

Izsák Gyula (Szerk.)

MŰSZAKI MECHANIKA III. MUNKAFÜZET

DINAMIKA ALAPJAI



Dunakavics

M
Ű
S
Z
A
K
I

K
Ö
N
Y
V
E
K

9.

Izsák Gyula (Szerk.)

MŰSZAKI MECHANIKA III/1.

DINAMIKA ALAPJAI

Munkafüzet

© Farkas Beáta–Izsák Gyula–Szőnyiné Passa Erzsébet–Vigh Sándor, authors, 2019

DUNAÚJVÁROSI EGYETEM
www.uniduna.hu

D=U=E PRESS

Kiadóvezető Németh István

Felelős kiadó Dr. habil András István

Felelős szerkesztő Nemeskéry Artúr
Tördelés Duma Attila

Készült a HTSART nyomdában
Felelős vezető Halász Iván

ISBN 978-963-9915-94-7

Izsák Gyula (Szerk.)

MŰSZAKI MECHANIKA III. MUNKAFÜZET

DINAMIKA ALAPJAI



Dunakavics
D U E PRESS

Dunaújváros, 2019

M
Ű
S
Z
A
K
I

K
Ö
N
Y
V
E
K

9.

FELADATOK

D.1-01

Egy anyagi pont mozgástörvénye:

$$\vec{r} = b \cdot \sin \omega t \cdot \vec{i} + c \cdot \cos \omega t \cdot \vec{j}$$

$$b = \dots \text{ m}, \quad c = \dots \text{ m}, \quad \omega = \dots \text{ s}^{-1}$$

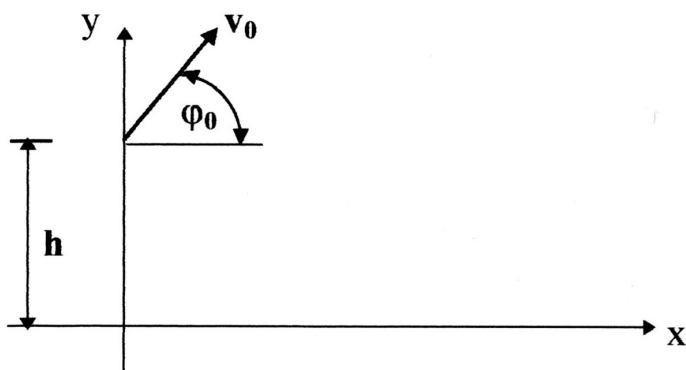
1. Írja fel a sebesség- és gyorsulásfüggvényeket!
2. Határozza meg az anyagi pont helyvektorát, sebességvektorát és gyorsulásvektorát a $t_0 = 0$ és $t_1 = \pi/4 \text{ s}$ időpillanatokban!
3. Rajzolja meg a mozgás pályáját!

D.1-02

h magasságból φ_0 szög alatt v_0 sebességgel hajítunk el egy anyagi pontnak tekinthető testet.

$$\begin{aligned} h &= \dots\dots \text{ m} \\ v_0 &= \dots\dots \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \dots\dots^\circ \\ g &= 10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



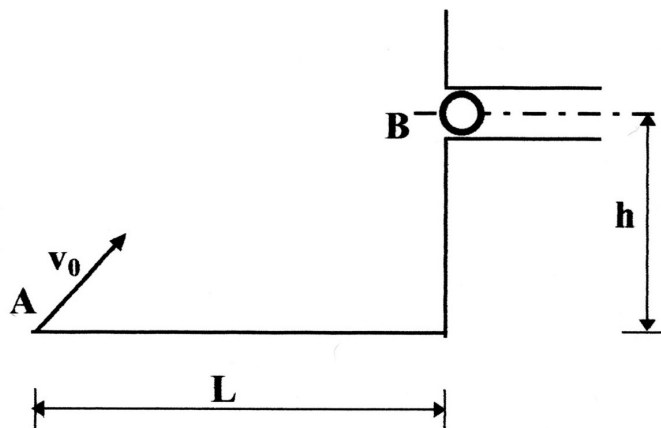
1. Számítsa ki, hogy az elhajítás helyétől milyen távolságban ér földet az anyagi pont!
2. Határozza meg a pálya tetőpontjának magasságát és vízszintes távolságát az elhajítás helyétől!
3. Határozza meg a becsapódási szöget és sebességet!
4. Rajzolja meg a foronómiai görbéket!

D.1–03

Az **A** pontbeli kilövés helyétől **L** távolságra és **h** magasságban lévő **B** célpont egy vízszintes nyílásban helyezkedik el.

h =m

L =m



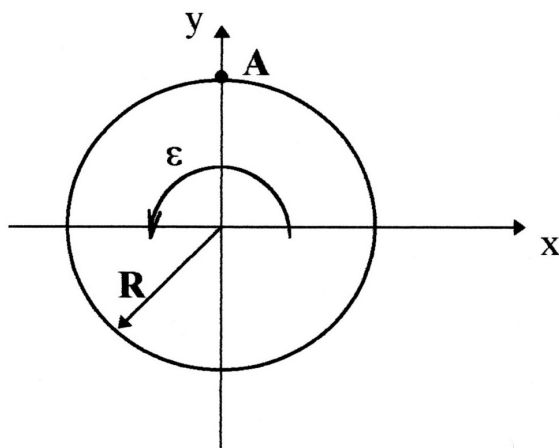
1. Határozza meg, hogy mekkora sebességgel és milyen szög alatt kell kilőni a lövedéket, hogy a célpontba vízszintes sebességgel érkezzon! (A légellenállástól eltekintünk.)
2. Mennyi idő alatt érkezik a lövedék a célpontba?
3. Határozza meg a kilövési és becsapódási kinetikus energiát!

D.1-04

Egy tömegpont az **A** pontból álló helyzetből indulva ϵ szöggyorsulással egyenletesen gyorsuló körmozgást végez egy vízszintes síkú **R** sugarú pályán.

$$\epsilon = \dots\dots 1/s^2 \quad R = \dots\dots m$$

$$n = \dots\dots$$

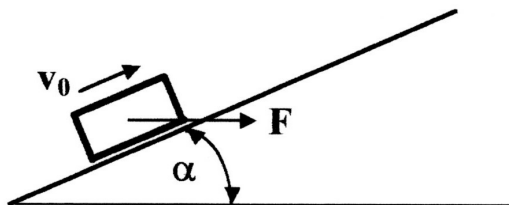


1. Határozza meg a tömegpont sebességét és gyorsulását n fordulat megtétele után!
2. Mennyi idő alatt teszi meg az n fordulatot?
3. Határozza meg a tömegpont szögsebességét n fordulat megtételekor!

D.1–05

A függőleges síkú α hajlásszögű **érdes** felületű lejtőn az m tömegű pontszerű test a $t_0 = 0$ időpillanatban v_0 sebességgel mozog.

$$\begin{array}{ll} v_0 = \dots\dots \text{ m/s} & \alpha = \dots\dots^\circ \\ \mu_0 = \dots\dots & \mu = \dots\dots \\ F = \dots\dots \text{ N} & t_1 = \dots\dots \text{ s} \\ m = \dots\dots \text{ kg} & \end{array}$$



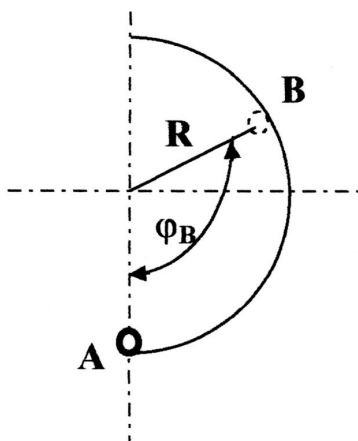
1. Határozza meg a tömegpont t_0 időpillanatbeli kinetikus energiáját!
2. Számítsa ki a test sebességét a t_1 időpillanatban, ha vízszintes F erő hat rá!
3. Határozza meg, hogy t_1 idő alatt mennyit haladt a tömegpont felfelé!
4. Határozza meg, hogy mennyit halad a tömegpont még felfelé, ha t_1 időpillanatban megszüntetjük az F erőt!
5. Vizsgálja meg, hogy amikor a test sebessége zérussá válik, nyugalomban marad-e, vagy elindul lefelé! Mekkora ebben az esetben a gyorsulása?

D.1-06

Függőleges síkú, félkörív alakú, R sugarú sima felületű pályán egy m tömegű pontszerű test halad.

$$R = \dots \text{ m} \quad \varphi_B = \dots^\circ$$

$$m = \dots \text{ kg}$$



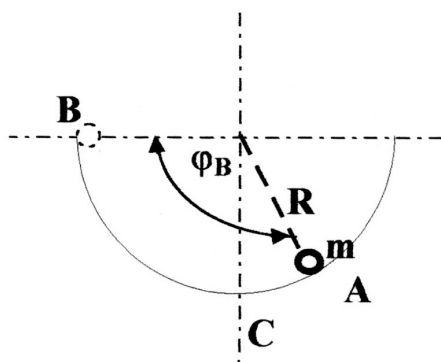
1. Határozza meg, hogy az A pontból mekkora kezdősebességgel kell indítani a testet, hogy a φ_B szöggel adott helyzetű B pontban elhagyja a körpályát!
2. Határozza meg a test B pontbeli sebességét!

D.1–07

Az m tömegű anyagi pont a súlytalannak és tökéletesen hajlékonynak tekinthető fonálhoz van kötve.

$$m = \dots \text{ kg} \quad \varphi = \dots^\circ$$

$$R = \dots \text{ m}$$



1. A tömegpontot mekkora sebességgel kell indítani az A pontból, hogy a B pontig emelkedjen?
2. Mekkora a fonalat feszítő erő az A helyzetben?
3. Mekkora a tömegpont gyorsulása a B és C helyzetekben?

D.1-08

Az **m** tömegű anyagi pont **sim**a vezetékben **A** amplitúdójú lengést végez.
A lengésszám **n**.

m = kg **n** = 1/min
A = cm

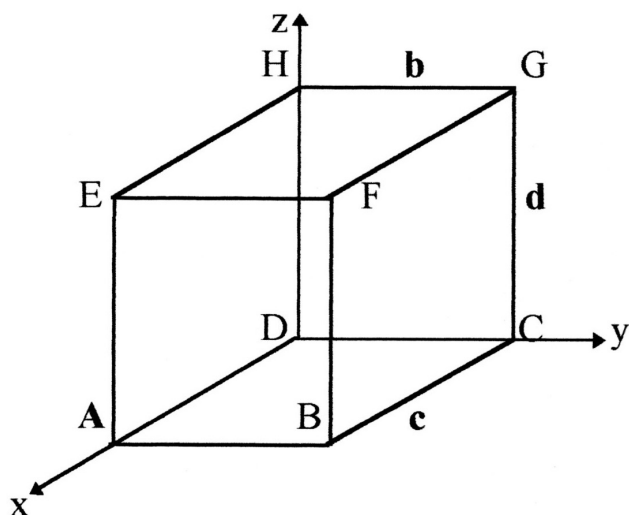


1. Mekkora a lengőrendszer rugóállandója?
2. Mekkora a rugóban ébredő legnagyobb erő?
3. Határozza meg a lengés sajátkörfrekvenciáját és sajátfrekvenciáját!

D.1–09

Ismert a **b**, **c**, **d** élhosszúságú téglatest alakú síkmozgást végző merev test **A** pontjának sebessége és gyorsulása, valamint a merev test szögsebessége és szöggyorsulása.

$$\begin{aligned} b &= \dots \text{ m} & c &= \dots \text{ m} & d &= \dots \text{ m} \\ \vec{\varepsilon} &= \dots \dots [1/\text{s}^2] & \vec{\omega} &= \dots \dots [1/\text{s}] \\ \vec{v}_A &= \dots \vec{i} \dots \vec{j} \dots \vec{k} [\text{m/s}] \\ \vec{a}_A &= \dots \vec{i} \dots \vec{j} \dots \vec{k} [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$



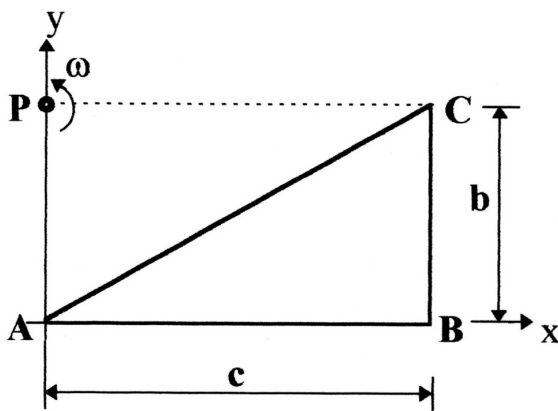
Számítsa ki a megjelölt pontok sebesség- és gyorsulásvektorait!

D.1–10

Ismert a síkmozgást végző merev test **ABC** síkmetszetének pillanatnyi sebességpólusa és a merev test szögsebessége.

$$b = \dots\dots \text{ m} \quad c = \dots\dots \text{ m}$$

$$\omega = \dots\dots \text{ 1/s}$$

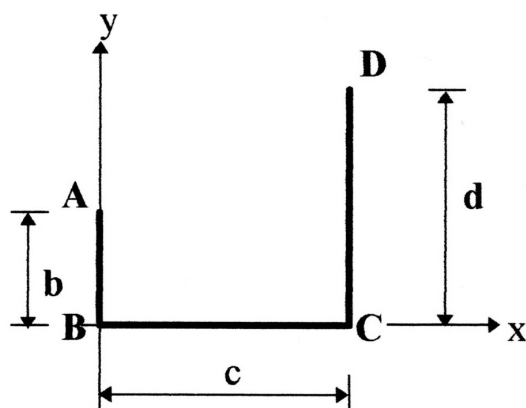


1. Számítsa ki az **A** és a **B** pontok sebességét!
2. Rajzolja meg a sebességábrát!
3. A sebességábrából olvassa le a **C** pont sebességét!

D.1–11

A síkmozgást végző **törtvonalú** rúd alakú merev test t_0 időpillanatbeli sebességállapota két pontjának sebességével adott.

$$\begin{aligned} b &= \dots \text{ m} & c &= \dots \text{ m} \\ d &= \dots \text{ m} \\ \vec{v}_A &= \dots \vec{i} + \dots \vec{j} & [\text{ m/s}] \\ \vec{v}_B &= \dots \vec{i} + \dots \vec{j} & [\text{ m/s}] \end{aligned}$$

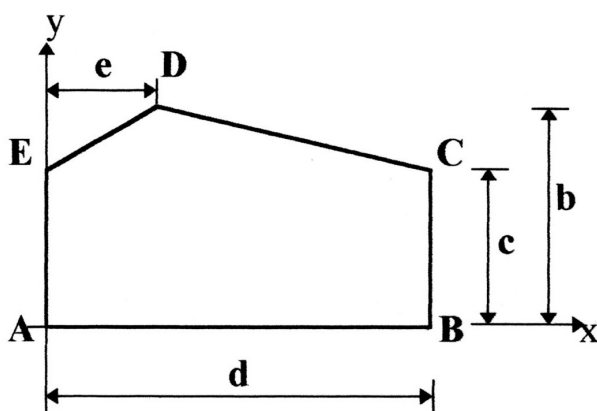


1. Határozza meg a rúd pillanatnyi sebességpólusát!
2. Számítsa ki a pillanatnyi szögsebességet!
3. Szerkessze meg a rúd sebességábráját!
4. A sebességábrából olvassa le a további pontok sebességét!

D.1–12

Ismert a síkmozgást végző merev test **D** pontjának sebessége, valamint **A** és **B** pontjának, gyorsulása.

$$\begin{aligned} b &= \dots \text{ m} & c &= \dots \text{ m} \\ d &= \dots \text{ m} & e &= \dots \text{ m} \\ \vec{v}_D &= \dots \vec{i} + \dots \vec{j} & [\text{ m/s}] \\ \vec{a}_A &= \dots \vec{i} + \dots \vec{j} & [\text{ m/s}^2] \\ \vec{a}_B &= \dots \vec{i} + \dots \vec{j} & [\text{ m/s}^2] \end{aligned}$$

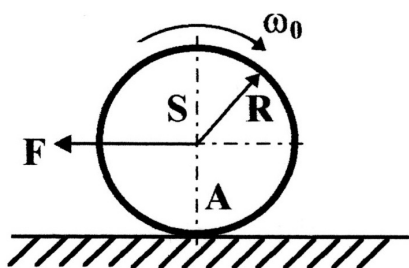


1. Határozza meg a merev test szögsebességét és szöggyorsulását!
2. Határozza meg a sebességpólust és rajzolja meg a sebességábrát!
3. Rajzolja meg a gyorsulásábrát!

D.1–13

A vázolt R sugarú és m tömegű kerék ω_0 szögsebességgel gördül a t_0 időpillanatban. A kerék és talaj közötti mozgásbeli súrlódási tényező μ , a gördülési ellenállás karja k .

$R = \dots\dots \text{ m}$ $k = \dots\dots \text{ mm}$
 $m = \dots\dots \text{ kg}$ $\mu = \dots\dots$
 $\omega_0 = \dots\dots \text{ 1/s}$
 $F = \dots\dots \text{ N}$

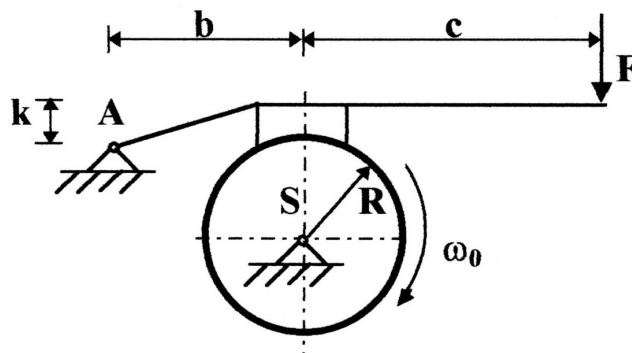


1. Határozza meg a kényszererőt!
2. Ellenőrizze a tiszta gördülés feltételét!
3. Határozza meg a kerék megállásáig megtett út hosszát!
4. Határozza meg a megálláshoz szükséges időt!

D.1-14

A vázolt n fordulatszámmal forgó m tömegű kereket karos áttételű pofás fékkel F erővel fékezzük a t_0 időpillanattól. A kerék és fékpofa közötti súrlódási tényező μ .

$R = \dots \text{ m}$ $k = \dots \text{ m}$
 $b = \dots \text{ m}$ $c = \dots \text{ m}$
 $m = \dots \text{ kg}$ $\mu = \dots$
 $n = \dots \text{ 1/min}$ $f = \dots \text{ fordulat}$

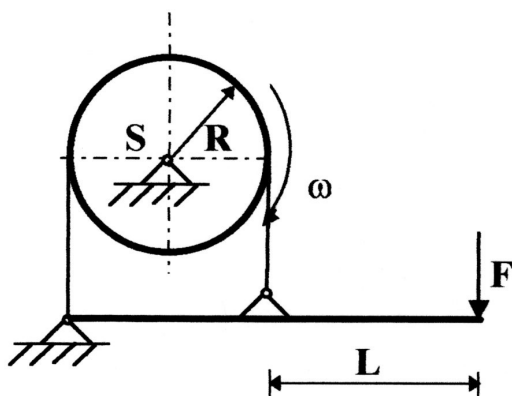


1. Határozza meg, hogy mekkora F fékezőerő szükséges a kerék f fordulat utáni megállításához!
2. Határozza meg a kerék csapágyában és az A csuklóban fellépő kényszererőket!
3. Határozza meg a megálláshoz szükséges időt!

D.1–15

A vázolt R sugarú és m tömegű kereket P teljesítményű és n maximális fordulatszámú motor hajtja meg. A kereket szalagfékkel F fékezőerővel fékezzük. A kerék és fékszalag közötti súrlódási tényező μ .

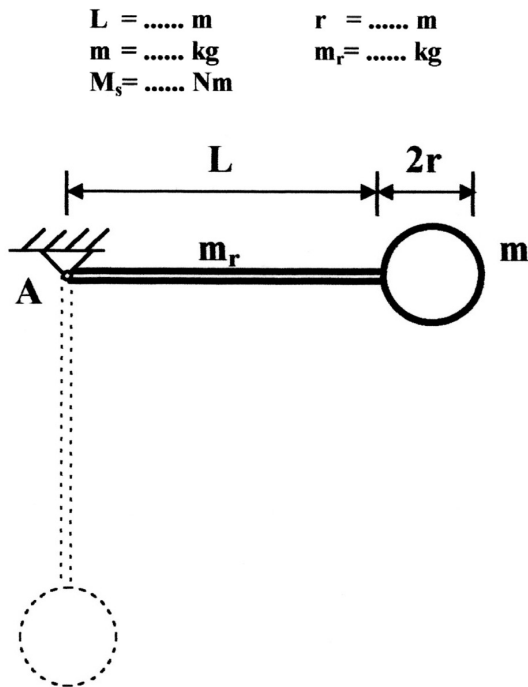
$R = \dots \text{ m}$ $L = \dots \text{ m}$
 $m = \dots \text{ kg}$ $\mu = \dots$
 $t_f = \dots \text{ s}$ $n = \dots \text{ ford/min}$



1. Mekkora maximális szöggyorsulást képes a motor biztosítani fékezés nélkül, ha a súrlódási veszteség 5%?
2. Határozza meg, hogy mekkora F fékezőerő szükséges ahhoz, hogy a kerék maximális fordulatról t_f fékezési idő után megálljon!
3. Határozza meg a szalagágakban fékezéskor fellépő erőket!

D.1–16

Az ábrán súrlódásmentesen csapágyazott **fizikai** ingát vázoltunk, mely m_r tömegű rúdból és m tömegű tárcsából áll.

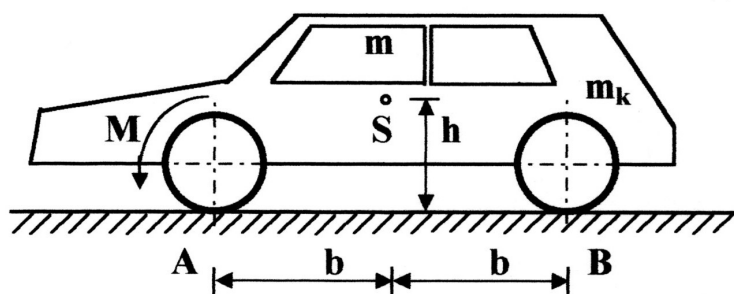


1. Határozza meg a vízszintes helyzetében magára hagyott fizikai inga szögsebességét függőleges helyzetében!
2. Határozza meg a függőleges helyzetbeli kinetikus energiát!
3. Határozza meg a reakcióerőt a függőleges helyzetben!
4. Határozza meg, hogy mekkora szöggel lendül túl az inga a függőleges helyzeten, ha a csapágyazásban M_s súrlódási nyomaték lép fel!

D.1–17

A vázolt személygépkocsi felépítménye m , az R sugarú kerékpárjai pedig m_k tömegűek. A kerék és talaj közötti súrlódási tényező μ .

$$\begin{array}{ll} R = \dots\dots \text{ m} & h = \dots\dots \text{ m} \\ m = \dots\dots \text{ kg} & m_k = \dots\dots \text{ kg} \\ b = \dots\dots \text{ m} & \mu = \dots\dots \end{array}$$

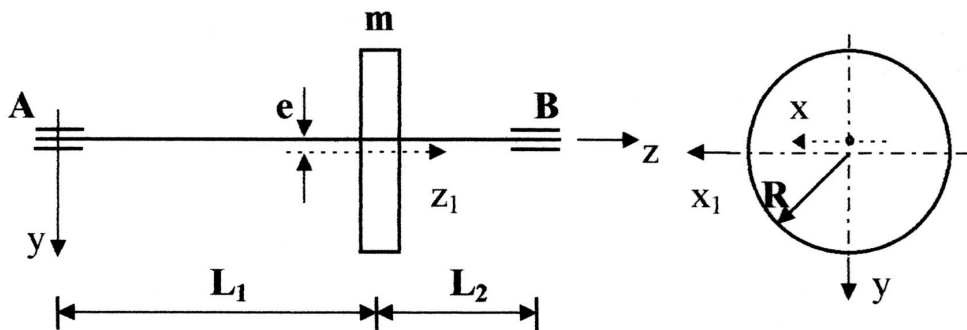


1. Mekkora gyorsítással indítható a gépkocsi megcsúszás nélkül?
2. Határozza meg a motor által kifejtendő nyomatékot elsőkerék meghajtás esetén!
3. Határozza meg a keréknyomásokat a maximális gyorsítással történő indításkor!

D.1-18

A vázolt m tömegű keréktárcsát e külpontossággal szerelték a tengelyre.

$L_1 = \dots \text{ m}$ $e = \dots \text{ mm}$
 $L_2 = \dots \text{ m}$ $R = \dots \text{ cm}$
 $m = \dots \text{ kg}$ $n = \dots \text{ 1/min}$

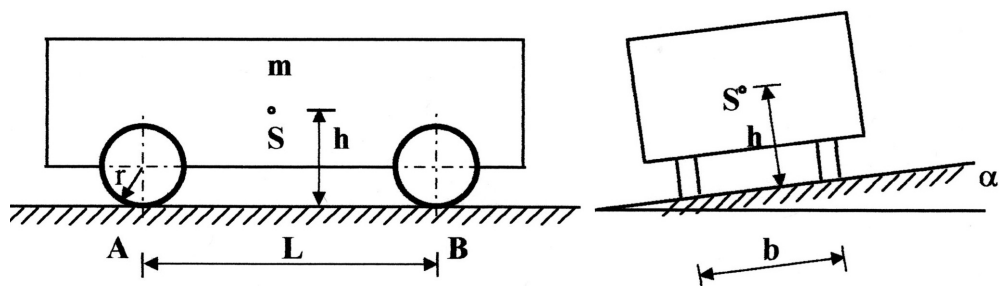


1. Határozza meg a reakcióerők függőleges komponensének maximális és minimális értékét a tárcsa percenkénti n fordulatszáma esetén!
2. Határozza meg a csapágyreakciók statikus terheléséhez képesti dinamikus terhelési többletet!
3. Egyensúlyozza ki a rendszert a tárcsában lévő $3/4 R$ sugarú horonyban való m_k tömeg elhelyezésével!

D.1–19

Az m össztömegű pótkocsi az R sugarú kanyarban halad. A kerék és talaj közötti súrlódási tényező μ .

$m = \dots \text{ kg}$ $b = \dots \text{ m}$ $L = \dots \text{ m}$ $h = \dots \text{ m}$ $\alpha = \dots^\circ$ $\mu = \dots$

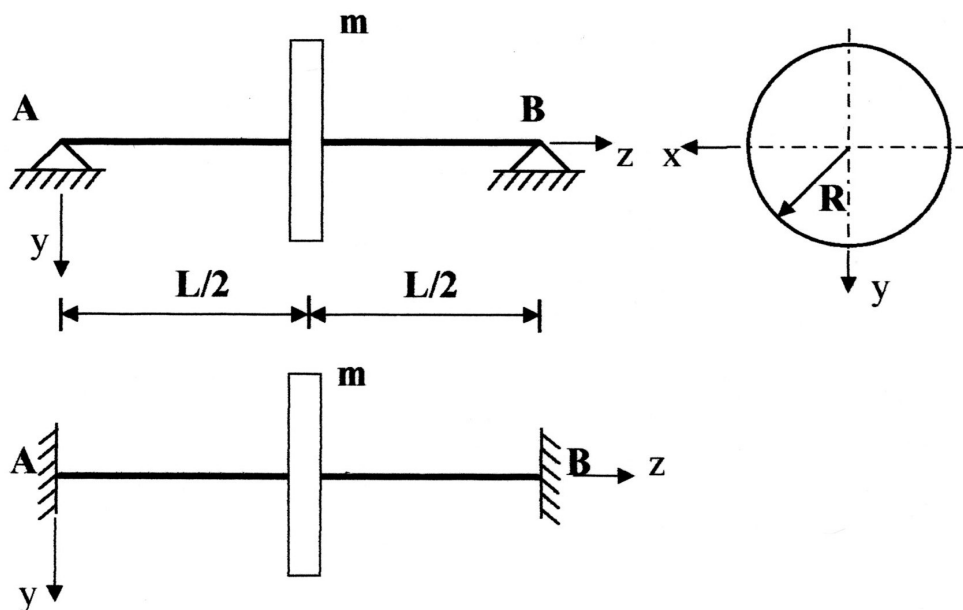


1. Határozza meg a megengedett sebességet: a , hogy a jármű ki ne sodródjon,
 b , fel ne dőljön!
2. Határozza meg a maximális megengedett sebességnél a keréknyomásokat!
3. Határozza meg egyenesben haladáskor a kerekek blokkolósos fékezésekor a tengelynyomásokat!

D.1-20

Egy kétcsuklós és egy befogott kéttámaszú azonos d átmérőjű rúd közepén egy m tömegű és R sugarú tárcsa helyezkedik el. Mindkét esetben megakadályozott a rúdvégi elcsavarodás ($\varphi_{Az} = \varphi_{Bz} = 0$).

$L = \dots \text{ m}$
 $m = \dots \text{ kg}$
 $d = \dots \text{ mm}$
 $R = \dots \text{ mm}$
 $E = \dots \text{ kN/cm}^2$
 $\nu = 0,33$

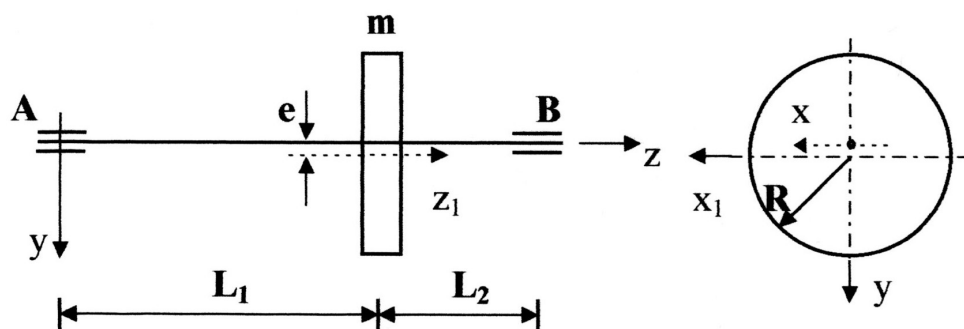


1. Határozza meg és hasonlítsa össze a két rendszer sajátkörfrekvenciáját hajlító és csavaró lengés esetére!
2. Mekkora lenne a csavarólengés sajátkörfrekvenciája a felső rendszer esetében, ha a jobboldali támasznál a rúdvég szabadon elcsavarodhat?

D.1-21

A D.1-18 feladatban vázolt m tömegű keréktárcsa hajlítólengést okoz a d átmérőjű két végén csapágyazott rúdban.

$$\begin{aligned} L_1 &= \dots\dots \text{ m} \\ L_2 &= \dots\dots \text{ m} \\ m &= \dots\dots \text{ kg} \\ d &= \dots\dots \text{ mm} \\ R &= \dots\dots \text{ mm} \\ n &= \dots\dots \\ E &= \dots\dots\dots \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

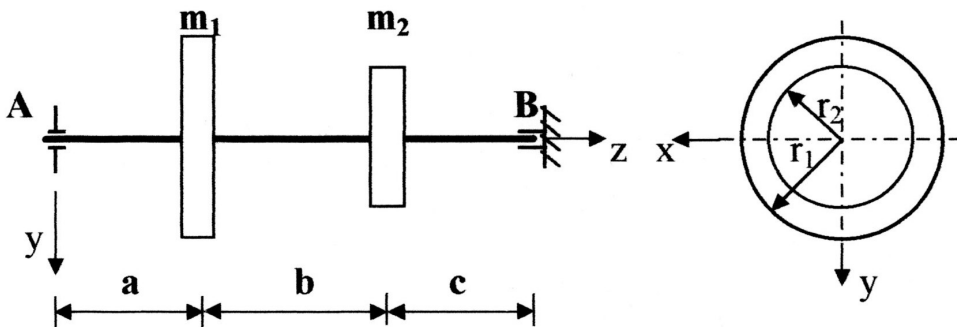


Határozza meg a rendszer sajátkörfrekvenciáját és hasonlítsa össze a fordulatszámából adódó gerjesztő körfrekvenciával!

D.1–22

Egy d átmérőjű csekély tömegű tengelyre felékelt két tárcsa forgómozgást végez a z tengely körül. A tengely baloldali vége szabadonfutó, jobboldali végén a meghajtás miatt csavarásra befogott-nak tekinthető.

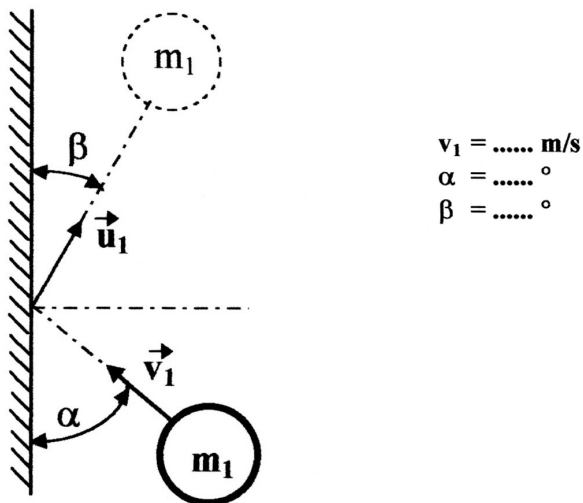
$a = \dots \text{ mm}$
 $b = \dots \text{ mm}$
 $c = \dots \text{ mm}$
 $m_1 = \dots \text{ kg}$
 $m_2 = \dots \text{ kg}$
 $d = \dots \text{ mm}$
 $r_1 = \dots \text{ mm}$
 $r_2 = \dots \text{ mm}$
 $E = \dots \text{ kN/cm}^2$
 $\nu = 0,33$



1. Határozza meg a rendszer sajátfrekvenciáit hajlító és csavaró lengés esetére!
2. Határozza meg a veszélyes gerjesztőfrekvencia-tartományokat, hogy a gerjesztőfrekvencia legalább $\pm 10\%$ -kal eltérjen a sajátfrekvenciáktól!

D.1–23

A vízszintes, sima síkon mozgó m_1 tömegű, gömb alakú szilárd test függőleges síkú merev falnak ütközik v_1 sebességgel.

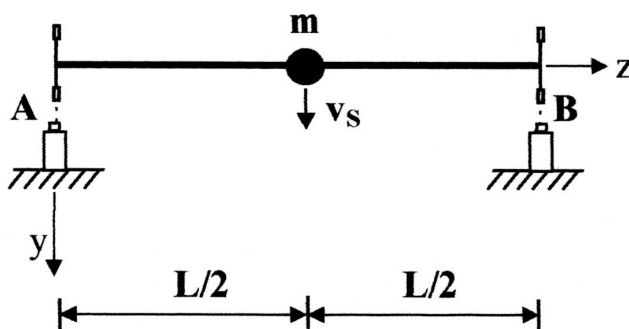


1. Határozza meg az a két testre vonatkozó k ütközési tényezőt!
2. Határozza meg a test ütközés utáni u_1 sebességét!

D.1-24

Egy felülnézetben ábrázolt m tömegű terhet szállító kéttámaszú rugalmas daruhíd v_s sebességgel haladva nekiütközik a merevbetétes ütközőnek. A daruhíd tömegét az m tömegbe redukáltan vesszük figyelembe.

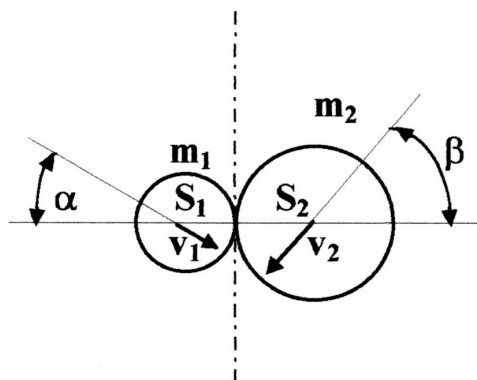
$$\begin{aligned} L &= \dots \text{ m} \\ m &= \dots \text{ kg} \\ v_s &= \dots \text{ m/s} \\ I_x &= \dots \text{ cm}^4 \\ E &= \dots \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$



1. Milyen sajátfrekvenciájú lengést végez a daruhíd ütközés után?
2. Határozza meg az A és B ütközőknél fellépő ütközési erőt!

D.1–25

Az m_1 és m_2 tömegű gömb alakú, sima felületű testek haladó mozgást végeznek a rajzlap síkjával párhuzamosan v_1 illetve v_2 sebességgel. Mozgásuk során centrikusan ütköznek.



$$v_1 = \dots\dots \text{ m/s}$$

$$v_2 = \dots\dots \text{ m/s}$$

$$m_1 = \dots\dots \text{ kg}$$

$$m_2 = \dots\dots \text{ kg}$$

$$k = \dots\dots$$

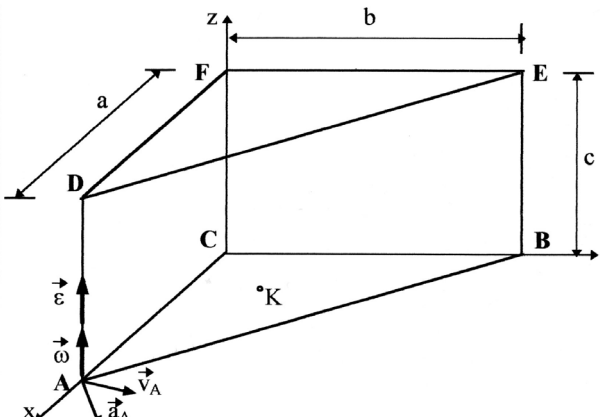
$$\alpha = \dots\dots^\circ$$

$$\beta = \dots\dots^\circ$$

Határozza meg a testek ütközés utáni sebességét!

Tankör:	Név:	Feladatszám:
----------------	-------------	---------------------

Ismeretes a vázolt merev test **A** pontjának sebesség- és gyorsulásvektora, valamint a test szögsebesség- és szöggyorsulásvektora a t_0 időpillanatban.



$a = b = c = 4 \text{ m}$
 $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$
 $\vec{\epsilon} = \epsilon \cdot \vec{k}$
 $\vec{v}_A = v_{Ax} \cdot \vec{i} + v_{Ay} \cdot \vec{j}$
 $\vec{a}_A = a_{Ax} \cdot \vec{i} + a_{Ay} \cdot \vec{j}$
 $\vec{r}_K = x_K \cdot \vec{i} + y_K \cdot \vec{j}$
 $x_K = y_K$

- Állapítsa meg, hogy milyen jellegű mozgást végez a merev test a t_0 időpontban!
- Számítsa ki az **E** és **F** pontok sebesség- és gyorsulásvektorait!
- Rajzolja meg a merev test **ABC** lapjának sebességábráját és olvassa le róla a **K** pont sebességvektorát!
- Szerkessze meg az **ABC**-idom gyorsulásábráját és olvassa le róla a **K** pont gyorsulásvektorát!

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
v_{Ax}	m/s	6	0	0	6	-6	6	-6	6	12	6	A
v_{Ay}	m/s	0	6	0	6	-6	-6	6	12	6	-12	
a_{Ax}	m/s ²	0	3	0	3	3	-3	-3	3	5	-3	B
a_{Ay}	m/s ²	3	0	0	3	-3	3	-3	5	3	5	
ω	1/s	2	-4	2	-4	2	-4	0	0	0	1	C
ϵ	1/s ²	1	2	-1	-2	0	0	1	-1	0	2	
x_K	m	2	1,8	1,6	1,4	1,2	1	0,8	0,6	0,4	0	

Műszaki mechanika III. Dinamika		D.1 Feladat
--	--	--------------------