálni a tanulási folyamatokba? Milyen technológiákkal támogathatjuk a MyBrand építést (portfóliógyűjtést, tárolást, bemutatást)? Az alkalmazott technológiák között kiemelkedő szerepet kapnak az azonnali visszajelzést adó alkalmazások, online tananyag létrehozása, online kollaboráció, projektmunka/csapatmunka támogatása.

Elméleti alapok

A technológiával segített tanulási folyamatnak 4 fontos pillére van, ami hatással van a kimenetre (1. ábra):

1. A tanulási folyamat résztvevői: hallgatók (nappali, levelező, hazai, külföldi stb.), oktatók, meghívott előadók.
2. Pedagógia: az alkalmazott módszer.
3. Technológia: online platformok, amelyek támogatják a tanulási folyamatot.
4. Környezet: ahol a tanulás/oktatás zajlik: előadás, szeminárium, intézményen belül v. kívül, f2f stb.

1. ábra. Technológiával segített tanulás pillérei.





Innovatív oktatási módszerek technológiai támogatása

PEDAGÓGIA

A hagyományos (frontális) oktatási módszerek helyett egyre többen alkalmazunk aktív hallgatói részvételt igénylő módszereket [8], mint a projektmódszer, vagy a problémaközpontú tanulás, kiegészítve a tükrözött osztályterem módszerével [5]. Kutatások igazolják és saját magunk is tapasztaljuk, hogy a hallgatóink számára ezek a módszerek jobban megfelelnek az igényeiknek.

TECHNOLÓGIA

Nagyon fontos pillére ennek a modellnek az alkalmazott technológia. [7] Számptalan ingyenes online alkalmazás áll rendelkezésünkre. Cikkünkben azokat a webes technológiákat ismertetjük, amelyeket a gyakorlatban már sikerrel alkalmazunk a Budapesti Metropolitan egyetem Módszertani Intézetében. [3] Ezek például a projektmunkát támogató alkalmazások [4], a közös tartalomgenerálás, illetve az adatvizualizációs alkalmazások.

Alkalmazások

(A teljesség igénye nélkül szeretnék megmutatni néhány példát.)

GONDOLATTÉRKÉP

A gondolattérkép alkalmas közös ötletelésre (bainstormingra), téma feldolgozásra, akár projektmunka támogatásra, közös tartalomgenerálásra. Az első órán a felületet megosztva a diákokkal be tudnak mutatkozni (név, szak, érdeklődés, hobbi). Az elkészített névjegyüket hozzá tudják adni a diavetítéshez, aminek a vetítési sorrendjét is be tudják állítani, de mindenki elmondja szóban is gyakorlasképpen. Nagyon hasznos idő ez, mert:

1. Elkészül az első kollaboratív tartalom.
2. A bemutatkozással megismerjük egymást, az érdeklődési körök megismerése segítheti a projektszoptok kialakítását.
3. A hallgatók különösebb erőfeszítés nélkül megtanulnak a gyakorlatban használni egy alkalmazást.

[3] Béres I.–Licskó I.–Kis M. (2011): *Magyar T. „Web-alapú projekt módszer alkalmazása a BKF-en”*. Budapest: Annales, Budapesti Kommunikációs és Üzleti Főiskola.

[4] Beres I.–Kis M.: „*Flipped classroom method combined with project based group work*” In: Teaching and Learning in a Digital World Proceedings of the 20th International Conference on Interactive Collaborative Learning, Springer Print.

[5] Bishop, J. L.–Verleger, M. A. (2013): „*The flipped classroom: A survey of the research*”. In ASEE National Conference Proceedings, Atlanta, GA (Vol. 30, No. 9)

[7] Freeman, S.–Eddy, S. L.–McDonough, M.–Smith, M. K.–Okoroafor, N.–Jordt, H.–Wenderoth, M. P. (2014): „*Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics*”. Proceedings of the National Academy of Sciences 111(23), Pp. 8410–8415.

[8] Michael, J. (2006): „Where's the evidence that active learning works?”, *Advances in Physiology Education* 30(4). Pp. 159–167.



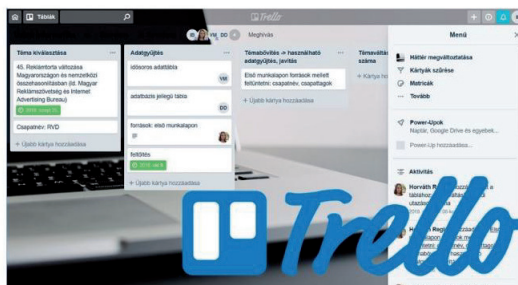
TRELLO

Projektmunka támogatására a Trello-t használjuk, ami egy online feladat- és projektmenedzsment-alkalmazás.

A Trello-t használhatjuk közös cikkíráshoz, illetve hallgatói vagy saját projektjeink menedzselésére. Alkalmazásával átláthatóvá válnak a projektfeladatok, részfeladatok, határidők így az egész folyamatot könnyen lehet menedzselni. Részfeladatokhoz időpontokat, határidőket, további személyeket lehet rendelni. Nagy segítség, hogy egy adott projekthez tartozó összes információt, fájlt, képet, linket egy helyen lehet kezelni.

Feladatok szétosztását, részfeladatokhoz felelős és határidő rendelése egyszerű kártyák hozzáadásával valósítható meg. A csapattagok és az oktató is nyomon tudja követni ki mit tett hozzá, és éppen hol tart a projekt.

2. ábra. Trello.



VIZUALIZÁCIÓ

A vizuális tartalom generálóeszközök megismertetése is kiemelt szerepet kap az oktatásunkban.

Megtanulnak a diákok videós segédanyagokat készíteni, lejátszható diagramokat, hőtérképeket előállítani, és különböző infografikákat készíteni. Mindezen tudás nagyon hasznos eleme lehet a szakmai portfóliójuknak.

Gapminder

Adatvizualizációra használjuk. Ingyenes, online, 5 dimenziós interaktív diagramok szerkeszthetők vele. Alkalmazásával látványos adatábrázolási eszközt sajátíthatnak el hallgatóink.





Béres Ilona–Kis Márta–Magyar Tímea

Infografika

Az infografika az információ grafikus megjelenítési formája. Hatékony eszközadatok megjelenítésére, fogalmak elmagyarázására, kapcsolatok feltérképezésére, trendek bemutatására és statisztikai adatok ábrázolására használjuk. A 3. ábrán az Egyetem új, MyBrandnek nevezett portfólióalapú oktatási módszertanán alapuló hallgatói életút látható egy infografikán.

Mentimeter

Ingyenes, online, interaktív prezentációs eszköz. A prezentációhoz, egyedi azonosítószámmal vagy QR-kóddal lehet csatlakozni. Professzionális változata előfizethető.

Kahoot

Ingyenes, online, interaktív feladatmegoldás. Használható előadáson, téma bevezetéshez, tananyagrészek számonkérésére.

Célok, módszer

Az oktatási módszer megválasztásakor több szempontra is figyelemmel kell lennünk. Többek között meg kell határoznunk, hogy a Bloom-taxonómiában (4. ábra) a tudásfejlődésnek milyen szintjeire szeretnék eljuttatni a diákokat, mert ez alapján meghatározza, hogy milyen elemekkel dolgozunk.

4. ábra. Bloom-féle taxonómia rendszer.





Innovatív oktatási módszerek technológiai támogatása

Szeretnénk elérni, hogy a hallgatók megtanulják kritikusan értékelni saját és mások munkáját. Egy nagyon jó segédeszköz erre a Google űrlapkészítő alkalmazás, amelyben a hallgatók az oktatók által megadott (vagy közösen generált és elfogadott) szempontrendszer alapján értékelhetnek, és az értékelések eredményeit azonnal táblázatban és grafikusan is megkapjuk.

ELVÁRÁSOK A DIÁKOKKAL SZEMBEN

A kurzusok felépítésekor világosan kell látni, milyen célkitűzéseink vannak az egyes kompetenciaterületeken. Általunk kiemelt legfontosabb kompetenciák, amik fejlesztésére fókuszálunk a következők.

- Tudásépítés: Legyen képes új tudást létrehozni a meglévő ismereteire támaszkodva.
- Kollaboráció: Legyen képes együtt működni másokkal és közösen felelős döntéseket hozni.
- IKT: Legyen képes kihasználni az IKT-eszközök lehetőségeit a saját céljai eléréséhez.
- Problémamegoldás: Legyen képes valós problémák megoldására, a megoldások implementálására.
- Kritikus gondolkodás: Legyen képes építő módon értékelni saját és mások munkáját.

MENTORI TEVÉKENYSÉG

A tanári szerep átalakul, ami sokkal inkább hasonlít egy mentori tevékenységhez. Fontos, hogy a tananyagokat online elérhetővé kell tennünk. Emellett az azonnali visszajelzést adó alkalmazásokat adjuk a hallgatók kezébe, amivel ők online tudnak kollaborálni, a projektükön dolgozni, illetve amik támogatják a csapatmunkát. Nagy hangsúlyt fektetünk a vizualizációra, design-ra, ehhez többek között nagy segítség a Gapmider és az Infografika.

Összefoglalás

Az innovatív oktatási módszerek támogatása digitális eszközökkel kiemelt szerepet kap az oktatásunkban, mert így tudjuk leghatékonyabban menedzselni az óráinkat, illetve ezáltal tudjuk fejleszteni leginkább a hallgatók digitális kompetenciáit. Egyetemünk célkitűzésében kiemelt szerepe van a hallgatók személyes és szakmai portfólió építésének, amihez fontos támogatást nyújtanak a bemutatott eszközök.



I nformatika

MIHALOVICSNÉ KOLLÁR ANITA *-VÁRALJAI MARIANN **

Az elektronikus környezetben végzett hallgatói tevékenységek sikerességének összevetése a különböző munkaformák szempontjából

*Dunaújvárosi Egyetem,
Informatikai Intézet
E-mail: mkollar@uniduna.hu

**Dunaújvárosi Egyetem,
Informatikai Intézet
E-mail: varaljai@uniduna.hu

Összefoglalás: A hatékonyság, a sikeresség, az eredményesség napjaink társalmában az egyén által végzett tevékenységek minőségének egyfajta mutatóiként jelennek meg. Ezek a felnőttek esetében a munka, fiatal felnőttek esetében pedig az oktatás világában kerülnek leginkább előtérbe, mint értékfogalmak. A felsőoktatásban a hallgatói sikeresség támogatása érdekében változatos diszruptív innovatív technológiák és pedagógiai módszerek alkalmazásával valósul meg az információszerzés, -feldolgozás és tudásgenerálás. Számos munkaforma segíti a hallgatót, amelyek közül az egyéni és a csapatban végzett ún. teammunka a legelterjedtebb. Tudományos kutatások szerint a felsőoktatásban jelen lévő modern technológia iránt rettentően elkötelezett Y-generáció egyik jellemző tulajdonsága, hogy munkavégzésük során inkább kedvelik a teammunkát és szívesebben kollaborálnak, mintsem egyénileg dolgozzanak. A kérdés az, hogy a kedvelt csapatmunka munkaformában hatékonyabbak és sikereesebbek-e az egyének, vagy az egyénileg végzett munkának jobb a minősége? Kutatásunkkal sikeresség – minőség kérdéskörre fókuszálva keressük a választ a különböző munkaformákban végzett hallgatói tevékenységeket vizsgálva.

Kulcsszavak: Hallgatói sikeresség; munkaformák; diszruptív technológiák.

Abstract: Efficiency, success, and effectiveness appear as indicators of quality of the individual's activities in today's society. As the most important value concepts, these come into view in work for adults and in education for youngsters. In order to support students' success in higher education, a variety of disruptive innovative technologies and pedagogical methods are applied to obtain, process, and generate knowledge. Numerous forms of work assist the student, of which individual work and teamwork are the most common. According to scientific research, one of the characteristics of Genera-



tion Y in higher education -who is extremely committed to modern technology- is that they prefer working in teams and collaborating rather than working individually. The question is that are individuals more efficient and successful in the favored teamwork, or is the quality of individual work better? In our research we look for the answer by focusing on the question of success and quality, while investigating student activities in different forms of work

Keywords: Student success; forms of work; disruptive technologies.

Bevezető

Egy ország versenyképessége, gazdasági fejlődése nagymértékben függ az oktatás, képzés minőségétől, ami szoros összefüggésben van a társadalom tagjainak kompetenciájától. [1] Az oktatás területén folytatott nemzetközi kutatások eredményei szerint a minőség három alappillére a hatékonyság, az eredményesség és a méltányosság. Az oktatás minőségének javítása és az eredményesség növelése érdekében az oktatáspolitikai feladata az oktatás és képzés fejlesztésének fő irányait kijelölni és e célok eléréséhez szükséges eszközöket és módszereket meghatározni.

Elméleti háttér, témához kapcsolódó információk

A MINŐSÉGI OKTATÁS ALAPPILLÉREI

A hatékonyság, a sikeresség, az eredményesség napjaink társadalmában az egyén által végzett tevékenységek minőségének egyfajta mutatóiként jelennek meg. Ezek a felnőttek esetében a munka, fiatal felnőttek esetében pedig az oktatás világában kerülnek leginkább előtérbe, mint értékfogalmak.

Egy gazdaság fejlődése függ a nyereségtől. Nyereségről akkor beszélhetünk, ha az elért eredmény kedvező, azaz az árbevétel és a ráfordítás különbsége pozitív. Az elért eredményeket és a kitűzött célokat összevetve pedig képet kaphatunk az eredményességről. Más megközelítésből azonban az eredményesség (gazdaságosság) három mutatóval jellemezhető: termelékenység, hatékonyság és jövedelmezőképesség. A hatékonyság fogalma rugalmasan kezelendő.

[1] Bozsó R.–Vár-aljai M. (2013): „A felsőoktatás minőségi szempontjai hallgatói szemmel tanulási környezetek, körülmények hallgatói megítélése”. In: III. Trefort Ágoston Szakmai Tanárképzési Konferencia. Budapest: Óbudai Egyetem Trefort Ágoston Mérnökpedagógiai Központja.



[2] Nábrádi, A.–Pető, K.–Szabó, E.–Balogh, V.–Bartha, A. (2009): „Efficiency indicators in different dimension,” APSTRACT - Applied Studies. In: *Agribusiness And Commerce*. %1. kötet3. Pp. 7–22.

[3] Lannert, J. (2004): „Hatékonyosság, eredményesség és méltányosság”. In: *Új Pedagógiai Szemle*. Budapest.

[4] Jánosy, O. (2018): „Útmutató a hatékony tanulási környezet kialakításához”. *Educatio*. Pp. 347–351.

[5] Radnóti, K. (2006): „Milyen oktatási és értékelési módszereket alkalmaznak a pedagógusok a mai magyar iskolában?” In: *Hidak a tantárgyak között*. Budapest: Országos Közoktatási Intézet. Pp. 131–167.

[6] Ollé, J. (2018): „Oktatás-szervezés: a tevékenység-központú digitális tananyag strukturális és módszertani sajátosságai,” *Iskolakultúra és környezetpedagógia*. Pp. 59–69.

Egyes tudományterületek szerint a hatékonyság a gazdálkodás eredményessége, más szempontból a tevékenység sikerességének egyik mérőszáma. Bár a konkrét fogalommeghatározásban vannak árnyalatnyi különbségek, az alapképlet azonban megegyezik, azaz a hatékonyság az eredmény és a ráfordítás viszonyaként értelmezhető. [2]

Bár a hatékonyság, eredményesség és sikeresség fogalmak értelmezésekor a határok elmosódnak, a közöttük feltárható összefüggés egyértelmű. Általánosan értelmezve a sikeresség minden területen a minőségen alapszik.

Nemzetközi kutatások alapján a hatékonyság, az eredményesség és a méltányosság a minőség három alappillére az oktatási szférában. Lannert 2004-ben az egyik tanulmányában úgy ír a hatékonyságról, hogy gyakran költséghatékonyság értelemben jelenik meg, az olcsóság szinonimájaként. Ám az eredményes oktatás nem olcsó, így a hatékonyság és az eredményesség nem tekinthető egymással szimbiózisban lévőnek. Ráadásul csak akkor beszélhetünk jó minőségű oktatásról, ha az eredményes. [3]

Egy későbbi (2018) tanulmány ismételtén rámutat arra, hogy az iskolákra és iskoláztatásra fordított beruházások mértékének növelése jelentős javulást eredményezett a tanulók tanulási eredményeiben. [4] Ugyanakkor rámutat arra a tényre is, miszerint a 21. században, az információs-kommunikációs forradalom korában, túl a 4. ipari forradalmon, több más szektorhoz hasonlóan, így az oktatás területén is, a hatékonyság nem feltétlenül jelenti a beruházások mértékének emelését és a költségek növekedését. A mai modern társadalmakban jellemző az innováció domináns jelenléte és szinte minden szektorban megfigyelhető, hogy az innovatív eszközök és módszerek bevonásával a hatékonyság növelhető.

Az oktatás minőségének javítása és az eredményesség növelése érdekében az oktatáspolitikai feladata az oktatás és képzés fejlesztésének fő irányait kijelölni és e célok eléréséhez szükséges eszközöket és módszereket meghatározni. Az OECD által 2017-ben kiadott innovatív tanulási környezet kézikönyv egy hosszútávú projekt eredményeit foglalja össze, többek között „jól használható módszertant kínáljon az önértékelésre, a saját környezetben használt innovatív eszközök vizsgálatára, hatékonyságának mérésére és az oktatási folyamatban alkalmazott innovatív módszerek eredményességének értékelésére.” [4]



Az elektronikus környezetben végzett hallgatói tevékenységek sikerességének összevetése ...

INNOVATÍV ESZKÖZÖK ÉS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA A MINŐSÉG JEGYÉBEN

A sikerek eléréséhez, a tanulási folyamat eredményességéhez az innovatív eszközök és módszerek alkalmazása aktívan hozzájárul. Mindezek támogatása, fejlesztése, kiterjesztése a virtuális térbe és „tömegesítése” a tanulási folyamat során a tanulásirányításban fontos tényezője az oktatói munkának és az oktatási intézménynek. A felsőoktatásban a hallgatói sikeresség támogatása érdekében változatos diszruptív innovatív technológiák és pedagógiai módszerek alkalmazásával valósul meg az információszerzés, -feldolgozás és tudásgenerálás.

Az oktatás területén a hatékonyság, az eredményesség és a sikeresség elérésére tett törekvések több szempontú összetett rendszerében a tanulási környezet kialakításának éppen olyan fontos szerep jut, mint a megfelelő oktatási módszer, tanulásszervezési és tanulástámogatási mód, stratégia vagy éppen a tanulást segítő eszközrendszer megválasztásának. [5] Számos korábbi kutatásunk foglalkozott a tanulási környezet vizsgálatával, az innovatív tanulási környezet kialakítása a tanulás eredményes-
sége érdekében. [7] [8] [9] [10]

Az oktatás területére begyűrűző technológiai változások olyan körülményeket generálnak, amely során a „kreatív rombolás” utat tör magának. Jellemzően e folyamat eredményének tekinthető az oktatás technológiájának változása, a modernizációval összhangban az újabb és újabb technológiák és módszerek beépítése az oktatási folyamatba. A hagyományos, jól bevált szokásokkal szakító, modern eszközöket alkalmazó innovatív módszerek ösztönzőleg hatnak az oktatási folyamat résztvevőire, ezáltal elősegíthetik a humán tőke, azaz a képességek, készségek felhalmozódását. [11] [12]

ALKALMAZOTT MUNKAFORMÁK A HATÉKONY TANULÁSI KÖRNYEZETBEN

Jelen tanulmányunk a tanulásszervezés szempontjából végzett kutatásunk eredményeit mutatja be a különböző munkaformákra fókuszálva, a tanulás sikerességének érdekében. A hatékony tanulásszervezési mód a

[7] Tóth-Mózer S.–Lévai, D. (2011): „Az oktatási és nevelési folyamat kiterjesztése online közösségi felületekre”. *Hungarian Educational Research Journal*. kötet1. szám1.

[8] Robinson, K.–Aaronica, L. (2018): *Kreatív iskolák. Az oktatás alulról szerveződő forradalmi átalakítása*. Budapest: HVG.

[9] Váraljai, M. (2016): „Establish innovative learning environment by virtual lab concept: An exploratory research in higher education”. In: 7th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom), Wroclaw, Poland.

[10] Tempus Közalapítvány: „Tanulási környezetek”. 10. 05. 2019. [Online]. Available: <https://tka.hu/celcsoport/6479/tanulasi-kornyezetek>. [Hozzáférés dátuma: 10. 08. 2019].

[11] Nagy, B.–Váraljai, M. (2019): „A survey in issues of disruptive technologies to broaden learning for the future students”. 10th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications.

[12] Barrett, P.–Zhang, Y.–Davies, F.–Barrett, L. (2015): „Clever Classrooms – Summary report of the HEAD Project”. Manchester : University of Salford.



[5] Radnóti K. (2006): „Milyen oktatási és értékelési módszereket alkalmaznak a pedagógusok a mai magyar iskolában?” In: *Hidak a tantárgyak között*. Budapest: Országos Köznevelési Intézet. Pp. 131–167.

[13] Merényi, Á.– Szabó, V.–Takács, A. (2006): *101 ideas for innovative teachers*. Budapest: Jedlik Oktatási Stúdió.

[14] Algashaam, N. M. (2015): „Teamwork vs. Individual Responsibility”. *International Journal of Scientific and Engineering Research*. %1. kötet6, %1. szám10. Pp. 286–288.

konstruktivista pedagógia egyik legjelentősebb sajátossága. A hagyományosnak aposztrofált frontális osztálymunka során a tanár aktív ismeretátadó, a tanuló passzív ismeretbefogadó, nagyon kevés interakciós lehetőséggel. Eltérően vele a hatékony tanulási környezetben megszűnnek a klasszikus átadó, befogadó szerepkörök, a tanuló aktívvá válik, megnő az interakciók mennyisége és immár a tanuló is lehet információforrás, ismeretátadó. Ebben a tanulási környezetben a tanulók egymással, változatos munkaformákban együttműködhetnek, segíthetik egymás munkáját változatos módszerekkel és eszközökkel.

Az alkalmazott munkaforma megválasztásakor leginkább azonban az adott oktatási célt kell figyelembe venni, hiszen minden munkaforma más és más előnyökkel és hátrányokkal rendelkezik, más és más terület fejlesztését segíti elő.

A hagyományos mód egyik fajtája a frontális osztálymunka, amely előnye, hogy egy információforrás képes nagy befogadótömeg számára egyidőben és egy helyen átadni információt. A tanári magyarázat így segíti a megértést, fejleszti a figyelmet és koncentrációt. Jellemzően valami új ismeret, általános érvényű definíciók, törvényszerűségek, tények közlésére kiválóan alkalmas. Természetesen e munkaforma az innovatív tanulási környezetbe hatékonyan átültethető videokonferencia, webcast, vagy akár virtuális előadás formájában. A hely ebben az értelemben az elektronikus környezet, a virtuális tér.

A hagyományos tanulásszervezési mód másik fajtája az egyéni tanulói munka. Előnye, hogy lehetővé teszi a tanuló egyén tulajdonságainak jobb, mélyebb megismerését és lehetővé teszi az egyéni bánásmódot, emellett fejleszti a lényegkiemelő képességet és önállóságra nevel. [13]

A hatékony tanulási módok közé tartozik viszont a párosmunka, csoportos munka (ami lehet feladatmegoldás vagy kísérlet) és a projektfeladatok köré szerveződő team munka. Mindegyik munkaforma előnye, hogy kooperációra ösztönöz, fejleszti a segítőkészséget, a toleranciát és a konfliktuskezelést. A vitahelyzetek és a feladatmegosztás lehetősége azonban az előnyt hátránnyá alakíthatják, a viták elfajulhatnak, mert nem képesek a tanulók megfelelő összhangban dolgozni és konszenzusra jutni, a figyelem elkalandozhat, a felelősségtudat gyengülhet. [5] [14]

Mégis számos munkaforma segíti a hallgatót, amelyek közül az egyéni és a csapatban végzett ún. teammunka kezd egyre inkább elterjedni, éppen ezért



Az elektronikus környezetben végzett hallgatói tevékenységek sikerességének összevetése ...

e két munkaforma megfigyelése állt vizsgálatunk középpontjában. Tudományos kutatások szerint a felsőoktatásban jelen lévő modern technológia iránt rettentően elkötelezett Y-generáció egyik jellemző tulajdonsága, hogy munkavégzésük során inkább kedvelik a teammunkát és szívesebben kollaborálnak, mintsem egyénileg dolgozzanak. [15]

Kutatásunkban a figyelmünk az alkalmazható munkaformákban folyó tanulói tevékenységekre irányult azzal a konkrét megfigyelési céllal, amellyel feltárjuk, hogy vajon a kedvelt csapatmunka munkaformában hatékonyabbak és sikeresebbek-e az egyének, vagy az egyénileg végzett munkának jobb a minősége? Kutatásunkkal sikeresség – minőség kérdéskörre fókuszálva keressük a választ a különböző munkaformákban végzett hallgatói tevékenységeket vizsgálva.

[15] Sántha J.–Polonyi T. (2017): „*A digitális bennszülöttek és az iskola*”. Debrecen: Debreceni Egyetemi Kiadó.

Célok, módszer

Kutatási módszerünk az empirikus kutatások egy közkedvelt formáját választottuk, a kérdőívet. A tudományos megközelítés szerint a vizsgálódásunk alappopulációjaként szolgáló tanulói közösség a jelenlegi felsőoktatásban aktív hallgatói státusszal rendelkező hallgatók egy csoportja volt, akik már teljes mértékben „beszélik” a jelen kori információs társadalom nyelvét, így kikérdezésükre a legmegfelelőbb eszköznek az elektronikus kérdőív bizonyult.

A mintavételezés során a véletlen mintavételezés módszerét alkalmaztuk, mivel a teljes hallgatói populáció kikérdezésére sem időnk, sem lehetőségünk nem volt. A kérdőív kitöltésére az önkítöltős módszert alkalmaztuk, amelynek nagy előnye, hogy nincs kérdezőbiztosi torzítás.

A beérkezett válaszok számszerű adatait Microsoft irodai programcsomag Excel táblázatkezelő programjával dolgoztuk fel. A nyitott kérdésekre adott válaszok esetén tartalomelemzést végeztünk.



Mihalovicsné Kollár Anita–Váraljai Mariann

Vizsgálatok, téma kifejtése

Négy olyan tantárgy esetében figyeltük meg a tanulói tevékenységeket, amely két különböző munkaforma alkalmazását igényelte. Az *Informatika* és az *Internettechnológia* tantárgyak tematikája úgy van kialakítva, hogy az az egyéni tanulói munkát teszi lehetővé, inkább követel meg önállóságot és önfegyelmet, teszi lehetővé az önirányítást, semmint igényelné a kooperációt, kollaborációt. A *Projektvezetés és gyakorlat* című tantárgy tananyagának feldolgozása alapvetően a teammunkát preferálja, mint alkalmazott módszer, hiszen esetében a tanulók egy maguk kiválasztott feladat hosszú távú megoldása, egy előre meghatározott cél elérése érdekében team-eket alkotva kooperációban végeznek tevékenységeket pontosan megtervezve specifikus követelményrendszernek megfelelően. A *Vállalatirányítási rendszerek* tantárgy pedig egyrészt az önálló tananyagfeldolgozáson, másrészt pedig team-ben elkészített projektfeladat véghezvitelével segíti a frontálisan átadott ismeretek gyakorlatban való alkalmazását és elsajátítását.

Eredmények

Vizsgálatunk három területre fókuszált: alapstatisztikai, eszközhasználati és teammunkával kapcsolatos kérdések elemzése által vontunk le következtetéseket.

Alapstatisztikai kérdéscsoport

2019 nyarán a korábban említett négy tantárgy hallgatói közül véletlen mintavételezéssel 58 embert kérdeztünk meg. Tekintettel arra, hogy a tantárgyak közül három az informatikai szakmacsoport tantervében szerepel, ahol a férfiak felülreprezentáltak, így nem meglepő, hogy ők a válaszadók 70%-át teszik ki.

Az alaphalmaz szakmacsoport szerinti összetételében is az informatikusoké volt a legnagyobb hányad: 43% informatikai, harmada műszaki, 14% gazdasági képzés hallgatója, a többi pedagógus, vagy társadalomtudományi szakos. A vizsgált minta háromnegyede alapképzéses, 20%-a felsőoktatási szakképzéses és elenyésző a mesterképzéses hallgatók aránya. Munkarend tekintetében a megoszlás a levelezősök felé tolódott el, a válaszadók kétharmada levelezős és egy harmada nappalis képzésre jár. Az első- és másodévesek választai domináltak, a vizsgált mintában 70% az arányuk.



Az elektronikus környezetben végzett hallgatói tevékenységek sikerességének összevetése ...

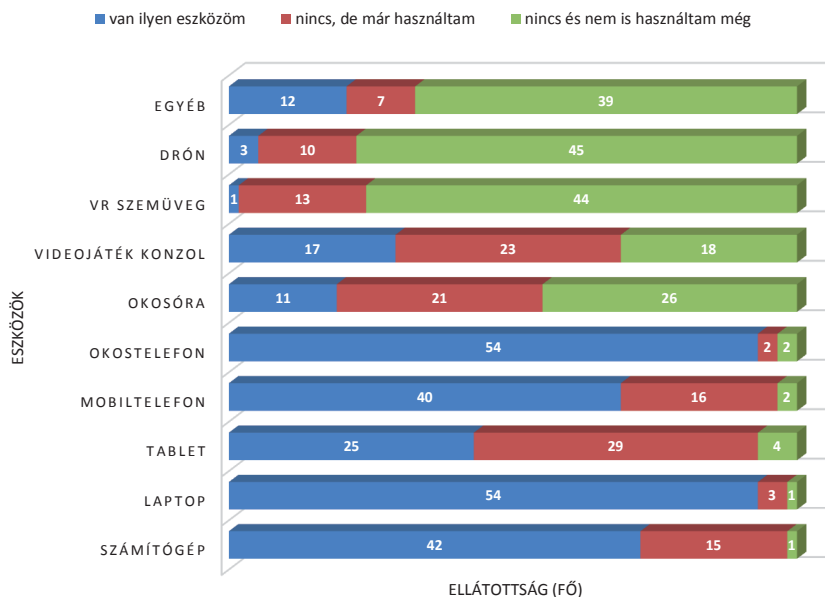
Eszközhazsnálatali kérdéscsoport

Ebben a kérdéscsoportban arra voltunk kíváncsiak, hogy az innovatív technológiák mennyire jellemzőek a hallgatók eszközhasználatában, milyen gyakorisággal jelennek meg a mindennapjaikban, különösen a tanulási folyamataikban.

Az Y- és Z-generáció számára már természetes közeg a digitális világ [16], ezért nem meglepő, hogy a megkérdezettek szinte mindegyike rendelkezik számítógéppel, vagy lappal (93%). Manapság az okostelefonok birtoklása is megszokott ebben a korcsoportban, ez visszaköszött a válaszokban is, 93 % adott igenlő választ. A napjainkban még jóval kevésbé elterjedt okosórát (19%), videójáték konzolt (29%), drónt (5%), VR-szemüveget (2%, vagyis 1 fő) ennél kevesebben tulajdonolnak. (1. ábra)

[16] Besenyei, L.: „A generációváltás forradalma”. *Opus et Educatio*. 3. 4. szám. P. 374.

1. ábra. Innovatív eszközellátottság.

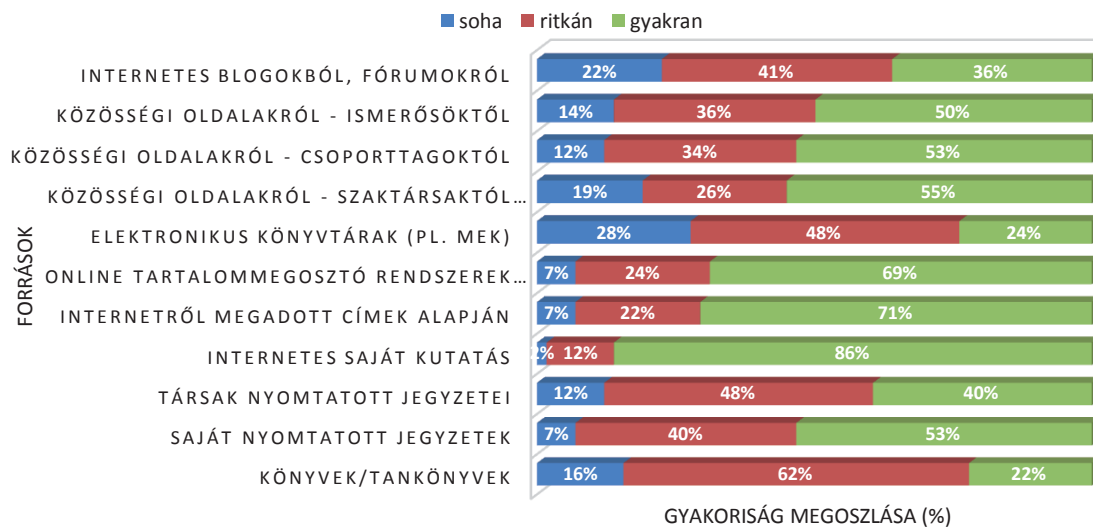


Forrás: saját szerkesztés.



Megvizsgáltuk ebben a kérdéscsoportban azt is, hogy a hallgatók honnan szereznek tudomást a tananyagról, hogyan készülnek fel a számonkérésekre. A tankönyvek és elektronikus könyvtárak használata alig jellemző (a hallgatók kb. 20–25%-a választotta a „gyakran” opciót). Saját nyomtatott jegyzetet, illetve a közösségi oldalakat ismeretszerzésre a vizsgált minta kb. fele használja – mindez jól mutatja, hogy a közösségi média igenis meghatározza a rendelkezésre álló ismeretanyagot és az online térben található kapcsolataik befolyásolják, jó esetben segítik a tanulást, megvalósítva a kooperációt. Blogokról, fórumokról, illetve társak által nyomtatott jegyzetekből egy kicsit kevesebben tesznek szert ismeretekre (35–40%). Ezeknél jóval népszerűbbek az interneten saját maguk által kutatott (86%), vagy mások által megadott címek (71%), online tartalommegosztó oldalak (69%), ami azt mutatja, hogy szívesebben nyúlnak a világhálón található anyagokhoz felkészülésük során, mint a hagyományos könyv/tankönyvhöz. (2. ábra) A digitális tananyagok fontosságát mutatja az a tény is, hogy ugyan még 60%-uk a szöveges tartalmat jelölte meg leginkább jellemző forrásként, azonban 34%-uk már a videós állományokat keresi legszívesebben.

2. ábra. Információszerzés forrása és gyakorisága.



Forrás: saját szerkesztés.



Az elektronikus környezetben végzett hallgatói tevékenységek sikerességének összevetése ...

Teammunkával kapcsolatos kérdéscsoport

E kérdéscsoport kérdéseivel azt igyekeztünk feltárni, hogy a hallgatók hogyan viszonyulnak két kiválasztott, merőben eltérő munkaformához. Az egyén szintjén személyes vélemények alapján, sajátos nézőpontokból tudtunk a kérdéskörre tekinteni, ahol először arra kerestük a választ, hogy a teammunka hasznosságát illetően – visszatekintve korábbi tanulói élményekre – a tanulók a tananyag elsajátítása során mennyire tartották volna hasznosnak az adott tárgy feldolgozása esetében a teammunkát. Egy másik kérdéscsoporttal árnyaltabb képet kaptunk a tanulók szubjektív véleményeiről, a munkaformák által kiváltott érzéseiről és a kollaborációhoz való hozzáállásukról.

A megkérdezett hallgatók csak 16%-a jelezte, hogy semmilyen kollaborációt igénylő munkaformában sem dolgozott/tanult eddig, tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy általában van valamilyen tapasztalatuk a társas (vagyis team-, csoport-, vagy páros) munkával kapcsolatban. Tovább árnyalja a képet, hogy az együttműködés magasabb szintjét képviselő team-munkában 59%-uk vett már részt, vagyis az ezzel kapcsolatos véleményük valódi élményeken alapul, megalapozott.

A vizsgált mintában Informatikát 78, Informatikai projektvezetést 48, Internet technológiát 36 és Vállalatirányítási rendszereket 19%-uk vett fel. Az Informatika elsajátításánál a team-munka hasznosságát az 1-től 5-ig terjedő skálán átlagosan 3,1-re értékelték a válaszadók. Tekintettel arra, hogy ezen tantárgy elsajátítása során csak egyéni tananyagfeldolgozás van, elgondolkodtató, hogy kell-e esetleg valamiféle közös munkát bevezetni, módosítani a korábban bevett gyakorlaton. A team-munkát preferáló Projektvetés és gyakorlat tárgy esetében a 4,1-es átlag is mutatja, hogy helyes az irány. Az önállóságot igénylő Internet technológiáknál a megkérdezettek szintén a jelenlegi munkaforma mellett döntöttek az átlagosan 1,7-es válaszukkal. A Vállalatirányítási rendszerek esetében is, ahol az önállóan feldolgozandó tananyag gyakorlatban való alkalmazását kooperálás, kollaborálás segítségével kell szintetizálni, a válaszok 3,8-as átlaga egyelőre nem indokol bármiféle újragondolást. (1. táblázat)

1. táblázat. Különböző tantárgyak esetében mennyire hasznos a team-munka.

Tárgynév	Teammunka hasznosságának átlaga
Informatika	3,1
Projektvezetés és gyakorlat	4,1
Internet technológiák	1,7
Vállalatirányítási rendszerek	3,8



Eredmények értékelése, következtetések

Az alapstatisztikai kérdéscsoporton belül rákérdeztünk a felvételi pontszámra és arra, hogy rendelkezik-e informatikai érettséggel a kérdezett személy, mert a személyes motiváció a sikeresség és hatékonyság növelésében fontos tényező. A válaszadók több mint 50%-a érettségizett informatikából (közép, vagy emelt szinten, illetve tett szakmai informatikai érettségi vizsgát), viszont a felvételi eredményre felük nem emlékezett, ezért az erre a kérdésre adott válasz erősen torzítja az elemzést, így sajnos ezen a területen nem tudunk levonni következtetéseket.

Az eszközhasználati kérdéscsoportban a kutatásunk egyik célja az volt, hogy összevessük az eszközhasználatot és a gyakoriságot, ezáltal vizsgálva a diszruptív innovatív technológia elterjedését. Megállapítottuk, hogy a vizsgált mintában mind a számítógéppel rendelkezőknek, mind a laptopot birtoklóknak 74%-a naponta legalább egyszer használja az eszközét és szinte ugyanilyen eredményt kaptunk az okosóra tulajdonosoktól is (72%). Ugyanez a gyakori igénybevétel az okostelefonosokra még inkább jellemző (96%). A kevésbé elterjedt eszközöket ritkábban használják tulajdonosaik: játékkonzolt csak 12 %-uk használ naponta, drónt még hetente is csak 33%-uk. Meglepő eredményt is kaptunk ebben a kérdéskörben: a VR szemüveggel rendelkező hallgató minden nap használja azt.

Az ismeretszerzés forrása kérdéskörben adott válaszok elemzésekor is már láthatóvá vált, hogy a jelenlegi felsőoktatásban résztvevő hallgatók csoportja igényli a társakkal való együttműködést, a közös munkát, hiszen a tanuláshoz szükséges információkat a válaszadók több mint 50%-a közösségi oldalakat felkeresve gyakran szakértársaktól (55%), más csoporttagoktól (53%), ismerősöktől (50%) és különböző fórumokon keresztül, adott esetben idegenektől (36%) szerzi be.

Team-munkával kapcsolatos kérdéscsoport kérdéseire adott válaszok elemzésekor szintén érdekes eredményt kaptunk a korábbi megállapításaink fényében, ha az eredményességet is vizsgálatba vontuk. Példaként megnéztük, hogy a 2017/18/2. félévben az említett tárgyak közül kettő esetében milyen érdemjegyek születtek. Az Informatika tantárgyi átlaga 4,06 volt (a kétféle tagozaton elhanyagolható különbséggel), ami igen jó eredmény.

Tehát úgy tűnik, a hagyományos, egyéni tananyagfeldolgozás is teljesen megfelelő módszer. A Projektvezetés tantárgy kapcsán is igen magas átlag született (4,22), viszont itt a levelező tagozatos hallgatók még jobban teljesítettek, átlaguk 4,58 volt. A kutatás a különbség okaira nem tért ki, azonban feltételezzük, hogy valószínűleg nem csak a levelezősök motiváltsága, hanem a közös munkában való nagyobb gyakorlatuk is lehet a siker oka.

A hallgatók team-munka előnyeiről és hátrányairól alkotott véleményét is vizsgáltuk kutatásunk során. Különböző kijelentések igazságtartalmát kellett egy 1-től 5-ig terjedő skálán megjelölniük. Az alábbi eredmények születtek a különböző állításokra a csoportban végzendő tevékenységekkel kapcsolatban:



Az elektronikus környezetben végzett hallgatói tevékenységek sikerességének összevetése ...

Lehetséges előnyök:

- Kellemesebb a légkör csapatban, mint egyedül: 3,6.
- Egyszerűbb, gyorsabb problémamegoldás: 4,0.
- Könnyebb és gyorsabb információszerzés: 3,5.
- Nagyobb teljesítmény: 3,8.
- Kollektív tudást többre értékeli, mint az egyénileg megszerezhető: 3,0.
- Csapatban aktívabb, mint egyedül: 3,4.

Mindezek alapján a gyorsabb információszerzés és problémamegoldás és a nagyobb teljesítmény miatt mindenképpen előnyösebb lehet a többedmagukkal végzett tevékenység a válaszadók szerint.

Érdekes eredményt hozott a csoporton belüli és az egyénileg végzett tevékenységre való hajlandóság vizsgálata. A kollaborálás esetén szinte alig könnyebb rávenni a munkára a válaszadókat, mint az önálló munkánál (3,3 illetve 3,1). Mivel mindkettő hármaskörű érték, kérdés, hogy korábban megfogalmazott (és a válaszokban többé-kevésbé egyértelműen visszaköszönő) pozitív jellemzők miért nem hoztak nagyobb értéket az együttműködés motivációja esetén. Talán mégsem annyira meggyőző a team-munka hatásossága? Esetleg feladattól, környezettől és csapattagoktól függ a siker az együtt munkálkodás során? Esetleg más okok („hátrányok”) miatt nem egyértelműen tökéletes megoldás minden esetben?

Lehetséges hátrányok:

- Fontos, hogy ne kelljen alkalmazkodni másokhoz: 2,9.
- Jobban el tud mélyülni, ha egyedül van: 3,6.
- Az egyéni tevékenységgel szerzett ismeret mélyebb: 3,4.
- Inkább gépekkel, tárgyakkal dolgozik, semmint emberekkel: 2,9.
- Szereti maga szervezni a tevékenységeit: 3,9.
- Az egyéni munka előnye, hogy konfliktusmentes: 3,6.
- Eredményesebb a munkavégzés, ha nem kell másokra várni, másokkal vitatkozni: 3,6.

Tehát mindezek alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy az önállóságra való igény, a másoktól való minél kevésbé függés és a konfliktusok elkerülése miatt van létjogosultsága az egyéni feladatmegoldásos munkaformának. A hallgatók válaszaiból világosan látszik, hogy nekünk, oktatóknak is nyitni kell az innovatív, diszruptív technológiák irányába ahhoz, hogy lépést tudjunk tartani az igényeikkel, olyan formában kell az ismereteket átadni, ami az Y- és Z-generáció által kedvelt digitalizált világban hozzáférhető és feldolgozható. Az pedig egyértelmű, hogy alapvetően szeretnek kollaborálni, kooperálni egymással, ez azonban nem jelenti azt, hogy ez az egyedüli „csodafegyver”, a minden helyzetben tökéletes megoldás. Az adott szituációban, tantárgynál és szereplők esetében kell jól megválasztani a megfelelő munkaformát.



[17] Kirschner, P.– De Bruyckere, P.(2017): „The myths of the digital native and the multitasker”. *Teaching and Teacher Education*. %1. kötet 67. Pp. 135–142.

[18] Mustafa, G.–Glavee-Geo R.–Rice, P. M. (2017): „Teamwork orientation and personal learning: The role of individual cultural values and value congruence”. *SA Journal of Industrial Psychology*.

[19] Tarricone, P.–Luca, J. (2002): „Successful teamwork: A case study”. In: Higher Education Research and Development Society of Australia – Annual Conference, Perth, Western Australia.

[20] Hanasyasha, J. (2016): „Testing the Effects of Employee Empowerment, Teamwork, and Employee Training on Employee Productivity in Higher Education Sector,” In: *International Journal of Learning and Development*. Macrothink Institute, Inc.

Összefoglalás

A tanulás sikerességét sok tényező befolyásolja. Függ a személyes kompetenciáktól, a feldolgozandó téma jellegétől, a tanulási környezettől, a rendelkezésre álló eszközellátottságtól és az alkalmazható módszertani repertoártól és még sorolhatnánk. A sikeres kimenet akkor biztosított leginkább, ha a befolyásoló tényezők közötti prioritás az elérendő célnak megfelelően kerül kialakításra. A hagyományos szemléletmódtól való eltérés ajtót nyit a lehetőségek széles tárházára mind a kézzel fogható valós környezetben, mind a virtuális térben, azonban egészséges önismeret és megfelelő előzetes tudás birtokában lehet maximálisan kihasználni.

A jelenkori tanulói társadalom jellemzői, mint például az autonómiát és rugalmasságot biztosító tapasztalati, élményszerű tanulás igénye, a digitális kommunikáció, a virtualitás iránti nyitottság, az azonnali információ rendelkezésre állása és az állandó online kapcsolati igény, a könnyen feldolgozható kisebb tanegységek előnyben részesítése és legfőképpen a társas tevékenységek, az együttműködés, kollaboráció preferálása a közösségi tér, közösségi vagyoni, közösségi élmény és a kollektív tudás kialakítása felé tereli az egyéni tanulási folyamatot is. [17] A tanulók jobban kedvelik azokat a tantárgyakat, ahol csapatban dolgozhatnak, azaz az autokrata irányítás helyett egyenrangú döntési pozícióban helyezkednek el, mégis a felelősség megosztott. Mindezen túl azonban megkapják az általuk vágyott autonómiát, hiszen egyénileg végzik a szerepkörükhöz illeszkedő és kompetenciáiknak leginkább megfelelő feladatokat. [18]

Figyelembe véve a tanulók különböző személyiségét, egy team tagjaként, akár extrovertált, akár introvertált az egyén, képes az önmegvalósításra és a kibontakozásra. Az extrovertált energiát nyer a társas interakciókból egy kooperatív, együttműködő, egymást támogató környezetben. A többiek véleményét összevetve a sajátjával képes problémák megoldására mindemellett munkájának hatékonyságára is jó hatással van a csapatszellem. A felelősség megosztása felszabadítóan hathat, így az esetleges kudarcból való félelem minimálisra csökken, így sokkal impulzívabbá válik az egyén a problémamegoldás során. [19]



Az elektronikus környezetben végzett hallgatói tevékenységek sikerességének összevetése ...

A team-en belüli személyiségjegyeknek megfelelő szerepkörökben lehetővé váló egyéni munka az introvertált személyiségeknek kedvez az elmélyülésben. Mivel kompetenciáiknak megfelelő feladatfelosztásban dolgoznak, a tanulók egyéni időbeosztásuk szerint járhatják saját útjukat a team által meghatározott cél elérése érdekében.

A team-en belüli egyéni munkavégzés során megvan a lehetőség a produktív munkára, amely saját idő- és energiabeosztással vezet a sikeres rész-munka befejezéséhez, ezáltal boldogságérzést jelent az egyén számára. Az, hogy nem kell alkalmazkodnia másokhoz növelheti a munkája hatékonyságát, ugyanakkor tudatában van annak a ténynek, hogy számíthat a teamtagok segítségére, ha problémába ütközik vagy olyan döntési helyzetbe kerül, amely kimenete számára bizonytalanság érzését kelti. [20]

[20] Hanasyasha, J. (2016): „Testing the Effects of Employee Empowerment, Teamwork, and Employee Training on Employee Productivity in Higher Education Sector,” In: *International Journal of Learning and Development*. Macrothink Institute, Inc.

A közlekedési informatika elméleti oktatása és kutatása a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén

* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
E-mail: csizar.csaba@mail.bme.hu

** Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
E-mail: csonka.balint@mail.bme.hu

*** Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
E-mail: foldes.david@mail.bme.hu

Összefoglalás: A közlekedési szervezetek térben kiterjedt, bonyolult rendszerek, melyek egyre nagyobb méretű információhalmazokat kezelnek különböző célok elérése érdekében. A közlekedési informatika fogalma és tárgyköre a múlt század második felétől kezdődően alakult ki és azóta is folyamatosan, egyre gyorsuló ütemben fejlődik. A technikai és tudományos ismeretek bővülése a téma kiterjedt hazai kutatását, az elméleti és gyakorlati eredményeknek az oktatásba történő tematikus beillesztését kívánja meg. Ennek a tevékenységnek az egyik eredményes műhelye a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszéke.

Kulcsszavak: Rendszer; folyamat; információ, integráció.

Abstract: Transport organisations are spatially expanded and complex systems, that manage large information sets to achieve several aims. Term and subject of transport informatics have been used since second half of the last century and it is still in an uninterrupted and ever accelerating progress since then. Expansion of technical and scientific knowledge requires the widespread research of the theme and the thematic introduction of theoretical and practical results into the education. The Department of Transport Technology and Economics at Budapest University of Technology and Economics is one of the effective “workshops” in this regard.

Keywords: System; process; information, integration.



Bevezető

A közlekedési rendszerek tervezése és működtetése a technológiai, szervezési, üzemeltetési, gazdasági és jogi ismeretanyagok mellett egyre inkább igényli az információkezeléssel összefüggő ismereteket is. A BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén folyó intenzív kutatások különböző, de egymással összefüggő irányokba rendezhetők; ezek között meghatározó jelentőségűek a rendszertervezési és az informatikai kutatások.

A közlekedési informatika a közlekedési információk rendszerszintű kezelésével összefüggő ismeretek összessége; fogalma és tárgyköre a múlt század második felétől kezdődően alakult ki és azóta is folyamatosan, egyre gyorsuló ütemben fejlődik [1]. Technikai háttere az infokommunikációs eszköztár. Az ebben a témakörben született eddigi tudományos eredmények egymásra épülnek, kiegészítik, bővítik egymást; és egyben teret nyitnak a hasonló jellegű jövőbeli kutatások számára is.

A közlekedés átalakulása jól jellemezhető a következő kifejezésekkel: automatizálás, integráció, utazási láncok, okos rendszerek, IoT (Internet of Things, dolgok internete), big data és óriási adatbázisok. A közlekedés egyre szabályozottabbá válik és az utazók egyre tudatosabban viselkednek. A közlekedési rendszerek összetevői egyre inkább rendelkeznek a korszerű információkezelés tulajdonságaival és a változó körülményekhez igazodó adaptív és gyakran már öntanuló tulajdonságokkal. A folyamatosan fejlődő, tökéletesedő okos jármű és infrastruktúra mellett a figyelmet egyre inkább az „okos utazó” információkezelési és döntési folyamatainak modellezésére, befolyásolására kell fordítani, aki a szolgáltatás használója.

Az ember-gép rendszerekben az információkezelési műveletek egyre nagyobb arányban a gépek irányába tolódnak. Ez nemcsak az utazókat (utasokat, járművezetőket) érinti, hanem pl. a forgalomirányítók munkájának részleges automatizálását is jelenti. Többek között ezek a tények is az ún. mesterséges intelligencia kutatások eredményeinek közlekedési adaptációjának szükségességét támasztják alá. Azonban megfigyelhető, hogy a gyors technológiai fejlődéssel a tudásbázis bővítése csak mérsékelten képes lépést tartani. Ennek következtében a tudományos kutatás, az eredmények gyakorlati adaptálása, valamint a társadalmasítás még nagyobb jelentőségű, mint korábban.

[1] Csiszár Cs.–West-sik Gy. (2014): A közlekedési informatika kutatása és oktatása a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén. *Közlekedéstudományi Szemle*. LXIV (2): 44–52.



[2] Westsik Gy. (1967): Kiberetikai módszerek a közlekedésben. *Közlekedéstudományi Szemle*. XVII (1): Pp. 9–17.

[3] Westsik Gy. (1970): Számítógép-rendszerek a közlekedésben. *Közlekedéstudományi Szemle*. XX (10): Pp. 441–449.

[4] Westsik Gy. (1980): A számítógépes adatfeldolgozás és irányítás fejlesztésének helyzete a közlekedésben és hírközlésben. *Közlekedéstudományi Szemle*. XXX(9): Pp. 385–396.

[5] Westsik, Gy. (1969): General Model of an Information System for Controlling Complex Organisations. *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering*. 13 (1-2): Pp. 47–72.

[6] Westsik Gy. (1986): A közlekedés informatikai fejlesztése. *Közlekedéstudományi Szemle*. XXXVI (7): Pp. 294–300.

[7] Westsik, Gy. (1987): Analytic System Model for the Analysis and Design of Distributed Information System. *Periodica Polytechnica, Transportation Engineering*. 15 (1): Pp. 15–27.

Előzmények

A számítógépek közlekedési alkalmazási kutatása az 1960-as évektől kezdődött a Közlekedésüzemi Tanszéken. Vezetője, Turányi István professzor ekkoriban védte meg a „Lépcsőzetesen megvalósítható terv az automatikus, operatív forgalomtervezés és vonatirányítás megvalósítására” c. akadémiai doktori disszertációját, ami a közlekedési üzemszervezési tantárgyból kiindulva az automatika és számítástechnika felhasználására koncentrált. Westsik Györgyöt kérte fel a szisztematikus kutatás megkezdésére. 1965-ben jelent meg az említett két szerző által írt „Bevezetés a közlekedési kibernetikába” c. egyetemi jegyzet. A kibernetika mind a nemzetközi, mint a hazai használatban szélesebb fogalomkört jelöl meg. 1967-től már az információ analízissel is foglalkoztak. Ekkorra vált világossá ugyanis, hogy a számítógépek közlekedési felhasználása érdekében a közlekedés irányítási rendszerét és az ahhoz szükséges információellátást érdemes kutatni [2]. A közlekedésben az információ egyik igen fontos funkciója a közlekedési összetevők és azok működésének leképezése [3], [4]. Az elért kutatási eredmények közül kiemelendő egy általános, a kiterjedt közlekedésszisztemekben jól alkalmazható irányítási és információs rendszeri modell, melyet elemzésnél és tervezésnél egyaránt fel lehet használni [5]. A kezdetben az automatizálás irányában folytatott kutatás a közlekedési informatika felé fordult; bár fogalmilag ez az új tudományterület még csak később határolódott körül. Ebben az is közrejátszott, hogy a rendszerelmélet és rendszertechnika tovább bővítette a kutatás horizontját [6], [7]. A rendszerszervező felsőfokú képzés célkitűzése az volt, hogy a hallgatóság megértse az információ fontosságát a közlekedési szervezetek működtetése során, másrészt elsajátítsa a rendszerszintű gondolkodásmódot és problémakezelést.



Jelenlegi képzés – Utánpótlásnevelés

A 2000-es évek elején a kétszintű képzésre való áttéréskor, az évtizedek alatt már kiforrott, „hagyományosnak” nevezhető *Közlekedési informatika és Közlekedési rendszertervezés* c. tárgyak ismeretanyagának tagolása is átalakult. Ennek következményeként az alapképzésben (BSc) az alkalmazott közlekedési informatikai és a korábbi módszertani ismeretanyagokat a *Közlekedési információs rendszerek I. és II. c. tárgyak* fedik le. A tárgyak tartalmába folyamatosan beépülnek az ismereti és technikai fejlődés legújabb eredményei, miközben az időtálló absztrakciós szinteket és csoportosítási elveket is követjük.

A szakirányok választását követően a hallgatók külön tárgyak keretében továbbra is megismerik az adott alágazat informatikai sajátosságait és az alkalmazott rendszereket. A mesterképzésben (MSc) a *Közlekedési informatika* c. tárgy keretében sajátítják el a hallgatók az általános, az információs rendszerek felépítését és működését leíró modelleket, amelyek alkalmazását konkrét rendszerek elemzésén és tervezésén keresztül mélyítik el.

A Tanszéken oktatott informatikai tárgyak tartalma a logisztikai szak külön válásával inkább a személyközlekedéssel összefüggő irányokba tolódik el. Az oktatott témaköröket az 1. táblázat foglalja össze.

A képzés során összefoglaljuk az információval, információs rendszerekkel kapcsolatos fogalmakat, szabályszerűségeket, technológiákat, alkalmazási területeket és fejlesztési lehetőségeket a közlekedés területén. Az általánosan alkalmazott informatikai megoldások mellett az egyes közlekedési alágazatok informatikai jellegzetességei a szállítási folyamat és a szervezeti jellemzők eltérései miatt különböznek.

Az idők során az egyes alágazatok informatikai fejlődési intenzitása is eltéréseket mutatott. Ennek megfelelően összetett szempontrendszer szerint világítunk rá a hasonlóságokra és a különbségekre. A konkrét alkalmazott informatikai fejezetek a személyközlekedés megoldásaival foglalkoznak gyakorlat-orientált megközelítésben. Az alkalmazások bemutatási rendje a helyváltoztatási módokra és a folyamatra fókuszál. Tárgyaljuk az információs rendszerek integrációjának kérdéskörét, mely egyben előrevetíti és összefoglalja a jövőbeli fejlődési irányokat is.

A legtehetségesebb hallgatókat igyekszünk önálló feladatokon keresztül felkészíteni a tudományos igényességű kutatásra. Ennek eredményeként minden évben több közlekedés- informatikai témájú dolgozat is készül a Tudományos Diákköri Konferenciákra, amelyek a kari helyezések mellett az országos konferenciákon is kiemelkedő eredményeket érnek el.



Csiszár Csaba–Csonka Bálint–Földes Dávid

**1. táblázat. A Közlekedési információs rendszerek I. és II. (BSc) c. tárgyak
és a Közlekedési informatika (MSc) c. tárgy témakörei.**

	Közlekedési információs rendszerek I.	Közlekedési információs rendszerek II.	Közlekedési informatika
1	Információs rendszerek alapismeretei	Az utasinformatika témaköréhez kapcsolódó alapfogalmak	A közlekedési informatika alapfogalmai (az informatikai szabályozókör)
2	Adatmodellezés	Menetrendi, díjszábási és turista információs szolgáltatás	A közlekedési rendszer szerkezete (az információs rendszer elhelyezkedése)
3	Relációs adatmodell, adatbázis- tervezés	Helyfoglalás informatikája	Vázszerkezeti modell (elemszerkezet, elemeken belüli szerkezet)
4	Adatbázisok normalizálása	Számítógépes menetdíjbeszedés	Vázszerkezeti modell (az elemek közötti kapcsolati szerkezet, dinamikus szerkezet)
5	Számítógépes hálózatok felépítése, működése	Az utasbiztonság fokozása telematikai rendszerekkel	Szervezetek csoportosítása, szervezeti felépítés, tevékenységi szerkezet
6	Műholdas kommunikációs rendszerek	A járműhöz vezetés és a járműtől való elvezetés informatikája	Vezetési szintek funkciói és az információellátás jellemzői
7	Helymeghatározó rendszerek	Járműfedélzeti informatika	Dinamikus funkcionális (működési) modell
8	Járműkövető rendszerek	A személyszállítási informatika hardver megoldásai	A közlekedési szervezetek informatikai szerkezete
9	Intelligens közlekedési rendszerek (ITS) alapismeretei	Parkolási módok informatikai jellemzői; célok, funkciók	Modellezési módszerek (szempontrendszer, összetevők, modelltipusok, térbeli ábrázolás)
10	Kooperatív ITS rendszerek (C-ITS) alapismeretei	Integrált parkolásirányító rendszer felépítése, működése	Elemzési módszerek (szempontok, adatkezelési és adatáramlási elemzések, alkalmazási területek)
11	Gyalogos közlekedés információs rendszerei	Intermodális csomópontok informatikája	Az elektromos közúti járművek működési jellemzői; az elektromobilitási rendszer
12	Kerékpáros közlekedés információs rendszerei	Bookroad – a közúti útvonalfoglalás információs rendszere	Az elektromos közúti járművek töltőinfrastruktúrája
13	A közlekedési alágazatok összehasonlítása az információs rendszerüket befolyásoló szempontok szerint	Telematikailag integrált személyközlekedés	Az elektromos közúti járművek töltésének szabályozása (smart grid)
14	Városi integrált információs rendszer	Az utazók információkezelési műveletei, a döntések befolyásolása	Az elektromobilitáshoz kapcsolódó információs rendszer és szolgáltatások
15	A vasúti közlekedés informatikai szabályozási struktúrája; az információs rendszerek csoportosítása	Az elektromobilitás üzemeltetési jellemzői, információkezelési jellemzők	Az autonóm járművek technológiája – alapfogalmak, típusok, működési jellemzők
16	A vasúti közlekedés jellegzetes információs rendszerei	Autonóm (önvezető) járművek információ kezelési folyamatai	Az autonóm járművekre épített közlekedési rendszer és mobilitási szolgáltatások
17	A vízi közlekedés információs rendszerei	Autonóm közforgalmú közlekedés informatikája	Az autonóm járművekre épített mobilitási szolgáltatások tervezése, üzemeltetése
18	A légi közlekedési informatika alapjai	Smart city – Okos város Smart mobility – Okos közlekedés	Az autonóm járművek hatásai



A doktori (PhD) képzésre jelentkező hallgatók körében is népszerű a közlekedésinformatikai terület. Az ösztöndíjas évek alatt magukévá teszik a Tanszékre jellemző rendszer- és folyamatszemléletet, és ezt alkalmazva publikálják eredményeiket a hazai és a nemzetközi tudományos és szakmai közösségek részére. Ez az időszak lehetővé teszi azt is, hogy rövidebb-hosszabb ideig külföldi egyetemeken vagy kutatóintézeteknél ismerjék meg az ottani kutatási gyakorlatot, majd a szerzett tapasztalatokat itthon kamatoztassák.

A kutatás legújabb irányai

A korszerű mobilitási rendszerek speciális információs rendszereknek tekinthetők. A specialitás abból adódik, hogy az elemek jelentős része mozgási és döntési képességekkel is rendelkezik. Arra keressük a választ, hogy hogyan lehet az informatika eszközeivel hatékonyabb és fenntartható működést megvalósítani, aminek eredményeként magasabb szolgáltatási minőség érhető el. Egyúttal arra is keressük a választ, hogy hogyan lehet a műszaki rendszerekben „nehezebben megfogható” humán összetevőket „újrapozicionálni” az egyre gyorsuló ütemben átalakuló közlekedési rendszerekben. Például az utazók hogyan fogják használni a megjelenő új mobilitási szolgáltatásokat; milyen módon támogathatók a döntéseik. Ugyanis a multimodális utazási láncokban az utazó szerepköröket vált, ami a viselkedésének vizsgálatát méginkább összetettevé teszi. Mivel a szolgáltatásokat az utazók elvárásai szerint alakítjuk ki, ezért gyakran alkalmazzuk a kérdőíves kikerdezést.

A kutatások során a közúti közlekedési témakörök hangsúlyosabbak, mivel a közúti közlekedés területén figyelhető meg a legmarkánsabb átalakulás és ezen a területen hasonló jellegű szabályozottság és automatizáltság kialakulása várható, mint ami az informatikai fejlődésben előbbre járó légi és vasúti közlekedés esetében már részben megvalósult. Különös hangsúlyt fektetünk az elektromobilitási és az autonóm járművek köré épült közlekedési rendszerterületekre. A témakör folyamatos és kiterjedt kutatását – az oktatás korszerűsítésének igénye mellett – a kutatási pályázatok és a megbízásos fejlesztési munkák is motiválják.

Az egyik leginkább foglalkoztató kérdéskör, hogy miért és hogyan alakul át, illetve milyen lesz a jövő személyközlekedése az információ felértékelődése eredményeként. Ennek megfelelően a rendszerszemléletű problémamegközelítés során elsősorban nem „klasszikus” problémákat kezelünk, hanem az innovációs lehetőségekben rejlő kutatási potenciál alapján adunk átfogó és részletes válaszokat.

Mivel az életünk szinte valamennyi tevékenységével, így a helyváltoztatásainkkal összefüggésben is hihetetlen méretű és gyakran valósidejű adathalmaz keletkezik, ezért az adatok kezelésével összefüggő technikai, szervezési, együttműködési, felhasználási stb. feladatok egyre nagyobb kihívást jelentenek. Ez ugyanakkor egyre több, gyakran még nem, vagy kevésbé ismert lehetőséget is magában rejt.

Ilyen, mélyebb felfedezésre váró terület pl. a különböző adatforrások feldolgozásával leírt mozgásmin-ták szerint a mobilitási igények meghatározása, előrebecslése és ez alapján a „statikusnak” tekinthető köz-



[8] Csiszár Cs. (2000): Városi közlekedésmenedzsment integrált, telematikai rendszerrel. *Városi Közlekedés*. XL.évf. 4. szám P. 224–238. Budapest.

[9] Csiszár Cs.–Gyürüs M.–Prácsér, A. (2008): Telematikai alapokon működő car pooling rendszer. *Városi Közlekedés*. XLVIII.évf. 5.szám P. 258–266. Budapest.

[10] Csiszár Cs. (2009): Telematikai alapokon működő car sharing rendszer. *Városi Közlekedés*. XLIX.évf. 4.szám P. 213–220. Budapest.

[11] Csiszár, Cs.–Csonka, B.–Földes, D. (2019): *Innovative Passenger Transportation Systems*. Budapest: Akadémia. <https://mersz.hu/kiadvany/427/>

[12] Csiszár Cs.–Földes D.–Csonka B. (2018): *Közlekedési információs rendszerek*. Budapest: Akadémia. <https://mersz.hu/kiadvany/435/dokumentum/info>

[13] Csiszár, Cs. (2001): *Az integrált intelligens utasinformatikai rendszer modellje*. PhD értekezés. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

lekedési rendszerünknek az aktuális utazási igényekhez és a változó környezeti feltételekhez való igazítása (pl. ún. igényvezérelt, dinamikusan változó, adaptív közforgalmú közlekedési menetrendek).

A képződő adatok különböző adatbázisokban, különböző szervezeteknél (vagy maguknál az utazóknál vagy a járműben), eltérő formátumban, eltérő megbízhatósággal és időbeli érvényességgel, stb. állnak rendelkezésre. Így a megoldandó feladat lényegében a szervezéshez, az irányításhoz és az elszámoláshoz szükséges megfelelő minőségű adatokhoz való gyors hozzáférés, és a különböző optimalizálási szempontok szerint feldolgozott adatoknak a felhasználási helyre való eljuttatása egyesített információ formájában. Az információkkal kapcsolatos vizsgálatok sokrétűek; kiterjednek azok megbízhatóságára, pontosságára, jelentőségére, hasznosságára (értékére), költségére, elévülésére és ezen jellemzők időbeli és térbeli változására is. Ezen célok elérését az adatintegrációs és adatbányászati módszerek is segítik.

A helyváltoztatásaink során már nem csak egy-egy szakasz szervezése és lebonyolítása, hanem a teljes utazási lánc, sőt tágabb értelemben a mobilitási igények felmerülésétől a realizációig terjedő valamennyi információkezelési művelet támogatása a cél. Ennek megfelelően, az utóbbi másfél évtizedben folyamatosan áttekintettük, értékeltük a személyközlekedési információs rendszereket. Ez alapján dolgoztuk ki és publikáltuk - az általános közlekedési informatikai vázszerkezeti és funkcionális modellek alkalmazásával - az egyes személyközlekedési módok (ideértve az ún. átmeneti formákat is, mint például car-sharing, ride-sharing) információs rendszeri modelljeit [8], [9], [10] különös tekintettel az alágazatok (közlekedési módok) összekapcsolására, az út- és eszközválasztás, valamint az átszállási műveletek és a parkolás személyre szabott támogatására.



Összefoglalás

Ezen rövid áttekintés és összefoglalás alapján is látható, hogy a közlekedési kutatások és az oktatás egyik legígéretesebb területe a jövőben is a közlekedési informatika. A Tanszéken végzett közlekedésinformatikai kutatás és oktatás eredményességét a közelmúlt eredményei is igazolják:

- témában kiadott egyetemi tankönyvek [11], [12],
- TDK dolgozatok,
- PhD-értekezések [13], [14], [15], [16], [17], [18],
- közlekedési informatika témájú vendégelőadások közép-európai egyetemeken,
- BSc, MSc és PhD-kurzusok magyar és angol nyelven.

[14] Sándor Zs. (2015): *A közúti közlekedés integrált információrendszerének modellezése, a működési jellemzők befolyásolása*. PhD értekezés. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

[15] Esztergár-Kiss D. (2016): *Multimodális helyváltoztatási láncok optimalizálása*. PhD-értekezés. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

[16] Nagy E. (2018): *Légiközlekedési információs rendszerek integrálása, a repülőtéri utaskezelés módszereinek fejlesztése*. PhD-értekezés. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

[17] Földes D. (2019): *Innovatív közlekedési rendszerek és szolgáltatások fejlesztése*. PhD-értekezés. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

[18] Csonka B. (2019): *Elektromobilitási szolgáltatások fejlesztése*. PhD-értekezés. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

A közlekedési informatika gyakorlati oktatása a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén

* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
E-mail: foldes.david@mail.bme.hu

** Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
E-mail: csonka.balint@mail.bme.hu

*** Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
E-mail: csiszar.csaba@mail.bme.hu

Összefoglalás: A közlekedési rendszerek (szervezetek) és folyamatok szervezése, valamint célorientált működtetése magas színvonalú információellátást kíván. A közlekedési információs rendszerek célja az információigények kielégítése, melynek hatékonysága az „erőforrásként” kezelt adatbázis-szerkezeteken múlik. Az adatok teremtik meg a kapcsolatot a rendszerelemek és a folyamatok között. A közlekedésmérnöki alapképzés része az adatbáziskezelés gyakorlati elsajátítása közlekedési példákon keresztül, míg a mesterképzés része egy-egy választott személyközlekedési szolgáltatásinformációs rendszer koncepciójának megtervezése építve az elsajátított adatbázis ismeretekre is. A cikkben bemutatjuk a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén közlekedési informatika témakörben végzett gyakorlati oktatást.

Kulcsszavak: Adatbáziskezelés; relációs adatmodell; rendszertervezés.

Abstract: The management and aim-oriented operation of transport systems (organizations) and processes require high-quality information provision. The aim of transport information systems is to satisfy the information demands. The efficiency of the systems depends on the database structures managed as resources. Data connect the system components and the functions to each other. The basic study (BSc) in transportation engineering course contains practical curriculum about database management through transport examples. Additionally, the conceptional planning of the information system for a passenger transport service is included in the master study (MSc) building on the knowledge of database management. In this paper, the practical tuition of transport informatics at the Department of Transport Technology and Economics of the BME is presented.

Keywords: Database management; relational data model; system planning.



Bevezető

A közlekedési információs rendszerek legfontosabb „soft” összetevője az adat. Az adatbázisok az adatok strukturált rendszere, amelyek az adatfelvételi és felhasználási folyamatok közötti időkülönbség „áthidalását” is lehetővé teszik (tárolás). Emellett az adatbázis fogalom az utóbbi időben kibővült a feldolgozási folyamatokkal is. Ennek megfelelően az adatbáziskezeléssel összefüggő ismeretanyag elsősorban a tárolási szerkezet és a feldolgozási műveletek megtervezésére fókuszál. Az adatok leképezik a működtetett rendszer összetevőit és folyamatait. Az adatbáziskezelő alkalmazások a szervezetek információkezelésének az alapjai; a humán összetevők napi tevékenységéhez (állapotrögzítés, tervezés, ellenőrzés, elszámolás, stb.) közvetlenül kapcsolódnak.

A téma jelentőségét a napjainkban megfigyelhető, hosszabb folyamatknak tekinthető ún. információrobbanás fokozza. A kezelt információ mennyiségét alapvetően a közlekedésben résztvevő alapfolyamati összetevők száma, az egyes összetevőkről gyűjtött jellemzők köre és a mintavételezési időköz befolyásolja. Az utóbbi két tényező miatt az utóbbi időszakban jelentősen nőtt a kezelendő adatok mennyisége, miközben a felhasználás során továbbra is kis időtartam áll rendelkezésre a lekérdezések lefuttatására. További kihívás a különböző forrásokból származó, eltérő formátumú, jelentéstartalmú, stb. információ „összefésülése” és „közös kezelése”, ami a közlekedés egész információs rendszerére kiterjedő integráció alapfeltétele.

A BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén több évtizede folyik az adatbáziskezelés [1] és a közlekedési informatika [2], [3], [4], [5] gyakorlati oktatása. A tananyag fejlesztése folyamatos, az adatbáziskezelés és informatika fejlődésével párhuzamosan a gyakorlati oktatás anyaga is változik. Ugyanakkor, az oktatás során az időtálló ismeretekre fókuszálunk, miközben az adott szoftver alkalmazását is elsajátítják a hallgatók. A hallgatók alapképzésen a Közlekedési információs rendszerek I. és II. tárgyak keretében két félév során sajátítják el az adatmodellezés és adatbáziskezelő alkalmazások ismeretanyagát heti rendszerességgű, kiscsoportos (kb. 20 fős) számítógépes gyakorlatok során. Első félévben az adatmodellekre és azok tervezésére helyezzük a hangsúlyt.

[1] Csiszár, Cs.–Csonka, B.–Caesar, B.–Földes, D. (2015): *Közlekedési információs rendszerek I. számítógépes laborgyakorlat*. Elektronikus egyetemi jegyzet.

[2] Westsik, Gy. (1995): *Közlekedési rendszertervezés*. Egyetemi jegyzet. Budapest: Műegyetemi.

[3] Munkácsiné Lengyel, E.–Tóth, J.–Cs. Csiszár, J. Juhász, *Közlekedési informatika*. egyetemi jegyzet.

[4] Csiszár, Cs.–Sándor, Zs. (2014): *Közlekedési informatika*. elektronikus egyetemi jegyzet.

[5] Csiszár, Cs.–Westsik, Gy. (2014): A közlekedési informatika kutatása és oktatása a BME Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszékén. *Közlekedéstudományi Szemle*. vol. 64, no. 2. Pp. 44–52.



A hallgatók megismerkednek a relációs adatmodellezéssel, valamint az adatbáziskezelés elterjedt nyelvezetével (SQL – Structured Query Language) és annak használatával. A hallgatók egy választott közlekedési témában saját adatmodellt is készítenek féléves házfeladatként. Második félévben az adatbáziskezelő alkalmazásokra helyezzük a hangsúlyt. Az elsajátított adatmodellezési ismeretek alapján működő alkalmazást fejlesztenek, amit dokumentálnak és a félév végén bemutatják az eredményeket. Mesterképzés során a *Közlekedési informatika* tárgy keretében, építve a megszerzett adatmodellezési ismeretre, egy választott személyközlekedési mód/szolgáltatás információs rendszerét tervezik meg a hallgatók.

A cikk felépítésében követjük a tárgyak egymásra épülését, így a 2. fejezetben az adatmodellezéssel (*Közlekedési információs rendszerek I.*), a 3. fejezetben az adatbáziskezelő alkalmazásokkal (*Közlekedési információs rendszer II.*), míg a 4. fejezetben az információs rendszerek tervezésével (*Közlekedési informatika*) kapcsolatos, a Tanszéken végzett gyakorlati oktatást foglaljuk össze.

Adatmodellezés

Az adatmodellezés oktatása az előzményekkel kezdődik. A fogalmakat, valamint azok egymásra épülését a hallgatók az előadási órákon sajátítják el, amelyet a gyakorlati foglalkozások példáin keresztül mélyítenek el. Az adatmodell a valóság leképezése adatokra, azok kapcsolataira, felhasználásuk körülményeire. Ezt követi az adatbázis szerkezetének a megtervezése. A leggyakoribb adatmodell-típus a relációs adatmodell, amelynél az adatok tárolása az ún. relációkban valósul meg. Az adatokat táblázatok soraiban ábrázoljuk. Ebben a modellben nincsenek előre definiált kapcsolatok az egyes adatelemek között. A kapcsolatok létrehozásához szükséges adatokat többszörösen tároljuk.

A képzés során a hallgatók részletesen megismerik a relációs adatmodellt. Az adatmodell-készítés lépései:

1. fogalmi adatmodell (nyilvántartás célja, lehatárolások),
2. logikai adatmodell (egyed típusok, tulajdonságok, kapcsolatok feltárása),
3. fizikai adatmodell (alkalmazásfejlesztés).

A korábbi félévek tapasztalati alapján a hallgatók számára nehézséget okozott a fogalmi modellek értelmezése és a logikai modell elkészítése, főként az adattáblák normalizálása. A normalizálás (táblázat szétbontó műveletek) során alakítjuk ki a „helyes” tárolási szerkezetet. A normalizálás során a nyilvántartandó adatokat egymással kapcsolatban álló táblákba csoportosítjuk úgy, hogy eredményül egy áttekinthetőbb, a normalizálás szabályrendszerének megfelelő adatbázist kapjunk. Ezen nehézségek miatt kiemelt figyelmet szentelünk a logikai modell és a normalizálás gyakorlására. Az órán a hallgatók a gyakorlatvezető irány-



mutatásával mintafeladatokat oldanak meg. Továbbá a félév során összesen hét otthoni szorgalmi feladatban gyakorolhatják a hallgatók a logikai modell készítését, amelyek megfelelő teljesítésével a gyakorlati zárthelyi dolgozatoknál plusz pont is szerezhető.

A harmadik gyakorlattól kezdődően a hallgatók egy mintaadatbázisban dolgoznak. Az SQL nyelv használatával megtanulják az adatbázisok létrehozását, módosítását és különböző lekérdezések készítését. Az SQL nyelv megtanulása biztosítja, hogy a hallgatók eltérő szoftverkörnyezetben is magabiztosan mozoghassanak. Az SQL egy szabványos, általános lekérdező nyelv, a relációs adatbázis létrehozására és lekérdezésére, a „relációkban” tárolt információk visszanyerésére szolgál. Nem az adatok elérési módját kell megadni, hanem a kívánt információ tulajdonságait. A gyakorlatokon, a könnyű hozzáférhetőség érdekében, a Microsoft Access adatbáziskezelő programot használjuk az SQL nyelv elsajátítására.

A SELECT parancs, az egyik leggyakrabban használt parancssor, mivel ennek segítségével egy vagy több táblában tárolt rekordokat lehet megjeleníteni vagy csoportokat lehet képezni. Ennek következtében a SELECT paranccsal több gyakorlaton keresztül is foglalkozunk. A hallgatók az egyszerűbb lekérdezések elsajátításától a félév végére a bonyolult (összetett, egymásra épülő, beágyazott) lekérdezések elsajátításáig jutnak el.

A hallgatók a féléves feladat során választott közlekedési adatnyilvántartási témából adatmodellt dolgoznak ki. Fogalmi modellt készítenek, majd önállóan azonosítják a modellbe bevont egyedtípusokat és azok tulajdonságait, elkészítik a táblaszerkezetet. Megfogalmazzák az adatok feldolgozásakor feltett „kérdéseket” és a megválaszolásukhoz szükséges SQL parancsokat. A munkát a gyakorlatvezetők folyamatos konzultációkkal segítik.

Adatbáziskezelő alkalmazások

Az adatbáziskezelő alkalmazások önmagukban is komplex „rendszerek”, számos komponenssel és azok bonyolult összefüggéseivel. A félév során egy közlekedési minta alkalmazást fejlesztünk közösen, miközben részletesen megismerkedünk az egyes objektumtípusok jellemzőivel, beállítási lehetőségeivel. A nagy adatbáziskezelő rendszerek ma már hálózat-bázisúak, speciális jellemzőkkel (pl. jogosultsági szintekkel). A félév során továbbra is a Microsoft Access programot használjuk önálló (stand alone) üzemben. A program számos beépített segédeszközzel (pl. varázslók) és felhasználóbarát grafikus felülettel teszi élvezetessé a fejlesztést és a működtetést. Az egyszerűbb megoldások szerényebb fejlesztői ismeretekkel is létrehozhatók, azonban az összetett feladatok algoritmusfejlesztési és programozási ismereteket is megkívánnak az SQL nyelv ismerete mellett. A félév során a könnyen szerkeszthető és felhasználóbarát alkalmazások fejlesztéséhez szükséges ismeretanyag elsajátítása a cél. Így az adatok rendszerezéséhez szükséges lekér-



dezéseken túl, űrlapok és jelentések készítése is a tananyag része. Az űrlapok az adatoknak elektronikus felületen (monitor) történő kezelését teszik lehetővé, míg a jelentésekkel táblák és lekérdezések adatait tudjuk megjeleníteni áttekinthető és nyomtatásra kész formátumban. Az Accessben a végrehajtandó műveleteket, eljárásokat eseményekhez kötjük. A hallgatók a félév során összetett alkalmazások fejlesztéséhez szükséges események és makrók szerkesztését is elsajátítják. A makró egy eszköz, mely lehetővé teszi a folyamatok automatikus végrehajtását. Továbbá, a hallgatók a félév során betekintést kapnak a Visual Basic programozás egyszerűsített változatában a VBA (Visual Basic for Application) kódokba. A VBA kódok a makrókhoz hasonlóan egyes folyamatok automatizálását segítik. A VBA kódok lehetnek közvetlenül eseményhez, vagyis adatbázis elemhez kötöttek, vagy különállóak, más szóval modulok. VBA kódokkal saját, összetett függvények definiálhatók. A gyakorlati órákon való előrehaladás mellett a hallgatók folytatják az előző félévben kiválasztott feladatuk kidolgozását, működő alkalmazás fejlesztésével. A fejlesztés a gyakorlatvezetők folyamatos támogatásával zajlik (kötelező konzultációk). Ez a munkamódszer lehetővé teszi, hogy a hallgatók a speciális problémához illeszkedő ismereteket is összegyűjtsék, hiszen a laboratóriumi gyakorlatokon nincs lehetőség minden részletes ismeret átadására.

1. táblázat. A Közlekedési információs rendszerek I. és II. (BSc) c. tárgyak témakörei.

	Közlekedési információs rendszerek I.	Közlekedési információs rendszerek II.
1	Az adatbázis-kezelés alapjai (adatmodellezés, adatmodellek típusai, adatbázis-kezelő szoftverek, SQL nyelv jellemzői, adattípusok)	A minta adatbázis jellemzői (szerkezete, mezőtulajdonságok, kapcsolattípusok)
2	Normalizálás (példák. N:M kapcsolatok felbontása, kódtábla)	A minta adatbázis létrehozása (tábla szerkezetek, megszorítások és alapértelmezett értékek, beviteli maszk, táblák összekapcsolása)
3	Minta adatbázis létrehozása (szerkezet, minta adatok)	Lekérdezések I (választó, paraméteres, csoportképző, keresztábrák)
4	SQL parancsok csoportosítása, SELECT parancs I (DDL, DML, SELECT parancs szerkezete, rendezés)	Lekérdezések II (azonosakat kereső, akció lekérdezések, függvények)
5	SELECT parancs II (hiányzó adatelem, predikátumok, sorfeltétel, operátorok)	Űrlapok (űrlapok szerkezete, jellemzői, kötött és kötetlen vezérlőelemek, segédűrlap)
6	SELECT parancs III (függvények, csoportképzés, csoportfeltétel)	Jelentések, események, makrók, adatbázis eszközök
7	Összetett lekérdezések (több táblás, egymásra épülő, beágyazott lekérdezése)	Visual Basic for Application (VBA) I (bevezetés a VBA nyelvzetbe, kódszerkezet, változók, konstansok, függvények deklarálása)
8	DDL parancsok (CREATE, ALTER, DROP parancsok, érvényességi szabály, alapértelmezett érték)	Visual Basic for Application (VBA) II (logikai elágazások, ciklusok)
9	DML parancsok (INSERT INTO, UPDATE, DELETE FROM parancsok, unió, táblakészítő lekérdezés)	Alkalmazásfejlesztés, menürendszer
10	Gyakorlás – példa feladatok megoldása	Gyakorlás – példa feladatok megoldása



A hallgatók felkészítését segítő, 2018-ban az adatmodellezés [6] és adatbáziskezelés [7] témakörök könnyebb elsajátítása érdekében elektronikus gyakorlati jegyzeteket készítettünk. A jegyzetek fejezetei az órák tematikáját követik. A témaköröket az 1. táblázat foglalja össze. Terjedelmi korlátok miatt a jegyzetek csak a tananyag vázát tartalmazzák, így azok tartalma évről-évre változhat. Mivel a jegyzetek elsősorban oktatási célra készültek, ezért nem is törekedtünk kézikönyv mélységű ismertetésre. A parancsok kipróbálása, gyakorlati elsajátítása a számítógépes gyakorlatokon történik, amelyek megkívánják a hallgatóság laborfoglalkozásokon történő intenzív részvételét. A sokrétű anyag könnyebb elsajátításához a fejezetek végén számos esetben gyakorlati feladatok szerepelnek.

A hallgatók zárthelyi dolgozatot írnak, első félévben kettőt, míg a második félévben egyet. A dolgozatokra való felkészítést segítő, a gyakorlati jegyzetek minta feladatsorokat tartalmaznak, valamint, az utolsó gyakorlati órán a gyakorlatvezetővel közösen minta feladatokat oldanak meg a hallgatók.

Információs rendszerek tervezése

Mesterképzésen a közlekedési informatika gyakorlati oktatásán célunk, hogy a hallgatók az elméleti rendszertervezési ismereteket a gyakorlatban is alkalmazni tudják. A gyakorlati órákon rendszertervezési alapelvek mellett, innovatív megoldásokkal is megismerkednek (pl. big data, mesterséges intelligencia). A féléves házi feladat egy személyközlekedési információs rendszer bemutatására, értékelésére, összehasonlítására és továbbfejlesztési javaslatok kidolgozására, ezekhez rendszerkoncepció és rendszerterv készítésére terjed ki. Építve az alapképzésen szerzett tudásra a választott információs rendszer (vázszerkezeti, működési modell) és az adatbázis-szerkezet megtervezése (adatmodellezés) is a feladat része.

A főbb vázlatpontok a következők:

- felépítés (alrendszerek, gépi és humán komponensek, azok kapcsolatai, a kapcsolatok mögötti információáramlás jellemzői),
- funkciók, működés (folyamatábrák – részfolyamatok logikai és időbeli függései),
- kezelt adatok forrása, hitelessége, aktualitása,
- külső információs kapcsolatok (interoperabilitás),

[6] Csiszár, Cs.–
Csonka, B.–Földes,
D. (2018): *Közlekedési
információs rendsze-
rek I. – Számítógépes
laborgyakorlat.* elekt-
ronikus egyetemi
jegyzet. Budapest:
Akadémiai.

[7] Csiszár, Cs.–
Csonka, B.–Földes,
D. (2018): *Közlekedési
információs rendsze-
rek II. – Számítógépes
laborgyakorlat.* elekt-
ronikus egyetemi
jegyzet. Budapest:
Akadémiai.



- szervezeti követelmények (struktúra),
- üzemeltetési jellemzők,
- felhasználói felületek, megjelenítés,
- az információs szolgáltatás szintjei (pl. esemény + helyszíne, időpontja, időtartama + következménye + alternatív ajánlat),
- költségek (hardver és szoftver fejlesztés, üzemeltetés – az információ értéke, haszna),
- adatbiztonsági kérdések.

Az eredményeket a hallgatók dokumentálják és a félév végén prezentáció formájában bemutatják.

Összefoglalás

Az egyetemi képzésben a BME közlekedésmérnök hallgatói közlekedési informatika témakörben az elméleti tudás elsajátítása mellett alapos gyakorlati tudásra is szert tesznek. Alapképzésben a hallgatók adatmodellt és adatbáziskezelő alkalmazást fejlesztenek, míg mesterképzésen egy információs rendszer koncepcionális tervezését végzik el. A tudás elsajátítását segítő, a Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszéken a gyakorlati tananyag fejlesztése folyamatos. A legújabb közlekedésinformatikai területekhez (pl. elektromos és autonóm járművek üzemeltetése) tartozó innovatív megoldásokat folyamatosan beemeljük a gyakorlati oktatásba is. A „iskolai jellegű” feladatokon keresztül szerzett tapasztalatokkal a hallgatók később eredményesen tudnak bekapcsolódni összetettebb, nagyobb léptékű, komplex rendszertervezési és -fejlesztési feladatokba is, ahol ezek az alapismeretek és készségek nélkülözhetetlenek.



CSISZÁR CSABA *-NAGY SIMON **

Személyközlekedési szolgáltatások elemzési módszerei

Összefoglalás: Az okos városok koncepciója egyre elterjedtebb; olyan városok, melyek informatikai eszközöket alkalmaznak a teljes fenntarthatóság elérése érdekében. Egyik fontos komplex részrendszere a smart mobilitás, mely kapcsán a közlekedésmérnöki gyakorlatban számos menedzsment, társadalmi, szervezeti, stb. kérdéskör felmerül. A közlekedési minőség az utazók elégedettségének mércéje, a minőség fokozása pedig smart környezetben rendszerszintű intézkedéseket igényel. A személyközlekedési rendszerek elemzése megfelelő módszertannal lehetséges, amely alkalmazásával az intézkedések megalapozhatók. Célunk az elemzési módszerek oktatásával a közlekedésmérnök hallgatók széles látókörű problémamegoldó képességének kialakítása.

Kulcsszavak: Okos város, rendszerszemlélet, minőség.

Abstract: The concept of smart cities becomes more widespread. Informatics tools are applied in them to achieve comprehensive sustainability. Its important complex sub-systems is smart mobility, which puts several management, social, organizational, etc. issues in focus within the traffic engineering practice. The quality of transportation is considered as a standard of passenger satisfaction. It can be enhanced by system-wide actions in a smart environment. The passenger transportation systems are to be analysed by appropriate methodology. Thus, the actions can be supported. Our goal, through incorporation of the analysis methods into the education, is to improve the general problem solving skills of transportation engineering students.

Keywords: Smart city, system approach, quality, efficiency.

Informatika
Közlekedésinformatika

* *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar*
E-mail: csiszar.csaba@mail.bme.hu

** *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar*
E-mail: simon.nagy423@gmail.com



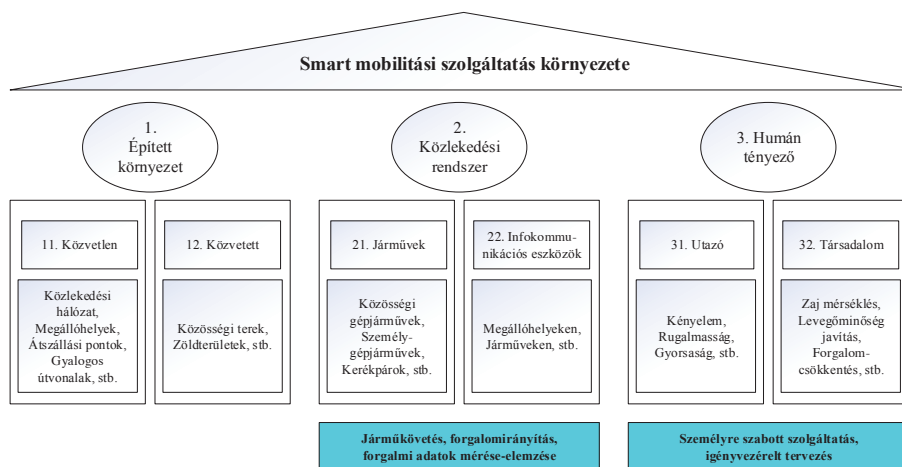
[1] Erdei, J.–Kövesi, J.
–Nagy J. B.–Topár J.
–Tóth Zs. E. (2007):
*A minőségmenedzs-
ment alapjai.*
Budapest: Typotex.
Pp. 20–22.

A közlekedés és a minőség smart környezetben

A személyközlekedés az utazók helyváltoztatási igényeihez illeszkedő szolgáltatást nyújt; jelentős mértékben érvényesül az állami befolyás, a projektek jellemzően tö-keigényesek és nem hoznak magas nyereséget. A piaci mechanizmusok ennek meg-felelően csak korlátozottan érvényesülnek, hiszen nincs pl. a közösségi közlekedésen belül valódi versenyhelyzet (még). Az okos városok koncepciójának megjelenésével a közlekedés környezete is megváltozik; egyre nagyobb jelentőséggel bírnak az *info-kommunikációs technológiák valamint a fenntarthatóság kérdésköre*.

Egy szolgáltatás minősége a vevők elégedettségén keresztül ragadható meg. [1] Smart környezetben ez kismértékben eltér; az utazói-individuális igények mellett fontos szerepet kapnak a társadalmi és a környezeti elvárások is. A tervezés során a közlekedésben szereplők igényei mellett társadalmi és környezeti elvárásokat is fi-gyelembe veszünk, azok komplex rendszerét vizsgáljuk, az 1. ábra szerint.

1. ábra. A smart mobilitási szolgáltatás környezete.



Az épített környezet (1) elemei részben közvetlen (11), részben pedig közvetett (12) módon kapcsolódnak a közlekedéshez. Az előbbi csoportba tartoznak a közle-



Személyközlekedési szolgáltatások elemzési módszerei

kedési hálózat elemei, megállóhelyek, átszállási pontok, stb. Az utóbbi csoportot a városi épített környezet elemei közösségi terek, zöldterületek, stb. alkotják. A közlekedési rendszer (2) a járműveken (21) és az infokommunikációs eszközökön (22) keresztül vehetők figyelembe. Az elemzések tekintetében a forgalmi adatok mérése és elemzése kiemelten fontos; ez közlekedési informatikai módszerekkel történik. A humán tényezők (3) feloszthatók utazókra (31) és társadalomra (32). Az utazók oldalán egyéni igények jelennek meg, pl. kényelem, rugalmasság, gyorsaság, pontoság, stb. A társadalom részéről, főleg a lakóhelyhez kapcsolódva jelenik meg igény pl. a kisebb zajra és forgalomra, a jó minőségű levegőre.

Ezek között ellentét mutatkozik – a társadalom igényeinek elérése érdekében az utazóknak a közösségi közlekedés felé célszerű elmozdulniuk. A smart mobilitás célja az utazók befolyásolása a közösségi, illetve a lágy közlekedési módok (kerékpár, gyalogosforgalom) irányába, ezért fontos, hogy a fejlesztések során *igény-vezérelt és személyre szabott módon járjunk el. Ezzel célozva a közösségi közlekedésen keresztül is azt, hogy az utazók helyváltoztatással kapcsolatos igényeit kielégítsük, a közösségi közlekedés kényelmi szintjét a személyautók felé közelítsük.*

Tervezés smart környezetben

A minőség az utazók elégedettségének mércéje. Smart környezetben az utazói-egyéni igények mellett *társadalmi és környezeti szempontok* is figyelembe veendők.

A szolgáltatás minőségének jelentése kibővül; *e három igény-csoportnak való megfelelés mértékét célszerű maximalizálni.* A környezetimodell egyik elméleti alapja a teljes körű minőségmenedzsment (továbbiakban: TQM) [2], olyan filozófia és módszer, mely alkalmazása a rendelkezésre álló erőforrások leghatékonyabb felhasználását célozza. A minőség másik elméleti alapja a SERVQUAL [3] és felmérési rendszere. A szolgáltatások minőségének mérése bonyolult feladat [4], a SERVQUAL értelmében az a fogyasztók által elvárt és érzékelt minőségi szint különbségeként fogható meg.

Alapvetően ez egy szubjektív érték, azonban objektív elemeket is figyelembe lehet venni (pl. közösségi közlekedés járműveinek átlagos életkora, széndioxid kibocsátása, stb.). A tervezés, fejlesztés során a 2. ábra körfolyamatának követésével a folyamat *igény-vezéreltté* válik.

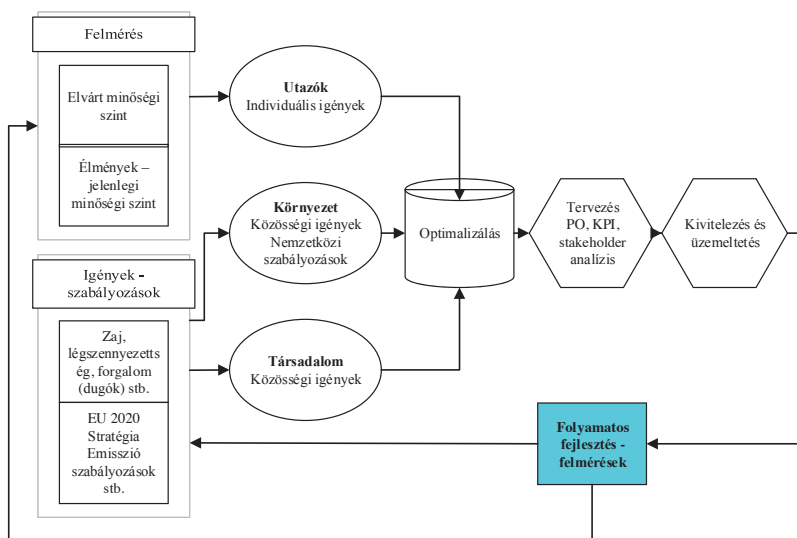
[2] Topár, J. (2009): A TQM vezetési filozófia és a minőséghajrántált vezetési rendszerek. Budapest 2009. *Vezetéstudomány* XI. évf. különszám.

[3] Parasuraman, A. P.-Berry, L. L.-Zeithaml V. A. (1988): SERVQUAL: A Multiple-Item Scale for Measuring Consumer Perceptions of Service Quality. *Jornual of Retailing*. Vol. 64. No. 1.

[4] Becser N. (2005): A SERVQUAL (szolgáltatás-minőség) modell alkalmazhatóságának elemzése sokváltozós adat-elemzési módszerekkel. 63. sz. *Műhelytanulmány*. Budapest: Budapesti Corvinus Egyetem, Vállalatgazdaságtan Intézet.



2. ábra. Igényvezérelt fejlesztési modell smart környezetben.



Az utazók oldalán *individuális* igények jelennek meg. A környezeti, valamint társadalmi igények terén modellfeltevésekkel lehet élni (pl. kisebb zajszennyezés és forgalom, jobb minőségű levegő). A szabályozások terén az EU2020 Agenda, emissziós korlátozások, stb. említhetők. Ezek között kell elvégezni az *optimalizálást*, megállapítani a projekt/rendszer teljesítményének kulcselemeit (továbbiakban: PO; Performance Objective), valamint kialakítani a kulcsindikátorokat (továbbiakban: KPI; Key Performance Indicator). Ehhez a lépéshez tartozik a *stakeholder-analízis* is; az érintettek klaszterezése, a csoportok között fellépő érdekellentétek feltérképezése (pl. helyi lakosok, helyi szervezetek stb.). Gyorsan változó, komplex környezetben dinamikus rendszer kialakítása szükséges, ehhez használhatók a közlekedési informatika korszerű megoldásai.

Az elemzés módszere

Az elemzés során első lépésként az teljesítmény kulcselemeit állapítjuk meg. Az okos városok elméletének megfelelően számos alkalmazási terület (pl. smart mobilitás, smart környezet, ITC alkalmazások, stb.) megjelenik. Ezek közül a smart mobilitás fedi le a közlekedés kérdését. Ez azonban összefügg számos más



Személyközlekedési szolgáltatások elemzési módszerei

dimenzióval is (pl. infrastruktúrán keresztül smart környezet). A PO-k kialakítása során az alkalmazási területek összefüggéseit figyelembe vettük. A kialakított PO-k és a rangsor az 1. táblázatban látható.

1. táblázat. PO rangsor teljesítmény szerint (Budapest).

PO	Teljesítmény
1. Környezeti fenntarthatóság	2.
2. Biztonság – biztonságérzet	3.
3. Elérhetőség (fizikai és társadalmi)	4.
4. Megbízhatóság és minőség	1.
5. Alternatív közlekedési eszközök integráltsága	5.
6. ITC eszközök integráltsága	6.

A PO-k alapján, második lépésben meghatározhatók a KPI-k, melyek egy-egy specifikus területhez, eljáráshoz kapcsolódnak (pl. akadálymentesítés). Budapest esetében elvégeztük a felmérést, ennek KPI eredményeit, fontossági sorrendben a 2. táblázat szemlélteti.

2. táblázat. KPI-rangsor teljesítmény szerint (Budapest).

KPI	Teljesítmény
1. Akadálymentesítés	55%
2. Közösségi közlekedés járműveinek megbízhatósága	65%
3. Biztonság és vészhelyzet-kezelés	70%
4. Épített környezet minősége	67%
5. Üzemzavarok kezelése	72%
6. Környezeti fenntarthatóság – rendszerszinten	80%
7. Menetrendszerűség – közösségi közlekedés	75%
8. Alternatív közlekedés eszköz infrastruktúrája	69%
9. Szociális igazságosság – díjszábsí vetület	74%

A 2. táblázatban a fontosság szerint rendezett KPI-k a budapesti személyközlekedési rendszerre vonatkoznak. A teljesítmény oszlopban az átlagos, jelenlegi teljesítmény szerepel. Az utazók igényeinek maximális kielégítését a 100%-os érték jelezné.

A vázolt KPI-rendszer alapvetően az egyéni igényeket és preferenciákat tükrözi. Az elemzés során az utazókat differenciáltuk eszközhasználat szerint. Budapest esetében ez alátámasztotta az alternatív közlekedési eszközök (kerékpár, gyalogosforgalom) terén tapasztalt alacsony fontosság-értéket.



Ez jó példa a társadalmi-környezeti optimalizálásra is: *a smart irányú projektek egyik célja ugyanis az alternatív közlekedés részarányának növelése.*

Az elemzés módszerében (információgyűjtés), a gyűjtött információk kezelésében, feldolgozásában, kiértékelésében alkalmazható a közlekedési informatika. A személyi okos eszközök, közösségi média, internetes oldalak megfelelő platformot biztosítanak az utazói elégedettség felméréséhez. Ezzel párhuzamosan időszakonként érdemes az egyes PO-k fontosságát újra felmérni. *A smart integráció során egy olyan információs platform, adat- és tudásbázis alakítandó ki, melyben a felmerülő problémák és megoldások is dokumentálásra kerülnek.* Végeredményben egy információs technológiákkal támogatott, döntéstámogató és problémamegoldó rendszer kialakítása a cél.

A kérdéskör a közlekedésmérnöki oktatásban

A közlekedési rendszerek elemzése elsősorban a városfejlesztés, az utazási láncok elemzése pedig elsősorban az utazók szempontjai szerint végezhető el. Az utóbbi esetben a mobilitási szolgáltatás objektív paramétereit kombináljuk az utazói szubjektív preferenciákkal és élményekkel. Az utazói preferencia függ az utazás jellemzőitől (pl. motiváció), a környezet jellemzőitől (pl. időjárás) és a személyes jellemzőktől (pl. jövedelem), valamint a közlekedési eszköz választásától. Így a minőség utazónként külön-külön is értékelhető, ami a személyre szabott tájékoztatáshoz (pl. útvonaltervezés) elengedhetetlen. Hasonlóan, a mobilitási szolgáltatás minősége utazói csoportokra vonatkozóan is meghatározható. Továbbá, a minőség-értékelés eredményei a módválasztást leíró modellekbe (pl. Logit-modell) is beépíthetők. Egy-egy alágazat, közlekedési mód vagy mobilitási szolgáltatás elemzéséhez, értékeléséhez külön-külön részletes módszereket fejlesztettek, amelyek alapján számos elemzést végeztek. *Valamennyi személyközlekedési mód és mobilitási szolgáltatás elemzéséhez és értékeléséhez nem áll rendelkezésre általános keretrendszer.*

A kialakított módszer legjellemzőbb alkalmazási területei:

- közlekedési rendszer- és szolgáltatásfejlesztési tervek kidolgozása,
- üzemeltetői elemzések (pl. piaci részek azonosítása, szállítási minőség növelése stb.),
- utazói közlekedési mód és mobilitási szolgáltatás választása adott utazáshoz vagy egy adott időszak közlekedési igényeihez.

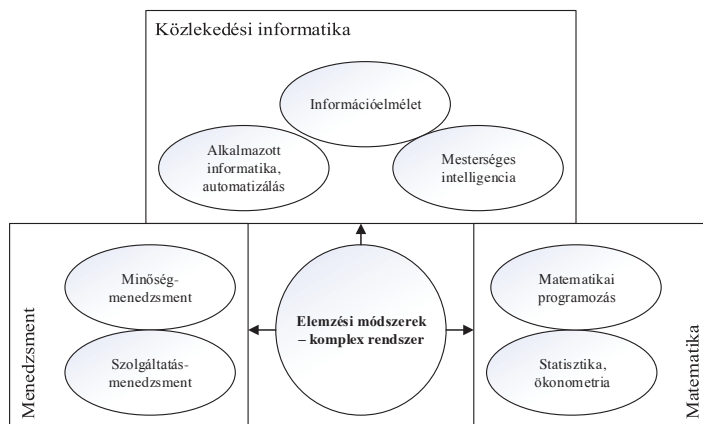
Az elemzések során a közlekedésmérnök hallgatók hasznosítják a *Közlekedési információs rendszerek I. és II.* tárgyakon szerzett információ- és rendszerelméleti kompetenciákat. A mesterszakon a *Közlekedési informatika* tárgy keretein belül szerzett tudás már magasabb absztrakciós szintet tesz lehetővé. Itt az üze-



Személyközlekedési szolgáltatások elemzési módszerei

meltetésről inkább a fejlesztésre kerül a hangsúly. Ennek megfelelően az innovatív területek (pl. az okos városok, autonóm járművek, valamint az elektromobilitás) nagy hangsúlyt kapnak a mesterképzésben. A kialakított elemzési keretrendszer módszertani ismeretekhez való kapcsolódását a 3. ábra összesíti.

3. ábra. Az elemzési módszerek környezete, kapcsolódása.



A matematikai programozáson belül elsősorban a lineáris programozás, Markov-láncok említendők meg. Az adatok kiértékelésénél pedig nélkülözhetetlenek bizonyos statisztikai és ökonometriai módszerek (leíró statisztika, regressziós modellek, főkomponensek, stb.).

A menedzsment alkalmazások csoportjában a minőségmenedzsment az egész módszer alapját adja (TQM, SERVQUAL, elméleti alapok). A szolgáltatásmenedzsment elősegíti a stratégiai szemlélet kialakulását. A menedzsment kapcsán szerepeltethetők még bizonyos finanszírozási kérdések (pl. jelenérték vizsgálatok), valamint az érintettek csoportokba rendezése is.

Végző eredményként egy matematikai alapokon nyugvó, menedzsment háttérrel rendelkező döntéstámogató informatikai rendszer alakítható ki. Egy ilyen elemzési keretrendszer kialakítása során sok kérdés (műszaki, társadalmi, menedzsment) figyelembe veendő, ezt integrálva a közlekedésmérnöki oktatásba, elősegíthető a széles látókör kialakulása.

Elektromos autóbuszok statikus töltőberendezésének teljesítményoptimalizálása

* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
E-mail: csonka.balint@mail.bme.hu

** Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
E-mail: csiszar.csaba@mail.bme.hu

*** Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
E-mail: foldes.david@mail.bme.hu

Összefoglalás: A közúti közösségi közlekedés okozta környezetterhelés csökkentésének hatékony eszköze az elektromos autóbuszok alkalmazása a városi közlekedésben. Az elektromos autóbuszok üzemeltetéséhez töltőinfrastruktúra szükséges, amit az autóbusz szolgáltatás alapján kell meghatározni. Kidolgoztunk egy matematikai modellt, amivel leképezhető a szolgáltatás és a töltőberendezések jellemzői. A modell a végállomási és megállóhelyi töltőberendezések helyszínekijelölésének az alapja. Jelen tanulmányban a módszer egy lehetséges alkalmazását mutatjuk be. Az alkalmazás újszerűsége, hogy korábban nem vizsgálták a töltési teljesítmény valamint az elektromos autóbuszok és töltőberendezések számának a kapcsolatát, ami alapvetően befolyásolja a költségeket. A módszert Kőbánya autóbusz hálózatára alkalmaztuk. Megállapítottuk, hogy a végállomásokon nagyteljesítményű töltőberendezések alkalmazása javasolt.

Kulcsszavak: Elektromos autóbusz, töltőinfrastruktúra, helyszín kijelölés, teljesítmény optimalizálás.

Abstract: The operation of electric buses in urban transport is an efficient way to reduce the environmental pollution of the road transport. The characteristic of the charging infrastructure is important in the operation and it should be derived from the characteristic of the public bus service. Previously, we have elaborated a mathematical model to reveal the relationship between the public bus service attributes and the charging infrastructure. The model can be used to determine the optimal locations for charging stations considering the terminals and stops as candidate sites. In this paper, we present an application of the model. The novelty of the application is the investigation of the relationship between the charging power and the number of chargers and electric buses, which was not investigated before and has a major influ-



Elektromos autóbuszok statikus töltőberendezésének a teljesítmény optimalizálása

ence on the cost of electric bus operation. The model was applied for the bus network of Kőbánya, Budapest. It is found that the application of high-power chargers are advised.

Keywords: Electric bus, charging infrastructure; location selection, charging power optimization.

Bevezető

Az elmúlt években a közúti közlekedés okozta környezetszennyezés olyan mértékben nőtt, hogy technológiaváltás szükséges. A zéró lokális károsanyag kibocsátású elektromos járművekkel jelentősen csökkenthető a lokális CO₂-kibocsátás (például [1, 2]). A kibocsátás csökkenés mértéke elsősorban a nagy futásteljesítményű járművek esetén jelentős, ezért az elektromos hajtás alkalmazása a városi autóbuszoknál különösen előnyös. Emiatt Európában várhatóan 25 városban 2020-ig összesen 2500 elektromos autóbusz kerül forgalomba és válik elérhetővé a közösségi közlekedést használók számára [3]. Az elektromos hajtás egyik legnagyobb hátránya a korlátozott hatótáv és a magas beszerzési ár mellett a töltőinfrastruktúra hiánya. Községi közlekedés esetén a töltőinfrastruktúra kialakításánál figyelembe kell venni a szolgáltatás jellemzőit. Ez indokolja a töltőtelepítést támogató módszerek alkalmazását a döntéshozatal során. Jelen tanulmányban az általunk kidolgozott töltőinfrastruktúra költség-minimalizáló módszer egy jellegzetes alkalmazási lehetőségét mutatjuk be.

Az elektromos autóbuszokat az elektromos személyautókhoz hasonlóan többnyire állóhelyzetben töltik. Az állóhelyzeti (statikus) töltési stratégiáknak több csoportja különböztethető meg:

- éjszakai töltés a telephelyen,
- napközbeni töltés a végállomáson,
- napközbeni töltés végállomáson és megállóban.

Az éjszakai töltés előnye, hogy az autóbuszok elegendő időt töltenek a telephelyen ahhoz, hogy azok akkumulátorát egy normál teljesítményű töltővel teljesen fel lehessen tölteni. Hátránya a magas akkumulátorkapacitás-igény,

[1] Simha P, P. (2016): Disruptive Innovation on Two Wheels: Chinese Urban Transportation and Electrification of the Humble Bike. *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*. vol. 44. no. 4. Pp. 222–227.

[2] Requía, W. J.–Mohamed, M.–Higgins, C. D.–Arain, A.–Ferguson, M. (2018): How clean are electric vehicles? Evidence-based review of the effects of electric mobility on air pollutants, greenhouse gas emissions and human health. *Atmospheric Environment* vol. 185. Pp. 64–77. <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2018.04.040>

[3] UITP (2017): *ZeEUS eBus Report: An overview of electric buses in Europe*. UITP, Brussels ZeEUS, 2017. URL: <http://zeeus.eu/uploads/publications/documents/ze-eus-ebus-report-internet.pdf> (letöltve 2018. 02. 11.)



[4] Ye, L.–Liang, C.–Liu, Y.–Li, D.–Liu, Z. (2019): Performance analysis and test of a novel eddy-current braking & heating system for electric bus. *Energy Conversion and Management*. vol. 183. Pp. 440–449, <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2019.01.10>.

[5] Laib, F.–Braun, A.–Rid, W. (2019): Modelling noise reductions using electric buses in urban traffic. A case study from Stuttgart, Germany. *Transportation Research Procedia*. vol. 37. Pp. 377–384. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2018.12.06>.

[6] Tao, Y.–Huang, M.–Yang, L. (2018): Data-driven optimized layout of battery electric vehicle charging infrastructure. *Energy*. vol. 150. Pp. 735–744. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.03.18>.

amely jelentősen megnöveli az autóbusz beszerzési árát, valamint a rezsimenet-növekedés, ha napközben a járművet tölteni szükséges. Továbbá járművenként egy-egy töltőberendezés szükséges. Emiatt a telephelyi töltés kevés elektromos autóbusz esetén lehet kedvező. Ennek megfelelően a napközbeni töltési stratégiák terjednek. Mivel az autóbuszok napközben huzamosabb ideig tartózkodnak a végállomásokon, így a végállomási töltés vezetékes töltőberendezéssel is megoldható. A megállóhelyi töltés esetén az alacsony tartózkodási idő miatt vezetéknélküli töltőberendezéseket alkalmaznak, ahol nincs csatlakozási időveszteség. A vezetéknélküli töltőberendezések hátránya a vezetékeshez képest a magas beszerzési ár és az alacsonyabb energiaátviteli hatásfok.

Az elektromos autóbuszok töltése mozgás közben is lehetséges, úgynevezett dinamikus töltőberendezésekkel. A dinamikus töltőberendezésekkel nem foglalkozunk ennek a tanulmánynak a keretében.

Statikus töltőberendezések eltérő töltési teljesítménnyel állnak rendelkezésre. Hogy milyen teljesítményű töltőberendezést érdemes használni, azt az autóbuszszolgáltatás jellemzői határozzák meg. Ezért azt vizsgáltuk meg a modell segítségével, hogy milyen teljesítményű töltőberendezést érdemes telepíteni a végállomásokon ahhoz, hogy az elektromos autóbuszok és a töltőinfrastruktúra költsége a legalacsonyabb legyen.

Irodalmi áttekintés

Az elektromos autóbuszok üzemeltetésével foglalkozó tanulmányok száma az elmúlt években jelentősen megnőtt. A cikkek többsége a technológiával, a környezeti hatásokkal, az energia- menedzsmenttel és a költség-haszon elemzéssel foglalkozik (például [4], [5]). A töltőberendezés elhelyezésével foglalkozó tanulmányok az utóbbi időben jelentek meg. Az elektromos autók töltőberendezés helyszínekjelölésének problémája jól ismert és számos tanulmány foglalkozik vele (például: [6]), a módszerek nem alkalmazhatók autóbuszok esetén. Ennek oka, hogy az egyéni gépjárműhasználat esetén a kihívást azt jelenti, hogy hogyan lehet kiszolgálni az energiaigényt úgy, hogy az a legkevesebb kötöttséget jelentse. Ezzel szemben az elektromos autóbuszszolgáltatás kötött (térben, időben), ezért úgy kell meghatározni a töltési folyamatokat, hogy azok a fordákhoz igazodjanak.



Elektromos autóbuszok statikus töltőberendezésének a teljesítmény optimalizálása

A szakirodalom áttekintése alapján megállapítottuk, hogy a töltőberendezés helyszín kijelölését támogató módszerek jellemzően vagy csak a statikus (például: [7]), vagy csak a dinamikus töltőberendezésekkel foglalkoznak (például: [8]). Megállapítottuk, hogy számos tanulmány csak egy-egy viszonylat jellemzői alapján határozza meg a kedvező töltőinfrastruktúrát (például: [9]), annak ellenére, hogy hálózat orientált megközelítéssel a teljes infrastruktúra költsége jelentősen csökkenthető [7]. Továbbá, a tanulmányokban jellemzően csak egy adott töltési teljesítménnyel vizsgálják a töltőberendezések telepítési lehetőségét. Megállapítottuk, hogy nincs olyan módszer, ami támogatná a vezetékes és vezeték nélküli töltőberendezések kombinált használatát egy autóbusz hálózaton. Továbbá megállapítottuk azt is, hogy korábban nem vizsgálták a töltőteliesség és az elektromos autóbuszok számának a kapcsolatot változatlan menetrend mellett.

Modell

Az általunk kidolgozott modell részletes leírása a [10] tanulmányban megtalálható. Ebben a fejezetben csak a legfontosabb jellemzőit mutatjuk be. A lehetséges töltőberendezés helyszínek:

- **végállomás:** a járművek jellemzően hosszabb ideig állnak; vezetékes töltőberendezések potenciális helyszíne,
- **megállóhely:** a járművek csak az utascsera idejére állnak meg; vezeték nélküli töltőberendezések potenciális helyszíne.

Csak a jármű menetközbeni energiafogyasztását vettük figyelembe. Nem vettük figyelembe a villamos hálózat térben változó szabad kapacitásától függő hálózatbővítés költségét. A modellben a változó a potenciális helyszíneken vételezett energia mennyisége viszonylatonként. Potenciális helyszínenként összegeztük a töltési igényt; továbbá a töltési igény, valamint a töltőinfrastruktúra-költség közötti folytonos helyettesítő függvénykapcsolatot határoztunk meg. A helyettesítő függvényt azért vezettük be, mert folytonos függvényen egyszerűbb optimum értéket keresni. Az optimalizálás célfüggvénye a helyettesítő függvénnyel kifejezett töltőinfrastruktúra költség minimalizálása. A modellezés során figyelembe vett összetevőket az 1. ábra mutatja be.

[7] Bi, Z.–Keoleian, G –Ersal, T, (2018): Wireless charger deployment for an electric bus network: A multi-objective life cycle optimization. *Applied Energy*. vol. 225. Pp. 1090–1101. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.05.70>.

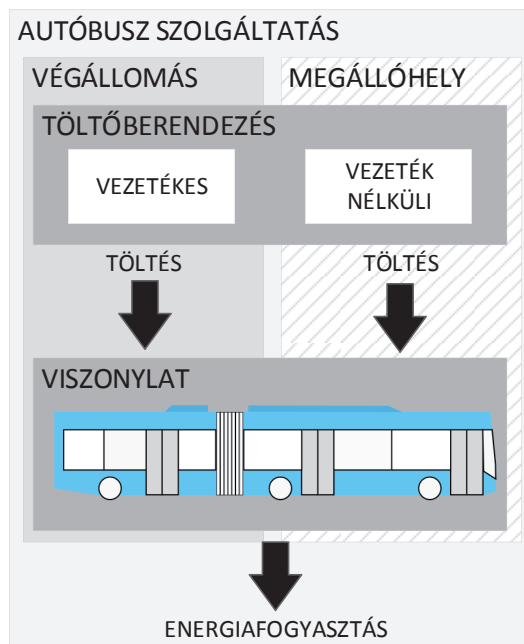
[8] Jang, Y. J.–Suh, E. S.–Kim, J. W. (2016): System Architecture and Mathematical Models of Electric Transit Bus System Utilizing Wireless Power Transfer Technology. *IEEE System Journal*. vol. 10, no. 2. Pp. 495–506. <https://doi.org/10.1109/JSYST.2014.2369485>

[9] Lajunen, A. (2018): Energy consumption and cost-benefit analysis of hybrid and electric city buses. *Transportation Research Part C*. vol. 38. Pp. 1–15. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2013.10.08>.

[10] Csonka, B.–Csiszár, Cs. (2019): *Elektromos töltőállomás helyszín optimalizáló módszer városi autóbusz közlekedésben*. Közlekedéstudományi Konferencia Győr 2019. P. 80.



1. ábra. A fizikai modell összetevői és az energiaáramok.



Esettanulmány

A modell és az optimalizáló módszer egy lehetséges alkalmazásának a bemutatásához Budapesten Kőbánya városrész autóbusz hálózatát választottuk. A költség szerinti optimalizálás célja az autóbusz viszonylatok elektromos üzemre való átállásához szükséges végállomási töltőberendezések számának meghatározása volt, a fordák változtatása nélkül. A vizsgálatot a csúcsóra végeztük el, amikor az energiaigény a legnagyobb. Feltételeztük, hogy a töltőinfrastruktúra megfelelő, ha a csúcsórai igény kiszolgálására alkalmas.

A csúcsóra az autóbusz közlekedésben a vizsgált hálózaton délelőtt 7 és 8 óra között van. A potenciális töltőállomás helyszíneket az 1. táblázat tartalmazza a csúcsórai indulási számokkal együtt.



Elektromos autóbuszok statikus töltőberendezésének a teljesítmény optimalizálása

1. táblázat. Potenciális töltőállomás helyszínek és csúcsórai indulások száma.

Állomás neve	Indulások száma
Kőbánya alsó vasútállomás	15
Kőbánya-Kispest M	41
Örs vezér tere M+H	27
Puskás Ferenc Stadion M	13
Rákoskeresztúr, városközpont	4

Azokat a viszonylatokat vettük figyelembe, amelyek kiinduló- vagy végállomása potenciális töltőállomás helyszínen van. Összesen 19 viszonylatot vettünk figyelembe. Töltésoptimalizálást azoknál a viszonylatoknál végeztünk, amelyek kiinduló- és érkező állomása is potenciális töltőállomás helyszín (4 viszonylat). Ezt a 4 viszonylatot rugalmas viszonylatoknak hívjuk. A teljes energiaigény 1947 kWh, a rugalmas viszonylatok teljes energiaigénye 340 kWh. A vizsgálattal az alábbi kérdésekre kerestük a választ:

- Hogyan befolyásolja a töltési teljesítmény a szükséges töltőberendezések számát?
- Hogyan befolyásolja a töltési teljesítmény a menetrend tartásához szükséges elektromos autóbuszok számát?
- Hogyan befolyásolja a töltési teljesítmény a teljes beruházás költségét? A teljes beruházás költsége tartalmazza a töltőinfrastruktúra és a menetrend (indítás-szám) tartásához szükséges további elektromos autóbuszok beszerzési költségét.

Az optimalizálást az alábbi paraméterekkel végeztük el:

- **elméleti kapacitás:** 70%. Vagyis egy 100 kW teljesítményű töltőállomáson egy óra alatt a technikai korlátok miatt (például csatlakozási idő) maximum 70 kWh vételezhető.
- **rendelkezésre álló idő:** az az idő, amit az autóbusz a végállomáson töltéssel tölthet. A rendelkezésre álló idő a végállomási tartózkodási idő mínusz 2 perc.
- **elektromos autóbusz beszerzési költsége:** 580000 € [11].

Egy töltőállomás kihasználtsága 100%, ha az elméleti kapacitásnak megfelelő energiamennyiséget vételeznek az autóbuszok. Vagyis például egy 300kW teljesítményű töltőállomáson a 210kWh vételezett energia 100%-os kihasználtság.

[11] Potkány, M.–Hlatká, M.–Debnár, M.–Hanzl, J.(2018): Comparison of the Lifecycle Cost Structure of Electric and Diesel Buses,” *NASE MORE International Journal of Maritime Science & Technology*. vol. 65. no. 4. Pp. 270–275. DOI: <https://doi.org/10.17818/NM/2018/4SI.20>



[12] Xylia, M.–Leduc, S.–Patrizio, P.–Silveira, S.–Kraxner, F. (2017): Developing a dynamic optimization model for electric bus charging infrastructure. *Transportation Research Procedia*. vol. 27. Pp. 776–783. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2017.12.075>

Feltételeztük, hogy ha a töltési idő nagyobb, mint a rendelkezésre álló idő, akkor azon a viszonylaton további egy elektromos autóbuszra van szükség a menetrend tartásához.

A töltőinfrastruktúra-költség becsléséhez feltételeztük, hogy a töltőberendezés költsége kifejezhető a következő alakban:

$$c = a + bx \quad (1)$$

Ahol c a töltőberendezés költsége és x a töltőberendezés teljesítménye [kW]. A függvény értékét két pontban tekintettük ismertnek:

$$c(50) = 35000\text{€} \quad (2)$$

$$c(300) = 200000\text{€} \quad (3)$$

Az 50kW teljesítményű töltőberendezés költségét az elektromos személyautók villámtöltő berendezés költségéből becsültük. A 300kW teljesítményű töltőberendezés költségének a forrása [12]. Ezek alapján a függvény paraméterei:

$$a = 2000\text{€} \quad (4)$$

$$b = 660\text{€/kW} \quad (5)$$

A MATLAB szoftver belsőpont (interior-point) algoritmusát használtuk véletlenül generált kezdőpontokkal. Az algoritmus paramétereinek a finomítását (iterációk száma, függvény kiértékelések száma, kiindulópontok száma, leállási tolerancia) nem részletezzük. Mindegyik eljárást ugyanazon a számítógépen futtattuk (Windows 10, Intel Core i5-6200U CPU (dualcore, 2,4 GHz, 8 GB DDR4 RAM). Az átlagos futási idő 3 perc volt.

Eredmények értékelése

Az eltérő töltőteliessítmények esetén elvégzett optimalizálással kapott töltőberendezések számát, és a további szükséges elektromos autóbuszok számát a 2. táblázat tartalmazza.



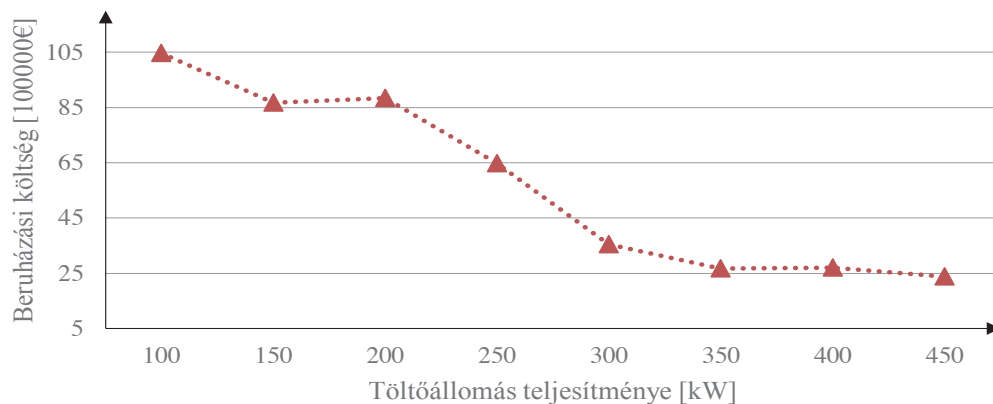
Elektromos autóbuszok statikus töltőberendezésének a teljesítmény optimalizálása

2. táblázat. Töltőinfrastruktúra és további elektromos autóbuszok száma eltérő töltőteliessítmények esetén.

	100kW	150kW	200kW	250kW	300kW	350kW	400kW	450kW
Kőbánya alsó vasútállomás	3	2	2	2	1	1	1	1
Kőbánya-Kispest M	12	8	6	5	4	4	3	3
Örs vezér tere M+H	6	4	3	2	2	2	2	1
Puskás Ferenc Stadion M	4	3	3	2	2	1	2	1
Rákoskeresztúr, városközpont	1	0	0	0	0	1	0	0
Összesen (db)	26	17	14	11	9	9	8	6
Átlagos kihasználtság (%)	88	93	85	87	88	75	74	88
További elektromos autóbusz (db)	15	12	12	8	3	1	1	1

A töltőteliessítmény és a beruházási költség közötti kapcsolatot a 2. ábra mutatja be.

2. ábra. Töltési teljesítmény és a teljes beruházási költség kapcsolata.



Az eredmények alapján a következő megállapításokat tettük:

- A rugalmas viszonylatok energiaigénye jelentősen alacsonyabb a teljes energiaigénynél, így a töltőberendezések számát elsősorban a többi viszonylat energiaigénye határozza meg.
- A töltőállomások átlagos kihasználtsága nem függ jelentősen a töltési teljesítménytől.



Csonka Bálint–Csiszár Csaba–Földes Dávid

- Alacsony töltési teljesítmény esetén az órai indulási számok közötti különbségek jól megfigyelhetők a javasolt töltőberendezések számában. A különbség a töltési teljesítmény növelésével csökken.
- A nagyteljesítményű töltőberendezés árát kompenzálja a kevesebb autóbusz alacsonyabb teljes beszerzési költsége. Vagyis a nagyteljesítményű töltők alkalmazása ajánlott.

Összefoglalás

Jelen tanulmányban egy általunk kidolgozott matematikai modell és optimalizáló módszer egy jellegzetes alkalmazási lehetőségét mutattuk be. Az alkalmazás újszerűsége, hogy a végállomási töltőberendezések teljesítménye és a teljes beruházási költség közötti kapcsolatot vizsgáltuk. Megállapítottuk, hogy az autóbuszok magas beszerzési költsége miatt a nagyteljesítményű töltőberendezések alkalmazása javasolt. A továbbiakban a vizsgálatot a villamoshálózat kapacitásbővítésének a költségével egészítjük ki. A jövőben a módszer alkalmazhatóságát a dinamikus töltőberendezések vizsgálatára terjesztjük ki, valamint figyelembe kívánjuk venni az akkumulátorkapacitás költségét, amit a töltési folyamatok térbeli eloszlása jelentősen befolyásol.

Az elektromobilitáshoz tartozó témaköröket a *Közlekedési információs rendszerek II* (BSc), a *Közlekedési informatika* (MSc) és a *Személyközlekedés* (MSc) tárgyak keretében oktatjuk. Az MSc-s hallgatók gyakorlati óráin hasonló jellegű, komplex optimalizálási feladatok megoldási lehetőségeit mutatjuk be.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány alapjául szolgáló kutatást az Emberi Erőforrások Minisztériuma által meghirdetett Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Program támogatta, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Mesterséges Intelligencia (BME FIKP-MI/FM) tématerületi programja keretében.

