OnLine tananyag

Műszaki tudományok

Sorozatszerkesztő: Dr. Balázs László

32. Mérnöki fizika



DUNAÚJVÁROSI EGYETEM
UNIVERSITY OF DUNAÚJVÁROS

Tartalomjegyzék

1. fejezet 5
Anyagi pont mechanikája 6
Kinematika (mozgástan) 6
Mechanika 13
A mechanika axiómái I. ppt 27
A mechanika axiómái II. 31
Az erők osztályozása 42
A dinamikai feladatok megoldása általában ppt 50
A különböző mozgások értelmezése 55
Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás 58

2. fejezet 64
Görbe vonalú mozgások ppt 65
Hajítások 70
Körmozgás 73
Görbe vonalú mozgások ppt 81

3. fejezet 95
Impulzus, lendület ppt 96
Munka, energia ppt 103
A különböző erőtípusok munkája I. ppt 117
A különböző erőtípusok munkája II. ppt 125
A különböző erő típusok munkája 130

4. fejezet 135
Pontszerű testekből álló mechanikai rendszerek 136
Pontszerű testekből álló mechanikai rendszerek ppt 142
Pontszerű testekből álló mechanikai rendszerek 153
Impulzus tétel pontrendszerre 157
Ütközések 160
Ütközések ppt 162

5. fejezet 167
Harmonikus rezgőmozgás 168
Harmonikus rezgőmozgás ppt 173
Csillapító rezgőmozgás ppt 181
Csillapított rezgőmozgás 190
Kényszerített rezgések ppt 199

6. fejezet 208
A felhajtó erő ppt 209
Súlyos folyadék 234

7. fejezet 239
Hőtan (Termodinamika) 240
Hőtan (Termodinamika) ppt 261
Az ekvipartíció tétele ppt 267
Szabadsági fok, fajhő ppt 274
A gázok molekuláinak sebességeloszlása, Dalton törvény ppt 280
A termodinamikai valószínűség és az entrópia statisztikus mechanikai értelmezése ppt 285
Mechanikai munka, hőmennyiség ppt 291
A termodinamika I. főtétele ppt 300
Körfolyamatok ppt 306

8. fejezet 314
Állapotváltozások 315
Állapotváltozások ppt 324
Állapotváltozások ppt 330
Izobár (állandó nyomású) állapotváltozás ppt 332
Izobár (állandó nyomású) állapotváltozás 339
Izoterm (állandó hőmérsékletű) állapotváltozás 341
Izoterm (állandó hőmérsékletű) állapotváltozás ppt 343
Adiabatikus (izentróp) állapotváltozás 357
Adiabatikus (izentróp) állapotváltozás ppt 360

9. fejezet 368
Folyadékok és szilárd testek hőtágulása 369
Körfolyamatok 371
A folyamatok megfordíthatósága 374
Halmazállapot változások 374
Körfolyamatok 377
A Termodinamika II. főtétele 379
A Termodinamika III. főtétele 380
Folyadékok és szilárd testek hőtágulása 384

10. fejezet 386
Elektromágneses jelenségek 387
Gauss tétele 392
Coulomb törvénye 393
Potenciál és feszültség 394
Kapacitás 396
Elektromosságtan ppt 399
Kapacitás, kondenzátorok 437

11. fejezet 440
Egyenáramok I. 441
Egyenáramok II. 465
Egyenáram ppt 468
Ellenállás, fajlagos ellenállás ppt 478
Ellenállások kapcsolása 488
Ellenállások kapcsolása ppt 491
Kirchoff törvényei, Ohm törvénye teljes áramkörre ppt 500
Kirchhoff törvényei, Ohm törvénye teljes áramkörre 511
Hálózatszámítási módszerek 515
Hálózatszámítási módszerek ppt 529

12. fejezet 538
Mágnességtan, indukció ppt 539
Mágnességtan, indukció 545
Áramjárta vezető mágneses mezeje ppt 551
Erőhatások mágneses mezőben 557
Erőhatások mágneses mezőben ppt 561
Elektromágneses indukció 569
Elektromágneses indukció ppt 572
Mozgási indukció ppt 578
Mozgási indukció 585
Önindukció, kölcsönös indukció 586
Önindukció, kölcsönös indukció ppt 589

13. fejezet 596
Váltakozó áram ppt 597
Váltakozó áram 609

Ellenállás, induktivitás és kapacitás váltakozó áramú körökben ppt 613
Ellenállás, induktivitás és kapacitás váltakozó áramú körökben 623
Soros R-L-C kapcsolás ppt 627
Soros R-L-C kapcsolás 635

14. fejezet 638
A fény mint elektromágneses hullám, geometriai optika ppt 639
Optika 650
A gömbtükrök képalkotása ppt 656
Gömbtükrök képalkotása 667
A fény törése, teljes visszaverődés ppt 673
A fény törése, teljes visszaverődés 681
Optikai lencsék 687
Az optikai lencsék képalkotása ppt 697
Az optikai lencsék ppt 705

15. fejezet 709
Fizikai optika 710
Fizikai optika ppt 718
Szubjektív fotometria 729
Szubjektív fotometria ppt 734

Beadandó feladatok 746
1. fejezethez 747
2. fejezethez 748
3. fejezethez 749
4. fejezethez 750
5. fejezethez 751
6. fejezethez 752
7. fejezethez 753
8. fejezethez 754
9. fejezethez 755
10. fejezethez 756
11. fejezethez 757

Minta feladatok 758
1. fejezethez 759
2. fejezethez 774
3. fejezethez 785
6. fejezethez 809
7. fejezethez 814
8. fejezethez 818
9. fejezethez 822
10. fejezethez 828
11. fejezethez 834
12. fejezethez 840
13. fejezethez 847

1. fejezet

1.1 Anyagi pont mechanikája

Kinematika (mozgástan)

Anyagi pont (tömegpont) fogalma:

A testek tulajdonságai közül egyedül a tömeget vesszük figyelembe, a többi tulajdonságtól eltekintünk.

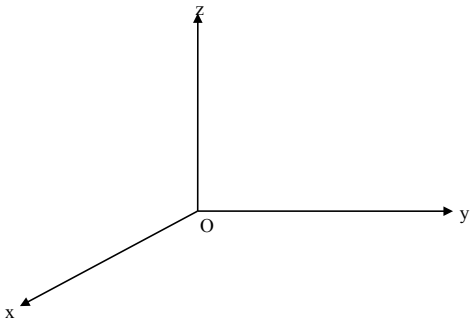
Így a fizikai jelenségek lényegesen egyszerűbben írhatók le, viszont a leírás jól közelíti a valóságot.

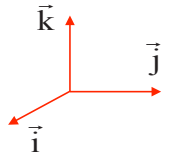
Anyagi pont lehet pl. a mozgás leírása esetén:

- egy ablakpárkányról lehulló virágcserép
- a Föld
- egy mozgó teherautó
- puskából kilőtt lövedék

Bármely test helyzete, helyzetváltoztatása csak más testekhez viszonyítva írható le.

Testek helyzetének megadása:
vonatkoztatási rendszer





$$|\vec{i}| = 1, \quad |\vec{j}| = 1, \quad |\vec{k}| = 1$$

helyvektor:

$\vec{r} = (x, y, z)$

x=3,

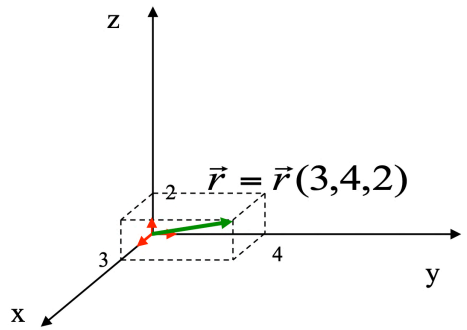
y=4,

z=2

$\vec{r}_x = r_x \cdot \vec{i} = x \cdot \vec{i}$

$\vec{r}_y = r_y \cdot \vec{j} = y \cdot \vec{j}$

$\vec{r}_z = r_z \cdot \vec{k} = z \cdot \vec{k}$

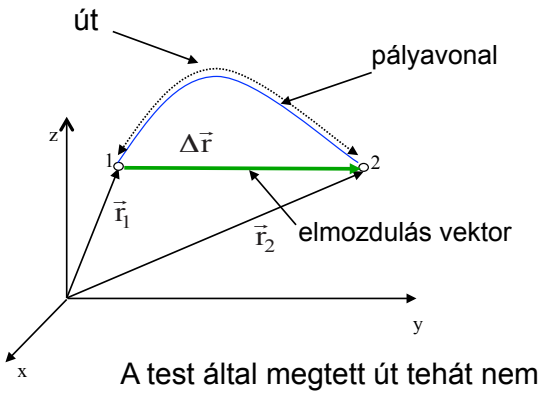


helyvektor:

$\vec{r} = \vec{i}\,3 + \vec{j}\,4 + \vec{k}\,2$

A vektor hossza: $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

Az elmozdulás és az elmozdulás vektor



A megtett út: a pályagörbe ívhossza

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$$

elmozdulás vektor:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

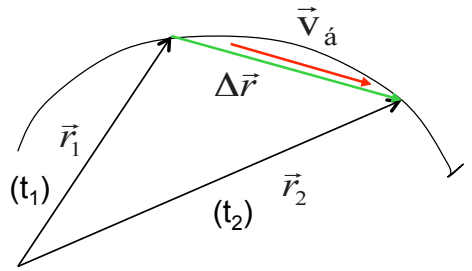
A test által megtett út tehát nem szükségképpen esik egybe az elmozdulás vektorral, így a megtett út hossza és az elmozdulás vektor hossza (abszolút értéke) sem feltétlenül egyezik meg.

Sebesség, sebességvektor

Átlagsebesség:

$$\vec{v}_{á} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$[v] = \frac{m}{\sec}, \frac{km}{h}$$



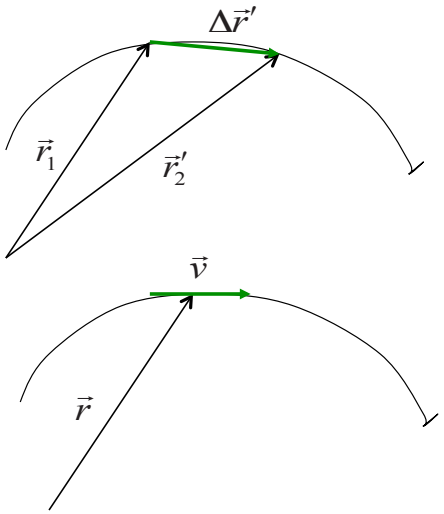
Az átlagsebesség vektor tehát az elmozdulás vektor és az eltelt idő hányadosa, iránya az elmozdulás irányával egyezik meg

Pillanatnyi sebesség:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\left(x \cdot \vec{i}\right)}{dt} + \frac{d\left(y \cdot \vec{j}\right)}{dt} + \frac{d\left(z \cdot \vec{k}\right)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A pillanatnyi sebesség tehát a helyvektor változási gyorsasága (idő szerinti első differenciálhányadosa). Iránya mindig a pálya érintőjének irányába mutat.



A sebesség tehát nem a megtett út és az eltelt idő hányadosa!

Gyorsulás: a sebességvektor változási gyorsasága

Átlag gyorsulás:

$$\vec{a}_{á} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Pillanatnyi gyorsulás:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

A gyorsulásvektor tehát a sebességvektor idő szerinti első differencálhányadosa, azaz a helyvektor idő szerinti második differenciálhányadosa.

Egysége: $[\vec{a}] = \frac{m}{\sec^2}$

Ha ismerjük az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ függvényt:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{illetve} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Fordítva: ismerve az $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}; t)$ függvényt, valamint $\vec{v}_0$ és $\vec{r}_0$ értékeit:

a sebesség vektor: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) \cdot dt$

a helyvektor: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t}^{t} \vec{v}_0 \cdot dt + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) \cdot dt$

Mechanika

A mechanika a mozgás, és annak okainak, valamint lejátszódásának a tudománya.

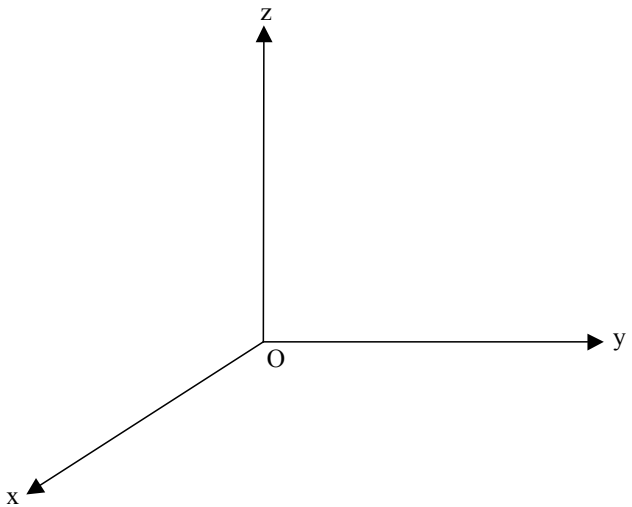
A mozgás tanulmányozásához elengedhetetlen annak tisztázása, hogy miképpen tudjuk meghatározni egy test helyzetét. Ha egy bonyolult, összetett testet, egy gépalkatrészt, vagy egy követ vizsgálunk, látjuk, hogy mindhárom dimenzióban van mérhető kiterjedése. Ha elegendően távolról nézzük azonban, csak egy pontot látunk. Innen adódik az egyszerűsítés, hogy akkor vizsgáljuk a testeket először úgy, mintha pontszerűek lennének, kiterjedés nélkül, de a valós tömegükkel.
Ezen egyszerűsítés alapján a továbbiakban, hacsak nem jelezzük másként, a pontszerű testek mechanikájával foglalkozunk.
Először vizsgáljuk meg a pontszerű test helyzetének megadását.

1.1. Kinematikai alapfogalmak

Ha csak a pontszerű testek mozgására koncentrálunk, annak okára nem, akkor kinematikáról beszélünk.

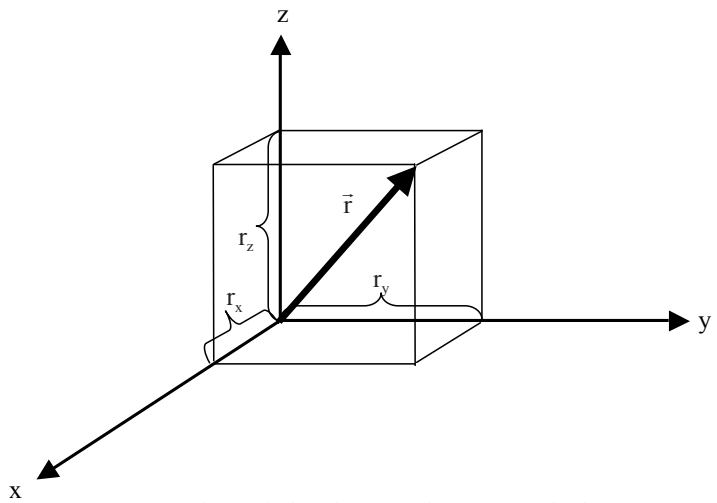
1.1.1. Pontszerű test helyzetének megadása:

Ha egy pontszerű test helyzetét meg szeretnénk adni, akkor valamihez viszonyítani kell azt, úgy mondjuk, hogy vonatkoztatási rendszert kell megadni. Erre nagyon sokféle lehetőség van, mi azonban a leggyakrabban használt derékszögű, Descartes- (vagy Carthesius-) féle vonatkoztatási rendszert választjuk, melynek van egy O középpontja, vagy origója, amelyből három, egymásra merőleges koordináta tengely indul ki (1.1.1. ábra).

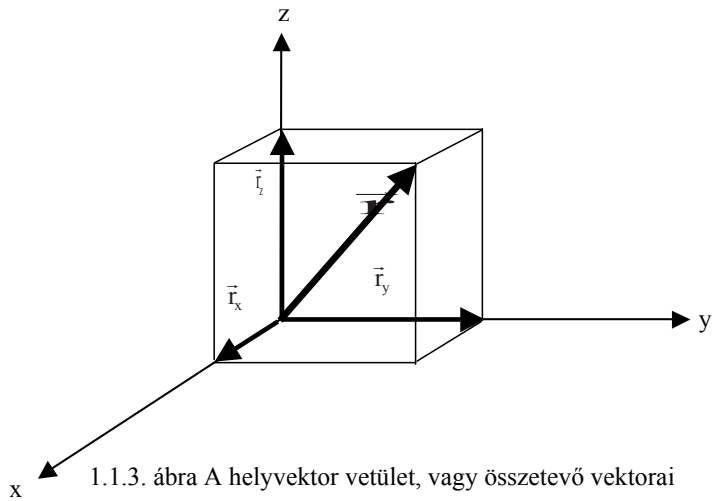


1.1.1. ábra A Descartes-féle vonatkoztatási rendszer

Az ábrán szereplő koordináta rendszer akkor lesz igazi vonatkoztatási rendszer, ha valamilyen anyagi testhez rögzítjük, vagy rögzítettnek képzeljük el. A koordináta rendszert jobbsodrásúnak nevezzük akkor, Képzeletben helyezzünk el egy jobbmenetű csavart az z tengelybe (hogy az legyen a szimmetria tengelye), s az x és y tengelyeket rögzítsük a csavar fejéhez, majd az x tengelyt úgy forgassuk el, hogy az y irányába forogjon. Ha a csavar a növekvő z irányába mozog, akkor a koordináta rendszer jobbsodrású.
A három tengely alkalmazásának magyarázata az, hogy egy pont térbeli mozgása három egymástól független komponensre bontható. A legegyszerűbb, ha a három független komponens egymásra merőleges, és úgy választjuk meg azokat, hogy az egyik komponens az előre-hátra, a másik a jobbra-balra, és a harmadik a le-föl mozgásokat jelenti. A független mozgáskomponensek irányába mutatnak az egyes tengelye, a z a függőleges irányt adja általában, y a jobbra-balra, és x az előre-hátra irány. Az 1.1.1. ábrán a tengelyekre helyezett nyilak a pozitív előjelű irányítást mutatják. Egy pont helyzetének a megadása az $\vec{r}$ helyvektorral történhet, ami az origóból induló, a pontba mutató nyíllal szemléltethető (1.1.2. ábra). A vektor x, y, és z tengelyekre való vetületei a vektor komponensei.

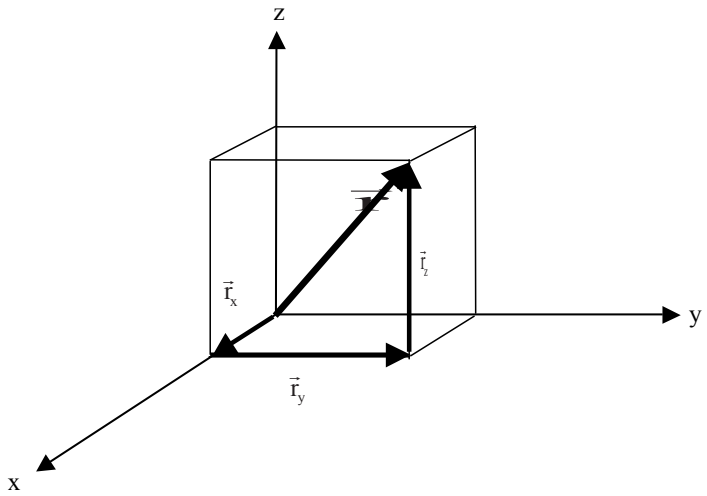


1.1.2. ábra A helyvektor vetületei a tengelyekre



1.1.3. ábra A helyvektor vetület, vagy összetevő vektorai

Ezeket a komponenseket rendre r_x, r_y, és r_z jelekkel látjuk el általában, helyvektor esetében, azonban sokszor csak az x, y, és z jelöléseket használjuk a komponensekre. A komponensekkel kapcsolatos gondolatmenetet úgy is folytathatjuk, hogy a vektor az $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$, és $\vec{r}_z$ komponens vektorok (1.1.3. ábra) összege, amely világosan látszik az 1.1.4. ábrán.



1.1.4. ábra A vektor a komponensvektorok összege

A komponensvektorok és a vetületek közötti összefüggés leírását, és egyébként a vektorokkal való számolást könnyítik meg a bázisvektorok, vagy tengelyirányú egységvektorok. Legyen az x tengely irányába mutató egységnyi hosszúságú vektor $\vec{i}$, az y tengely irányába mutató $\vec{j}$, a z tengely irányába mutató pedig $\vec{k}$ (1.1.4. ábra). Ekkor a komponensvektorok és a helyvektor (de minden egyéb vektorra is érvényes ez):

$$\vec{r}_x = r_x \cdot \vec{i} = x \cdot \vec{i}$$
$$\vec{r}_y = r_y \cdot \vec{j} = y \cdot \vec{j}$$
$$\vec{r}_z = r_z \cdot \vec{k} = z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \qquad (1.1.1)$$

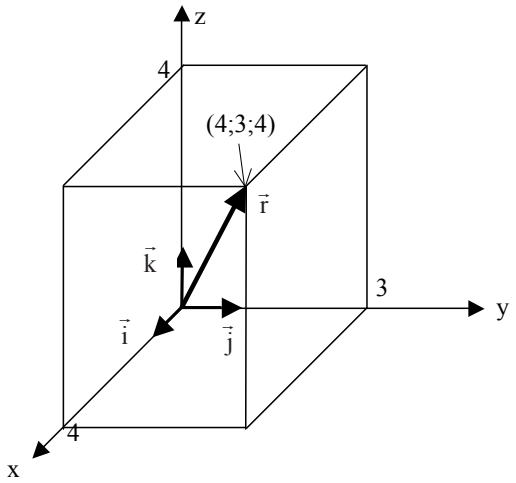
A z egységvektorokra, vagy bázisvektorokra érvényes, hogy $\left|\vec{i}\right| = 1$, $\left|\vec{j}\right| = 1$, valamint $\left|\vec{k}\right| = 1$.

A Descartes-féle koordináta rendszerben:

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \text{ azaz } \vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{0},$$
$$\vec{j} \perp \vec{k}, \text{ azaz } \vec{j} \bullet \vec{k} = \vec{0},$$
$$\vec{k} \perp \vec{i}, \text{ azaz } \vec{k} \bullet \vec{i} = \vec{0},$$

és $$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}, \ \vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}, \ \vec{i} = \vec{j} \times \vec{k}.$$

Példaként válasszunk egy pontot, melynek koordinátái legyenek x = 4, y = 3, és z = 4. Ábrázoljuk ezt a pontot a Descartes-féle koordináta rendszerben, és adjuk meg a helyvektorát.



1.1.5. ábra Egy pont helyvektorának megadása

A helyvektor matematikai formában:

$$\vec{r} = \vec{r}(4;3;4) = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

Ha a helyvektort

$$\vec{r} = \vec{r}(x,y,z) \quad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

alakban adjuk meg, akkor a vektor abszolút értéke (helyvektor esetében a hossza:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \qquad (1.1.2)$$

és mivel a fentiek más vektor esetében is érvényesek, egy $\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}$ esetben:

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}\,. \qquad (1.1.3)$$

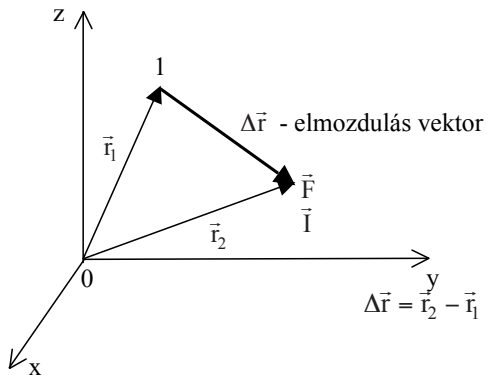
1.1.2. Az elmozdulás és az elmozdulás vektor

Mozogjon a pontszerű test egyenes vonalban az „1” helyzetből a „2” helyzetbe. Mindkét pontba mutat egy helyvektor az 1.1.6. ábra szerint. Az első pontból a másodikba mutató vektor az elmozdulás vektor, ami a két vektor különbsége, hiszen

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}\,,$$

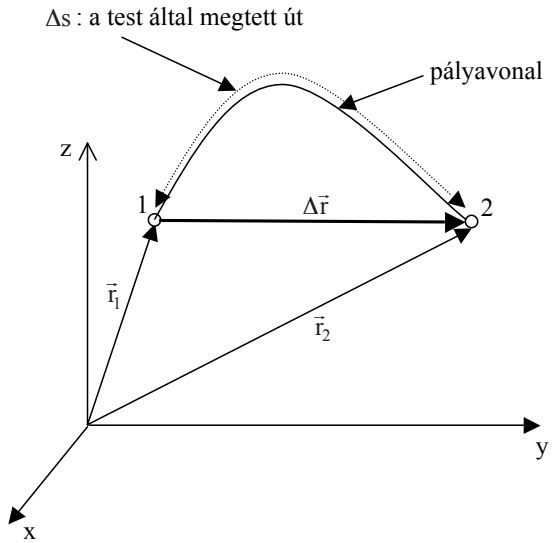
és így:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (1.1.4)$$



1.1.6. ábra Az elmozdulásvektor egyenesvonalú mozgás esetében

Ha mozgás más alakú, a test által megtett út nem szükségképpen esik egybe az elmozdulásvektorral, sőt a megtett út hossza és az elmozdulásvektor hossza (abszolút értéke) sem feltétlenül egyezik meg. Erre mutatunk példát az 1.1.7. ábrán.



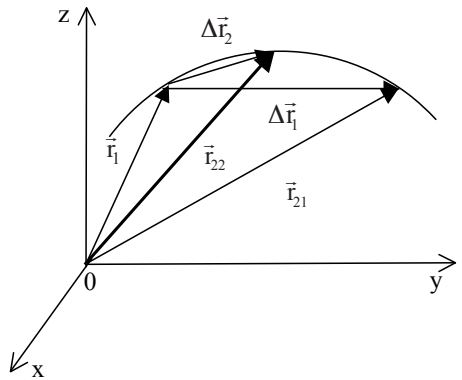
1.1.7. ábra Az elmozdulásvektor és a pontszerű test által megtett út nem egyenesvonalú mozgás esetén

1.1.3. A sebesség és a sebességvektor

Ha nemcsak azt szeretnénk tudni, hogy milyen pályán mozog a vizsgált pontszerű, vagy annak képzelt objektum, hanem azt is, hogy azon milyen gyorsan halad, be kell vezetnünk a sebesség és a sebességvektor fogalmát. Előző tanulmányainkból jól ismerjük a sebesség azon definícióját, hogy az az egységnyi idő alatt megtett úttal azonos. Ennél egy kicsit általánosabban használható a helyvektor egységnyi idő alatti megváltozása, azonban matematikailag az alábbi definíciót célszerű elfogadnunk:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \qquad (1.1.5)$$

ahol $\vec{v}$ a sebességvektor, illetve a Δt idő alatti átlagsebesség, ami a definiáló egyenlet szerint: két pont közötti átlagsebesség az elmozdulás vektor és az elmozduláshoz szükséges idő hányadosa. Mivel az elmozdulásvektor nem szükségképpen esik egybe a test által leírt úttal, ez az átlagsebesség nagyon eltérhet a test által az adott intervallumon belüli egyes pontokban felvett sebességtől.



1.1.8. ábra Az elmozdulásvektor változása az időintervallumok rövidülésével

Ha t_1 időpontban a helyvektor $\vec{r}_1$, t_2-ben $\vec{r}_{21}$, akkor az elmozdulásvektor $\Delta\vec{r}_1$. Így a két időpont közötti idő intervallumban a sebességvektor (az átlagsebesség):

$$\vec{v}_{12} = \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_1}{t_2 - t_1}.$$

Ha azt szeretnénk, hogy a sebesség ne legyen ennyire „átlagos”, akkor rövidítsük az időt, amíg mérünk, azaz az idő intervallumot. Egy t_3 időpontban a helyvektor legyen $\vec{r}_{22}$, és az elmozdulásvektor az előzőnél „rövidebb” (az ábra szerint, de a valóságban nem szükségszerűen), és jobban simul a pályavonalhoz. A sebességvektort a fenti egyenlethez hasonló kifejezés adja. Ha az időintervallumot lépésenként egyre rövidítjük, úgy hogy mindig az első pontból indulunk ki, akkor egyre jobban és jobban közelítünk a pályagörbéhez. Végtelen sok lépésben éppen a pályagörbe érintőjét kapjuk a kiinduló pontban. Ez a vektor az adott pontban a pontszerű test sebességvektora, vagy pillanatnyi sebességvektora.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.1.6)$$

Mivel a matematikában egy hasonló jellegű kifejezésre

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

a differenciál hányados nevet használjuk, azt mondjuk, hogy a kifejezés y-nak az x szerinti differenciál hányadosa, ezért az 1.1.6 kifejezés azt mondja, hogy a sebességvektor, vagy pillanatnyi sebességvektor a helyvektor idő szerinti differenciálhányadosa.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (1.1.7)$$

A sebességvektor természetesen komponensekkel is leírható. Ha csak a helytől függ:

$$\vec{v} = \vec{v}(v_x; v_y; v_z) = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k},$$

vagy másként:

$$\frac{d\left(x \cdot \vec{i}\right)}{dt} + \frac{d\left(y \cdot \vec{j}\right)}{dt} + \frac{d\left(z \cdot \vec{k}\right)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\vec{t}} = \vec{v},$$

azaz

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad ,$$

ehhez az kell, hogy az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ függvény $= x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$.

A sebesség vektor érintője a pályavonalnak, komponensei pedig a helyvektor komponenseinek időbeli differenciáljai:

A sebesség mértékegysége:

$$[v] = \frac{[r]}{[t]} = \frac{m}{s}.$$

Használatos még:

$$\frac{km}{h},$$

és

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000m}{3600s} = \frac{1}{3{,}6}\frac{m}{s}.$$

Természetesen a sebességvektor is felrajzolható a Descartes-féle koordináta rendszerben, akkor kapjuk meg a test hodográfját. A sebességvektor változhat az időben is, azaz a következő alakban is írható:

$$\vec{v} = \vec{v}(v_x; v_y; v_z; t).$$

A sebességvektor időbeli változását egy újabb paraméter, a gyorsulás írja le.

1.1.4. A gyorsulás és a gyorsulásvektor

Megelőző tanulmányaink során a gyorsulást úgy értelmeztük, hogy az az időegység alatti sebességváltozás. Ez a definíció azonban egy véges időintervallum esetében az átlaggyorsulást adja meg. Vektori alakban az alábbiakban mutatjuk meg.

$$\vec{a}_{\text{átlag}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (1.1.8)$$

A pillanatnyi gyorsulás, vagy gyorsulás a sebességhez hasonlóan definiálható:

$$\vec{a}_{\text{pillanatnyi}} = \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad . \qquad (1.1.9)$$

A gyorsulás mértékegysége:

$$[\vec{a}] = \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Ha ismerjük az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ függvényt, akkor $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ adódik, ebből pedig $\vec{a} = \begin{cases} = \frac{d\vec{v}}{dt} \\ = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \end{cases}$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

számítható!

Természetesen fordítva is érvényes, a gyorsulásvektor hely és időfüggvényének ($\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}; t)$) és a kezdő sebességnek ($\vec{v}_0$) valamint a kezdeti helyvektornak ($\vec{r}_0$) az ismeretében mind a sebesség, mind a helyvektor időfüggése kiszámítható a differenciálás fordított műveletének, az integrálásnak a segítségével az alábbiak szerint:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) \cdot dt, \qquad (1.1.10)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t}^{t} \vec{v}_0 \cdot dt + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) \cdot dt. \qquad (1.1.11)$$

Amennyiben a gyorsulás állandó, akkor a jól ismert formulákat kapjuk:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t, \qquad (1.1.12)$$

amely egyenlet a komponensek szerint az alábbi három egyenletre bontható:

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t, \tag{1.1.13}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y \cdot t, \tag{1.1.14}$$

$$v_z = v_{0z} + a_z \cdot t \tag{1.1.15}$$

Hasonlóképpen:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2, \tag{1.1.16}$$

és a három komponens egyenlet:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2, \tag{1.1.17}$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y}{2} \cdot t^2, \tag{1.1.18}$$

$$= x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2. \tag{1.1.19}$$

Itt jegyezzük meg, hogy a gyorsulás időbeli változásával azért nem foglalkozunk, mert annak nincs kitüntetett jelentősége a fizikában.

1.2. A Mechanika axiómái:

A klasszikus tudományok, mint a Matematika, a Mechanika kidolgozása során a művelőik igyekeztek úgy kialakítani azokat, hogy egy véges számú alapfeltevésből lehessen kiindulni, s a tudomány törvényeit ezekből lehessen tételek formájában levezetni. Az alapfeltevések, az ún. axiómák a tudomány eszközeivel nem bizonyíthatók, helyességüket az igazolja, ha a rájuk épített, belőlük levezetett ismeretanyag ellentmondásmentes. A Mechanika pontosan ilyen tudomány. Négy axiómája van, az első három Newtontól, a negyedik későbbi korokból származik. A Mechanika axiómáit az alábbiakban közöljük.

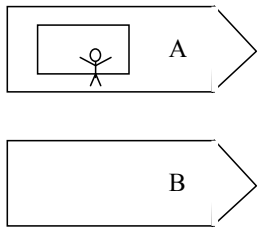
1.2.1. Az első axióma

Néha szokás Newton I. törvényének, vagy a tehetetlenség törvényének nevezni.

Van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a magára hagyott test megtartja mozgási állapotát (egyenesvonalú egyenletes mozgását, vagy nyugalmi helyzetét) mindaddig, amíg egy másik test (vagy annak hatása) annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Vegyük észre, hogy ez a kijelentés nem azt hangsúlyozza, hogy a magára hagyott test nem gyorsul, hanem azt, hogy található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben ez megtörténik. Ilyen vonatkoztatási rendszert nehéz találni. A Földhöz rögzített rendszer nem ilyen, mivel a Föld forog, ezért minden pontja gyorsulva mozog, ezért a valóban magára hagyott test nem mozog egyenes vonalban.
A Naprendszer sem ilyen, mert az is gyorsul. Az ilyen vonatkoztatási rendszert kísérletileg csak megközelíteni lehet, elérni nem. Ezért axióma ez a kijelentés, azaz a Mechanika eszközeivel nem bizonyítható.

Az axiómát néha, hibásan, úgy szokták kimondani, hogy: a magára hagyott test megtartja mozgási állapotát (egyenes vonalú egyenletes mozgását, vagy nyugalmi helyzetét) mindaddig, amíg egy másik test (vagy annak hatása) annak megváltoztatására nem kényszeríti. Könnyű találni egy rendszert, amelyben ez nem igaz. Képzeljünk el két űrhajót (1.2.1. ábra), a melyek a világűrben távol minden más test hatásától lebegnek egymástól valamilyen távolságban.



1.2.1. ábra A világűrben lebegő két űrhajó

Ha a B jelű bekapcsolja a fúvókáit, akkor a benne ülő megfigyelő azt látja, hogy a másik űrhajó gyorsulva mozog, pedig nem hat rá semmiféle erő. A B űrhajó éppen egy olyan vonatkoztatási rendszer, amelyre nem igaz az, hogy a magára hagyott test megtartja mozgási

állapotát. Az axiómából közvetlenül következik sok tétel, tartozik hozzá definíció is. Az egyik definíció:

Azokat a vonatkoztatási rendszereket, amelyekről az első axióma szól inerciarendszereknek nevezzük.
Úgy is mondhatjuk, hogy az első axióma az inerciarendszer létezését mondja ki.

Az inerciarendszerek ekvivalenciájának (egyenértékűségének) tétele:

Ha egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer akkor minden hozzá képest állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszer is az.

Másképpen:
Az egymáshoz képest állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerek ekvivalensek, bennük a fizika egyenletek azonosak, a jelenségek ugyanúgy játszódnak le.

1.2.2. A II. axióma

Az axióma kimondása előtt definiálni kell az erőt, és a tömeget.
Az **erő a mechanikai kölcsönhatás mértéke**.
A **test tömege a test tehetetlenségének a mértéke**, vagy egyes definíciók szerint. a testben foglalt anyag mennyisége.

A II. axiómakimondásához két úton juthatunk el. Az első:

Ha egy „m”-tömegű testet „$\vec{a}$" gyorsulással akarunk mozgatni, akkor ahhoz $F = m \cdot a$ **nagyságú és gyorsulásirányú erőre van szükség!**

A második:

Ha egy „m” tömegű testre „F” erővel hatunk, akkor az $a = \frac{F}{m}$ **nagyságú és az erővel megegyező irányú gyorsulással fog mozogni.**

Ez a két mondat a következő matematikai egyenlet érvényességét jelenti (ez az alak a második axióma matematikai alakja):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \qquad (1.2.1)$$

Az egyenlet eredményeképpen definiálható az erő mértékegysége:

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg}\,\frac{m}{s^2} = \text{N}[\text{Newton}].$$

A súlyerő:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g} \Rightarrow G = m \cdot g = 9{,}81 \cdot m,$$

Ebből származtatható az erő régi mértékegysége: 1 kp (kilopond) = 1 kg tömeg test súlya = 9,81N.

1.2.3. A III. axióma

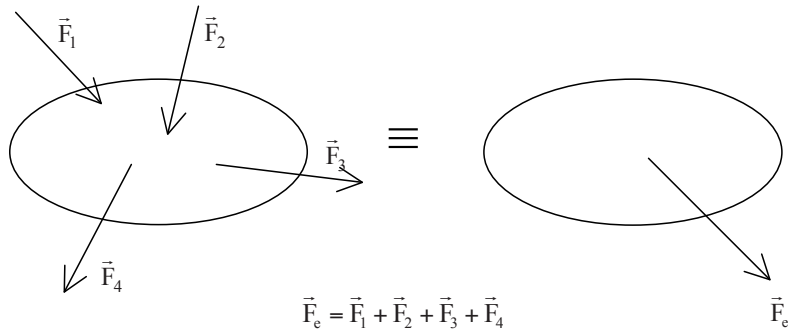
Szokásos elnevezései még: a hatás ellenhatás elve, vagy a kölcsönhatás törvénye, vagy az akció-reakció elve.
Alapvetően arról beszél, hogy az erők párosával lépnek fel, ha egy test hat a másikra, úgy az is visszahat az elsőre.

Ha egy test a másikra „$\vec{F}$” erővel hat, akkor az „$-\vec{F}$” erővel hat vissza.

1.2.4. A IV. axióma

Ha egy testre több erő hat, akkor ezek hatása helyettesíthető egy erő hatásával, ezek eredőjének hatásával.

Az axióma az 1.2.2. ábra alapján könnyen érthető.



1.2.2. ábra A erők eredőjének értelmezése

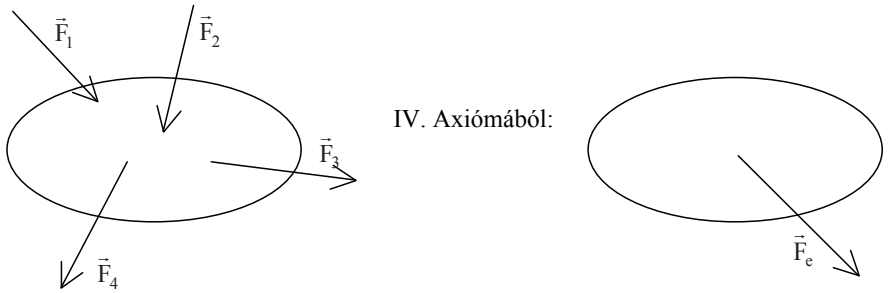
1.2.5 A dinamika alapegyenlete

Ha a negyedik és a második axiómát egymás után alkalmazzuk egy pontszerű test esetében, akkor a dinamika alapegyenletéhez jutunk az alábbiak szerint.
A IV. axióma szerint, ha egy testre, amit az 1.2.3. ábrán egy zárt görbével szemléltetünk, de pontszerűnek gondolunk több erő hat, azok vektori eredője a következő:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4,$$

vagy egy szokásosan rövidített formában n erőre:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$



IV. Axiómából:

1.2.3. ábra A dinamika alapegyenletének levezetéséhez szolgáló első lépés, az eredő erő képzése

A második axióma csak egy erőre szól, azonban már a több erőből a negyedik axióma szerint egyet állítottunk elő (az eredőt), és így alkalmazhatjuk a rendszerre azt.

$$\vec{F}_e = m \cdot \vec{a} . \qquad (1.2.2)$$

Ez az egyenlet a Dinamika Alapegyenlete.
Az 1.2.2 vektori egyenlet az alábbiak szerint ekvivalens három skalár, ún. komponens egyenlettel.

$$F_x = m \cdot a_x$$
$$F_y = m \cdot a_y .$$
$$F_z = m \cdot a_z$$

A Dinamika Alapegyenletéből következik az egyensúly fogalma is. Egy pontszerű test egyensúlyban van, ha a ráható erők eredője zérus.

A Dinamika Alapegyenletéből következik az egyensúly fogalma is. Egy pontszerű test egyensúlyban van, ha a ráható erők eredője zérus.

$$\vec{F}_e = 0$$
$$\Downarrow$$
$$0 = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{v} = \text{áll.}$$

Ha egy pontszerű test egyensúlyban van, akkor az vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

A mechanika axiómái I.



Sir Isaac Newton (1643-1727)

Axiómák:

olyan a tudomány eszközeivel nem bizonyítható állítások, amelyeket bizonyítás nélkül elfogadunk. Az axiómák helyesek, ha a rájuk épített tudomány ellentmondás mentes és helyesen írja le a valóságot.

Az axiómarendszerekkel szemben támasztott három alapkövetelmény:

- a *teljesség*,

- az *ellentmondásmentesség*

- egyes axiómák *függetlensége*.

Mechanika: négy axiómára épül

Tehetetlenség törvénye:
Minden test megtartja nyugalmi helyzetét vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig amíg egy másik test, vagy mező annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Axióma?

ellenpélda: hullámvasút



További ellenpéldák: fékező, kanyarodó járművek, centrifuga

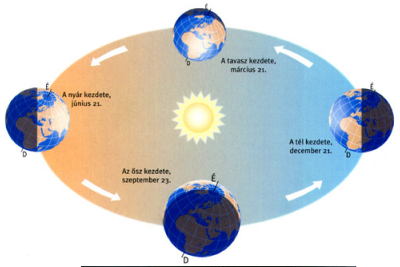
I. Axióma:

Van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a magára hagyott test megtartja mozgási állapotát (egyenes vonalú egyenletes mozgását, vagy nyugalmi helyzetét) mindaddig, amíg egy másik test (vagy annak hatása) annak megváltoztatására nem kényszeríti.

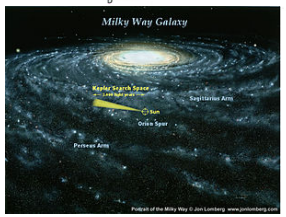
Máshogyan: **Van olyan vonatkoztatási rendszer, amely nem gyorsul.**

Találjunk ilyen vonatkoztatási rendszert!

A Föld?



A Nap?



Az ilyen vonatkoztatási rendszert kísérletileg csak megközelíteni lehet, elérni nem. Ezért axióma ez a kijelentés, azaz a Mechanika eszközeivel nem bizonyítható.

Azokat a vonatkoztatási rendszereket, amelyekről az első axióma szól **inerciarendszereknek** nevezzük.

Az inerciarendszerek ekvivalenciájának (egyenértékűségének) tétele:

Ha egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer akkor minden hozzá képest állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszer is az.

Másképpen:
Az egymáshoz képest állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerek ekvivalensek, bennük a fizikai egyenletek azonosak, a jelenségek ugyanúgy játszódnak le. *(Galilei-féle relativitási elv)*

A mechanika axiómái II.



Sir Isaac Newton (1643-1727)

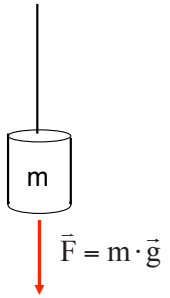
Súly? Tömeg?



A test tömege: (m) a test tehetetlenségének a mértéke, vagy a testben foglalt anyag mennyisége.

A tömeg egysége: $[m]$ =kg

Erő: vektormennyiség, jele $\vec{F}$
a mechanikai kölcsönhatás mértéke.



A súlyerő: $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$ ahol $g = 9{,}81 \frac{m}{sec^2}$

Az erő mértékegysége: $[\vec{F}] = N[Newton]$

II. Axióma:

Ha egy m tömegű testre $\vec{F}$ erő hat, akkor az

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

nagyságú és az erővel megegyező irányú gyorsulással fog mozogni.

Máshogyan fogalmazva:

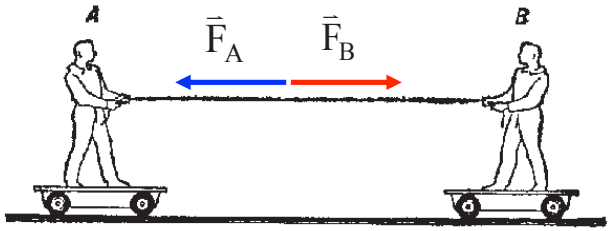
Ha egy m tömegű testet $\vec{a}$ gyorsulással akarunk mozgatni, akkor ahhoz

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

nagyságú és gyorsulásirányú erőre van szükség!

III. Axióma: hatás-ellenhatás törvénye

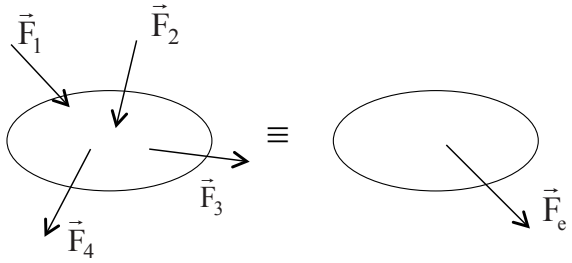
Ha egy test a másikra $\vec{F}$ erővel hat, akkor a másik $-\vec{F}$ erővel hat vissza.



$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

IV. Axióma: (szuperpozíció elve, erőhatások függetlenségének elve)

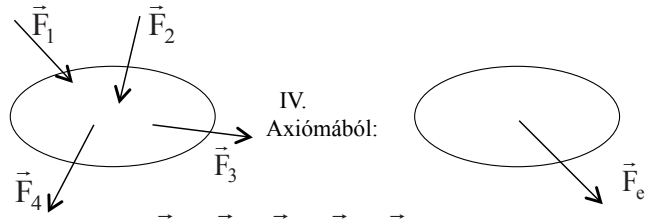
Ha egy testre több erő hat, akkor ezek hatása helyettesíthető egyetlen erőével, ezek eredőjével.



$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

A negyedik és a második axióma egymás utáni alkalmazásával a Dinamika Alapegyenletéhez jutunk:

IV. axióma:



$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

II. axióma: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

A Dinamika Alapegyenlete: $\vec{F}_e = m \cdot \vec{a}$

Egyensúly:

Egy pontszerű test egyensúlyban van, ha a ráható erők eredője zérus.

Ha $\vec{F}_e = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot \vec{a} = 0$

azaz $\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{v} = állandó$

Ha tehát egy egy pontszerű testre ható erők eredője nulla, akkor az vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, azaz egyensúlyban van.

Az egyetlen gyorsulásmentes mozgás az egyenes vonalú egyenletes mozgás!

Az erők osztályozása

- Szabaderők

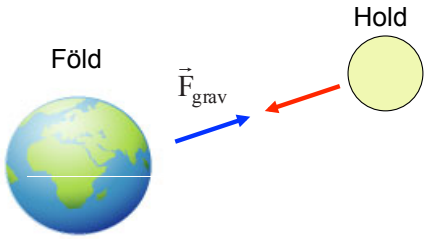
- Kényszererők

- Súrlódási erők

1. Szabaderők

A szabaderők szabadon, erőtörvényeknek megfelelően fejtik ki hatásukat:

- gravitációs erő
- rúgóerő
- mágneses erő
- elektromos erő
- általunk megadott erő

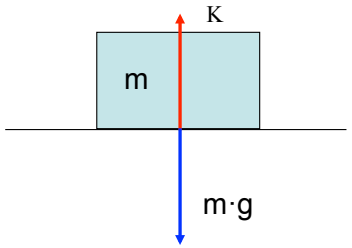


Kényszererők

A kényszererők akkor lépnek fel, ha van valamilyen szabaderő és valamilyen kényszerfeltétel.

Felületi kényszer:
Ebben az esetben a kényszer egy felület, ami arra kényszeríti a testet, hogy a szabaderő hatására a felületen mozogjon.

Vízszintes felület esetén:



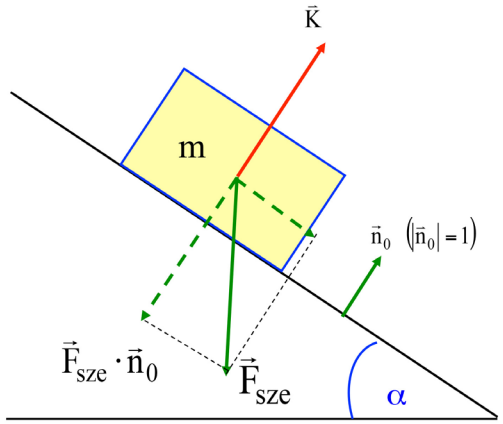
Egyensúly esetén K= m·g

Ez az erő a szabaderő következtében fellépő reakcióerő, ami merőleges a felületre a szabaderő felületre merőleges komponensének ellenerejeként.

Lejtő esetén:

A kényszererő nagysága itt is a szabaderő felületre merőleges komponensével egyenlő, iránya pedig a felületre merőleges egységvektor iránya.

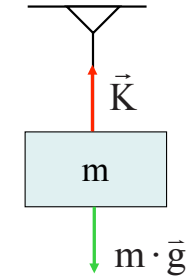
$$\vec{K} = -(\vec{F}_{sze}\vec{n}_0)\vec{n}_0$$



Kötél kényszer:

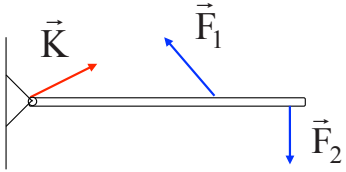
A kényszererő mindig kötélirányú

$$\vec{K} = -m \cdot \vec{g}$$



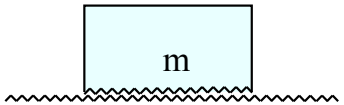
Csukló kényszer:

nem szükségképpen rúdirányú



Súrlódási erők

A súrlódási erő az egymással érintkező testek felületek egyenetlenségeiből fakad



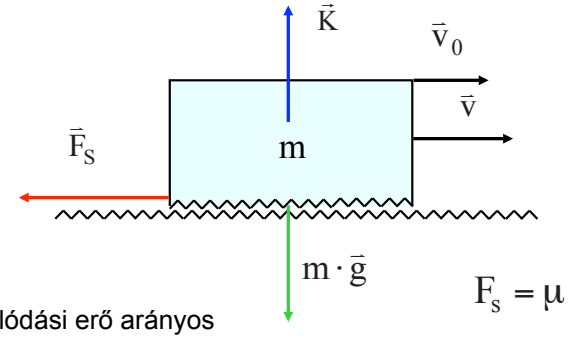
- mozgási súrlódási erő: $\vec{F}_S$ a test mozgása során lép fel

- nyugalmi súrlódási erő: $\vec{F}_{S0}$ a test nyugalmi helyzetében hat

Előnyei: járás, járművek fékezése

Hátrányai: gépek, alkatrészek kopása, energia veszteség, melegedés

Mozgási súrlódási erő



A mozgási súrlódási erő arányos a testet a felülethez nyomó kényszererővel, valamint a felületekre jellemző állandóval.

$$F_s = \mu \cdot K$$

Legyen $|\vec{v}_0| = 1$

ekkor $\vec{F}_s = -\mu \cdot K \cdot \vec{v}_0$

mozgási súrlódási tényező: $\mu < 1$

A mozgási súrlódási erő csökkenti a mozgási energiát (disszipatív erő).

A nyugalmi súrlódási erő:

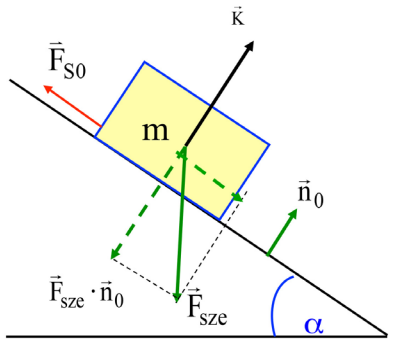
Ha van olyan szabaderő, amelynek a felülettel párhuzamos komponense nem zérus, úgy amíg a test el nem mozdul fellép nyugalmi súrlódási erő, ami az említett erőkomponenssel ellentétes irányú

Ez az erő, amíg el nem éri a maximális értékét, mindig akkora hogy éppen kompenzálja a szabaderő felülettel párhuzamos komponensét, azaz a helyén tartsa a testet.

Maximális értéke:

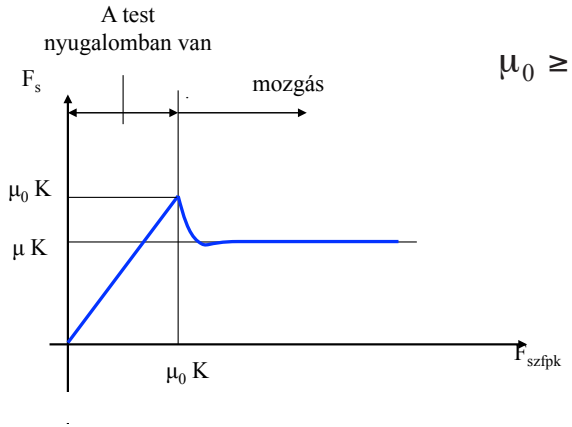
$$F_{S0max} = \mu_0 \cdot K$$

ahol μ_0 a nyugalmi súrlódási együttható



Összefoglaló értelmezés:

Amíg a szabad erők eredőjének felülete párhuzamos komponense kisebb, mint $\mu_0 \cdot k$, a test nyugalomban marad. Addig a nyugalmi súrlódási erő, ezzel az erővel egyezik meg. Amikor ez az erő meghaladja a $\mu_0 \cdot k$ -t a test megindul és gyorsulva mozog, a súrlódási erő lecsökken μK értékre



$$\mu_0 \geq \mu$$

1.3. Az erők osztályozása

1.3.1. Szabad erők

A szabaderők szabadon, erőtörvényeknek megfelelően fejti ki hatásukat.

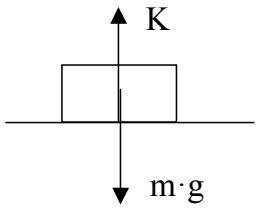
- nehézségi erő
- gravitációs erő
- rúgóerő
- mágneses erő
- elektromos erő
- az általunk megadott erő.

Ezek az erők mindenféleképpen hatnak.

1.3.2. Kényszererők

A kényszererők csak akkor lépnek fel, ha van valamilyen szabaderő és valamilyen kényszerfeltétel.

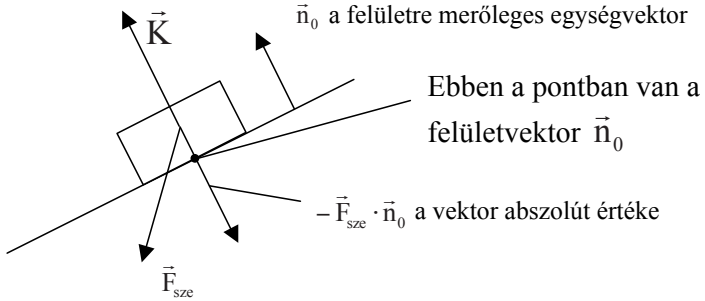
Felületi kényszer:
Esetében a kényszer egy felület, ami arra kényszeríti a testestet, hogy a szabaderő hatására a felületen mozogjon. Ez nyílván csak úgy lehetséges, ha a felület valamilyen erővel hat a testre. Ez az erő a szabaderő következtében fellépő reakcióerő, ami merőleges a felületre a szabaderő felületre merőleges komponensének ellenerejeként. A legegyszerűbb példa felületi kényszerőre az 1.3.1. ábrán látszik. Egy vízszintes felületre helyezett testre hat a nehézségi erő, de a test mégis egyensúlyban van. Ez csak úgy lehetséges, ha a testre a nehézségi erővel megegyező nagyságú, azzal ellentétes erő hat. Ez az erő a K kényszererő. Vegyük észre, hogy a kényszererő a felületen hat, a súlyerő a test belsejébe koncentrálható. Pontszerű test esetében természetesen mindkettő ugyanaz a pont.



Egyensúly esetén K= m·g .

1.3.1. ábra Kényszererő vízszintes felületen

Természetesen, ha a felület nem vízszintes, és a szabaderő, illetve általánosan a szabderők eredője ($\vec{F}_{sze}$) nem merőleges a felületre, akkor bonyolultabb a helyzet, amit az 1.3.2. ábrán mutatunk be. Az ábrán egy sík felületet rajzoltunk, de az ott berajzolt erők bármilyen görbületnél hasonlóan szerkeszthetők, csak az érintősíkkal kell helyettesíteni a vizsgált pontban a kérdéses felületet. Az $\vec{n}_0$ normális egységvektort is erre a pontra kell meghatározni.

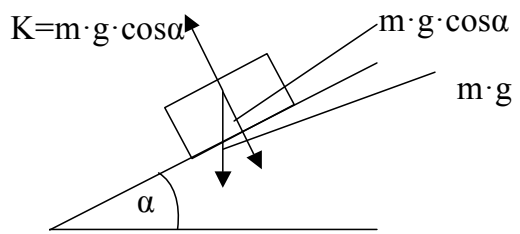


1.3.2. ábra A felületi kényszererő meghatározása általában

A szabaderők eredője a felületre merőleges komponensével nyomja azt. Ennek a komponensnek a nagyságát a $-\vec{F}_{sze}\cdot\vec{n}_0$ kifejezés adja. A negatív előjel oka, hogy a szabaderők eredője és a felület normálvektora ellentétes irányba mutat, azaz a skaláris szorzatuk negatív szám. Pozitív érték pedig -1-el való szorzással lesz belőle. A kényszererő nagysága is ez az érték, iránya pedig a felületre merőleges egységvektor iránya. Így a kényszererő vektora:

$$\vec{K} = (-\vec{F}_{sze}\cdot\vec{n}_0)\vec{n}_0. \qquad (1.3.1)$$

Ha egy egyszerűbb példát keresünk, talán az alábbi ábra (1.3.3. ábra) ad erre lehetőséget. Legyen a felület egy lejtő, és egy test legyen rajta úgy, hogy a súrlódást hanyagoljuk el.

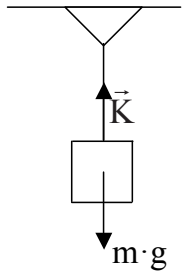


1.3.3. ábra Lejtőn mozgó testre ható kényszererő ha csak a súlyerő hat mint szabaderő

Látható, hogy a kényszererő most megegyezik a súlyerő lejtőre merőleges komponensével.

Kötél kényszer:

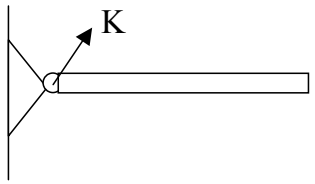
Ebben az esetben a kényszererő mindig kötélirányú (1.3.4. ábra).



1.3.4. ábra A kötélkényszer

Csukló kényszer:

A kényszererőre ebben az esetben nem tudunk biztosat csupán annyit, hogy a csuklóban hat (1.3.5. ábra).



1.3.5. ábra A csuklókényszer

1.3.3. Súrlódási erő:

Kétféle súrlódási erőről beszélünk, az egyik a test mozgása során lép fel, ennek megfelelően mozgási súrlódási erőnek nevezzük. A másik a test nyugalmi helyzetében hat, s a neve nyugalmi súrlódási erő. Mindkét esetben érvényes, hogy érintkező felületek és a felületeket összenyomó erő (amit a kényszererővel azonosíthatunk) szükséges a súrlódási erő létrejöttéhez. Ugyancsak mindkét esetben elmondható, hogy a vizsgált test és a felület, amelyiken az elhelyezkedik nem tökéletes síkokként, vagy egyéb párhuzamos felületek módjára érintkezik, hanem legjobb esetben is mikroszkopikus egyenetlenségekkel, amelyeket felnagyítva az 1.3.6. ábrán mutatunk be. Az ábra alapján érthető, hogy az ábrán egyenes



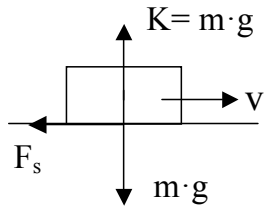
Felületek egymással való érintkezése

1.3.6. Két felület érintkező részének felnagyított képe

vonallal ábrázolt ideális felszínhez képest párhuzamos elmozduláshoz az egyenetlenségeket át kell ugrani, vagy le kell gyalulni. Ezekhez a mozgásokhoz pedig erő kell, ami arányos kell hogy legyen a felületeket összenyomó erővel.

A mozgási súrlódási erő:

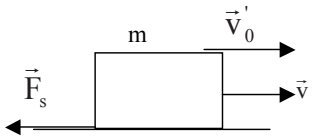
A Coulomb szerint, ha a felületek között nincs kenőanyag, és nincs vonzó erő, azaz a súrlódás száraz, a mozgást akadályozó ún. mozgási súrlódási erő arányos a felületeket összenyomó erővel, amit a kényszererővel azonosítunk annak hangsúlyozására, hogy súrlódási erő csak akkor lép fel, ha van kényszerfeltétel, és erő, amit ugyan a szabaderők indukálnak, de a kényszererőn keresztül. Az arányossági tényezőt μ-vel jelöljük és mozgási súrlódási tényezőnek nevezzük. Így a (Coulomb-féle száraz) mozgási súrlódási erő az 1.3.7. ábra alapján:



1.3.7. ábra A mozgási súrlódási erő értelmezése

$$F_s = \mu \cdot K. \qquad (1.3.2)$$

Ahol μ: a mozgási súrlódási együttható az érintkező felületek anyagi minőségétől függ, a nagyságuktól nem. Nem igazi anyag állandó, 1-nél kisebb szám. Vektori értelmezését az 1.3.8. ábra alapján értelmezhetjük.



$\vec{v}_0'$: a sebesség vektorral megegyező irányú egységvektor, mértékegysége nincs.

1.3.8. ábra A mozgási súrlódási erő vektorának értelmezése

Így:

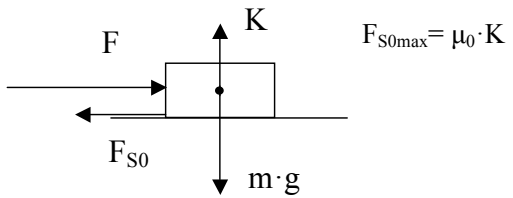
$$\vec{F}_s = -\mu \cdot K \cdot \vec{v}_0' . \qquad (1.3.3)$$

A súrlódási erő csökkenti a mozgási energiát (disszipatív erő).

A nyugalmi súrlódási erő:

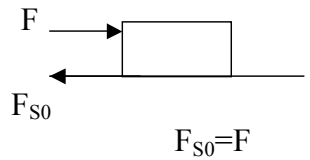
Ha a test a felülethez képest nyugalomban van, és az is nyugszik az inerciarendszerhez képest, akkor a súrlódási erő zérus. Ha van olyan szabaderő, amelynek a felülettel párhuzamos komponense nem zérus, úgy amíg a test el nem mozdul fellép nyugalmi súrlódási erő, ami az említett erőkomponenssel ellentétes irányú, és maximális értéke:

$$F_{S0\,max} = \mu_0 \cdot K . \qquad (1.3.4)$$



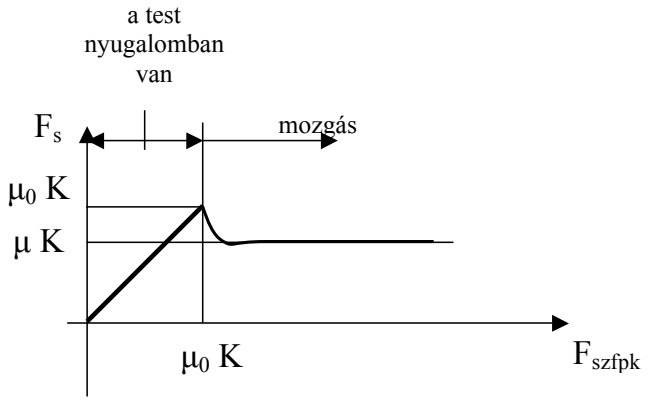
1.3.9. ábra A nyugalmi súrlódási erő értelmezése

Ha az F erő nem éri el a nyugalmi súrlódási erő maximális értékét, a test nyugalomban marad, és a nyugalmi súrlódási erő megegyezik az F erővel (1.3.10. ábra).



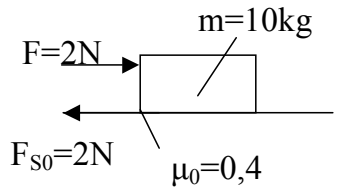
1.3.10. ábra A nyugalomban levő testre ható súrlódási erő értelmezése

A súrlódási erők összefoglaló értelmezéséhez legyen F_{szfpk}: szabad erők eredőjének felülettel párhuzamos komponense.
Amíg a szabad erők eredőjének felülete párhuzamos komponense kisebb, mint $\mu_0 \cdot K$, a test nyugalomban marad. Addig a nyugalmi súrlódási erő, ezzel az erővel egyezik meg. Amikor ez az erő meghaladja a $\mu_0 \cdot K$-t a test megindul és gyorsulva mozog, a súrlódási erő lecsökken μK értékre (1.3.11. ábra).
Ha a felületeket összenyomó erőhöz valamilyen vonzó erő is társul, akkor az 1.3.2 és 1.3.4 egyenletek nem lesznek érvényesek, a jelenség igen bonyolulttá válik. Csak a folyadékok mechanikája és a kvantummechanika törvényszerűségeinek felhasználása adhat kvantitatív magyarázatot a jelenségre.



1.3.11. ábra A mozgási és a nyugalmi súrlódási erő változása a szabaderők felülettel párhuzamos komponensének függvényében

A nyugalmi súrlódási erőre egy egyszerű feladatot mutatunk be az 1.3.12. ábrán.



1.3.12. ábra Egy feladat a nyugalmi súrlódási erő kiszámítására

Sokszor, hibásan olyan megoldás születik, hogy a nyugalmi súrlódási erő $\mu_0 \cdot K$, azonban ennek értéke:

$$F_{S0max} = \mu_0 \cdot K = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 9{,}81 = 39{,}24N,$$

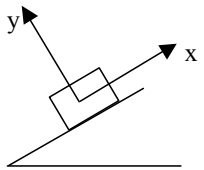
ami jóval nagyobb, mint F. Így érthető, hogy a test nem mozdul el, (hátrafelé semmiképpen sem gyorsul, amikor előre nyomjuk), és ahhoz, hogy az egyensúly fennálljon, a nyugalmi súrlódási erő értéke megegyezik F értékével. Ez a feladat is azt mutatja, hogy F_{S0} értéke 0 és $\mu_0 \cdot K$ érték között változik.

A dinamikai feladatok megoldása általában

A dinamikai feladatok megoldásának van néhány olyan módszere és eljárása, amelyeket általánosan is használhatunk. Ezekből mutatunk be egy példát az alábbiakban pontokba szedve.

1. Ábrát készítünk.
2. Berajzoljuk az ismert erőket.
3. Meghatározzuk a vonatkoztatási vagy koordináta rendszert.

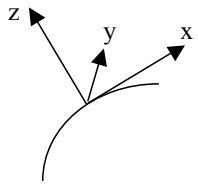
Egy lejtő esetében célszerű az egyik tengelyt azzal párhuzamosan, a másikat pedig arra merőlegesen felvenni (1.3.13. ábra).



1.3.13. ábra Célszerűen felvett vonatkoztatási rendszer lejtőn mozgó test esetében

Bizonyos esetekben célszerű a testtel együtt mozgó vonatkoztatási rendszert felvenni. Ezt kísérő triédernek, vagy a pálya természetes koordináta rendszerének nevezzük (1.3.14. ábra)

Kísérő triéder: a pálya természetes koordináta rendszere



1.3.14. ábra A kísérő triéder, vagy a pálya természetes koordináta rendszere

1. Meghatározzuk az $\vec{n}_0, \vec{v}_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0'$ egységvektorokat (bonyolultabb felület esetében célszerű ezekkel dolgozni).
2. Meghatározzuk a szabad erők eredőjét: $\vec{F}_{sze}$
3. Meghatározzuk a kényszererőt: $\vec{K} = -(\vec{F}_{sze}\vec{n}_0)\vec{n}_0$
4. Meghatározzuk a súrlódási erőt: $\vec{F}_s = -(\mu \cdot \vec{K})\vec{v}_0'$

5. Meghatározzuk az eredő erőt: $\vec{F}_e = \vec{F}_{sze} + \vec{K} + \vec{F}_s$: ez az egyenlet mindenképpen vektori egyenlet, a három erő iránya nem egyezik meg $\vec{K}$ és $\vec{F}_s$ vektorok merőlegesek egymásra!!!
6. Felírjuk a dinamika alapegyenletét és meghatározzuk a gyorsulást: $\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$
7. Meghatározzuk a sebességet:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt \quad \text{mert} \quad \left(\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

8. Meghatározzuk az $\vec{r}$ helyvektort:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt = \left(\vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}_0 dt + \int_0^t \int_0^t \vec{a}(t)dt\right) \quad \text{itt:} \quad \begin{array}{l} t = o \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 \\ t = t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v} \end{array}$$

A test pályáját ismerjük, ha ismerjük az $\vec{r}(t)$ vektor skalár függvényt.

Egy dinamikai feladat természetesen úgy is kezdődhet, hogy a helyvektor időfüggését ismerjük. Ekkor fordítva járunk el, abból határozzuk meg differenciálással a sebesség vektort, majd abból a gyorsulást. Más kezdőpont is előfordulhat, az első négy pontban meghatározott feladatok azonban mindig először végzendők el.

A dinamikai feladatok megoldása általában

A dinamikai feladatok megoldásának van néhány olyan módszere és eljárása, amelyeket általánosan is használhatunk.

1. Ismerjük a testre ható erőket, és ezekből következtetünk a test mozgására

2. Ismerjük a test mozgását, ebből következtetünk a testre ható erőkre

1.Ábrát készítünk

2.Berajzoljuk az ismert erőket.

3.Meghatározzuk a vonatkoztatási vagy koordináta rendszert.

4.Meghatározzuk az egységvektorokat $\vec{n}_0, \vec{v}'_0$

5.Meghatározzuk a szabad erők eredőjét

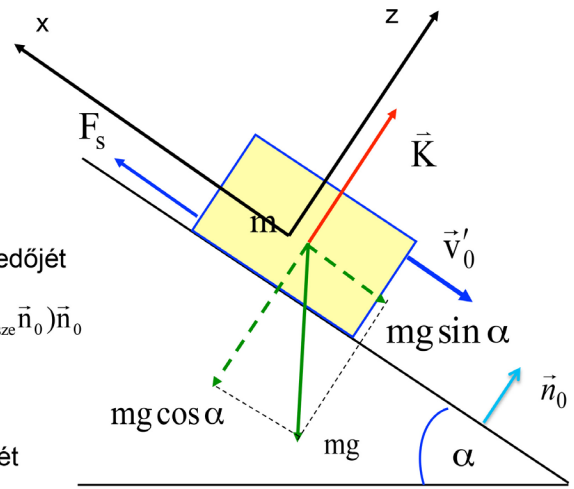
6.Ezután a kényszererőt: $\vec{K} = -(\vec{F}_{sze}\vec{n}_0)\vec{n}_0$

7. Meghatározzuk a súrlódási erőt:

$$\vec{F}_s = -(\mu \cdot \vec{K})\vec{v}'_0$$

8. Felírjuk a dinamika alapegyenletét és meghatározzuk a gyorsulást:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$$



7.Meghatározzuk a sebességet: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt \qquad \left(\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$

8.Meghatározzuk az $\vec{r}$ helyvektort:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt = \left(\vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}_0 dt + \int_0^t\int_0^t \vec{a}(t)dt\right)$$

$t = o \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0$

$t = t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}$

A test pályáját ismerjük, ha ismerjük az $\vec{r}(t)$ vektor skalár függvényt.

Amennyiben a helyvektor időfüggését ismerjük, fordítva járunk el, abból határozzuk meg differenciálással a sebesség vektort, majd a sebességvektorból a gyorsulást, ebből következtethetünk a testre ható erőkre.

I.4. A különböző mozgások értelmezése

Az alábbiakban az egyes nevezetes mozgásokat értelmezzük a dinamika alapegyenletének megoldásával.

1.4.1. Egyenes vonalú egyenletes mozgás

Ha a testre ható erők eredője zérus, akkor $\vec{a} = 0$ és $\vec{v} = \text{állandó}$, $\vec{v} = \vec{v}_0$. Ebben az esetben egyenes vonalú egyenletes mozgásról beszélünk. A megfelelő egyenleteket az alábbiakban mutatjuk be:

$$\vec{r} = \vec{v} \cdot t ,$$

ha a mérés kezdőpontja a vonatkoztatási rendszer origója, és

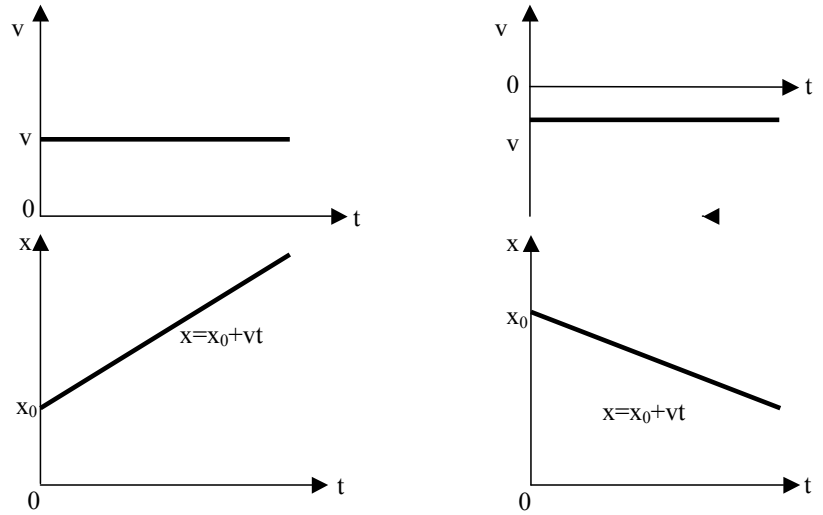
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t, \qquad (1.4.1)$$

ha nem. A középiskolában tanult analóg egyenletek az alábbiak:

$$s = v \cdot t,$$
$$s = s_0 + v \cdot t.$$

Hasonló egyenleteket kapunk akkor is, ha a koordináta rendszerünket úgy tudjuk felvenni, hogy a mozgás valamelyik, mondjuk az x tengely irányába esik.

Ebben az esetben a sebesség-idő és az út-idő diagramokat az 1.4.1. ábrán láthatjuk.



1.4.1. ábra Egyenes vonalú egyenletes mozgás sebesség-idő és út-idő diagramjai pozitív és negatív sebesség esetében

1.4.2. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

Ha a pontszerű testre ható eredő erő zérus, akkor $\vec{a}$ = állandó és ha $\vec{a} // \vec{v}_0$ akkor egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásról beszélünk. A sebességvektor általában az alábbi egyenlet szerint számolható ki:

$$\left(\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt \right),$$

de ha a gyorsulás állandó, akkor az alábbi formulára egyszerűsödik a képlet:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t. \qquad (1.4.2)$$

A helyvektor:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2. \qquad (1.4.3)$$

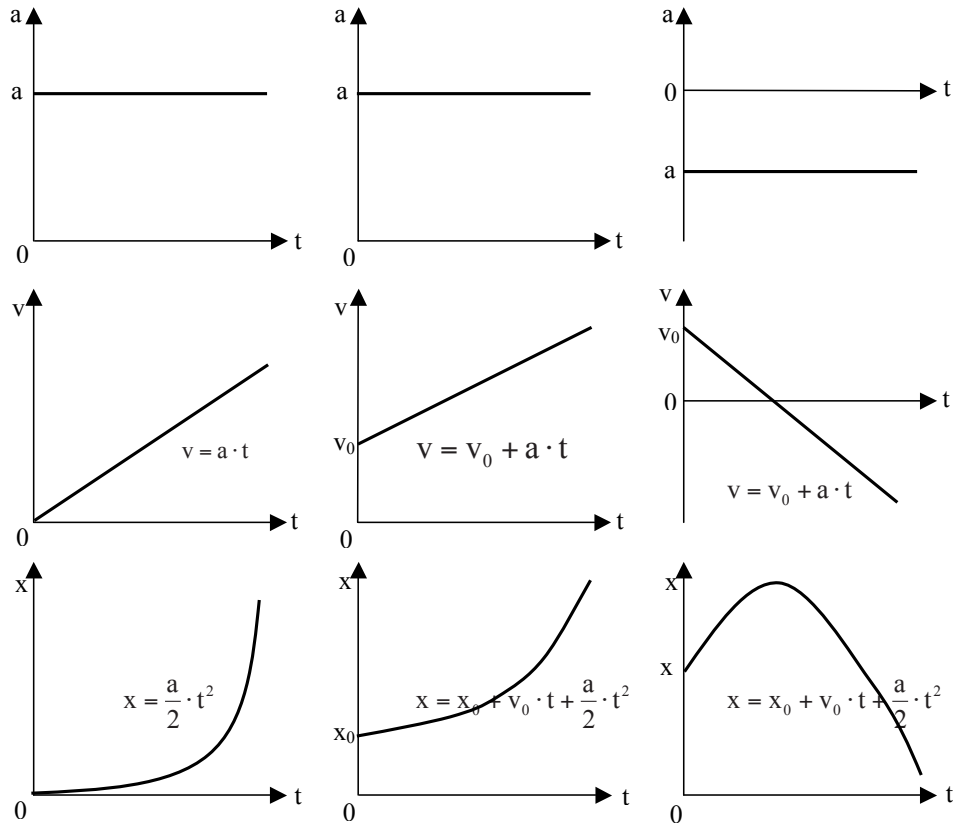
Ha van lehetőség a vonatkoztatási rendszert úgy felvenni, hogy a mozgás az egyik tengely irányában történjen, a vektor jeleket elhagyhatjuk, a vektortulajdonságot az előjel alkalmazásával adhatjuk meg.

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t \\ r &= r_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{skalárisan}$$

Az utóbbi egyenletet a középiskolában az alábbi alakban ismerhettük meg:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

A gyorsulás-idő, a sebesség idő, és út-idő diagramokat az 1.4.2. ábrán mutatjuk be.



1.4.2. ábra Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás gyorsulás-idő, sebesség-idő és út-idő diagramjai különböző kezdeti paraméterek esetében

A különböző mozgások értelmezése

Egyenes vonalú mozgások

Egyenes vonalú egyenletes mozgás:

Dinamikai feltétel: $\vec{F}_e = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 = \text{állandó}$

$\vec{v}$ *iránya* állandó: **egyenes vonalú** mozgás

$\vec{v}$ *nagysága* állandó: **egyenletes** mozgás

Ekkor a helyvektor: $\vec{r} = \vec{v} \cdot t$

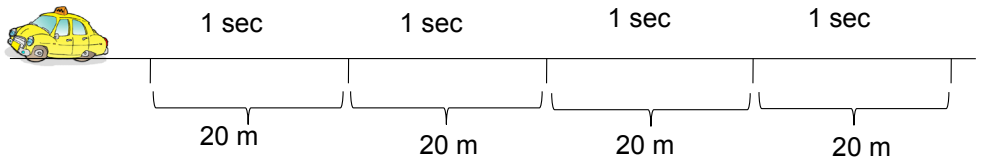
illetve $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$

Ha a koordináta rendszerünket úgy vesszük fel, hogy a mozgás az x tengely irányába esik:

$$s = v \cdot t$$

$$s = s_0 + v \cdot t$$

Egyenes vonalú egyenletes mozgást végez egy test, ha pályája egyenes, és azonos idők alatt azonos utakat tesz meg, bármilyen rövidek is az útszakaszok.



t(sec)	1	2	3	4
s (m)	20	40	60	80
V (m/sec)	**20**	**20**	**20**	**20**

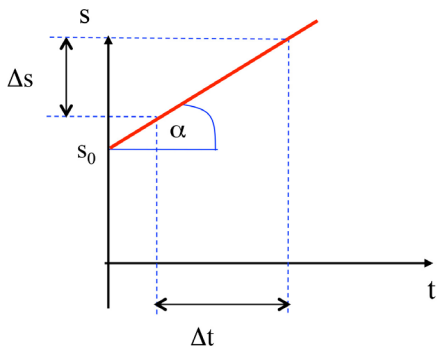
$s \sim t$

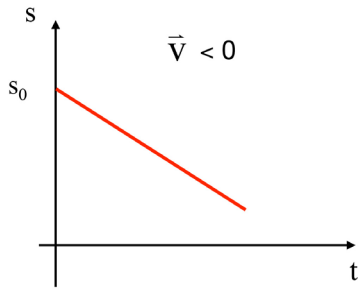
$v = \text{állandó}$

$s = v \cdot t$

A mozgás diagramjai:

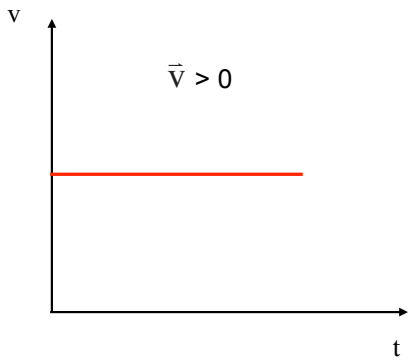
Út-idő diagram: $s = s_0 + v \cdot t$ Negatív sebességvektor esetén



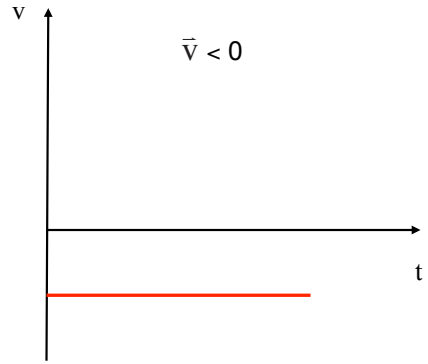


Ekkor a sebességvektor nagysága: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $v \neq tg\alpha$

A sebesség-idő diagram:

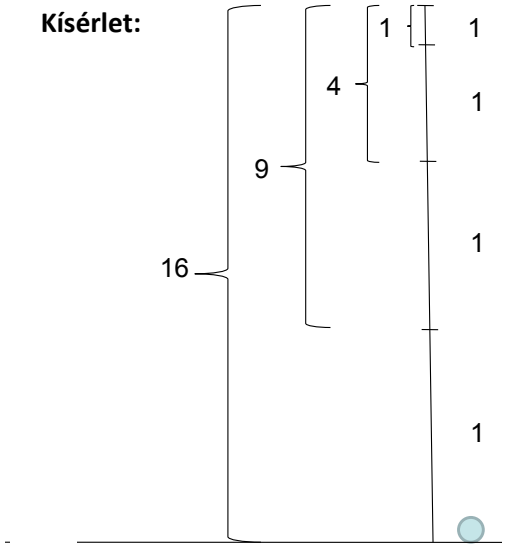


Negatív sebességvektor esetén:



Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

Kísérlet:



t	1	2	3	4
s	1	4	9	16
v	1	2	3	4

A szabadon eső test által megtett út az idő négyzetével arányos:

$$s \sim t^2$$

A sebesség az idővel arányosan nő:

$$v \sim t$$

A sebesség időegység alatti változása:

$$\frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{v_3 - v_2}{\Delta t} = \frac{v_4 - v_3}{\Delta t} = a = \text{állandó}$$

Dinamikai feltétel: $\vec{F}_e \parallel \vec{v}_0$ valamint $\vec{F}_e = \text{áll.} \Rightarrow \vec{a} = \text{áll.}$

Ha a $\vec{v}_0$ kezdősebesség irányát választjuk pozitívnak:

$\vec{a} > 0$ **gyorsuló mozgás**

$\vec{a} < 0$ **lassuló mozgás**

Ekkor, mivel a gyorsulás állandó, az alábbi formula adja meg a sebességet:

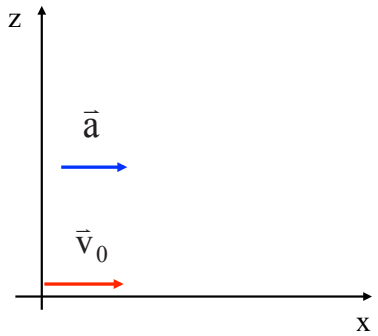
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

A helyvektor:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2$$

Egy tömegpont egyenes vonalú egyenletesen változó mozgást végez, ha pályája egyenes, és a megtett út az idő második hatványával arányosan változik.

Ha a vonatkoztatási rendszert úgy vesszük fel, hogy a mozgás az egyik tengely irányában történjen, a vektor jeleket elhagyhatjuk, a vektortulajdonságot az előjel alkalmazásával adhatjuk meg.



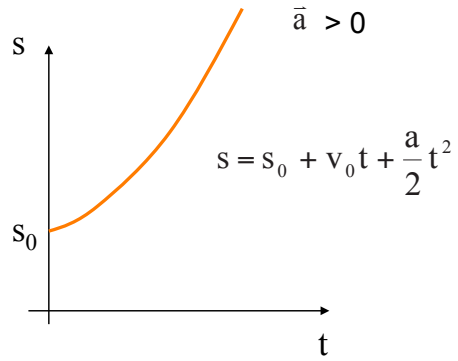
Skaláris egyenletek:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

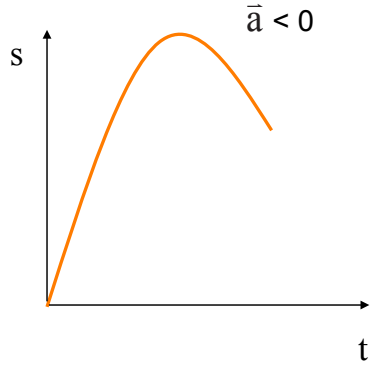
$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

A mozgás diagramjai:

Út-idő diagram: $s \sim t^2$

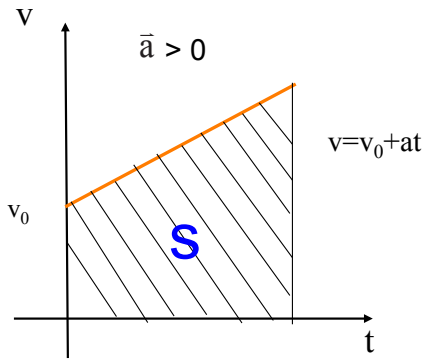


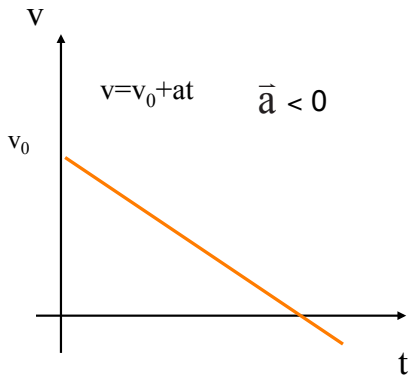
Negatív gyorsulás esetén



Sebesség-idő diagram:

Ha a gyorsulás negatív, a sebesség csökken

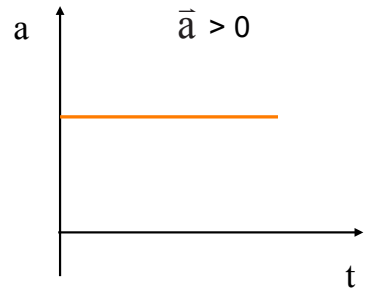


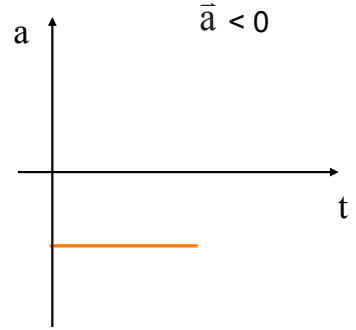


A sebesség-idő grafikon alatti terület a megtett úttal egyenlő

Gyorsulás-idő diagram:

Negatív gyorsulás esetén



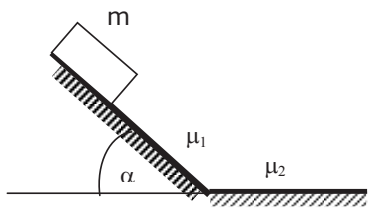


Beadandó feladat

1. Egy építkezésen ábrán látható 5m magas lejtőről egy m = 3 kg tömegű téglát kezdősebesség nélkül csúsztatnak le.

$\alpha = 45^{o}$
$\mu_1 = 0.15$
$\mu_2 = 0.25$

a.) Mekkora a tégla sebessége a lejtő alján?
b.) Mekkora út megtétele után áll meg a tégla?
c.) Mekkora a tégla gyorsulása a lejtőn és a vízszintes talajon?
d.) Rajzolja fel az út-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő grafikonokat a mozgás teljes idejére!



2. fejezet

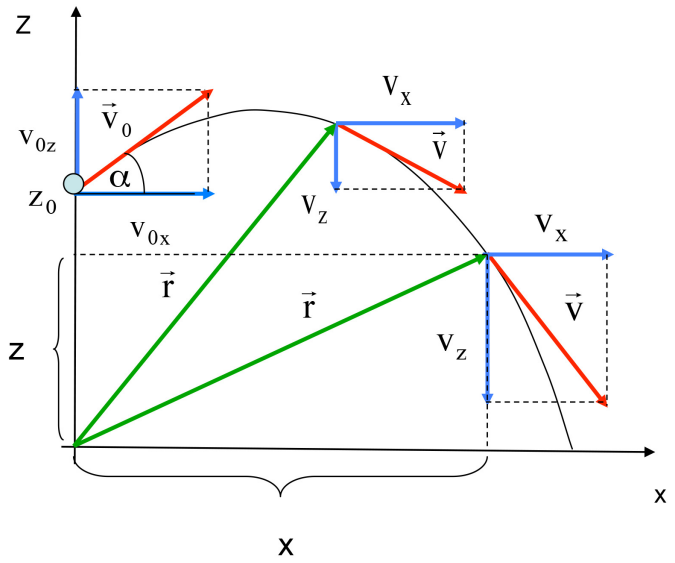
Görbe vonalú mozgások

Hajítások

Ha az eredő erő állandó, akkor $\vec{a} = \text{állandó}$ és ha $\vec{F}_e$ és $\vec{a} \angle \vec{v}_0$

akkor nem egyenes vonalú a mozgás, hanem egy a gyorsulásvektor és a kezdősebesség vektor által kifeszített síkon levő síkgörbe mentén mozog a test.

A test pályája egy parabola.
A jelenséget hajításnak nevezzük.



A mozgást leíró vektori egyenletek:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2$$

A skaláris egyenletek a sebességre:

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

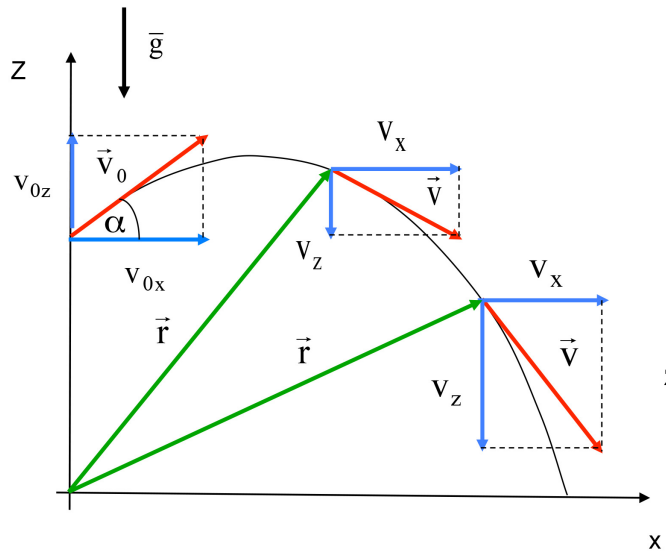
$$v_z = v_{0z} + a_z \cdot t$$

A helyzetre: $\vec{r}(x, z)$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2$$

$$z = z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{a_z}{2} \cdot t^2$$

Ha a vonatkoztatási rendszert úgy vesszük fel, hogy a gyorsulásvektor az egyik, mondjuk z tengely irányába essen, és abban „lefele” mutasson, a középiskolában tanult hajítási egyenleteket kapjuk:



$$a_x = 0, \quad a_z = -g$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_z = v_{0z} + a \cdot t = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t = x_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t$$

$$z = z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2$$

Vizsgáljuk meg a mozgás pályáját!

Legyen a példa szerint $x_0 = 0$

Ekkor a helyvektor vízszintes koordinátája: $x = v_0 \sin\alpha \cdot t$

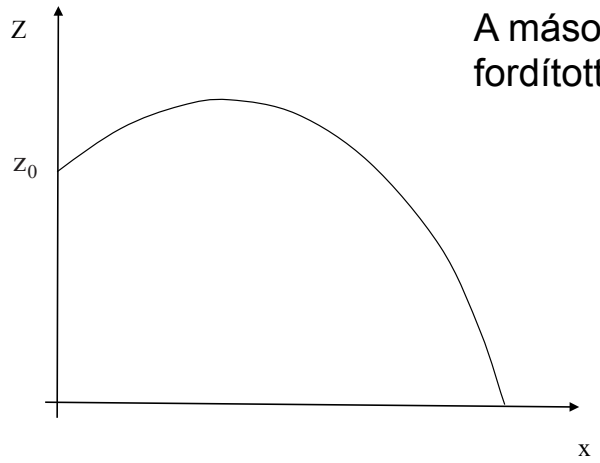
Ebből az időt kifejezve: $t = \dfrac{x}{v_0 \sin\alpha}$

Behelyettesítve a z koordináta egyenletébe:

$$z = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \sin\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \sin\alpha}\right)^2$$

Egyszerűbb alakban: $z = z_0 + x - \dfrac{g}{2}\dfrac{x^2}{v_0^{\,2}\sin^2\alpha}$

A pályagörbe tehát: $z = z_0 + x - k \cdot x^2$

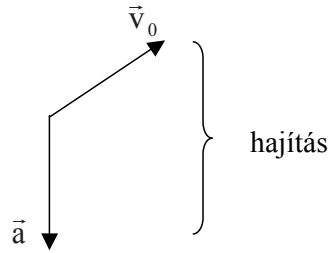


A másodfokú tag előjele negatív: fordított parabola

2.1. Hajítások

Ha a testre ható eredő erő állandó, akkor $\vec{a} = \text{állandó}$ és ha $\vec{F}_e$ és $\vec{a} \angle \vec{v}_0$ azaz az eredő erő iránya nem a kezdősebesség irányába esik, akkor nem egyenes vonalú a mozgás, hanem egy a gyorsulásvektor és a kezdősebesség vektor által kifeszített síkon levő síkgörbe mentén mozog a test.

Ekkor a test pályája egy parabola, a jelenséget pedig **hajításnak** nevezzük.



2.1.1. ábra. Ha a gyorsulás szöget zár be a kezdősebességgel, akkor a jelenséget a hajítással modellezhetjük

A mozgást leíró vektori egyenletek:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2$$

A skaláris egyenletek a sebességre:

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

$$v_z = v_{0z} + a_z \cdot t$$

A helyvektorra:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2 \\ z &= z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{a_z}{2} \cdot t^2 \end{aligned}\right\}$$

ha $\vec{r} = (x, y, z)$, és a síkmozgás miatt a vonatkoztatási rendszer az x -z úthoz vesszük fel.

Belátható, hogy z az x^2-el arányos, azaz a részecske által leírt görbe parabola.

Célszerű az egyik tengelyt az $\vec{a}$ irányába felvenni, ez legyen az y tengely, így:
$a_x = 0, a_z = |\vec{a}| = a$.

Így: $v_x = v_{0x}$

$v_z = v_{0z} + \frac{a}{2} \cdot t^2$

$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$

$z = z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$

Hajítás középiskolai tárgyalása.

Ha a gyorsulás z irányú komponense a nehézségi gyorsulás, azaz

$$a_x = 0, \quad \text{és} \quad a_z = -g$$

akkor a sebességvektor komponensei:: $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$$v_z = v_{0z} + a \cdot t = v_0 \sin\alpha - gt$$

A helyvektor komponensei: $x = x_0 + v_{0x} \cdot t = x_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t$

$$z = z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2$$

Vizsgáljuk meg a mozgás pályáját!

Legyen a példa szerint $x_0 = 0$

Ekkor a helyvektor vízszintes koordinátája: $x = v_0 \sin\alpha \cdot t$

Ebből az időt kifejezve: $t = \frac{x}{v_0 \sin\alpha}$

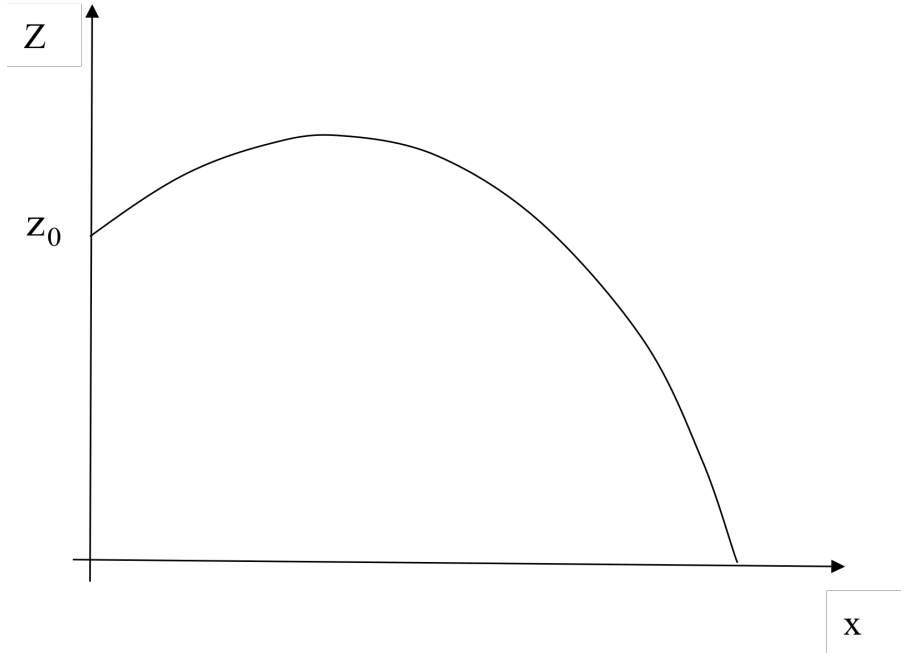
Behelyettesítve a z koordináta egyenletébe: $z = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \sin\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \sin\alpha}\right)^2$

Egyszerűbb alakban:

$$z = z_0 + x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \sin^2\alpha}$$

A pályagörbe tehát: $$z = z_0 + x - k \cdot x^2$$

Ez egy olyan másodfokú kifejezés, amelynél a másodfokú tag előjele negatív: ekkor a függvény képe fordított parabola.



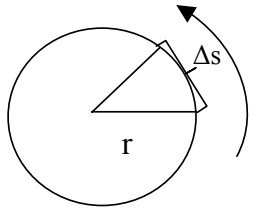
2.1.2 ábra. Hajítás

Körmozgás:

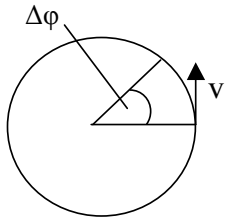
$\vec{v}_0 \perp \vec{r}$ és $\vec{F}_e, |\vec{v}| =$ állandó: **Egyenletes körmozgásról** beszélünk.

$\vec{v}_0 \perp \vec{r}$ és $\angle\vec{F}_e, |\vec{v}| =$ nem állandó: **Gyorsuló körmozgásról** beszélünk.

A körmozgás során a mozgó részecske körpályán halad



Körmozgást végző test által megtett út r sugár esetében



Körmozgást végző pontszerű testhez húzott sugár által súrolt szög

A körmozgást végző pontszerű test sebessége (vagy kerületi sebessége):

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

Amely érték egyenletes körmozgás esetében megadja a pillanatnyi sebességet is, változó körmozgás esetében csak az átlagsebességet adja. Ha a szögelfordulást radiánban mérjük:

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi,$$

és így:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Vezessünk be egy új fizikai mennyiséget, az ún. szögsebességet, az egységnyi idő alatti szögelfordulásra (vagy arra szögre amelyet a pontszerű testhez húzott sugár egységnyi idő alatt súrol)

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

melynek mértékegysége:

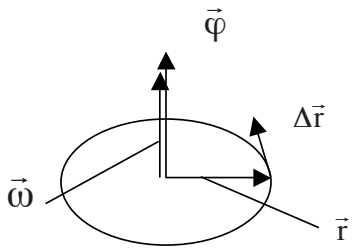
$$[\omega] = \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta t]} = \frac{rad}{s}.$$

Változó körmozgás esetében a szögsebességnek is értelmezni kell átlagértéket (ami az előbbi formula), és pillanatnyi értéket, melyet a sebességhez hasonlóan képezhetünk az alábbi formula szerint:

$$\omega = \frac{\lim}{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

így:

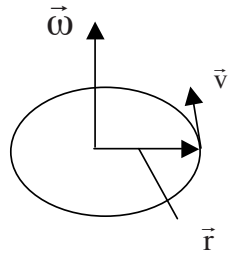
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega$$



$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$

(ω és φ mindig merőlegesek és a körmozgás irányába mutatnak.)



Gyorsuló körmozgás esetén:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

$$\text{Legyen}: \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, [\beta] = \frac{\text{rad}}{s^2}$$

ahol β a szöggyorsulás.

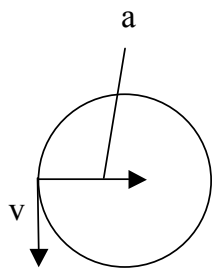
$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\beta}\times\vec{r}}_{\text{Tangenciális, érintő irányú vagy kerületi gyorsulás}} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\text{Radiális vagy centripetális gyorsulás}}$$

Egyenletes körmozgás:

$$\vec{v} = \text{állandó}$$

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$$

A körmozgásnak állandóan változik a sebessége.
Az egyenletes körmozgást végző test állandóan gyorsul, a kör középpontja felé mozog, ez a **centripetális gyorsulás**.



$v=\omega\cdot r$

$$a=\omega\cdot v=\omega^2\cdot r=\frac{v^2}{r}$$

T: a körülfordulási idő, φ=2π körülfordulás.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Másodpercenkénti fordulatszám: $n = \frac{1}{T}$.

$\omega = 2\pi n$

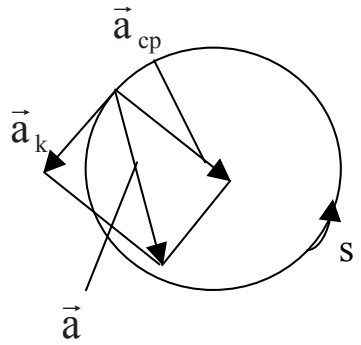
Percenkénti fordulatszám: N=60n.

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

Kerületi sebesség: $v = \omega \cdot r = 2r\pi n = \frac{2r\pi N}{60}$.

N összes fordulatok száma: $\frac{\varphi}{2\pi}$ teljes szögelfordulás, gyakorlati

Gyorsuló körmozgás:



A befutott ívhossz, és a kerületi sebesség:

$$s = s_0 + v_{0k} \cdot t + \frac{a_k}{2} t^2$$

$$v_k = v_{0k} + a_k \cdot t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$$

$$a_k = \beta \cdot r$$

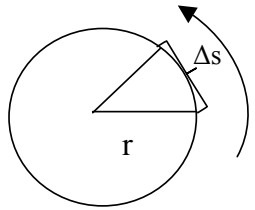
a: az eredő gyorsulás nagysága: $a = \sqrt{a_k^{\,2} + a_{cp}^{\,2}}$

Körmozgás

Ha $|\vec{r}| =$ állandó, $\vec{v}_0 \perp \vec{F}_e$, és $|\vec{F}| =$ állandó, és $|\vec{v}_0| =$ állandó , akkor egyenletes körmozgásról beszélünk, és ha $|\vec{r}| =$ állandó, $\vec{r} \perp \vec{v}$, $\vec{v}_0 \perp \vec{F}_e$, és $|\vec{v}_0| \neq$ állandó, akkor gyorsuló körmozgásról van szó.

2.2. Egyenletes körmozgás:

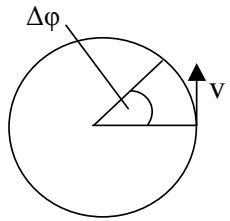
A pálya és az azontörténő elmozdulás az 2.2.1. ábrán látható.



A mozgás iránya

2.2.1. ábra Az egyenletes körmozgás során bejárt út

A mozgás során a test sebessége a kör érintőjének irányába mutat, és a testhez húzott sugár Δt idő alatt Δφ szöget súrol (2.2.2. ábra).



2.2.2.ábra A körmozgást végző test sebessége és a sugár által Δt idő alatt súrolt szög

Mivel a geometriából tudjuk, hogy

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi, \qquad (2.2.1.)$$

ezért az egyenletes körmozgást végző test sebessége:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega, \qquad (2.2.2)$$

ahol:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \qquad (2.2.3)$$

vagy általánosabban:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \qquad (2.2.4)$$

a körmozgást végző test szögsebessége, amely azt mutatja meg, hogy a testhez húzott sugár időegység alatt mekkora szöget súrol. Mértékegysége

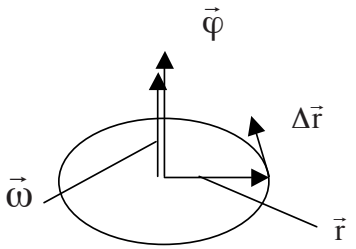
$$[\omega] = \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta t]} = \frac{1}{s} = \frac{rad}{s}.$$

A sebesség vektormennyiség, a sugár, ami a körmozgást végző test helyvektora, úgyszintén az, ezért a szögelfordulásnak, és a szögsebességnek is vektorjelleget tulajdonítunk, aminek iránya körmozgás esetén csak kétféle lehet, de bonyolultabb mozgásoknál az irányra sincsen korlátozás. Az 2.2.1 egyenletből következik, hogy az elmozdulás vektor, ami a megtett útnak felel meg a sugár és a szögelfordulás szorzata, ezért a megállapodás az alábbiakban adja a vektort:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}\,. \qquad (2.2.5)$$

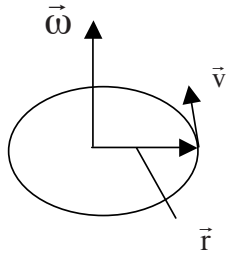
A sebességvektor ebből:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,. \qquad (2.2.6)$$



2.2.3. ábra A szögsebesség és szögelfordulás vektorok

A szögelfordulás és a szögsebesség vektorok ezen két egyenlet alapján az 2.2.3. és 2.2.4. ábrán látható módon a kör síkjából kifele állnak a mozgás irányából a jobbcsavar szabály szerint meghatározva.



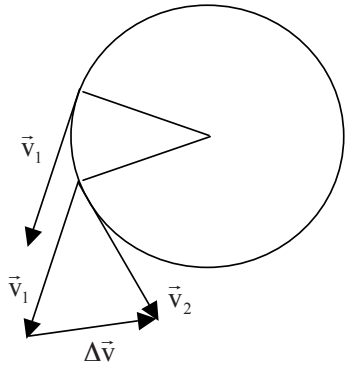
2.2.4. ábra A szögsebesség vektor, a sebességvektor és a helyvektor egymáshoz való viszonya

Az egyenletes körmozgás gyorsulása:

Tudjuk hogy egyenletes körmozgás esetében a sebességvektor nagysága állandó, azaz:

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|,$$

azonban a sebességvektor iránya állandóan változik (2.2.5. ábra), azaz körmozgásnak állandóan változik a sebessége, és a sebességváltozás vektor a kör közepe fele mutat.
Az egyenletes körmozgást végző test állandóan gyorsul, a kör középpontja felé mozog, ez a **centripetális gyorsulás**.



2.2.5. ábra Az egyenletes körmozgás sebességének változása

Tudjuk, hogy a gyorsulás a sebesség idő szerinti differenciálhányadosa, ezért, és mivel a szögsebesség egyenletes körmozgás esetében állandó:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v}, \qquad (2.2.7)$$

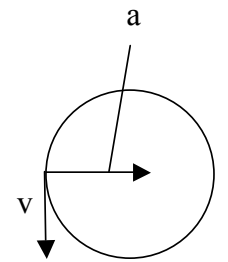
s az abszolút értéke:

$$a = |\vec{a}| = \omega\cdot v,$$

és 2.2.2 behelyettesítésével:

$$a = \omega\cdot v = \omega^2\cdot r = \frac{v^2}{r}. \qquad (2.2.8)$$

A gyorsulásvektor a kör középpontjába mutat (2.2.6. ábra), ezért kapta a centripetális gyorsulás nevet.



2.2.6. ábra A centripetális gyorsulás iránya

Egy pontszerű test csak akkor tud egyenletes körmozgást végezni, ha állandóan gyorsul a kör középpontja felé. Ez azonban csak úgy lehetséges, hogy a testre ható erők eredője a kör középpontjába mutat! Ebben az esetben az **eredő erő**t szokás **centripetális erő**nek nevezni. A Dinamika Alapegyenletébe

$$\vec{F}_e = m \cdot \vec{a},$$

beírva kapjuk:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp}, \qquad (2.2.9)$$

és abszolút értékek esetében az egyenlet:

$$F_{cp} = m \cdot \omega \cdot v = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Legyen T a körülfordulási idő, ami ahhoz szükséges, hogy atest egyszer végigmenjen a körpályán. Ekkor a szögelfordulás: $\varphi=2\pi$. Így

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (2.2.10)$$

A másodpercenkénti fordulatszám:

$$n = \frac{1}{T}.$$

Így

$$\omega = 2\pi n.$$

A percenkénti fordulatszám: $N=60n$.

Így

$$\omega = \frac{2\pi N}{60}.$$

A kerületi sebesség:

$$v = \omega \cdot r = 2r\pi n = \frac{2r\pi N}{60}.$$

Ha N' az összes fordulatok száma, akkor:

$$N' = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

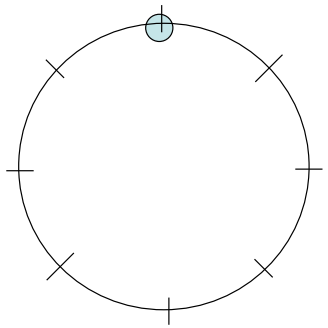
Görbe vonalú mozgások

Körmozgás

A körmozgás a mindennapi életben gyakran előforduló mozgásforma. Találkozhatunk vele a vidámparkban, ha felülünk egy körhintára de egy autó kerekének egy pontja, vagy éppen a kerékpár szelepe is körmozgást végez menet közben. Ha felülünk egy körmozgást végző eszközre, ami lehet egy kanyarodó autó is, érezni fogjuk, hogy az állandó irányváltoztatáshoz erő szükséges. Ez az erő azt mutatja, hogy itt megjelenik az irányváltoztatás miatti gyorsulás is. A sebesség irányának megváltoztatásához szükséges erő esetenként igen nagy és megterhelő is lehet, gondoljunk arra, hogy az űrhajósok teherbírását egy centrifugába ültetve vizsgálják, de az autóversenyzőknek és a vadászrepülő pilótáknak is igen nagy gyorsulást kell elviselniük.
A körmozgás két alaptípusa az egyenletes és a gyorsuló körmozgás

Először az egyenletes körmozgással fogunk foglalkozni.

Egyenletes körmozgás

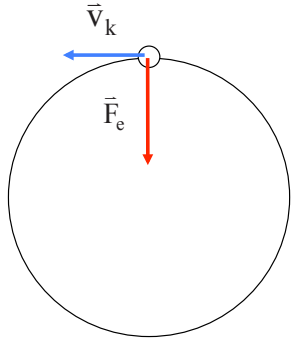


Egy tömegpont egyenletes körmozgást végez, ha körpályán mozog és azonos idők alatt azonos ívhosszakat fut be, függetlenül az időintervallumok hosszától.

Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele:

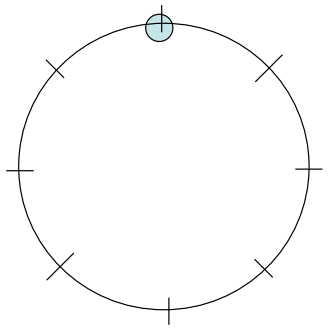
Ha $\vec{v}_0 \perp \vec{F}_e$, és $|\vec{F}_e| = \text{állandó}$, és $|\vec{v}| = \text{állandó}$

akkor a tömegpont egyenletes körmozgást végez.



Az eredő erő tehát mindig merőleges a kerületi sebességre, azaz a kör középpontjának irányába mutat.

Egyenletes körmozgás

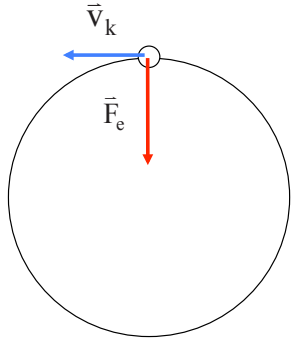


Egy tömegpont egyenletes körmozgást végez, ha körpályán mozog és azonos idők alatt azonos ívhosszakat fut be, függetlenül az időintervallumok hosszától.

Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele:

Ha $\vec{v}_0 \perp \vec{F}_e$, és $|\vec{F}_e| = \text{állandó}$, és $|\vec{v}| = \text{állandó}$

akkor a tömegpont egyenletes körmozgást végez.



Az eredő erő tehát mindig merőleges a kerületi sebességre, azaz a kör középpontjának irányába mutat.

A sebesség vektormennyiség, a sugár, ami a körmozgást végző test helyvektora, úgyszintén az, ezért a szögelfordulásnak, és a szögsebességnek is vektorjelleget tulajdonítunk.

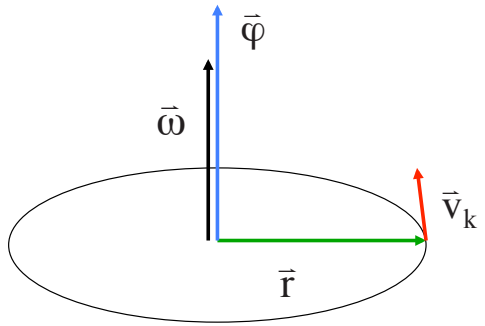
Az elmozdulás vektor, ami a megtett útnak felel meg a sugár és a szögelfordulás szorzata:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

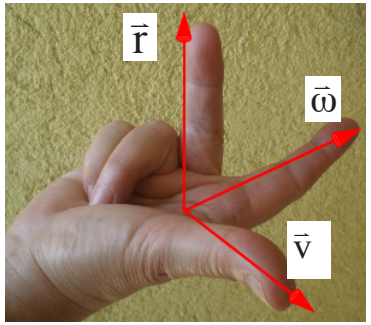
A sebességvektor ebből:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

A szögelfordulás és a szögsebesség vektorok a kör síkjából kifele állnak a mozgás irányából a jobbcsavar szabály szerint meghatározva.



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



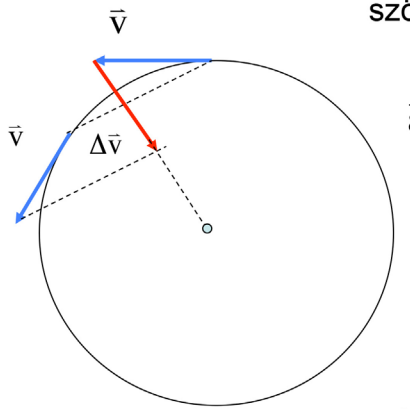
Az egyenletes körmozgás gyorsulása:

Az egyenletes körmozgás a nevével ellentétben **gyorsuló mozgás!**

Tudjuk hogy egyenletes körmozgás esetében a sebességvektor nagysága állandó, azaz:

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$$

a sebességvektor iránya azonban állandóan változik azaz körmozgásnak állandóan változik a sebessége, és a sebességváltozás vektor a kör közepe felé mutat.



A gyorsulás a sebesség idő szerinti differenciálhányadosa, és mivel a szögsebesség állandó:

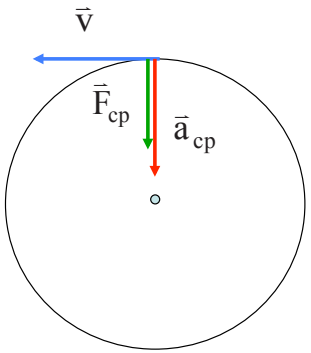
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v},$$

az abszolút értéke:

$$a = |\vec{a}| = \omega\cdot v$$

Azaz: $$a = \omega\cdot v = \omega^2\cdot r = \frac{v^2}{r}$$

A gyorsulásvektor tehát a kör középpontjába mutat, ezért kapta a **centripetális gyorsulás** nevet.



Egy pontszerű test akkor végez egyenletes körmozgást, ha állandóan gyorsul a kör középpontja felé. Ez csak úgy lehetséges, hogy a testre ható erők eredője a kör középpontjába mutat! Ebben az esetben az **eredő erő**t szokás **centripetális erő**nek nevezni.

A Dinamika Alapegyenlete:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp}$$

Abszolút értékek esetében:

$$F_{cp} = m \cdot \omega \cdot v = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Legyen T a körülfordulási idő, ami ahhoz szükséges, hogy a test egyszer végigmenjen a körpályán. Ekkor a szögelfordulás: φ=2π. Így

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

A másodpercenkénti fordulatszám: $n = \frac{1}{T} \quad \left[\frac{1}{sec}\right]$

Így $\omega = 2\pi n$

A percenkénti fordulatszám: N=60n

Ekkor: $\omega = \frac{2\pi N}{60}$

2.3. Gyorsuló körmozgás:

Gyorsuló körmozgás esetében a kerületi sebesség, a sebességvektor abszolút értéke nem állandó, s a szögsebesség sem. A szögsebesség időbeli változásának a jellemzésére be szokás vezetni az úgynevezett szöggyorsulást (β), ami egy idő intervallum átlagára nézve:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (2.3.1)$$

mértékegysége:

$$[\beta] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{1}{s^2} = \frac{rad}{s^2}.$$

Általánosságban a pillanatnyi szöggyorsulás, vagy szöggyorsulás:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \qquad (2.3.2)$$

A szöggyorsulás is vektormennyiség, iránya megegyezik a szögelfordulás és a szögsebesség vektorokéval.

A gyorsuló körmozgás gyorsulása:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

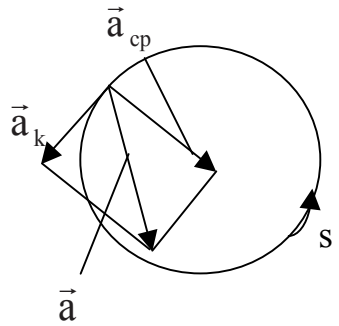
és mivel

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v},$$

ezért:

$$\vec{a} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \qquad (2.3.3)$$

A kifejezés első tagja a kerületi, vagy tangenciális gyorsulás, a második a centripetális gyorsulás. Ez a két vektor egymásra merőleges. Az eredő gyorsulás a kör belsejébe mutat (2.3.1. ábra).



2.3.1. ábra A gyorsuló körmozgás gyorsulásvektorai

A kerületi, vagy tangenciális gyorsulás abszolút értéke:

$$a_k = \beta \cdot r. \qquad (2.3.4)$$

Az eredőgyorsulás a centripetális és a kerületi gyorsulással:

$$a = \sqrt{a_k^{\ 2} + a_{cp}^{\ 2}}.$$

A gyorsuló körmozgás esetében kör kerületén megtett útra a kerületi sebességre az egyenesvonalú mozgásnál megszokott kifejezések érvényesek:

$$s = s_0 + v_{0k} \cdot t + \frac{a_k}{2} t^2,$$

$$v_k = v_{0k} + a_k \cdot t.$$

A szögelfordulásra és a szögsebességre is hasonló kifejezéseket alkalmazhatunk, amelyeket az alábbiakban mutatunk be.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2,$$

és

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t.$$

Görbe vonalú mozgások

Gyorsuló körmozgás

Gyorsuló körmozgás esetében a kerületi sebesség, a sebességvektor abszolút értéke nem állandó, s a szögsebesség sem.

Változó szögsebesség esetében definiálható a szöggyorsulás:

$$\vec{\beta} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

mértékegysége: $$[\beta] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{1}{s^2} = \frac{rad}{s^2}$$

Általánosságban a pillanatnyi szöggyorsulás, vagy szöggyorsulás:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

A gyorsuló körmozgás gyorsulása:

Mivel: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

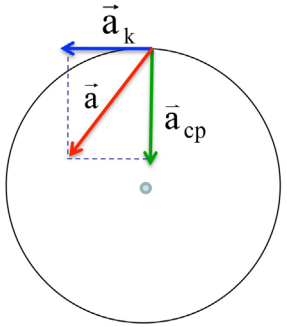
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

ezért: $$\vec{a} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

A kifejezés első tagja a kerületi, vagy tangenciális gyorsulás, a második a centripetális gyorsulás.

$$\vec{a} = \overbrace{\vec{\beta} \times \vec{r}}^{\vec{a}_k} + \overbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}^{\vec{a}_{cp}}$$

A két gyorsulás vektor egymásra merőleges, az eredő gyorsulás a kör belsejébe mutat:



$$\vec{a}_{cp} = \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad |\vec{a}_{cp}| = \omega \cdot v$$

illetve:

$$\vec{a}_k = \vec{\beta} \times \vec{r} \qquad |\vec{a}_k| = \beta \cdot r$$

A kerületi (tangenciális) gyorsulás tehát érintő irányú, ez a sebesség *nagyságának* változására jellemző, a centripetális gyorsulás, mindig a kör középpontjába mutat, ez a sebesség *irányának* változását jelzi.

Induláskor a centripetális gyorsulás zérus, a mozgás során a sebesség növekedésével nő a centripetális gyorsulás, így az eredő gyorsulásvektor iránya egyre inkább a kör középpontja felé fordul.

Az eredő gyorsulás abszolút értéke:

$$a = \sqrt{a_k^{\,2} + a_{cp}^{\,2}} = \sqrt{(\beta r)^2 + (\omega^2 r)^2} = \sqrt{(\beta r)^2 + (\beta^2 t^2 r)^2} =$$
$$= \sqrt{\beta^2 r^2 + \beta^4 t^4 r^2} = \beta r \sqrt{1 + \beta^2 t^4}$$

A gyorsulás nagysága tehát alapvetően az idő második hatványa szerint változik.

A szögelfordulásra és a szögsebességre egyenletesen gyorsuló körmozgás esetében a következő egyenletek érvényesek:

$$\omega = \omega_0 + \beta t \,,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta}{2} t^2 \,.$$

A kerületi sebességre és a befutott ívhosszra pedig az alábbiak:

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

3. fejezet

Impulzus, lendület

Impulzus vagy lendület

Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{I}_2 - \vec{I}_1}{\Delta t}$$

Ahol $\vec{I} = m\vec{v}$ $\left(\frac{kgm}{sec}\right)$

vektormennyiség az m tömegű test **impulzusa**, vagy **lendülete**.

Impulzus tétel:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t}$$

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t} = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

Egy pontszerű test lendületét vagy impulzusát a ráható erő változtatja meg és az impulzus megváltozás sebessége egyenlő a testre ható erővel.

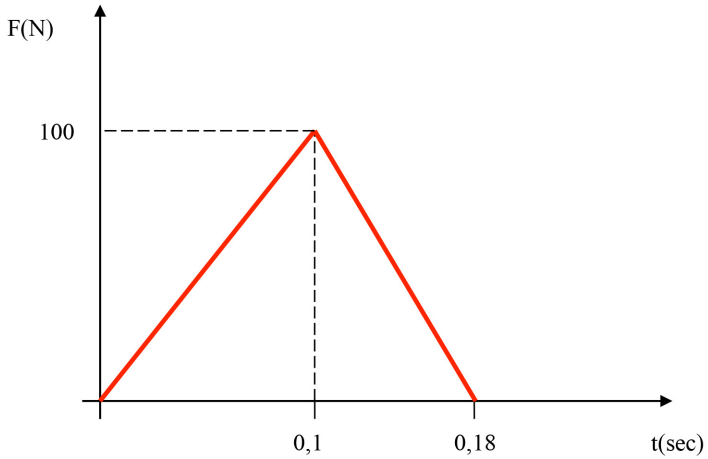
$$\Delta \vec{I} = \vec{F} \Delta t \text{ , vagy}$$

$$\Delta \vec{I} = \vec{I}_t - \vec{I}_0 = \int_0^t \vec{F} dt$$

$\vec{F}\Delta t$ erőlökés $\Delta \vec{I}$ lendület változás

Az *impulzus*, vagy *lendület* a test állapotát jelzi, az *erőlökés* pedig egy folyamat során jön létre, tehát **a test állapotát csak egy folyamat során tudjuk megváltoztatni, egy pillanat alatt nem**.

Számítsuk ki, hogy mekkora sebességre gyorsul fel a videón látott 0,5 kg tömegű labda, ha a kifejtett erő legnagyobb értéke 100 N, és a kölcsönhatás 0,18 sec ideig tart az alábbi függvény szerint:

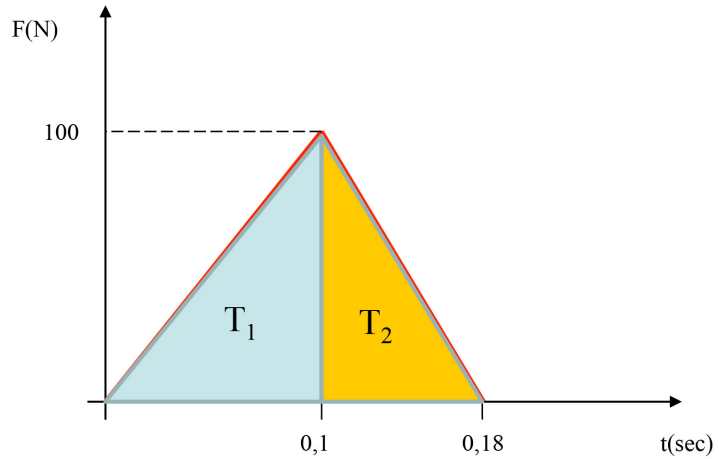




$$\Delta\vec{I} = \vec{F}\Delta t \text{ , vagy}$$

$$\Delta\vec{I} = \vec{I}_t - \vec{I}_0 = \int_0^t \vec{F}dt$$

Határozott integrál: görbe alatti terület:



$$T_1 = \frac{100 \cdot 0{,}1}{2} = 5 \ \text{N sec}$$

$$T_2 = \frac{100 \cdot 0{,}08}{2} = 4 \ \text{N sec}$$

A teljes terület:

$$T = T_1 + T_2 = 9 \ \text{N sec}$$

A labda teljes impulzus változása:

$$\Delta\vec{I} = \int_0^t \vec{F}dt = 9 \ \ \mathrm{N\,sec} = 9\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{sec}}$$

$$\Delta\vec{I} = m \cdot \Delta\vec{v}$$

$$\Delta\vec{v} = \frac{\Delta\vec{I}}{m} = \frac{9\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{sec}}}{0{,}5 \ \ \mathrm{sec}} = 18 \ \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

Az elrúgott labda tehát 18 m/sec sebességet ért el.

3.1. Impulzus, vagy lendület

Newton eredetileg a II axiómát nem a ma ismert $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ formában, mondta ki, hanem a ma impulzusnak, vagy lendületnek nevezett fizikai mennyiség segítségével. Ezt a szokásos formát az alábbiak szerint alakíthatjuk át:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t},$$

ezért pedig:

$$\vec{F} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t}.$$

Bevezetve az impulzus, vagy lendület vektort, amit a szabvány szerint I, vagy p jelölhet:

$$\vec{I} = m\vec{v}, \qquad (3.1.1)$$

kapjuk:

$$\vec{F} = \frac{\vec{I}_2 - \vec{I}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{I}}{\Delta t}. \qquad (3.1.2.)$$

ha az időintervallum minden határon túl rövidül:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{I}}{\Delta t} = \frac{d\vec{I}}{dt}, \qquad (3.1.3)$$

ahol I az impulzus vagy lendület (lineáris momentum).

$$\vec{I} = m \cdot \vec{v},$$

$$[I] = kg\frac{m}{s}.$$

Kimondható az impulzus (vagy lendület) tétel:

Kimondható az impulzus (vagy lendület) tétel:

Egy pontszerű test lendületét vagy impulzusát a ráható erő változtatja meg és az impulzus megváltozás sebességét, az erő adja.

Kis átalakítással 3.1.2 egyenletből kapjuk:

$$\Delta\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t. \qquad (3.1.4)$$

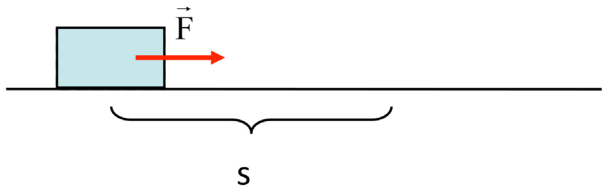
A felsőbb matematika nyelvén úgy írjuk, hogy:

$$\vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt, \qquad (3.1.5)$$

Ahol a jobb oldali részt erőlökésnek is hívják.
A test állapota mérve van az egyes és kettes pillanatban. A t_1 - t_2 időintervallum akkor lehet zérus, ha az erő végtelen. Fizikában csak véges anyagi mennyiségekkel dolgozunk, azaz csak véges nagyságú erő léphet fel, így dt is véges, azaz az erőlökés egy folyamatot ír le.
Ugyanakkor az impulzus, vagy lendület a test egy adott, pillanatnyi állapotát írja le.
Ezek alapján mondható, hogy egy test állapotát csak egy folyamat során változtathatjuk meg.

Munka, energia

1. Állandó nagyságú, az elmozdulás irányába eső erő munkája:

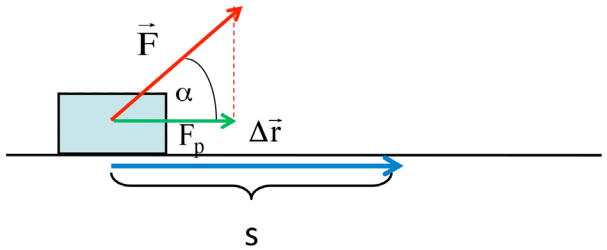


Munka: $W = F \cdot s$

mértékegysége: $[W] = J$ (Joule)

Amennyiben tehát az erő és az elmozdulás egyirányú, valamint az erő nem változik a mozgás folyamán, akkor a munka az erő és az elmozdulás szorzata.

2. Az erő szöget zár be az elmozdulással:



Az F erő elmozdulás irányába eső komponense:

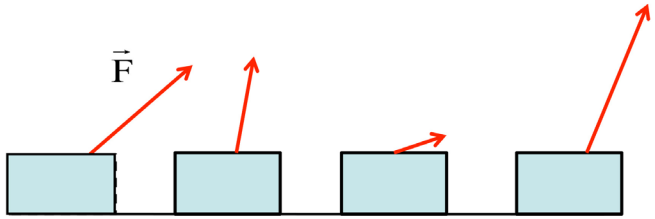
$$F_p = F \cdot \cos\alpha$$

A munka: $W = F \cdot \cos\alpha \cdot s$

Mivel az erő vektormennyiség és az elmozdulás vektor abszolút értéke az s út: $s = |\vec{\Delta r}|$

ezért: $W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$

3. Ha az erő nagyság és irány szerint is változik az út során:



Ekkor az utat felbontjuk olyan kicsi szakaszokra, amelyeken az erőt még állandónak tekinthetjük, s így a munka a következőképpen írható:

$$W = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r}$$

azaz:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}$$

Ez az összeg közelítő jelegű, ha gyorsan változik az erő a mozgás során, nem elég pontos. Ha azonban a beosztást minden határon túl finomítjuk, akkor pontos eredményt kapunk az alábbi formában:

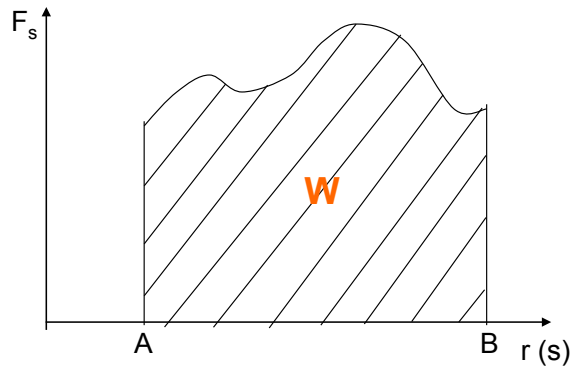
$$W = \lim_{\Delta\vec{r}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}$$

a matematikában használatos jelöléssel:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Munka egyenlő az erő pályavonal mentén vett integráljával.

A határozott integrál geometriai jelentése a görbe alatti terület:



Energia:

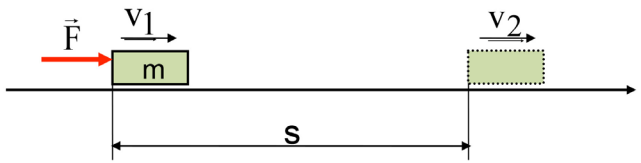
Egy test energiával rendelkezik akkor, ha alkalmas körülmények között munkát képes végezni.

Energiáját azzal a munkával mérjük, amelyet a test végez, miközben az adott A állapotából egy választott A_0 állapotba jut, vagy azzal a munkával, amelyet a testen kell végeznünk, míg A_0-ból az A állapotba jut.

Az energia egységei azonosak a munka egységeivel.

$$[E] = J$$

Mozgassunk egy m tömegű testet F erővel egy egyenes mentén. A kezdősebessége legyen v_1, a végsebessége v_2.



A gyorsulás: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

$$v_2 = v_1 + at$$

$$s = v_1 t + \frac{a}{2} t^2$$

innen: $$t = \frac{v_2 - v_1}{a}, \text{ és}$$

$$s = v_1 \frac{v_2 - v_1}{a} + \frac{a}{2} \frac{v_2^2 + v_1^2 - 2v_2 v_1}{a^2}$$

átrendezve: $$s = \frac{\cancel{2v_1 v_2} - 2v_1^2 + v_2^2 \cancel{- 2v_1 v_2} + v_1^2}{2a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$$

$$a = \frac{F}{m}$$

behelyettesítve: $$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\frac{F}{m}}$$

Átalakítva: $$W = F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$$

Az $$E_m = \frac{1}{2} m v^2$$

mennyiséget **mozgási**, vagy **kinetikai energiának** hívjuk (E_m), mértékegysége: *J*

Az egyenlet a következő alakot ölti:

$$W = E_{m_2} - E_{m_1}$$

másként: $$W = \frac{1}{2} m \cdot v_2^{\,2} - \frac{1}{2} m \cdot v_1^{\,2}$$

Ez a **munkatétel**, vagy **kinetikai energia tétele**

Tömegpont mozgási energiájának megváltozása egyenlő a tömegpontra ható erők eredőjének munkájával.

Itt lényeges, hogy tömegpontról beszélünk!

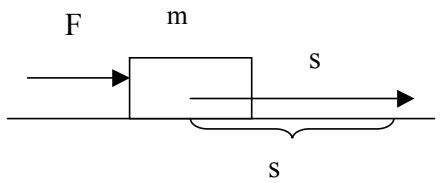
Rugó esetén pl. nem érvényes!

Másképpen fogalmazva**: Egy test munkát végezhet mozgási energiájának csökkenése árán.**

3.2. Munka és energia

A munka értelmezése különböző erő-elmozdulás viszonyok esetében:

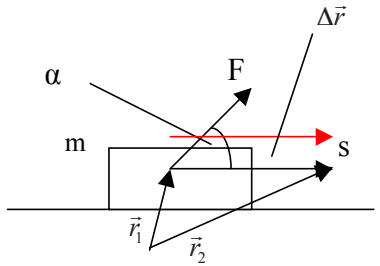
Ha az erő és az elmozdulás egyirányú, ahogy az 3.2.1. ábrán láthatjuk, akkor a munka



3.2.1. ábra Egyirányú erő és elmozdulás

a $W = F \cdot s$ alakban írható. Amennyiben az erő szöget (α) zár be az elmozdulással (3.2.2. ábra), a munka az alábbi formában számítható ki:

$$W = F \cdot \cos\alpha \cdot s \,. \qquad (3.2.1)$$



3.2.2. ábra Az erő és az elmozdulás α szöget zár be

Mivel az erő vektormennyiség ($\vec{F}$), és az elmozdulásvektor abszolút értéke az s út ($s = |\Delta\vec{r}|$), ezért írható:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \,. \qquad (3.2.2)$$

Ha az erő változik az út során, akkor az utat felbontjuk olyan szakaszokra, amelyeken az erő nem változik, s így a munka a következőképpen írható:

$$W = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r} \,,$$

azaz:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r} \,.$$

Ez az összeg még csak közelítő jelegű, ha gyorsan változik az erő a mozgás során, nem biztos, hogy elég pontos. Ha azonban a beosztást minden határon túl finomítjuk, akkor pontos eredményt kapunk az alábbi formában:

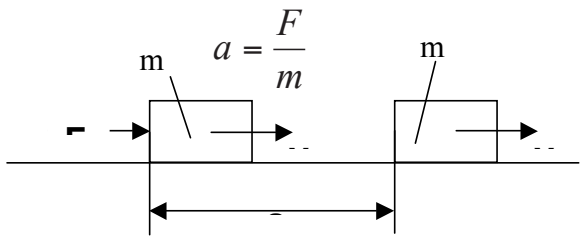
$$W = \lim_{\Delta\vec{r}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}\,,$$

amit a matematikában a következőképpen jelölnek:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}\,. \qquad (3.2.3)$$

Munka egyenlő az erő pályavonal mentén vett integráljával.

Tekintsünk egy egyenes vonalú mozgást, hogy ne legyen szükséges a vektorjel alkalmazása. A vektorjelleget az előjel adja. A mozgást egy állandó nagyságú F erő befolyásolja egy s úton keresztül (3.2.3. ábra).



3.2.3. ábra Egy test mozgása F erő hatására

A mozgás paramétereinek a leírására a következő egyenletek alkalmasak:

$$v_2 = v_1 + a \cdot t,$$

és

$$s = v_1 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

Fejezzük ki az időt az első egyenletből,

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a},$$

és helyettesítsük be az út egyenletébe:

$$s = \frac{v_1(v_2 - v_1)}{a} + \frac{1}{2}\frac{(v_2 - v_1)^2}{a^2}.$$

Átalakítással kapjuk:

$$s = \frac{v_1 \cdot v_2 - v_1^{\,2}}{a} + \frac{v_2^{\,2} - 2v_1v_2 + v_1^{\,2}}{2a},$$

és ebből:

$$s = \frac{\cancel{2v_1v_2} - 2v_1^2 + v_2^2 \cancel{- 2v_1v_2} + v_1^2}{2a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}.$$

Így tehát:

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\frac{F}{m}}.$$

Átalakítva kapjuk:

$$F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2. \qquad (3.2.4)$$

Kinetikai vagy **mozgási energiának (E_m)** nevezzük az $\frac{1}{2} m \cdot v^2$ mennyiséget.

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2, \qquad (3.2.5)$$

Mértékegysége:

$$[E_m] = J.$$

Az egyenlet másik oldalát az alábbiakban definiáljuk:

Munka:

$$F \cdot s = W,$$

mértékegysége:

$$[W] = J.$$

Az 3.2.4 egyenlet ezekkel a jelölésekkel a következő alakot ölti:

$$W = E_{m_2} - E_{m_1}, \qquad (3.2.6)$$

vagy kicsit másként:

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2. \qquad (3.2.7)$$

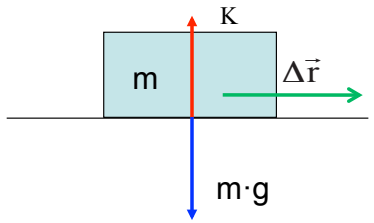
Az egyenlet mindkét alakjának **munkatétel** a neve. A munkatétel szavakban:
Egy test mozgási energiájának megváltozása egyenlő a testen végzett munkának a nagyságával.
Másképpen: Egy test munkát végezhet mozgási energiájának csökkenése árán.

A különböző erőtípusok munkája I.

Ha az erő merőleges az elmozdulásra, akkor a munka egyenlő nullával, mivel:

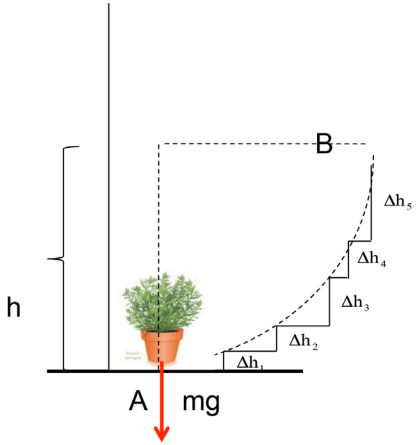
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

azaz az erő és az elmozdulás vektorok skaláris szorzata zérus.



A felületi kényszererő merőleges a felületre, a mozgás pedig a felületen történik, tehát a munkavégzés zérus. Kötélkényszer esetében sincsen munkavégzés.

A nehézségi erő ellenében végzett munka:



a végzett munka: $W = m \cdot g \cdot h$

Ha más úton visszük a testet:

A végzett munka ugyanakkora, mert a görbe vonal tetszőleges finomsággal megközelíthető vízszintes és függőleges szakaszokkal.

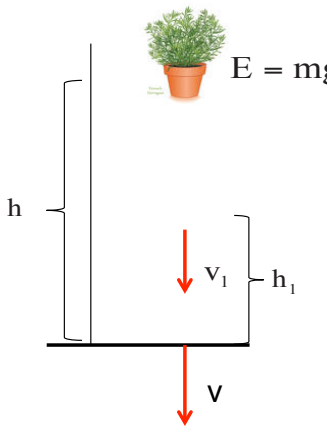
$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5$$

a végzett munka: $W = m \cdot g \cdot h$

Általánosítva: Egy mg súlyú testnek A pontból B-be való vitelénél a nehézségi erő ellenében végzett emelési munka független attól, hogy a test milyen úton jut A-ból B-be, ez a munka mindig **mgh,** ahol h az A és B pontok magasságkülönbsége.

Azzal, hogy az m tömegű testet a nehézségi erő ellenében gyorsítás nélkül h magasságra vittük munkát végeztünk. Ha elengedjük, a test gyorsulni kezd, és a nehézségi erő W = mgh munkát végez rajta. Úgy is mondhatjuk, hogy a testnek h magasságban *munkavégző képessége*, azaz *energiája* van, ami a helyzetéből származik.

Ezt az energiát **helyzeti energiának** nevezzük.



Ha ugyanez a test h magasságból szabadon esik, akkor a helyzeti energiája csökken, de mivel közben gyorsul a mozgási energiája ugyanakkora mértékben növekszik.

h_1 magasságban a teljes energia: $E = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2$

h magasságból történő zuhanás után a teljes energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Általánosan:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

Ez a tétel minden olyan erőnél érvényes, amelynek két tetszőleges pontot összekötő görbék mentén végzett munkája nem függ a görbéktől, hanem csak a két pont helyzetétől.

Az ilyen erőket az energia megmaradása (konzerválódása) miatt **konzervatív erőknek** nevezzük.

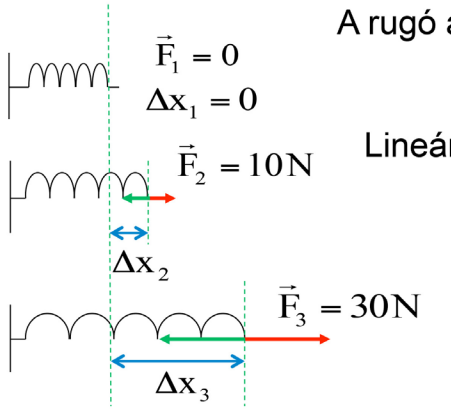
A mechanikai energia megmaradásának tétele:

Ha a tömegpontra ható erők eredője konzervatív erő, akkor a tömegpont teljes mechanikai energiájának (helyzeti és mozgási energiájának) összege állandó.

A szabad erő munkája:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{sz} \cdot d\vec{r} \left(= \lim_{\Delta\vec{r}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{sz} \cdot \Delta\vec{r} \right)$$

Rugalmas erő ellenében végzett munka:



A rugó által kifejtett reakció erő:

$F \sim \Delta x$

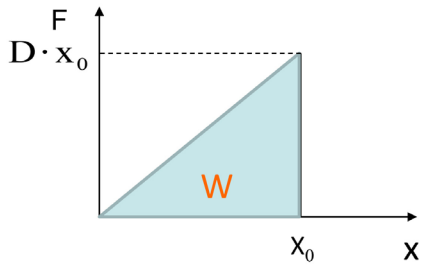
Lineáris erőtörvény: $\vec{F} = -D \cdot \vec{x}$

ahol D a **direkciós erő**:
az egységnyi megnyúláshoz szükséges erő

mértékegységei:

$\frac{N}{m}$ $\frac{N}{cm}$

A végzett munka az erő-megnyúlás (erő-elmozdulás) görbe alatti területtel arányos:



mivel az erő nagysága:

$$F = D \cdot x_0$$

A háromszög területe:

$$W = \frac{D \cdot x_0 \cdot x_0}{2} = \frac{1}{2} D \cdot x_0^2$$

A munka egzakt kiszámítása: $W = \int_0^{x_0} F dx = \int_0^{x_0} D x dx = \frac{1}{2} D x_0^2$

A rugón végzett munkát a rugó vissza tudja adni, munkát tud végezni, azaz energiája van. A rugóban tárolt energia a rugó megnyúlásától vagy összenyomásától, azaz a helyzetétől függ, ezért ez is potenciális, vagy helyzeti energia:

$$E_p = \frac{1}{2} D x^2$$

A különböző erőtípusok munkája II., teljesítmény

A súrlódási erő munkája

Ha egy test nyugalomban van, akkor a nyugalmi súrlódási erő munkája zérus, mivel az elmozdulás zérus.

A mozgási súrlódási erő mindig ellentétes irányú a sebességgel:



mozgási súrlódási erő esetén a munka: $W_S = \vec{F}_s \cdot \Delta\vec{r}$ $W_s = \int \vec{F}_S d\vec{r}$

Ez mindig negatív, mivel két ellenkező irányú vektor skaláris szorzata negatív.

A súrlódási munka tehát negatív, ami jelenti, hogy a súrlódási erő fellépte esetén a mechanikai energia csökken. Az energia megmaradás elve azonban nem sérül, mivel az „eltűnő” energia hővé, hanggá, deformációvá alakul.

Ezért a súrlódási erő ***disszipatív*** erő, a mechanikai energiát eltüntető erő.

A munkatétel általános alakja:

Ha egy testre több erő hat, akkor akár az egyik erő, vagy az eredő erő munkáját úgy is fel lehet fogni, hogy megváltoztatja a mozgási energiát, megváltoztatja a helyzeti energiát, és biztosítja a súrlódási és egyéb disszipációs munkákat.

Matematikai alakban: $$W = \Delta E_m + \Delta E_h - W_s$$

Teljesítmény:

Sokszor nem elegendő annak az ismerete, hogy egy erő mekkora munkát végzett, hanem az is lényeges információ, hogy azt mennyi idő alatt végezte el az adott erő. Erre a célra szolgál az átlagteljesítmény és a pillanatnyi teljesítmény (vagy sokszor csak teljesítmény) fogalma.

Átlag teljesítmény:

Valamely erő átlagos teljesítménye az erő munkájának és a munkavégzés idejének hányadosa:

$$P_{á} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F}\underbrace{\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}_{=\vec{v}_{á}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{á}$$

Mértékegysége: $[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{J}{s} = W$

régebbi mértékegység: LE (lóerő) $1LE = 736\ W$

Pillanatnyi teljesítmény:

A pillanatnyi teljesítmény az átlagteljesítmény határértéke, ha az időintervallumot minden határon túl csökkentjük, azaz a munka idő szerinti differenciálhányadosa:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

átalakítva: $$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Egy erő pillanatnyi teljesítménye tehát az erő és a sebesség skaláris szorzata.

3.3. A különböző erő típusok munkája:

Ha az erő merőleges az elmozdulásra, akkor a munka egyenlő nullával, mivel:
Ha $\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$, akkor az erő és az elmozdulás vektorok skaláris szorzata zérus.

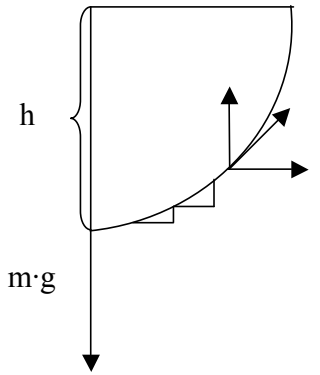
A szabad erő munkája:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{sz} \cdot d\vec{r} \left(= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{sz} \cdot \Delta\vec{r} \right).$$

A nehézségi erő ellenében végzett munka:
Mozgassunk egy m tömegű testet először függőlegesen h magasságra gyorsítás nélkül. Ekkor a nehézségi erő ellenében végzett munka:

$$W = m \cdot g \cdot h. \qquad (3.3.1)$$

Ha az 3.3.1. ábrán látható görbe vonalon visszük az m tömegű pontszerű testet h magasságra, akkor is ugyanakkora munkát kell végeznünk, mert a görbe vonal tetszőleges finomsággal megközelíthető vízszintes és függőleges szakaszokkal, illetve azok összegével. A vízszintes szakaszokon végzett munka zérus, mivel az elmozdulás merőleges az erőre (mert a súlyerő függőlegesen lefele mutat). A függőleges szakaszok együttes hossza h, így a munka megegyezik az 1.8.8 kifejezésben leírtakkal. Belátható, hogy bármilyen tetszőleges görbén ugyanaz a munka.



3.3.1. ábra A nehézségi erő ellenében végzett munka értelmezéséhez szolgáló ábra

Azzal, hogy az m tömegű testet a nehézségi erő ellenében gyorsítás nélkül h magasságra vittük munkát végeztünk. Ha elengedjük, és a test a nehézségi erő hatására gyorsulni kezd, a nehézségi erő W = mgh munkát végez rajta. Úgy is mondhatjuk, hogy a testnek h magasságban munkavégző képessége van, azaz energiája, ami a helyzetéből származik, tehát helyzeti energiája. A helyzeti energiát valamilyen vonatkoztatási ponthoz (szinthez) képest mérjük. Ha a vonatkoztatási ponthoz képest az m tömegű test magassága h, akkor a helyzeti (vagy potenciális) energiája:

$$E_h = m \cdot g \cdot h. \qquad (3.3.2)$$

Ha ugyanez a test h magasságból szabadon esik, akkor a helyzeti energiája csökken, de mivel közben gyorsul a mozgási energiája ugyanakkora mértékben növekszik. Matematikai alakban:

$$\frac{1}{2}m\cdot v_1^2 + m\cdot g\cdot h_1 = \frac{1}{2}m\cdot v_2^2 + m\cdot g\cdot h_2. \qquad (3.3.3)$$

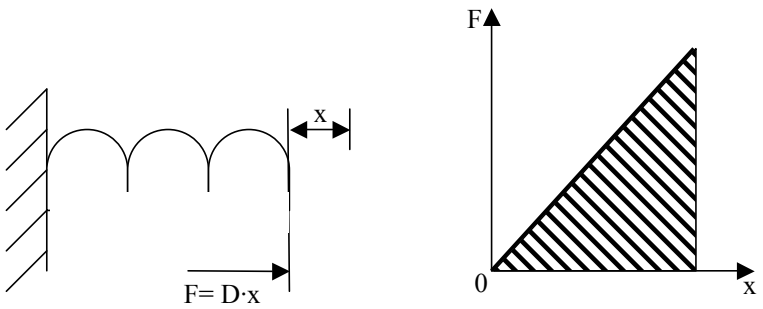
Ez a **mechanikai energia megmaradásának a törvénye**. Szavakban:

Csak a nehézségi erőnek kitett test úgy mozog, hogy mozgása során a helyzeti és mozgási energiájának az összege állandó.

Itt kell megjegyezni, hogy a törvény érvényes akkor is, ha kényszererő is hat, de ha már súrlódási (vagy valami más disszipatív) erő is fellép, a mechanikai energia nem marad meg

Rugalmas erő ellenében végzett munka:

Vegyünk egy D rugóállandójú rugót, majd nyújtsuk meg x távolsággal (3.3.2. ábra). Ehhez $F = D\cdot x$ erőt kell kifejtenünk. Az erő a megnyújtás növekedésével növekszik. A végzett munka az erő-megnyúlás (erő-elmozdulás) görbe alatti területtel arányos.



3.3.2. ábra Rúgó nyújtásához szükséges erő

A munka egzakt kiszámítása az alábbiak szerint történhet:

$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x Dx dx = \frac{1}{2}Dx^2. \qquad (3.3.4)$$

A kapott formula valóban az 3.3.2. ábra bal oldalán látható vonalkázott területet adja.
Ha a rugót megnyújtottuk, munkát végeztünk rajta. Ezt a rugó vissza tudja adni, munkát tud végezni, azaz energiája van. Ennek az energiának is potenciális, vagy helyzeti energia a neve, és az alábbiakban adható meg:

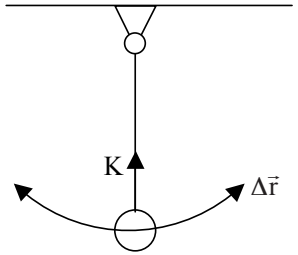
$$E_p = \frac{1}{2}Dx^2. \qquad (3.3.5)$$

A kényszererő munkája:

A felületi kényszererő merőleges a felületre, a mozgás pedig a felületen történik. Így a munkavégzés zérus. A kötélkényszer esetében is ez a helyzet (3.3.3. ábra).

$$\vec{K} \perp \Delta\vec{r},$$

$$W_K = 0.$$



3.3.3. ábra A kötélkényszer és az elmozdulás merőleges egymásra

A súrlódási erő munkája:
Ha egy test nyugalomban van, akkor a nyugalmi súrlódási erő munkája zérus, mivel az elmozdulás zérus. A mozgási súrlódási erő mindig ellentétes irányú a sebességgel.

$$\vec{F}_s = -\mu K \vec{v}_0'.$$

Így a munka:

$$W = \vec{F}_s \cdot \Delta\vec{r} = -\mu K \vec{v}_0' \Delta\vec{r} \le 0.$$

A súrlódási munka negatív, ez azt jelenti, hogy a súrlódási erő fellépte esetén a mechanikai energia csökken. Az energia megmaradás elve azonban nem sérül, mivel az „eltűnő" energia hővé, hanggá, deformációvá alakul.
Ezért a súrlódási erő disszipatív erő, a mechanikai munkát eltüntetető erő.

A munkatétel általános alakja:

Ha egy testre több erő hat, akkor akár az egyik erő, vagy az eredő erő munkáját úgy is fel lehet fogni, hogy megváltoztatja a mozgási energiát, megváltoztatja a helyzeti energiát, és biztosítja a súrlódási és egyéb disszipációs munkákat. Ennek matematikai alakja a következő:

$$W = \Delta E_m + \Delta E_h - W_s. \qquad (3.4.1)$$

A súrlódási munka negatív előjele azért van, mert az egyenlet másik oldalán lenne a helye.

Teljesítmény:

Sok esetben nem elegendő annak az ismerete, hogy egy erő mekkora munkát végzett, hanem azt is tudni kell, hogy azt mennyi idő alatt végezte el az adott erő. Erre a célra szolgál az átlagteljesítmény és a pillanatnyi teljesítmény (vagy sokszor csak teljesítmény) fogalma.

Az átlag teljesítmény az időegység alatt végzett munka, amit a végzett munkának az elvégzéséhez szükséges idővel való elosztásával számolunk ki.:

$$P_{\text{átlag}} = \frac{W}{t}, \qquad (3.4.2)$$

mértékegysége:

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{J}{s} = w.$$

Nem Si, de bizonyos esetekben (gépkocsik teljesítményének a megadásakor) még használt egység a lóerő (LE), amelynek átszámítása:

$$1LE = 736w.$$

A pillanatnyi teljesítmény az átlagteljesítmény határértéke, ha az időintervallumot minden határon túl csökkentjük, azaz:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}.$$

Kis átalakítással:

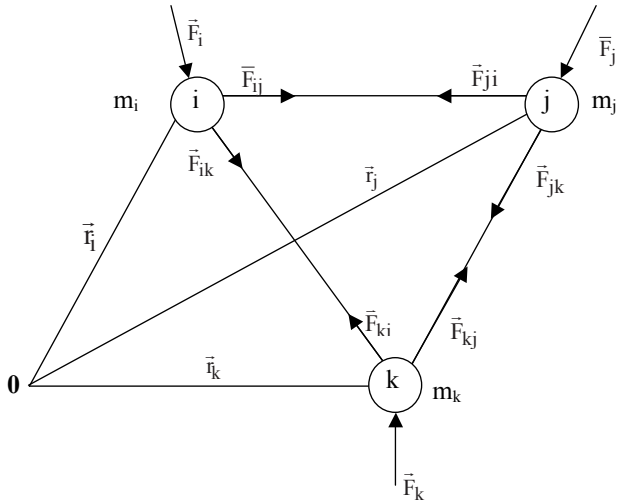
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \qquad (3.4.3)$$

Egy erő pillanatnyi teljesítménye tehát az erő skalárisan szorozva a sebességgel.

4. fejezet

Pontszerű testekből álló mechanikai rendszerek

Tekintsünk egy olyan halmazt, ami pontszerű testekből áll. Ezek száma ne legyen korlátozott. Úgy is felfoghatjuk a következő gondolatsort, mint a valóságos testek modellezésének egy következő lépését, mivel egy kiterjedt testet is lehet véges, vagy végtelen számú pontszerű test halmazának tekinteni. Tegyük fel, hogy mindegyik pontszerű test hat mindegyikre, és mindegyikre hatnak a rendszeren kívüli, ún. külső erők.
Válasszunk ki három testet, az i- ediket a j- ediket és a k- adikat a rendszer és az erők szemléltetésére a 2.1. ábra szerint.



4.1. ábra Pontszerű testekből álló rendszer egy részlete

Az ábrán $\vec{F}_i, \vec{F}_j, \vec{F}_k$ jelöli a külső és $\vec{F}_{ik}, \vec{F}_{ki}$ a belső erőket, **0** a vonatkozatási rendszer origóját, $\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k$ tömegpontba mutató helyvektorokat. Vegyük észre, hogy a belső erők párosával lépnek fel, és természetesen:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}. \qquad (4.1)$$

Ekkor a mozgás egyenletek mindegyik tömegpontra felírhatók:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{1n} \qquad (4.2)$$

.

.

.

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{in} \qquad (4.3)$$

.

.

$$m_n \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_n + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \vec{F}_{n3} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{nn.1} \qquad (4.4)$$

A továbbiakban többnyire az i-edik tagra írjuk fel az egyenletet, és a belső erőket az

$$\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots\ldots + \vec{F}_{in} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ij} \qquad (4.5)$$

alakban. Vegyük észre, hogy $\vec{F}_{ii}$ nem lép fel, mert a test önmagára nem hat.
Ha az összes tömegpont dinamikai alapegyenletét összefoglaljuk, akkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{1j} \qquad (4.6)$$

.

.

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} \qquad (4.7)$$

$$m_n \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_n + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{nj} \qquad (4.8)$$

Azaz $$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} \qquad (4.9)$$

Ahol $\vec{F}_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ a külső erők eredője.

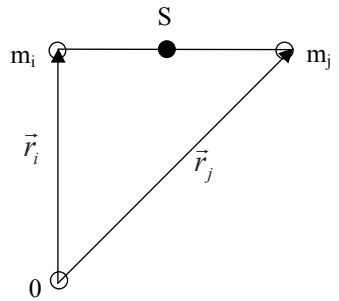
Vegyük észre, hogy a belső erők eredője, a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}$, az alábbiak szerint is elrendezhető:

$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \ldots\ldots + \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} + \ldots$. Azonban $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$,

$\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$ és $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, azaz az összeg csupa **0** eredményt adó párokból áll, ami a hatás-ellenhatás elve (a III. axióma) szerint magától értődik.

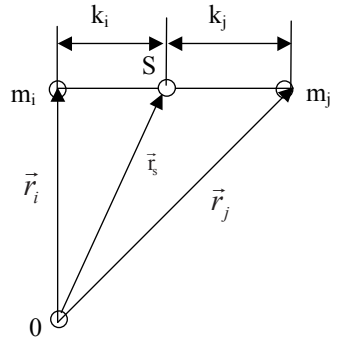
Így a $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_k$ egyenletet kapjuk. (4.10)

Ennek további elemzéséhez vezessük be a tömegközéppont, vagy súlypont fogalmát. Ehhez először tekintsünk két tömeget, az i-ediket és a j-ediket (2.2. ábra).



4.2. ábra Két tömegpont súlypontja

A középiskolai tanulmányink szerint két pontszerű test tömegközéppontja (S) az a pont, ahol a két testet gondolatban összekötő súlytalan rudat alátámasztva a két test és a rúd egyensúlyban van.



4.3. ábra A súlypont, vagy tömegközéppont meghatározásának segédábrája

Ekkor a 4.3.ábra szerinti jelölésekkel az

$$m_i \cdot g \cdot k_i = m_j \cdot g \cdot k_j \qquad (4.11)$$

egyenlet adódik az egyensúly feltételeként. Ezt g-vel egyszerűsítve kapjuk:

$$m_i \cdot k_i = m_j \cdot k_j. \qquad (4.12)$$

k_1 helyére beírhatjuk az $\vec{r}_s - \vec{r}_i$ és k_2 helyére az $\vec{r}_j - \vec{r}_s$ vektorokat az egyenletbe, mivel azok egy egyenesbe esnek és egyirányúak, s így

$$m_i\left(\vec{r}_s - \vec{r}_i\right) = m_j\left(\vec{r}_j - \vec{r}_s\right), \qquad (4.13)$$

azaz $$m_i\vec{r}_s - m_i\vec{r}_i = m_j\vec{r}_j - m_j\vec{r}_s, \qquad (4.14)$$

és így $$\vec{r}_s = \frac{m_i\vec{r}_i + m_j\vec{r}_j}{m_i + m_j} \qquad (4.15)$$

adódik a két tömegpont tömegközéppontjára, vagy súlypontjára. Be lehet látni, hogy n darab tömegpontra

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad (4.16)$$

vagy, mivel $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$, a rendszer teljes tömege,

így $$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}. \qquad (4.17)$$

Kis átalakítással:

$$m\vec{r}_s = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad (4.18)$$

Kétszer differenciálva az egyenletet kapjuk:

$$m\vec{a}_s = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i, \qquad (4.19)$$

ahol $\vec{a}_s = \frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2}$ a rendszer tömegközéppontjának gyorsulása, $\vec{a}_i = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ az i- edik tömegpont gyorsulása.

Eredményeinket a 4.10-es egyenletbe behelyettesítve kapjuk:

$$m \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_k, \qquad (4.20)$$

amely egyenletet **a tömegközéppont tételének** is nevezünk. Eszerint:
Egy pontszerű testekből álló rendszer úgy mozog, mintha a rendszer össztömege oda lenne egyesítve, és a külső erők eredője is ott hatna. A belső erők a tömegközéppont helyzetét nem befolyásolják

Ebből következik a **tömegközéppont megmaradásának tétele:**
Zárt mechanikai rendszer (zárt rendszer, ha a külső erők eredője zérus) tömegközéppontja helyben marad, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

A tételek nem csak pontszerű testekből álló rendszerekre, hanem kiterjedt testekre, illetve azokból álló rendszerre is igazak.
Ezek a tételek igazolják, hogy a súlypont helyzetére nézve a kiterjedt test helyettesítésére egy ponttal, a súlyponttal helyes eredményt ad a súlypont mozgására. A test többi pontjáról azonban még nem mondtunk semmit!
A 4.10 egyenletet tovább boncolva, a Newton által eredetileg megadott alakot használva (itt a mi átalakításunkban állandó tömegeket tételezünk fel),

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d(m_i \cdot \vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_k, \qquad (4.21)$$

azaz $$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{I}_i}{dt} = \vec{F}_k, \qquad (4.22)$$

de mivel az összegzés és a differenciálás felcserélhető

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i}{dt} = \vec{F}_k, \qquad (4.23)$$

és így mivel $$\vec{I}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i, \qquad (4.24)$$

ezért:

$$\frac{d\vec{I}_e}{dt} = \vec{F}_k . \qquad (4.25)$$

Ezt az egyenlet a **pontrendszernek impulzus tétele,** mely szerint:

Pontszerű testekből álló rendszer eredő impulzusát csak a rendszerre ható külső erők határozzák meg, a belső erők nem befolyásolják. Az eredő impulzus megváltozásának a sebességét a rendszerre ható külső erők eredője adja.

Zárt rendszerre vonatkoztatva, amikor a külső erők eredője zérus, kimondható az **impulzus megmaradás tétele:**
Zárt mechanikai rendszer eredő impulzusa állandó.

Ezt a tételt könnyű belátni, mivel ha

$$\vec{F}_k = 0 \text{ akkor } \frac{d\vec{I}_e}{dt} = 0 \text{, azaz} \qquad (4.26)$$

$$\vec{I}_e = állandó .$$

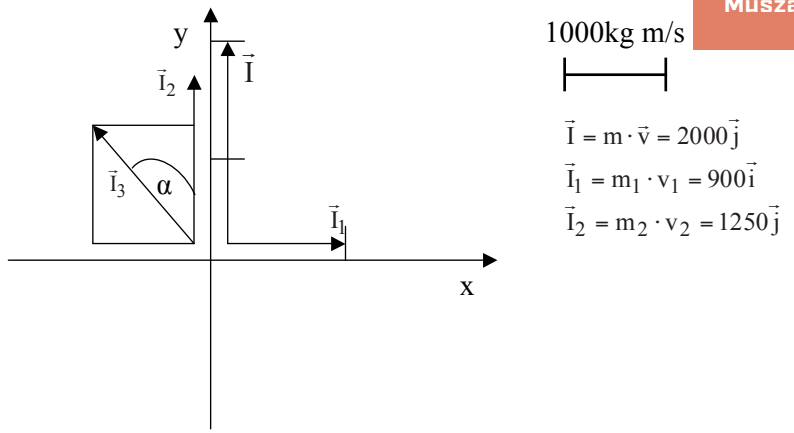
A fenti tételek is igazak mindenféle (tehát nemcsak pontszerű) testekből álló rendszerre.
Az impulzus megmaradás egyik szép példája az adott sebességgel haladó lövedék több darabba való szétrobbanása, amit az alábbiakban mutatunk be.

Mintafeladat:

Egy m=10kg tömegű test v=200m/s sebességgel halad észak felé, amikor felrobban 3 részre. Az egyik, m=3kg tömegű darab keleti irányban repül 300m/s sebességgel, a másik, m_2=5kg tömegű rész északnak folytatja útját 250m/s sebességgel.
Milyen irányba, és mekkora sebességgel halad a harmadik darab?

Megoldás:

Mivel tudjuk, hogy a sebesség és az impulzus vektormennyiség, fel kell venni egy vonatkoztatási rendszert, hogy megadhassuk a vektorok komponenseit.
Mivel semmi nem utal másra, fel lehet tételezni, hogy síkban történik a mozgás. Legyen észak az y és x a keleti irány. Így ha rendre $\vec{i}$ és $\vec{j}$ az egységvektorok, akkor a megadott adatokból a következő vektorokat lehet felírni (4.4. ábra).



4.4. ábra A mintafeladat impulzus vektorai

Mivel a robbanás belső erő, és a közegellenállásról, súrlódásról nem szól a feladat, a rendszert zártnak tekinthetjük így az eredő impulzus nem változik a robbanás során, azaz a robbanás előtti ($\vec{I}_{re}$) impulzus megegyezik a robbanás utáni ($\vec{I}_{ru}$) impulzussal.

$$\vec{I}_{re} = \vec{I}_{ru} \qquad (4.27)$$

A robbanás előtti impulzus:

$$\vec{I}_{re} = \vec{I} \qquad (4.28)$$

A robbanás utáni:

$$\vec{I}_{ru} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 \qquad (4.29)$$

azaz

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 \qquad (4.30)$$

és így

$$\vec{I}_3 = \vec{I} - \vec{I}_1 - \vec{I}_2 \qquad (4.31)$$

Behelyettesítve ezeket az adatokat, kapjuk:

$$\vec{I}_3 = m \cdot \vec{v} - m_1 \cdot \vec{v}_1 - m_2 \cdot \vec{v}_2 = 2000\vec{j} - 900\vec{i} - 1250\vec{j}$$

$$\vec{I}_3 = 750\vec{j} - 900\vec{i}\,.\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\left|\vec{I}_3\right| = \sqrt{750^2 - 900^2} = 1171{,}5\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{I}_3}{m} = 375\vec{j} - 450\vec{i}\,\frac{m}{s}$$

$$|\vec{v}_3| = 585{,}8\frac{m}{s}$$

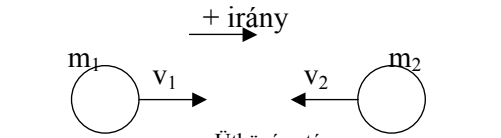
A sebesség irányára nézve (Lásd: 2.4. ábra):

$$tg\alpha = \frac{v_{3x}}{v_{3y}} = \frac{450}{375} = 1{,}2 \rightarrow \alpha = 50{,}2^\circ$$

Az impulzus-megmaradás tételének további alkalmazásaként az alábbiakban egy rövid áttekintést adunk a centrális, tökéletesen rugalmas és a tökéletesen rugalmatlan ütközésekről.

Tökéletesen rugalmas centrális ütközés:

Centrális ütközésnél az ütköző testek sebessége olyan, hogy annak hatásvonala a másik tömegközéppontján megy át.
Ütközés előtt:



Ütközés után:



4.5. ábra Tökéletesen rugalmas centrális ütközés

Legyen egy m_1 tömegű $v_1$sebességű test, ami centrálisan ütközik az m_2 tömegű, v_2 sebességű testtel. Az ütközés tökéletesen rugalmas, tehát két test ütközés előtti mozgási energiája megegyezik az ütközés utáni összes mozgási energiájával.
Ha a közegellenállást és a súrlódást, valamint a nehézségi erőt elhanyagoljuk, akkor csak belső erők hatnak, tehát a két testből álló rendszer zárt, azaz az ütközés előtti összimpulzus megegyezik az ütközés utáni összes impulzussal.

Ezek alapján két egyenlet írható fel:

$$E_{müe} = E_{müu} \qquad (4.32)$$

$$\vec{I}_{eüe} = \vec{I}_{eüu} \qquad (4.33)$$

azaz, ha az ütközés utáni sebességet u_1 és u_2 jelöli :

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot u_2^2 \qquad (4.34)$$

és

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \qquad (4.35)$$

Az egyenletben elhagytuk a vektorjelet, mert egyenes vonalú mozgásról van szó, s ekkor az előjel helyettesíti azt.

Az egyenletrendszer megoldása:

Az egyenletek átrendezésével kapjuk:

$$m_1 \cdot \left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2 \cdot \left(u_2^2 - v_2^2\right) \qquad (4.36)$$

$$m_1 \cdot \left(v_1 - u_1\right) = m_2 \cdot \left(u_2 - v_2\right) \qquad (4.37)$$

A két egyenletet elosztva és a másodikat megtartva két elsőfokú egyenletből álló rendszert kapunk.

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2 \qquad (4.38)$$

$$m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot u_1 = m_2 \cdot u_2 - m_2 \cdot v_2 \qquad (4.39)$$

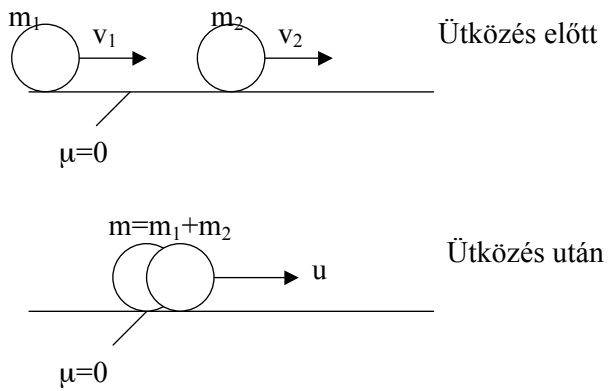
Az utolsó két egyenlet megoldása:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \qquad (4.40)$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot v_2 \qquad (4.41)$$

A megoldásokból látszik, hogy ha $m_1 = m_2$, akkor a sebességek ütközés után helyet cserélnek, és ha az egyik tömeg sokkal nagyobb, mint a másik, akkor ütközés után a másik tömeg sebessége ellenkezőjére vált, nagysága megmarad, (visszapattan a falról a labda, azonos nagyságú, de ellenkező irányú sebességgel).

Tökéletesen rugalmatlan ütközés:



4.6. ábra Tökéletesen rugalmas ütközés

Ütközzön egy m_1 tömegű v_1 sebességű test egy másikkal, amelynek tömege m_2, sebessége v_2 úgy, hogy ütközés után tapadjanak össze, és együtt mozogjanak azonos sebességgel. Ha elhanyagoljuk a súrlódás és a közegellenállás hatását, akkor az ütközés során csak a belső erőkkel kell számolni. Így az impulzus megmaradás tétele érvényes lesz, azaz az ütközés előtti összes impulzus megegyezik az összetapadt két test impulzusával, azaz

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \qquad (4.42)$$

A mechanikai energia nem marad meg, ugyanis az ütközés során összetapadt két test deformálódik, fel is melegszik, s az ezekhez szükséges munkát a két test mozgási energiája, vagy annak egy része biztosítja. Így az energia egyenlet az ütközés utáni oldalra beírt E_v energiaveszteséggel lesz érvényes.

$$E_{müe} = E_{müu} + E_v \qquad (4.43)$$

$$\text{azaz } \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot u^2 + E_v \qquad (4.44)$$

A két test együttes sebessége:

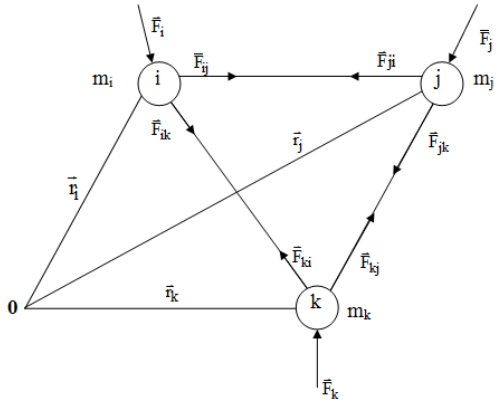
$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \qquad (4.45)$$

Pontszerű testekből álló mechanikai rendszerek

Bevezetés

Tömegközéppont tétele, impulzus tétel

Tömegközéppont tétele



- Tekintsünk egy olyan halmazt, ami pontszerű testekből áll. Ezek száma ne legyen korlátozott.
- Válasszunk ki három testet, az i- ediket a j- ediket és a k- adikat a rendszer és az erők szemléltetésére.

Az ábrán $\vec{F}_i, \vec{F}_j, \vec{F}_k$ jelöli a külső és $\vec{F}_{ik}, \vec{F}_{ki}$ a belső erőket, **0** a vonatkozatási rendszer origóját, $\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k$ tömegpontba mutató helyvektorokat. Vegyük észre, hogy a belső erők párosával lépnek fel, és természetesen:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

Ekkor a mozgás egyenletek mindegyik tömegpontra felírhatók:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{1n}$$

$$\ldots$$

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{in}$$

$$\ldots$$

$$m_n \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_n + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \vec{F}_{n3} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{nn-1}$$

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{1j}$$

$$\ldots$$

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}$$

$$\ldots$$

$$m_n \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_n + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{nj}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}$$

A továbbiakban többnyire az i-edik tagra írjuk fel az egyenletet, és a belső erőket az

$$\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots\ldots + \vec{F}_{in} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}$$

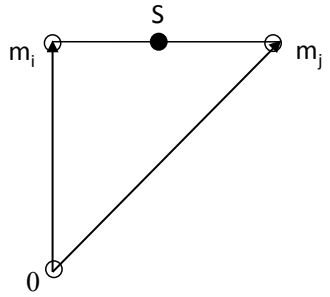
Ahol $\vec{F}_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ a külső erők eredője.

Vegyük észre, hogy a belső erők eredője, a $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ij}$, az alábbiak szerint is elrendezhető:

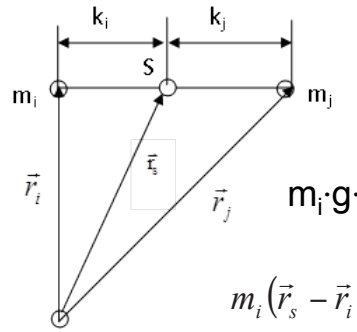
$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}+\vec{F}_{13}+\vec{F}_{31}+\ldots\ldots+\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}+\ldots$$

- Azonban $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{13}=-\vec{F}_{31}$ és $\vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}$
- azaz az összeg csupa **0** eredményt adó párokból áll, ami a hatás-ellenhatás elve (a III. axióma) szerint magától értődik.
- Így a $\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\vec{a}_i=\vec{F}_k$ egyenletet kapjuk

- Ennek további elemzéséhez vezessük be a tömegközéppont, vagy súlypont fogalmát. Ehhez először tekintsünk két tömeget, az i-ediket és a j-ediket



- A középiskolai tanulmányink szerint két pontszerű test tömegközéppontja (S) az a pont, ahol a két testet gondolatban összekötő súlytalan rudat alátámasztva a két test és a rúd egyensúlyban van.



$m_i \cdot g \cdot k_i = m_j \cdot g \cdot k_j$

$$m_i\left(\vec{r}_s - \vec{r}_i\right) = m_j\left(\vec{r}_j - \vec{r}_s\right)$$

Fejtsük ki részletesebben az előbbi egyenletet:

$$m_i\left(\vec{r}_s - \vec{r}_i\right) = m_j\left(\vec{r}_j - \vec{r}_s\right)$$

$$m_i\vec{r}_s - m_i\vec{r}_i = m_j\vec{r}_j - m_j\vec{r}_s$$

$$\vec{r}_s = \frac{m_i\vec{r}_i + m_j\vec{r}_j}{m_i + m_j}$$

adódik a két tömegpont tömegközéppontjára, vagy súlypontjára. Be lehet látni, hogy n darab tömegpontra

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

vagy, mivel $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$, a rendszer teljes tömege,

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m}$$

$$m\vec{r}_s = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

Kétszer differenciálva az egyenletet kapjuk:

$$m\vec{a}_s = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i$$

$$\vec{a}_s = \frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2}$$

$$\vec{a}_i = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

Eredményeinket a $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_k$ egyenletbe behelyettesítve kapjuk:

$$m \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_k$$

$$m \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_k$$

amely egyenletet **a tömegközéppont tételének** is nevezünk. Eszerint:

> **Egy pontszerű testekből álló rendszer úgy mozog, mintha a rendszer össztömege oda lenne egyesítve, és a külső erők eredője is ott hatna. A belső erők a tömegközéppont helyzetét nem befolyásolják**

Ebből következik a **tömegközéppont megmaradásának tétele:**

> **Zárt mechanikai rendszer (zárt rendszer, ha a külső erők eredője zérus) tömegközéppontja helyben marad, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.**

A tételek nem csak pontszerű testekből álló rendszerekre, hanem kiterjedt testekre, illetve azokból álló rendszerre is igazak.

A $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_k$ egyenletet tovább boncolva, a Newton által eredetileg megadott alakot használva (itt a mi átalakításunkban állandó tömegeket tételezünk fel),

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right)}{dt} = \vec{F}_k$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{I}_i}{dt} = \vec{F}_k$$

de mivel az összegzés és a differenciálás felcserélhető

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i}{dt} = \vec{F}_k$$

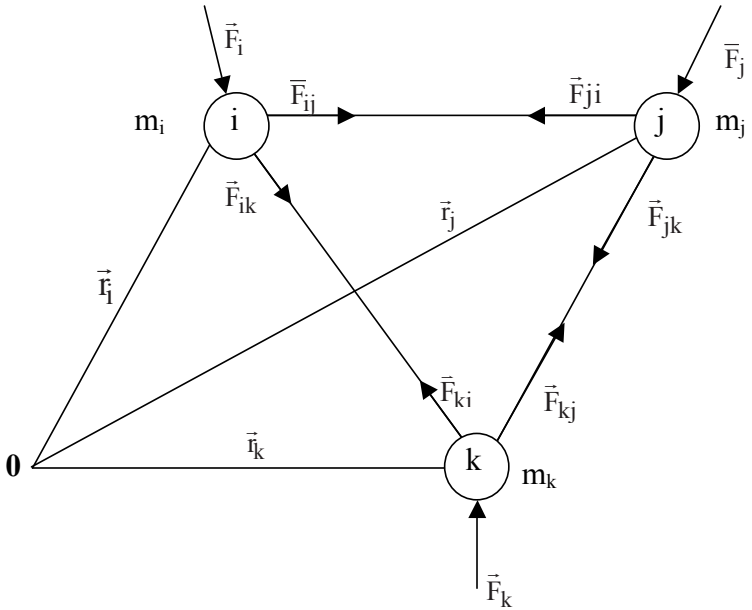
És így mivel $\vec{I}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i$ ezért $\boxed{\frac{d\vec{I}_e}{dt} = \vec{F}_k}$ pontrendszerek impulzus tétele

Pontrendszernek impulzus tétele

- **Pontszerű testekből álló rendszer eredő impulzusát csak a rendszerre ható külső erők határozzák meg, a belső erők nem befolyásolják. Az eredő impulzus megváltozásának a sebességét a rendszerre ható külső erők eredője adja.**
-
- Zárt rendszerre vonatkoztatva, amikor a külső erők eredője zérus, kimondható az **impulzus megmaradás tétele:**
- **Zárt mechanikai rendszer eredő impulzusa állandó.**
-
- Ezt a tételt könnyű belátni, mivel ha $\vec{F}_k = 0$ akkor $\frac{d\vec{I}_e}{dt} = 0$
- azaz $\vec{I}_e = állandó$

4.1. Pontszerű testekből álló mechanikai rendszerek

Tekintsünk egy olyan halmazt, ami pontszerű testekből áll. Ezek száma ne legyen korlátozott. Úgy is felfoghatjuk a következő gondolatsort, mint a valóságos testek modellezésének egy következő lépését, mivel egy kiterjedt testet is lehet véges, vagy végtelen számú pontszerű test halmazának tekinteni. Tegyük fel, hogy mindegyik pontszerű test hat mindegyikre, és mindegyikre hatnak a rendszeren kívüli, ún. külső erők.
Válasszunk ki három testet, az i- ediket a j- ediket és a k- adikat a rendszer és az erők szemléltetésére a 4.1.1 ábra szerint.



4.1.1. ábra Pontszerű testekből álló rendszer egy részlete

Az ábrán $\vec{F}_i, \vec{F}_j, \vec{F}_k$ jelöli a külső és $\vec{F}_{ik}, \vec{F}_{ki}$ a belső erőket, **0** a vonatkozatási rendszer origóját, $\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k$ tömegpontba mutató helyvektorokat. Vegyük észre, hogy a belső erők párosával lépnek fel, és természetesen:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}. \tag{4.1.1}$$

Ekkor a mozgás egyenletek mindegyik tömegpontra felírhatók:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{1n} \tag{4.1.2}$$

.

.

.

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{in} \tag{4.1.3}$$

.

.

.

$$m_n \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_n + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \vec{F}_{n3} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{nn.1} \tag{4.1.4}$$

A továbbiakban többnyire az i-edik tagra írjuk fel az egyenletet, és a belső erőket az

$$\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots\ldots + \vec{F}_{in} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ij} \tag{4.1.5}$$

alakban. Vegyük észre, hogy $\vec{F}_{ii}$ nem lép fel, mert a test önmagára nem hat.

Ha az összes tömegpont dinamikai alapegyenletét összefoglaljuk, akkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{1j} \qquad (4.1.6)$$

.

.

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} \qquad (4.1.7)$$

.

$$m_n \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_n + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{nj} \qquad (4.1.8)$$

Azaz $$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} \qquad (4.1.9)$$

Ahol $\vec{F}_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ a külső erők eredője.

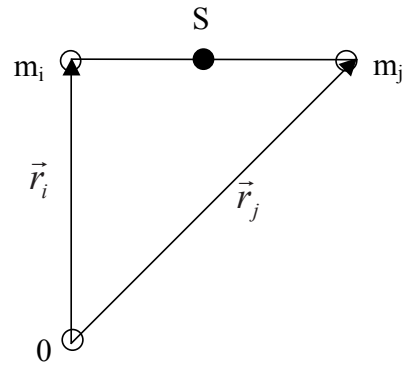
Vegyük észre, hogy a belső erők eredője, a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}$, az alábbiak szerint is elrendezhető:

$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + ... + \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} + ...$ Azonban $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$,

$\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$ és $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, azaz az összeg csupa **0** eredményt adó párokból áll, ami a hatás-ellenhatás elve (a III. axióma) szerint magától értődik.

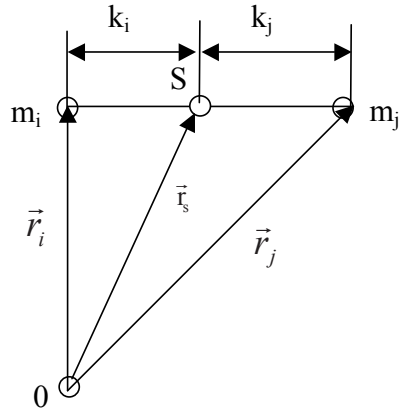
Így a $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_k$ egyenletet kapjuk. (4.1.10)

Ennek további elemzéséhez vezessük be a tömegközéppont, vagy súlypont fogalmát. Ehhez először tekintsünk két tömeget, az i-ediket és a j-ediket (4.1.2. ábra).



4.1.2. ábra Két tömegpont súlypontja

A középiskolai tanulmányink szerint két pontszerű test tömegközéppontja (S) az a pont, ahol a két testet gondolatban összekötő súlytalan rudat alátámasztva a két test és a rúd egyensúlyban van.



4.1.3. ábra A súlypont, vagy tömegközéppont meghatározásának segédábrája

Ekkor a 4.1.3.ábra szerinti jelölésekkel az

$$m_i \cdot g \cdot k_i = m_j \cdot g \cdot k_j \qquad (4.1.11)$$

egyenlet adódik az egyensúly feltételeként. Ezt g-vel egyszerűsítve kapjuk:

$$m_i \cdot k_i = m_j \cdot k_j. \qquad (4.1.12)$$

k_1 helyére beírhatjuk az $\vec{r}_s - \vec{r}_i$ és k_2 helyére az $\vec{r}_j - \vec{r}_s$ vektorokat az egyenletbe, mivel azok egy egyenesbe esnek és egyirányúak, s így

$$m_i\left(\vec{r}_s - \vec{r}_i\right) = m_j\left(\vec{r}_j - \vec{r}_s\right), \qquad (4.1.13)$$

azaz

$$m_i\vec{r}_s - m_i\vec{r}_i = m_j\vec{r}_j - m_j\vec{r}_s, \qquad (4.1.14)$$

és így

$$\vec{r}_s = \frac{m_i\vec{r}_i + m_j\vec{r}_j}{m_i + m_j} \qquad (4.1.15)$$

adódik a két tömegpont tömegközéppontjára, vagy súlypontjára. Be lehet látni, hogy n darab tömegpontra

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad (4.1.16)$$

vagy, mivel $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$, a rendszer teljes tömege,

így

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m}. \qquad (4.1.17)$$

Kis átalakítással:

$$m\vec{r}_s = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \qquad 4.1.18)$$

Kétszer differenciálva az egyenletet kapjuk:

$$m\vec{a}_s = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i, \qquad (4.1.19)$$

ahol $\vec{a}_s = \frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2}$ a rendszer tömegközéppontjának gyorsulása, $\vec{a}_i = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ az i- edik tömegpont gyorsulása.

Eredményeinket a 4.1.10-es egyenletbe behelyettesítve kapjuk:

$$m \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_k, \tag{4.1.20}$$

amely egyenletet **a tömegközéppont tételének** is nevezünk. Eszerint:
Egy pontszerű testekből álló rendszer úgy mozog, mintha a rendszer össztömege oda lenne egyesítve, és a külső erők eredője is ott hatna. A belső erők a tömegközéppont helyzetét nem befolyásolják

Ebből következik a **tömegközéppont megmaradásának tétele:**
Zárt mechanikai rendszer (zárt rendszer, ha a külső erők eredője zérus) tömegközéppontja helyben marad, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

A tételek nem csak pontszerű testekből álló rendszerekre, hanem kiterjedt testekre, illetve azokból álló rendszerre is igazak.
Ezek a tételek igazolják, hogy a súlypont helyzetére nézve a kiterjedt test helyettesítésére egy ponttal, a súlyponttal helyes eredményt ad a súlypont mozgására. A test többi pontjáról azonban még nem mondtunk semmit!

4.2. Impulzus tétel pontrendszerre

A 4.1.10 egyenletet tovább boncolva, a Newton által eredetileg megadott alakot használva (itt a mi átalakításunkban állandó tömegeket tételezünk fel),

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right)}{dt} = \vec{F}_k , \qquad (4.2.1)$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{I}_i}{dt} = \vec{F}_k , \qquad (4.2.2)$$

de mivel az összegzés és a differenciálás felcserélhető

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i}{dt} = \vec{F}_k , \qquad (4.2.3)$$

és így mivel

$$\vec{I}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i , \qquad (4.2.4)$$

ezért:

$$\frac{d\vec{I}_e}{dt} = \vec{F}_k . \qquad (4.2.5)$$

Ezt az egyenlet a **pontrendszernek impulzus tétele,** mely szerint:

Pontszerű testekből álló rendszer eredő impulzusát csak a rendszerre ható külső erők határozzák meg, a belső erők nem befolyásolják. Az eredő impulzus megváltozásának a sebességét a rendszerre ható külső erők eredője adja.

Zárt rendszerre vonatkoztatva, amikor a külső erők eredője zérus, kimondható az **impulzus megmaradás tétele:**
Zárt mechanikai rendszer eredő impulzusa állandó.

Ezt a tételt könnyű belátni, mivel ha

$$\vec{F}_k = 0 \text{ akkor } \frac{d\vec{I}_e}{dt} = 0 , \text{ azaz} \qquad (4.2.6)$$

$$\vec{I}_e = állandó .$$

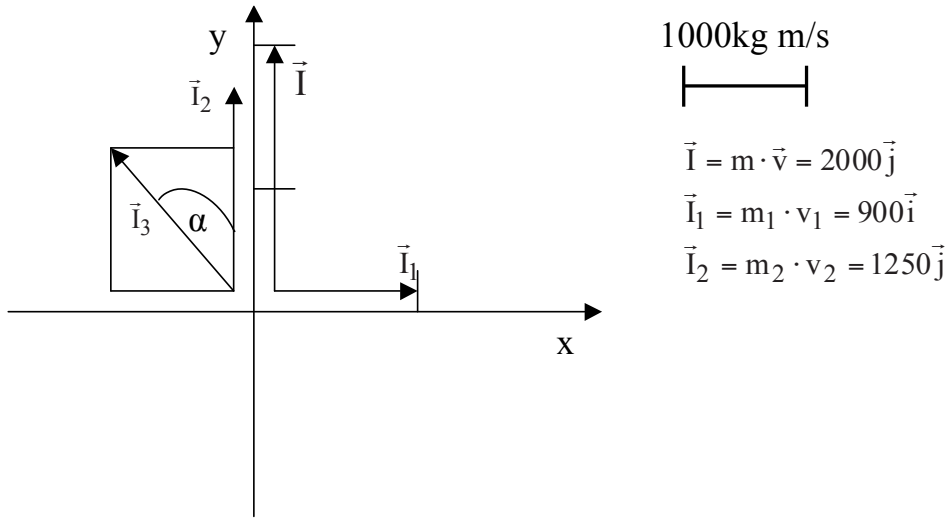
A fenti tételek is igazak mindenféle (tehát nemcsak pontszerű) testekből álló rendszerre.
Az impulzus megmaradás egyik szép példája az adott sebességgel haladó lövedék több darabba való szétrobbanása, amit az alábbiakban mutatunk be.

Mintafeladat:

Egy m=10kg tömegű test v=200m/s sebességgel halad észak felé, amikor felrobban 3 részre. Az egyik, m=3kg tömegű darab keleti irányban repül 300m/s sebességgel, a másik, m_2=5kg tömegű rész északnak folytatja útját 250m/s sebességgel.
Milyenirányba, és mekkora sebességgel halad a harmadik darab?

Megoldás:

Mivel tudjuk, hogy a sebesség és az impulzus vektormennyiség, fel kell venni egy vonatkoztatási rendszert, hogy megadhassuk a vektorok komponenseit.
Mivel semmi nem utal másra, fel lehet tételezni, hogy síkban történik a mozgás. Legyen észak az y és x a keleti irány. Így ha rendre $\vec{i}$ és $\vec{j}$ az egységvektorok, akkor a megadott adatokból a következő vektorokat lehet felírni (4.4. ábra).



4.4. ábra A mintafeladat impulzus vektorai

Mivel a robbanás belső erő, és a közegellenállásról, súrlódásról nem szól a feladat, a rendszert zártnak tekinthetjük így az eredő impulzus nem változik a robbanás során, azaz a robbanás előtti ($\vec{I}_{re}$) impulzus megegyezik a robbanás utáni ($\vec{I}_{ru}$) impulzussal.

$$\vec{I}_{re} = \vec{I}_{ru} \qquad (4.2.7)$$

A robbanás előtti impulzus:

$$\vec{I}_{re} = \vec{I} \qquad (4.2.8)$$

A robbanás utáni:

$$\vec{I}_{ru} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 \qquad (4.2.9)$$

azaz

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 \qquad (4.2.10)$$

és így

$$\vec{I}_3 = \vec{I} - \vec{I}_1 - \vec{I}_2 \qquad (4.2.11)$$

Behelyettesítve ezeket az adatokat, kapjuk:

$$\vec{I}_3 = m \cdot \vec{v} - m_1 \cdot \vec{v}_1 - m_2 \cdot \vec{v}_2 = 2000\vec{j} - 900\vec{i} - 1250\vec{j}$$

$$\vec{I}_3 = 750\vec{j} - 900\vec{i}.kg\frac{m}{s}$$

$$\left|\vec{I}_3\right| = \sqrt{750^2 - 900^2} = 1171{,}5kg\frac{m}{s},$$

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{I}_3}{m} = 375\vec{j} - 450\vec{i}\,\frac{m}{s}$$

$$\left|\vec{v}_3\right| = 585{,}8\frac{m}{s}$$

A sebesség irányára nézve (Lásd: 2.4. ábra):

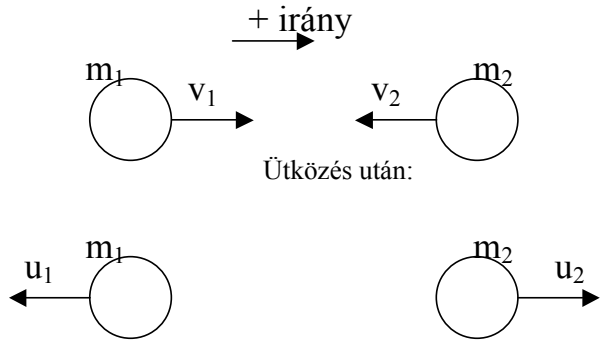
$$tg\alpha = \frac{v_{3x}}{v_{3y}} = \frac{450}{375} = 1{,}2 \rightarrow \alpha = 50{,}2^\circ$$

4.3. Ütközések

Az impulzus-megmaradás tételének további alkalmazásaként az alábbiakban egy rövid áttekintést adunk a centrális, tökéletesen rugalmas és a tökéletesen rugalmatlan ütközésekről.

Tökéletesen rugalmas centrális ütközés:

Centrális ütközésnél az ütköző testek sebessége olyan, hogy annak hatásvonala a másik tömegközéppontján megy át.
Ütközés előtt:



4.3.1.. ábra Tökéletesen rugalmas centrális ütközés

Legyen egy m_1 tömegű $v_1$sebességű test, ami centrálisan ütközik az m_2 tömegű, v_2 sebességű testtel. Az ütközés tökéletesen rugalmas, tehát két test ütközés előtti mozgási energiája megegyezik az ütközés utáni összes mozgási energiájával.
Ha a közegellenállást és a súrlódást, valamint a nehézségi erőt elhanyagoljuk, akkor csak belső erők hatnak, tehát a két testből álló rendszer zárt, azaz az ütközés előtti összimpulzus megegyezik az ütközés utáni összes impulzussal.

Ezek alapján két egyenlet írható fel:

$$E_{\text{müe}} = E_{\text{müu}} \tag{4.3.1}$$

$$\vec{I}_{\text{eüe}} = \vec{I}_{\text{eüu}} \tag{4.3.2}$$

azaz, ha az ütközés utáni sebességet u_1 és u_2 jelöli :

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot u_2^2 \tag{4.3.3}$$

és

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \tag{4.3.4}$$

Az egyenletben elhagytuk a vektorjelet, mert egyenes vonalú mozgásról van szó, s ekkor az előjel helyettesíti azt.

Az egyenletrendszer megoldása:

Az egyenletek átrendezésével kapjuk:

$$m_1 \cdot \left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2 \cdot \left(u_2^2 - v_2^2\right) \tag{4.3.5}$$

$$m_1 \cdot \left(v_1 - u_1\right) = m_2 \cdot \left(u_2 - v_2\right) \tag{4.3.6}$$

A két egyenletet elosztva és a másodikat megtartva két elsőfokú egyenletből álló rendszert kapunk.

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2 \tag{4.3.7}$$

$$m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot u_1 = m_2 \cdot u_2 - m_2 \cdot v_2 \tag{4.3.8}$$

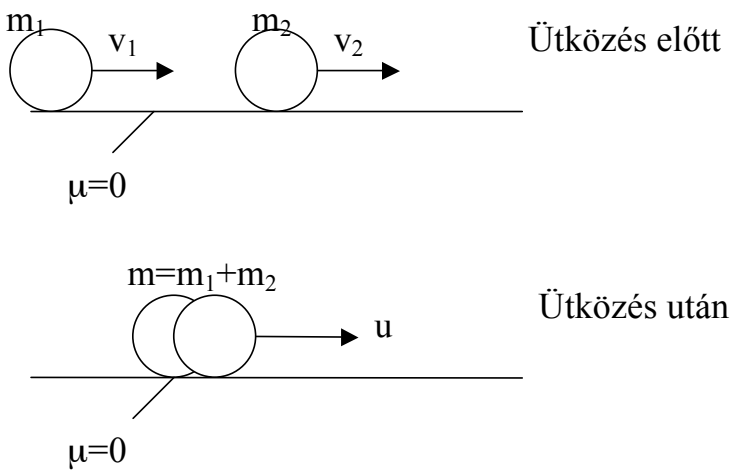
Az utolsó két egyenlet megoldása:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \tag{4.3.9}$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot v_2 \qquad (4.3.10)$$

A megoldásokból látszik, hogy ha $m_1 = m_2$, akkor a sebességek ütközés után helyet cserélnek, és ha az egyik tömeg sokkal nagyobb, mint a másik, akkor ütközés után a másik tömeg sebessége ellenkezőjére vált, nagysága megmarad, (visszapattan a falról a labda, azonos nagyságú, de ellenkező irányú sebességgel).

Tökéletesen rugalmatlan ütközés:



4.3.2.. ábra Tökéletesen rugalmas ütközés

Ütközzön egy m_1 tömegű v_1 sebességű test egy másikkal, amelynek tömege m_2, sebessége v_2 úgy, hogy ütközés után tapadjanak össze, és együtt mozogjanak azonos sebességgel. Ha elhanyagoljuk a súrlódás és a közegellenállás hatását, akkor az ütközés során csak a belső erőkkel kell számolni. Így az impulzus megmaradás tétele érvényes lesz, azaz az ütközés előtti összes impulzus megegyezik az összetapadt két test impulzusával, azaz

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \qquad (4.3.11)$$

A mechanikai energia nem marad meg, ugyanis az ütközés során összetapadt két test deformálódik, fel is melegszik, s az ezekhez szükséges munkát a két test mozgási energiája, vagy annak egy része biztosítja. Így az energia egyenlet az ütközés utáni oldalra beírt E_v energiaveszteséggel lesz érvényes.

$$E_{müe} = E_{müu} + E_v \qquad (4.3.12)$$

$$\text{azaz } \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 + E_v \qquad (4.3.13)$$

A két test együttes sebessége:

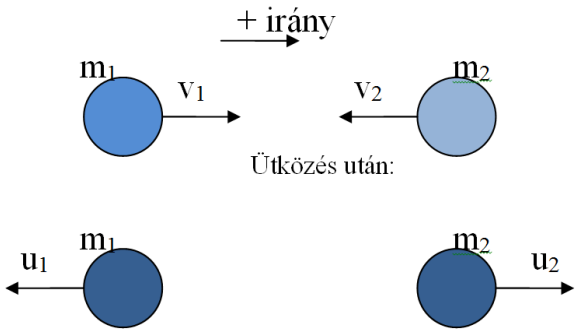
$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \qquad (4.3.14)$$

Ütközések

Tökéletesen rugalmas centrális ütközés:

Centrális ütközésnél az ütköző testek sebessége olyan, hogy annak hatásvonala a másik tömegközéppontján megy át.

Ütközés előtt:



Ezek alapján két egyenlet írható fel:

$$E_{müe} = E_{müu} \qquad \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot u_2^2$$

$$\vec{I}_{eüe} = \bar{I}_{eüu} \qquad m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$$

Az egyenletrendszer megoldása:

•

Az egyenletek átrendezésével kapjuk: $m_1 \cdot \left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2 \cdot \left(u_2^2 - v_2^2\right)$

$$m_1 \cdot \left(v_1 - u_1\right) = m_2 \cdot \left(u_2 - v_2\right)$$

A két egyenletet elosztva és a másodikat megtartva két elsőfokú egyenletből álló rendszert kapunk.

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2$$

$$m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot u_1 = m_2 \cdot u_2 - m_2 \cdot v_2$$

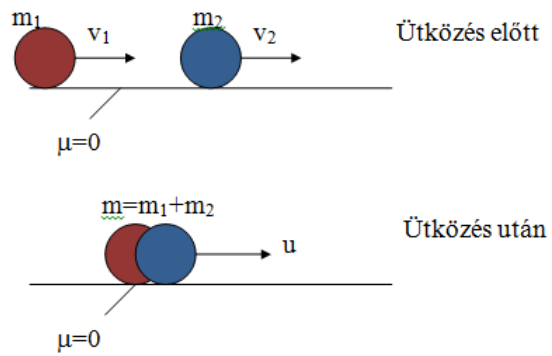
- **Az utolsó két egyenlet megoldása:**

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot v_2$$

A megoldásokból látszik, hogy ha , akkor a sebességek ütközés után helyet cserélnek, és ha az egyik tömeg sokkal nagyobb, mint a másik, akkor ütközés után a másik tömeg sebessége ellenkezőjére vált, nagysága megmarad, (visszapattan a falról a labda, azonos nagyságú, de ellenkező irányú sebességgel).

Tökéletesen rugalmatlan ütközés:



Ütközzön egy m_1 tömegű v_1 sebességű test egy másikkal, amelynek tömege m_2, sebessége v_2 úgy, hogy ütközés után tapadjanak össze, és együtt mozogjanak azonos sebességgel. Ha elhanyagoljuk a súrlódás és a közegellenállás hatását, akkor az ütközés során csak a belső erőkkel kell számolni. Így az impulzus megmaradás tétele érvényes lesz, azaz az ütközés előtti összes impulzus megegyezik az összetapadt két test impulzusával, azaz

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

A két test együttes sebessége:

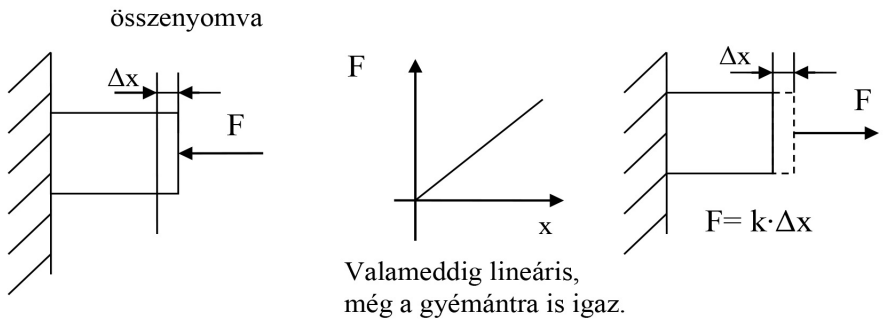
$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

5. fejezet

5. Harmonikus rezgőmozgás

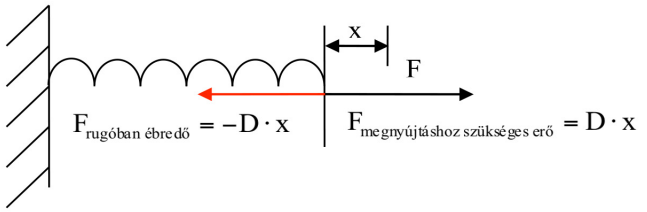
5.1. Csillapítatlan harmonikus rezgések

Az anyagi világban nagyon sokszor látunk, hallunk, érzünk olyan mozgásokat, amelyeknél a mozgásállapot valamilyen módon ismétlődik. Ha ez összekapcsolódik valamilyen közeg deformációjával, akkor rezgésről szokás beszélni. Éppen ezért szűkebb értelemben például az inga mozgását nem szokás rezgésként értelmezni. Ha a közeg, amelynek a deformációjához kapcsoljuk a jelenséget szilárd, akkor az alábbi jelenséget figyelhetjük meg.
Fogjunk be egy szilárd testet az egyik végénél, és nyomjuk össze egyre növekvő erővel, ahogy az az alábbi, 5.1. ábra baloldali részén látszik, majd a jobboldali szerint egyre növekvő erővel húzzuk meg. Azt tapasztaljuk, hogy a deformáció (összenyomódás, vagy megnyúlás) növekszik, ahogy az erő nő, s bizonyos határig a középső ábrán látható módon az adott deformációhoz szükséges erő arányos a deformációval. Ez érvényes minden szilárd testre (még a gyémántra is), de természetesen az anyagi minőségtől függőkülönböző mértékig.



5.1.ábra A rugalmas deformáció összenyomáskor és nyújtáskor

Ahhoz, hogy a jelenség a gyakorlatban alkalmazható legyen, más elrendezést kell használni. Jól bevált az a technika, amelynek során egy huzalt hengerpalástra tekernek, majd a hengert eltávolítják. Az így kapott eszközt rugónak nevezzük, és az alábbi (5.2. ábra) rajzjellel ábrázoljuk.



5.2. ábra Rugó rajzjele és a rá ható, benne ébredő erő

A rúgó megnyújtásához vagy összenyomásához, azaz deformációjához szükséges erő:

$$F = D \cdot x, \qquad (5.1)$$

Ahol D: a rúgóállandó, vagy másképp:

$$D = \frac{F}{x}$$

az egységnyi deformációhoz szükséges erő. Megvalósítás:

A rúgóban ébredő erő:

$$F = -D \cdot x. \qquad \vec{F} = -D \cdot \vec{x}$$

(5.2)

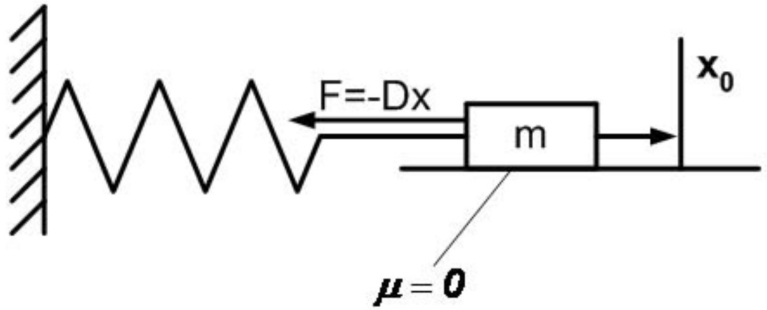
A deformációhoz szükséges munka:

$$W = \frac{1}{2} D \cdot x^2 \qquad (5.3)$$

ennek következtében a rúgóban tárolt energia:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D x^2 \qquad (5.4)$$

Önmagában a rúgónak nincsen haszna, csak ha valamilyen szerkezetben, berendezésben használják. Szinte mindig kapcsolódik egy testhez, amelynek tömege van. Egy rugó, melynek a tömegét elhanyagoljuk, és egy rákötött m tömegű test a legegyszerűbb elrendezés, és jól modellez bonyolultabb helyzeteket, például azt is, amikor rugalmas anyaggal rezgést, vagy zajt csillapítunk. Az alábbi (5.3. ábra) módon a test legyen pontszerű (csak egy téglalappal ábrázoljuk, hiszen a pont nem látszana, végtelen kis kiterjedése miatt), és mozogjon egy olyan felületen amelyiken nincs súrlódás. Az ábrán a rugóban ébredő erő látszik.



5.3. ábra A rugóból és a rákötött testből álló rendszer, és a rugóban ébredő erő

A rúgót nyújtsuk meg x_0 távolsággal és hagyjuk magára. A mozgásegyenlet az alábbi alakot ölti:

$$m \cdot a = F\,, \tag{5.5}$$

Az erőt behelyettesítve kapjuk:

$$m \cdot a = -D \cdot x\,. \tag{5.6}$$

Az előző tanulmányainkból tudjuk, hogy a gyorsulás,

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

az útnak a második differenciál hányadosa.

Így:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + Dx = 0\,, \tag{5.7}$$

a tömeggel egyszerűsítve kapjuk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m} \cdot x = 0\,. \tag{5.8}$$

Legyen

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}\,, \tag{5.9}$$

akkor a differenciál egyenlet:

$$\frac{d^2x}{dt} + \omega^2 \cdot x = 0\,, \tag{5.10}$$

Alakot ölti, amely egy differenciál egyenlet, mert az x = x(t) függvény differenciál hányadosa van benne. Az egyenlet a harmonikus rezgőmozgás differenciál egyenlete.

Az egyenlet megoldása:

$$x = x_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right). \tag{5.11}$$

Az ilyen alakú megoldás teljesen kielégíti a differenciál egyenletet, de helyettesítéssel be lehet látni, hogy ennél egyszerűbb alak is van az alábbi alakban:

$$x = x_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right). \tag{5.12}$$

Az 5.12 kifejezés azt jelenti, hogy ha a testet meghúzzuk, s ezzel a rugót megnyújtjuk, majd elengedjük, akkor, ha az időt és a távolságot attól a pillanattól mérjük, amikor a rugó nyújtatlan, a test helyzete (az ún. kitérése) az idő szinuszos függvénye. A kitérés maximális értéke, azaz a rezgés amplitúdója x_0. A formulában szereplő ω a rezgés körfrekvenciája, amely abból az időből, amely alatt a rezgésállapot ismétlődik, azaz a periódusidőből (T) az alábbiakban származtatható:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{5.13}$$

Mértékegysége:

$$[\omega] = \frac{rad}{s}, \; vagy \quad sokszor: \left(\frac{1}{s}\right).$$

A periódusidő, vagy rezgésidő reciproka a rezgés frekvenciája (f).

$$\frac{1}{T} = f \qquad [f] = \frac{1}{s} = Hz \; .$$

A kitérést végző test a sebessége:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t))}{dt} = x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

azaz:

$$v = x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t), \qquad (5.14)$$

És így a sebesség maximális értéke, vagy a sebesség amplitúdója:

$$v_{max} = \omega \cdot x_0. \qquad (5.15)$$

A gyorsulás:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{dt},$$

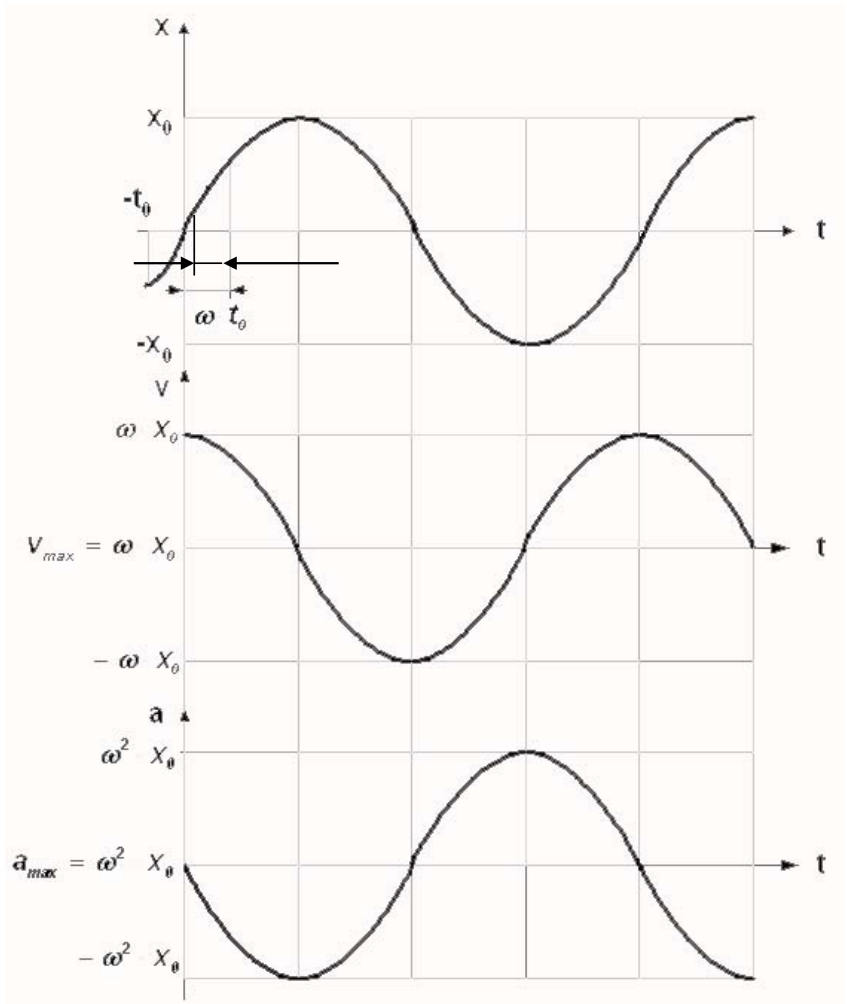
azaz:

$$a = \omega^2 \cdot x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t), \qquad (5.16)$$

és,

$$a_{max} = \omega^2 \cdot x_0 \; . \qquad (5.17)$$

A kitérés-, a sebesség- és a gyorsulás-idő függvényeket az 5.4. ábrán mutatjuk be.



5.4.ábra A harmonikus rezgőmozgás kitérés-, sebesség- és gyorsulás-idő függvénye

Az 5.4. ábra készítésénél, a kitérés zérus helyét úgy vettük fel, hogy arra a pontra essen, ahol a rugó nyújtatlan. Az ábrát vizsgálva láthatjuk, hogy a kitérés függvény (azaz az út idő diagram) akkor a legmeredekebb, amikor a rugó nyugalmi helyzetben van, azaz, amikor a kitérés zérus. Mivel a sebesség ott a legnagyobb, ahol az elmozdulás (kitérés) a leggyorsabban változik, ezért a sebesség-idő diagramnak a rugó alaphelyzetén való áthaladáskor maximuma van.
A gyorsulás függvény az elmozdulás függvény mínusz egy-szerese.

Ha az idő mérését nem akkor kezdjük el, amikor a test a rugó egyensúlyi helyzetén halad át, hanem előtte, vagy utána, a kitérés függvény ennek megfelelően jobbra, vagy balra csúszik. Matematikailag ezt az alábbi függvény írja le:

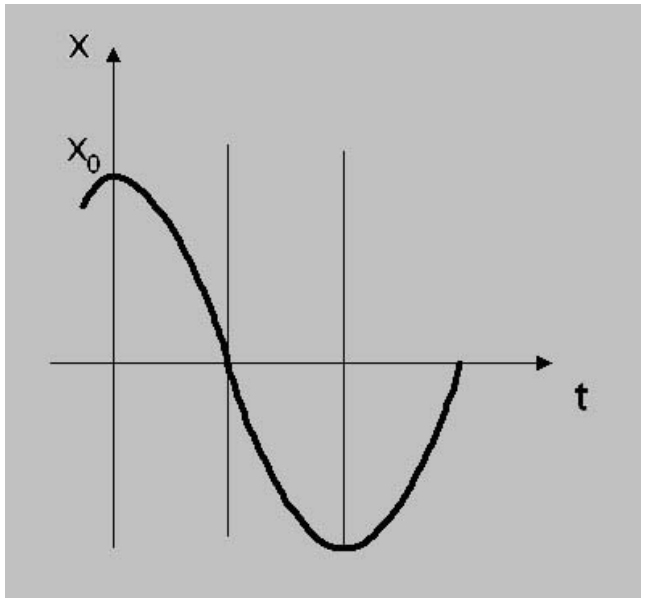
$$x = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \qquad (5.18)$$

ahol φ_0 : az úgynevezett kezdő fázis, és a mérés kezdetének t_0-lal való eltolása esetén meghatározása:

$$\varphi_0 = \omega \cdot t_0. \qquad (5.19)$$

Ha a kitérés függvény eltolódik a t tengelyen valamilyen irányban, ugyanarra és ugyanolyan mértékben teszi ezt az 5.4. ábra mindegyik függvénye. A három függvény egymáshoz viszonyított helyzete nem változik.
A természet számára a sinus és cosinus ugyanaz a függvény.

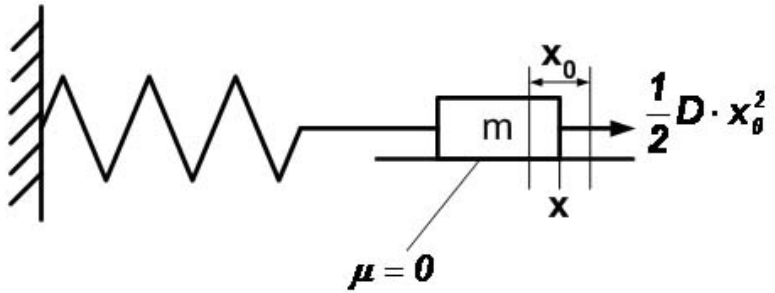
A valóságban, amikor egy rugót egy rákötött testtel együtt megnyújtunk, majd elengedjük, a kitérés függvény a maximális értéknél kezdődik az 5.5. ábrához hasonlóan.



5.5.ábra A megnyújtott és elengedett rugó-tömegpont rendszer kitérés függvénye

A rugóban és a rákapcsolt testben együttesen tárolt energia

Amikor egy D rugóállandójú rugót x értékkel megnyújtunk (5.6. ábra), akkor azon $W = \frac{1}{2}Dx^2$ munkát végzünk, s ennek következtében annak ugyanekkora, úgynevezett potenciális, energiája lesz. Ha elengedjük, a rugó elkezdi húzni, azaz gyorsítani a kezdetben álló testet, amelynek sebessége elkezd növekedni, s ezzel természetesen mozgási energiája lesz. A rugó helyzeti energiája csökken, s a csökkenés alakul át a test mozgási energiájává, feltéve természetese, hogy nincsenek veszteségek



5.6. ábra A rugóból és tömegpontból álló rendszer

A

$$\frac{1}{2}Dx_0^2 = \frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Dx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \qquad (5.20)$$

A test gyorsulása közben a helyzeti energia csökken, a mozgási energia nő, az alábbi egyenlet szerint. A rugó nyújtatlan helyzetében az összes közös energia a testben van mozgási energia formájában, értéke az egyenlet jobb oldalán látható.

A fenti módion létrejövő rezgőmozgás a harmonikus rezgőmozgás, melynek jellemzője, hogy az amplitúdó és a frekvencia egymástól független.

Harmonikus rezgőmozgás

Csillapítatlan harmonikus rezgések

Rezgésről beszélünk általában akkor, ha valamilyen mennyiség az idővel periodikusan változik, vagyis az időnek periodikus függvénye.

A gyakorlati rezgéstani problémák kétfélék lehetnek:

1. Bizonyos berendezéseknél – gépeknél műszereknél – lépnek fel nem kívánt rezgések.
2. Egy adott berendezés rezgőmozgását üzemi körülmények írják elő.

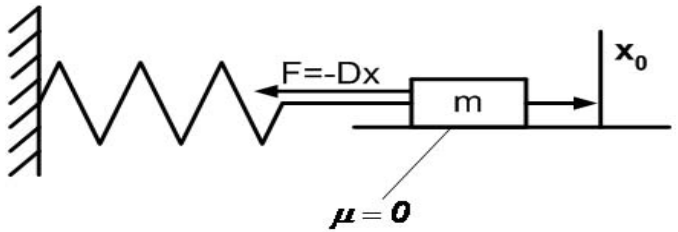
A legegyszerűbb rezgés a harmonikus rezgés egyenes mentén, amelynél az anyagi pont egyensúlyi helyzetből való kitérése az idő szinuszos függvénye:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

A harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele:

Anyagi pont akkor végez harmonikus rezgőmozgást, ha a rá ható erők eredője a nyugalmi helyzettől mért kitéréssel arányos és azzal ellentétes irányú.

Megvalósítás:



A rúgó megnyújtásához vagy összenyomásához, azaz deformációjához szükséges erő:

$$\vec{F} = -D \cdot \vec{x}$$

A deformációhoz szükséges munka:

$$W = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

ennek következtében a rúgóban tárolt energia:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} Dx^2$$

A rúgót nyújtsuk meg x_0 távolsággal és hagyjuk magára. A mozgásegyenlet az alábbi alakot ölti:

$$m \cdot a = F$$

$$m \cdot a = -D \cdot x$$

a gyorsulás: $$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + Dx = 0$$

a tömeggel egyszerűsítve: $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m} \cdot x = 0$$

Legyen $$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

a differenciál egyenlet:

$$\frac{d^2x}{dt} + \omega^2 \cdot x = 0$$

Az egyenlet megoldása:

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Az fenti kifejezés azt jelenti, hogy ha a testet meghúzzuk, s ezzel a rugót megnyújtjuk, majd elengedjük, akkor a test helyzete (az ún. kitérése) az **idő szinuszos függvénye**. A kitérés maximális értéke, azaz a rezgés amplitúdója x_0. A formulában szereplő ω a rezgés körfrekvenciája, amely abból az időből, amely alatt a rezgésállapot ismétlődik, azaz a periódusidőből (T) az alábbiakban származtatható:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad [\omega] = \frac{rad}{s}, \text{ vagy} \left(\frac{1}{s}\right)$$

A periódusidő, vagy rezgésidő reciproka a rezgés frekvenciája (f):

$$\frac{1}{T} = f \qquad [f] = \frac{1}{s} = Hz$$

a sebesség:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t))}{dt} = x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

azaz:

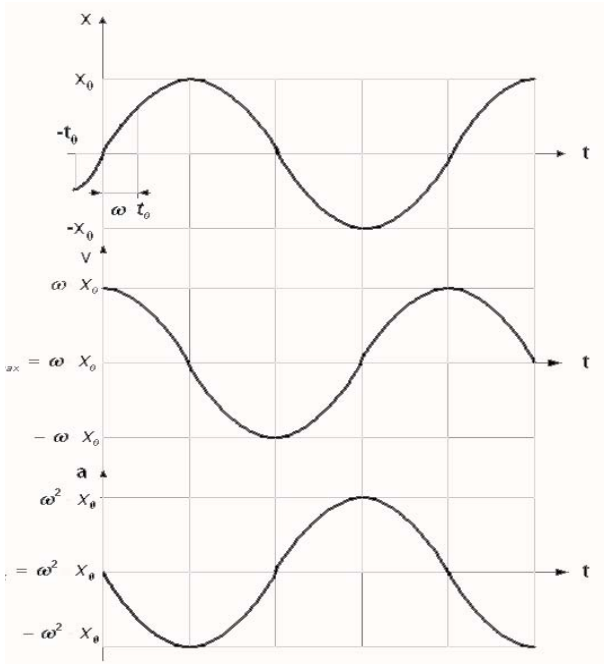
$$v = x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

A gyorsulás:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{dt}$$

$$a = -\omega^2 \cdot x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

A kitérés-, a sebesség- és a gyorsulás-idő függvények:



Ha az idő mérését nem akkor kezdjük el, amikor a test a rugó egyensúlyi helyzetén halad át, hanem előtte, vagy utána, a kitérés függvény ennek megfelelően jobbra, vagy balra csúszik:

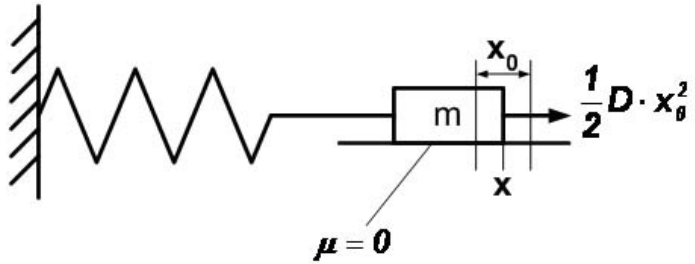
$$x = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

φ_0 : kezdő fázis, meghatározása:

$$\varphi_0 = \omega \cdot t_0$$

Ha a kitérés függvény eltolódik a t tengelyen valamilyen irányban, akkor ugyanarra és ugyanolyan mértékben teszi ezt a sebesség, és a gyorsulás függvény is. A három függvény egymáshoz viszonyított helyzete nem változik.

A rugóban és a rákapcsolt testben együttesen tárolt energia



A test gyorsulása közben a helyzeti energia csökken, a mozgási energia nő. A rugó nyújtatlan helyzetében az összes közös energia a testben van mozgási energia formájában, értéke az egyenlet jobb oldalán látható, a rugó maximális megnyúlása esetén az összes energiát potenciális (rugalmas) energiaként a rugó tárolja.

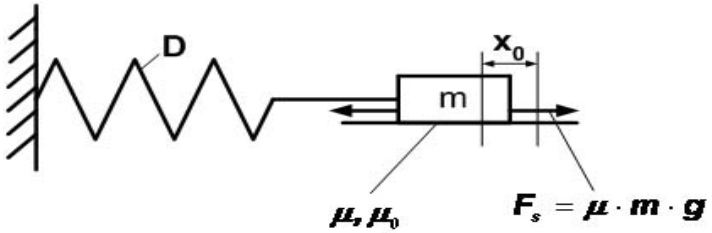
$$\frac{1}{2}Dx_0^2 = \frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Dx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

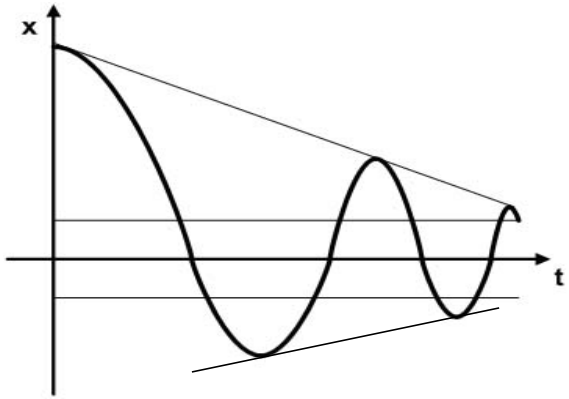
A fenti módon létrejövő rezgőmozgás a harmonikus rezgőmozgás, melynek jellemzője, hogy az amplitúdó és a frekvencia egymástól független.

Csillapított rezgőmozgás

Csillapítás Coulomb-féle száraz súrlódási erővel

Ha a rugóhoz rögzített testre súrlódási erő hat, akkor a súrlódási munka csökkenti a rugó és a test közös energiáját.

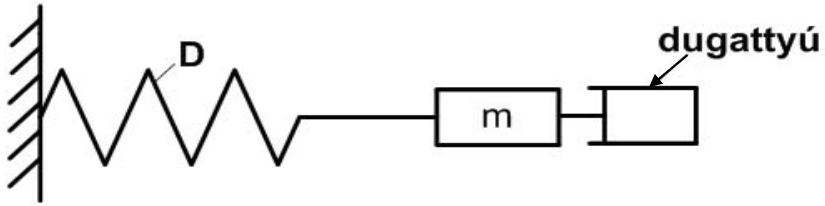




A Coulomb-féle száraz súrlódási erő hatása alatt álló rezgőmozgás esetében az amplitúdó időben lineárisan csökken, és a test megáll, ha a felülettel párhuzamos erőkomponens a nyugalmi súrlódási erő maximális értéke, $\mu_0 mg$ alá csökken

Sebességgel arányos erővel csillapított harmonikus rezgőmozgás

A műszaki gyakorlatban nagyon sok esetben a rezgő alkatrész olyan közegben (gáz, vagy folyadék) mozog, ami közegellenállási erővel fékezi azt. Ebben az esetben a közegellenállási erő, ami a csillapító erő, nagyon sok gyakorlati esetben jó közelítéssel a test sebességével arányos.



A súrlódási erő így: $$F_s = -kv = -k\frac{dx}{dt}$$

A dinamika alapegyenlete: $$m \cdot a = -Dx - k\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{md^2x}{dt} + k\frac{dx}{dt} + Dx = 0$$

A tömeggel egyszerűsítve:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{D}{m}x = 0$$

Legyen: $\beta = \frac{k}{2m}$; és $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Így az egyenlet szokásos alakja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Az egyenlet egy differenciálegyenlet, amely a sebességgel arányos erővel csillapított rezgés alapegyenlete.

A differenciálegyenlet megoldásának 3 különböző esete van:

a. Kis csillapítás esetében:

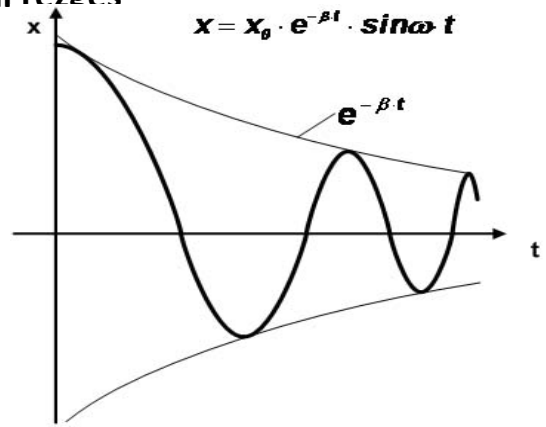
- Műszer mutató
- Robotkar

ez akkor valósul meg, ha: $\beta^2 \langle\langle \omega_0^2$

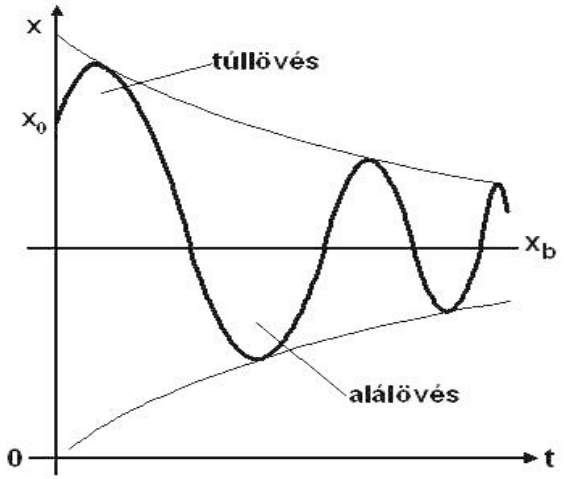
Legyen: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

A létrejövő rezgést két, egy elméletileg, és egy a gyakorlatban fontos esetre vizsgáljuk

1, „0", vagy a rugó egyensúlyi helyzete körüli rezgés



2, Beállított érték körüli rezgés



Mindkét esetben jól látszik, hogy a rezgés amplitúdója az idővel exponenciálisan csökken, a „0”.körüli rezgés esetében a kitérés függvény matematikai alakja az egyensúlyi helyzetben kezdett mérés esetében:

$$x = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

A beállított érték körüli rezgés hasonló alakú függvényt eredményez. Ez valósul meg a gyengén csillapított műszermutató esetén a mutatott (mért érték körül), vagy a robotkarnál a beállított helyzet körül, vagy egy szabályzó berendezésnél.

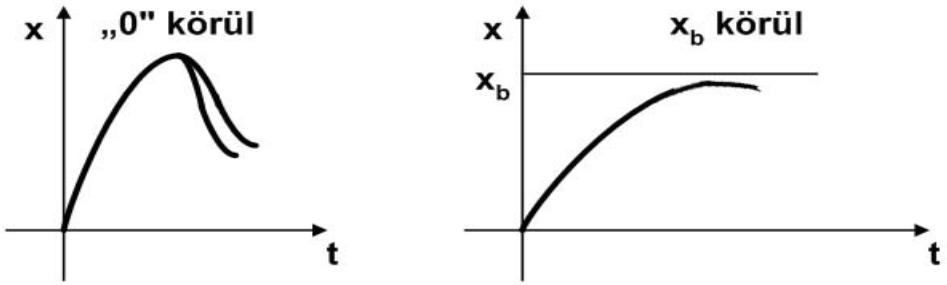
b. Nagy csillapítás esetében:
Ha a fenti példában a csillapítást túlságosan erősre állítjuk be akkor ez az eset áll elő. Ilyenkor:

$$\beta^2 \rangle \omega_0^2$$

A kitérés függvény ebben az esetben:

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2 + 4\beta^2\omega_0^4}} \operatorname{sh}(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot t)$$

A kitérés függvények:



A túlcsillapítás miatt a rezgő rendszer nem éri el azt az értéket, amit el kellene érnie, hanem valamilyen, előre nem ismert értéknél megáll (aperiodikus mozgás).

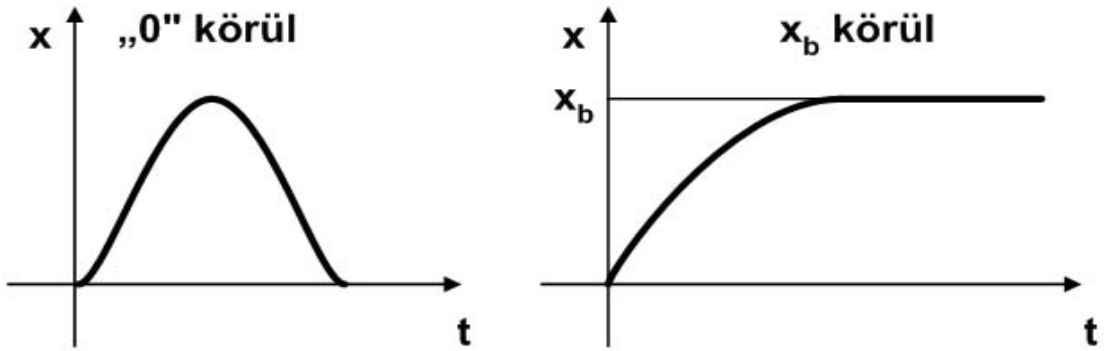
c. Aperiodikus határeset:

Ha azt akarjuk elérni, hogy a műszermutatója túllövés és alálövés nélkül gyorsan elérje a kívánt értéket, vagy a szabályozó pontosan és rövid idő alatt álljon be a kívánt értékre, vagy a robotkar pontosan, késlekedés nélkül a helyére vigye az alkatrészt, akkor a csillapítást olyan értékre kell beállítanunk, hogy teljesüljön az alábbi egyenlet:

$$\beta^2 = \omega_0^2$$

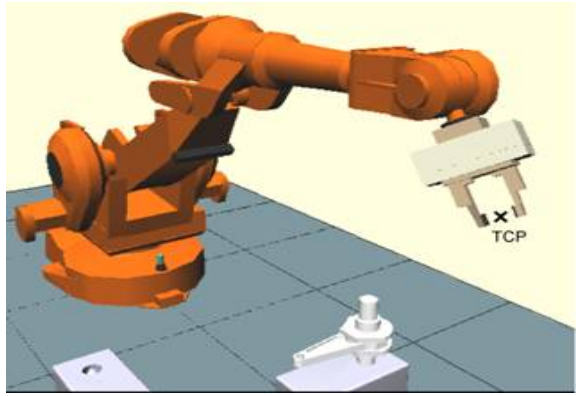
Ebben az esetben a kitérés függvény:

$$x = v_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$



Mutatós műszerek esetén célszerű a mutató lengésének aperiodikus határesetét beállítani, mert a műszer mutatója ekkor állapodik meg leghamarabb az egyensúlyi helyzetben.





5.2. Csillapított rezgőmozgás

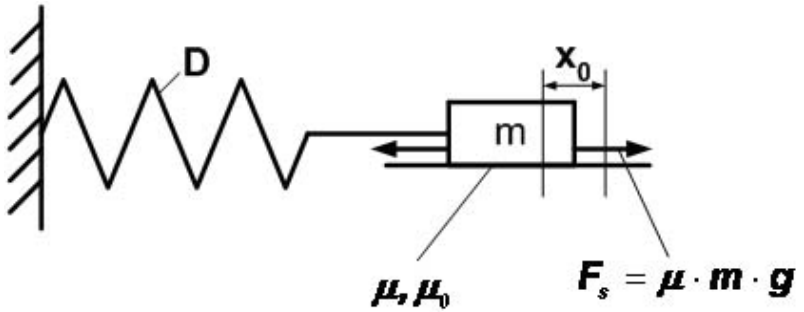
Ha valaki hangok előállításával, továbbításával, felvételével, lejátszásával foglalkozik, tevékenységét nagyban befolyásolják bizonyos rezgések, vagy idegen hanghatások, illetve a hangok előállításával, vagy keletkezésével kapcsolatban sokszor gondoskodni kell, hogy azok másokat ne zavarjanak. Ezért feltétlenül fontos megérteni a rezgések csillapításával, illetve csillapodásával kapcsolatos alapelveket, hogy a fenti feladatot el tudjuk végezni, vagy azért, hogy azokkal, akik a hang és rezgéscsillapítást végzik legalább szót tudjunk érteni. Hasonló a helyzet minden mechanikus, és egyéb szerkezettel, amelyek érzékenyek a mechanikai rezgésekre.
Az így nyert ismeretek még általánosabb alkalmazása is lehetséges, hiszen minden olyan folyamatban, amely során van két különböző energia tároló, s azokat kapcsolatba hozzuk, úgy rezgés, esetleg harmonikus rezgéshez hasonló jelenség alakul ki.

A rezgések csillapítása sokszor nem kerülendő, hanem egyenesen kívánatos. Ilyen eset a fenti zaj és rezgéscsillapítás mellet az egyes mechanikai részeket tartalmazó műszerek, szabályozó berendezések esete is. A legegyszerűbb példa talán egy mutatós műszer, amelyben általában van egy adott tömegű mutató, és rákötve egy (többnyire) csavarrugó. A mutató tömege a rugó rugóállandójával együtt meghatározott mechanikai rezgésre képes rezgést alkot, és ha energiát kap, azaz kitér, akkor rezgő rendszer csillapítás nélkül rezegne, a mutatót nem tudnánk leolvasni. Ennek értelmében tudatosan meghatározott csillapítást építenek a szerkezetbe.

Visszatérve a mechanikai rezgésekre: ha az előző fejezetben leírt harmonikus rezgés energiáját valamilyen módon elvonjuk, a rezgési amplitúdó csökkenni kezd. Ez nagyon sokféleképpen megvalósulhat, azonban műszakilag az alábbi két eset a legfontosabb.

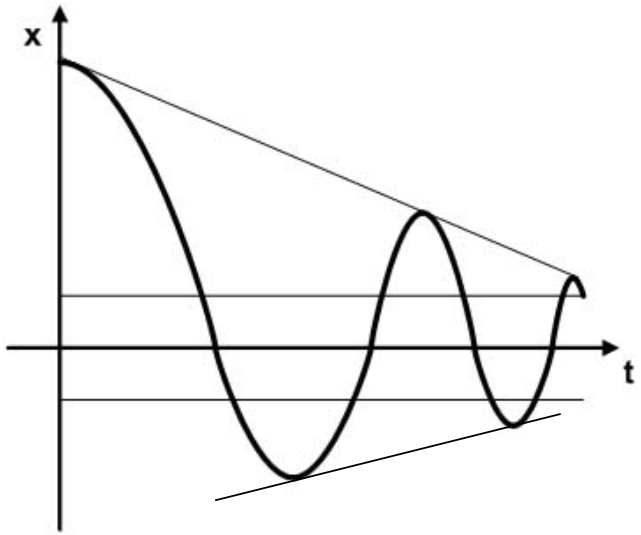
Csillapítás Coulomb-féle száraz súrlódási erővel

Ha a rugóhoz rögzített testre súrlódási erő hat, a 5.2.1.. ábrán látható módon. Akkor a súrlódási munka csökkenti a rugó és a test közös energiáját. Az ábra szerinti mozgási súrlódási erő minden félperiódusban ellenkező irányúvá válik, mert a mozgás iránya is azt teszi, és mivel a mozgási súrlódási erő ellentétes a test sebességével.



5.2.1.ábra A Coulomb-féle száraz súrlódási erővel csillapított rezgés mozgási súrlódási ereje, ha a rugóban húzóerő ébred

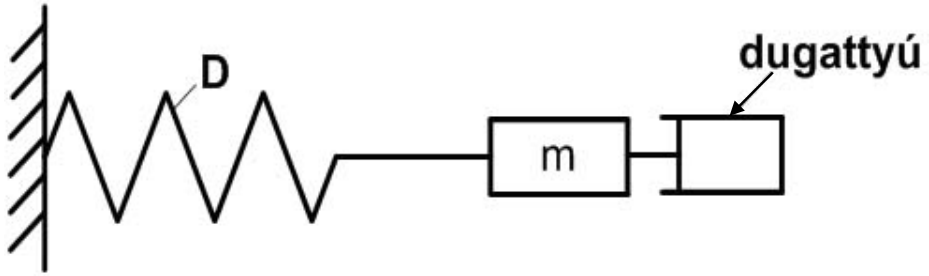
A Coulomb-féle száraz súrlódási erő hatása alatt álló rezgőmozgás esetében az amplitúdó időben lineárisan csökken, a 5.2.2.. ábra szerint, és a test megáll, ha a felülettel párhuzamos erőkomponens a nyugalmi súrlódási erő maximális értéke, $\mu_0 mg$ alá csökken (feltéve, hogy csak a nehézségi erő hat a rugóerőn kívül, mint szabad erő). Hogy ez a megállás az egyensúlyi helyzettől milyen távolságra történik, nem tudjuk előre megmondani, csak annyit, hogy akörül bizonyos intervallumon belül. Ezért ezt a csillapítási szituációt kerülni kell.



5.2.2.. ábra Coulomb-féle száraz súrlódással csillapított rezgőmozgás kitérés függvénye

Sebességgel arányos erővel csillapított harmonikus rezgőmozgás

A műszaki gyakorlatban nagyon sok esetben a rezgő alkatrész olyan közegben (gáz, vagy folyadék) mozog, ami közegellenállási erővel fékezi azt. Ebben az esetben a közegellenállási erő, ami a csillapító erő, nagyon sok gyakorlati esetben jó közelítéssel a test sebességével arányos. Ezt az állapotot jól modellezi a 5.2.3. ábra, ahol a csillapító tag egy dugattyú, ami egy zárt hengerben mozog.



5.2.3.. ábra Sebességgel arányos erővel csillapított rezgő rendszer

A súrlódási erő így:

$$F_s = -kv = -k\frac{dx}{dt}. \qquad (5.2.1)$$

A dinamika alapegyenletében így a csillapító (közegellenállási) erő is szerepel az alábbi módon:

$$m \cdot a = -Dx - k\frac{dx}{dt}. \qquad (5.2.2.)$$

A sebesség és a gyorsulás analitikai kifejezését beírva kapjuk:

$$\frac{md^2x}{dt} + k\frac{dx}{dt} + Dx = 0. \qquad (5.2.3)$$

A tömeggel egyszerűsítve,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{D}{m}x = 0. \qquad (5.2.4)$$

Az egyenlet és főleg az eredmények egyszerűbb kezelése érdekében legyen

$$\beta = \frac{k}{2m}; \quad \text{és} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Így az egyenlet szokásos alakja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (5.2.5)$$

Az egyenlet egy differenciál egyenlet, amely a sebességgel arányos erővel csillapított rezgés alapegyenlete.

A differenciálegyenlet megoldásának 3 különböző esete van:

a. Kis csillapítás esetében:
Azaz olyan esetben, amikor például a fentebb említett rugóból és a tömeggel rendelkező műszermutatóból álló rendszert csillapítani akarjuk azért, hogy hamar beálljon a mutatott értékre, vagy amikor a természetesen tömeggel, s rugalmassággal rendelkező robotkart, ami éppen egy alkatrészt akar elvinni valahova, a célnál megállítjuk, de csillapítás nélkül rezegne, akkor a csillapítást kísérletezés közben alacsonyra állítjuk.
A részletesebb vizsgálatok azt mutatják, hogy ez akkor valósul meg, ha

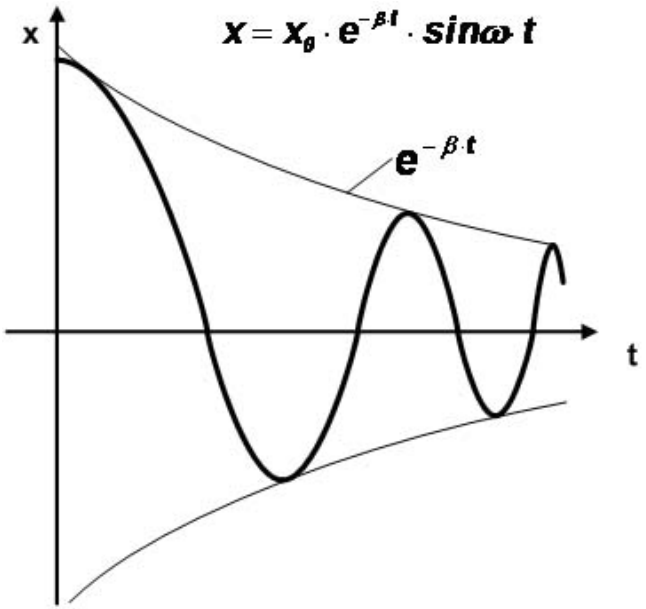
$$\beta^2 \langle\langle \omega_0^2. \qquad (5.2.6)$$

Az eredmények könnyebb kezelhetősége miatt legyen

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (5.2.7)$$

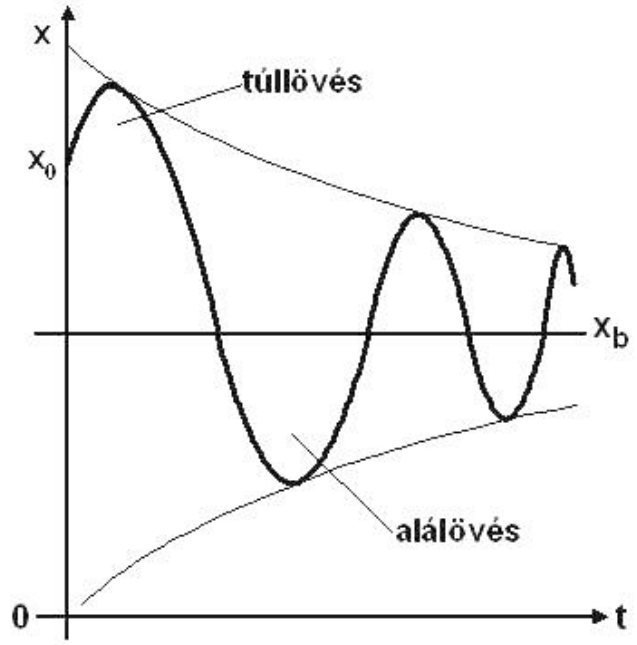
A létrejövő rezgést két, egy elméletileg, és egy a gyakorlatban fontos esetre vizsgáljuk

1, „0”, vagy a rugó egyensúlyi helyzete körüli rezgés (5.2.4. ábra)



5.2.4. ábra Sebességgel arányos erővel csillapított rezgés kitérés függvénye a „0” egyensúlyi helyzet körül

2, Beállított érték körüli rezgés (5.2.5. ábra)



5.2.5. ábra Sebességgel arányos erővel csillapított rezgés kitérés függvénye beállított érték körül

Mindkét esetben jól látszik, hogy a rezgés amplitúdója az idővel exponenciálisan csökken, a „0”.körüli rezgés esetében a kitérés függvény matematikai alakja az egyensúlyi helyzetben kezdett mérés esetében:

$$x = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \,. \qquad (5.2.8)$$

A beállított érték körüli rezgés hasonló alakú függvényt eredményez. Ez valósul meg a gyengén csillapított műszermutató esetén a mutatott (mért érték körül), vagy a robotkarnál a beállított helyzet körül, vagy egy szabályzó berendezésnél.

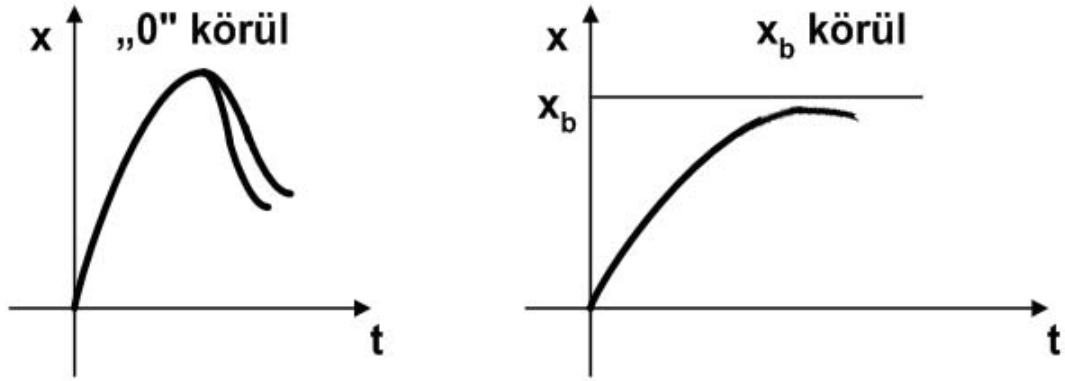
b. Nagy csillapítás esetében:
Ha a fenti példában a csillapítást túlságosan erősre állítjuk be akkor ez az eset áll elő.
Ilyenkor:

$$\beta^2 \rangle \omega_0^2 . \qquad (5.2.9)$$

A kitérés függvény ebben az esetben:

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2 + 4\beta^2\omega_0^4}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) . \qquad (5.2.10)$$

A kitérés függvényeket a 5.2.6. ábrán láthatjuk.



5.2.6. ábra Túlcsillapított rezgés kitérés függvényei

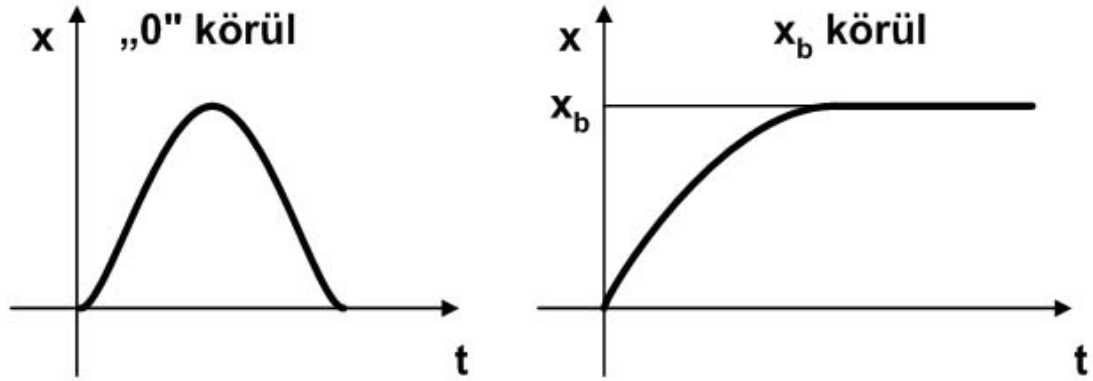
A túlcsillapítás miatt a rezgő rendszer nem éri el azt az értéket, amit el kellene érnie, hanem valamilyen, előre nem ismert értéknél megáll.

c. Aperiodikus határeset:
Ha azt akarjuk elérni, hogy a műszermutatója túllövés és alálövés nélkül gyorsan elérje a kívánt értéket, vagy a szabályozó pontosan és rövid idő alatt álljon be a kívánt értékre, vagy a robotkar pontosan, késlekedés nélkül a helyére vigye az alkatrészt, akkor a csillapítást olyan értékre kell beállítanunk, hogy teljesüljön az alábbi egyenlet:

$$\beta^2 = \omega_0^2. \qquad (5.2.11)$$

Ebben az esetben a kitérés függvényt az alábbi egyenlet írja le (5.2.7. ábra):

$$x = v_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}. \qquad (5.2.12)$$

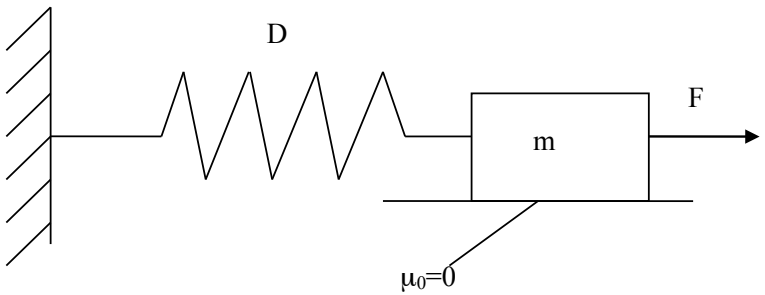


5.2.7. ábra A kitérés függvény aperiodikus határesetben

5.3. Kényszerített rezgések

Az előző fejezetben már említettük, hogy ha egy rúgó és egy tömegpont kapcsolatba kerül és energiát adunk erre a két tagból álló rendszerre, akkor az rezgésbe jön, a kapott energiát a rúgó és a tömegpont cserélgeti, az egyik rugalmas a másik mozgási energiát tárolva.
Hasonló jelenség figyelhető meg akkor is, ha a rugó és a test ugyanaz az objektum, egy rugalmas tartó. Gondoljunk arra, hogy egy rugalmas pálca, vagy lemez rezgésbe jön, ha megütjük. Különösen jól látszik ez, ha az egyik végük be van fogva. A rezgés csillapodó, és többnyire sebességgel arányos csillapító erővel leírható rezgés. Tovább gondolva az általánosítást, egy másik gyakorlati példát is érdemes megnézni.
Mindannyian ültünk már olyan autóban, amelyik útja során olyan talajon haladt, ahol egyenlő távolságban lévő úthibákon kellett átjutnia. Tapasztalataink szerint ilyen esetben a jármű sebességétől függően az egyes hibákon való áthaladáskor a „zökkenés” mértéke jelentősen növekedhetett is. A gépkocsi tömegéből és rúgóiból álló rezgő rendszer az úthibákon való áthaladással energiát kapott (többnyire a zökkenők utáni súlypont süllyedés során, a nehézségi erő munkája következtében), egyes esetekben a saját rezgésének periódus idejében, s ezt az energiát egyre nagyobb és nagyobb rezgési amplitúdó formájához jelenítette meg a jármű.
Ennek a jelenségnek a leírását adjuk meg az alábbi levezetésben.

Egyszerűsítve a gépkocsi tömeg-rúgó rendszert, és a periodikus úthibákat, az alábbi ábrán adjuk meg jelenség modelljét. 5.3.1.ábra)



5.3.1. ábra Az egyszerűsített rezgő rendszer

A D rúgó állandójú rúgó helyettesíti a jármű rúgóit, az m tömegpont a tömegét, F a periodikus úthibákat úgy, hogy

$$F = F_0 \cdot \sin \omega_g \cdot t \,. \tag{5.3.1}$$

Ekkor a dinamika alapegyenlete, feltéve, hogy van sebességgel arányos csillapítás is az:

$$m \cdot a = -D \cdot x - k \cdot v + F_0 \cdot \sin \omega_g \cdot t \tag{5.3.2}$$

alakot ölti. Átrendezve és a tömeggel osztva kapjuk:

$$a + \frac{k}{m} v + \frac{D}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega_g t \,. \tag{5.3.3}$$

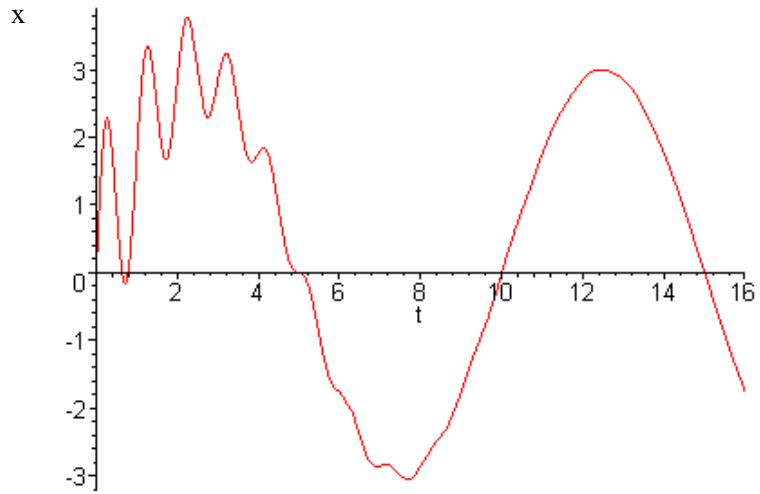
Bevezetve a $\beta = \frac{k}{2m}$, az $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ és az $a_0 = \frac{F_0}{m}$ jelöléseket, valamint a gyorsulás és a sebesség kitérésből való kifejezését az alábbi differenciál egyenlethez jutunk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a_0 \sin \omega_g t \,. \tag{5.3.4}$$

Most, ebben a stádiumban tekintsük csak a kis csillapítás esetét, azaz legyen $\beta^2 \langle \omega_0^2$, s vezessük be az $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ kifejezést. Ekkor a megoldást az alábbi formában kapjuk meg:

$$x = A \sin\left(\omega_g t - \delta\right) + x_0 e^{-\beta \cdot t} \sin\left(\omega_s t + \varphi\right). \tag{5.3.5}$$

Ez szemmel láthatóan két tagból áll. A második a rúgóból és a tömegpontból álló rendszer saját frekvenciájával $\left(f = \frac{\omega_S}{2\pi}\right)$ történő rezgése, amint viszonylag hamar elhanyagolhatóvá csillapodik az $e^{-\beta t}$ szorzótényező miatt. Bizonyos idő után, tehát marad az első tag, ami az ω_g körfrekvenciájú gerjesztésre adott válasz. A két rezgés időbeli lefolyását illusztrálja az 5.3.2. ábra:



5. 3.2. ábra Kényszerített rezgés két komponense

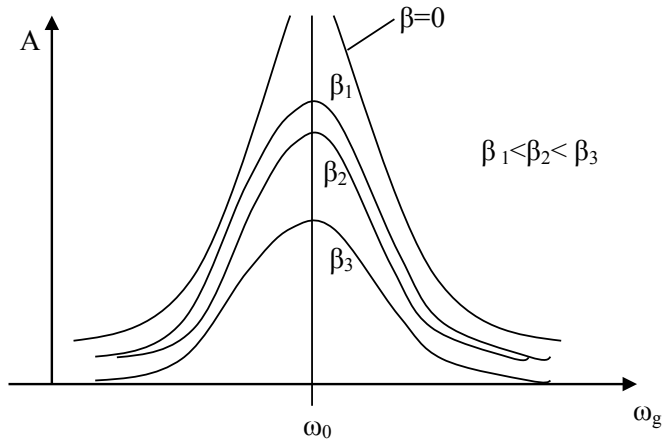
A gerjesztésre adott válasz, ami tartósan fennmarad az:

$$x = A\sin\left(\omega_g t - \delta\right) \qquad (5.3.6)$$

alakban adható meg, ahol az A amplitúdó függ a gerjesztő rezgés körfrekvenciájától

az $$A = \frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_g^2\right) + 4\beta^2\omega_g^2}} \qquad (5.3.7)$$

egyenlet szerint. Ez az egyenlet azt jelenti, hogy a gerjesztő frekvencia változtatásával változik az amplitúdó, úgy hogy ha az ω_g az ω_0- hoz közeledik, jelentősen növekszik, zérus csillapítás esetében a végtelenig nő. (5.3.3. ábra)



5.3.3. ábra Kényszerített rezgést végző rendszer amplitúdója, mint a gerjesztési frekvencia függvénye

Vegyük észre, hogy a csillapítás növelésével a maximumok az alacsonyabb frekvenciák felé tolódnak el.

Kis csillapítás esetében példaként az említett gépkocsiban az egymás után következő úthibák egyre nagyobb amplitúdókat generálnak. Arra célszerű gondolni, hogy az energia úgy érkezik, hogy a maximálisan összenyomott rúgót minden egyes lökés erősebben összenyomja, vagy a maximálisan megnyújtott rúgót tovább nyújtja. Az egymás utáni energia lökések egyre nagyobb amplitúdót eredményeznek, ún. rezonancia lép fel, s ha az amplitúdó túllépi a rúgó szilárdsági határát az el is szakadhat, „rezonancia katasztrófa" játszódhat le.
Az egyik ilyen rezonancia katasztrófát, az Amerikai Egyesült Államok Takoma folyójának hídján figyelték meg, amikor egy alkalommal a széllökések frekvenciája megegyezik a híd torziós (csavarási) rezgéseinek frekvenciájával, s néhányszor tíz rezgés után a híd összeomlott.
Hasonló okokból nem engedték meg már a rómaiak sem, hogy a csapataik lépést tartva menjenek át a hídon.
A gerjesztő rezgés és a rá adott válasz közötti fáziskülönbség, a (5.3.5.) egyenlet δ-ja, szintén függ az ω_g-től a 5.40-es egyenlet szerint:

A fáziskülönbség matematikai alapja:

$$tg\delta = \frac{2\beta\omega_g}{\omega_0^2 - \omega_g} \qquad (5.3.8)$$

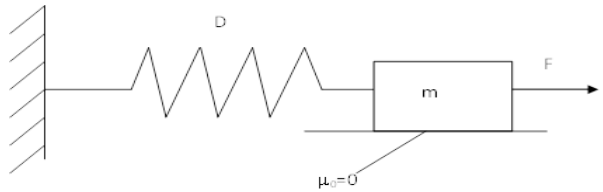
Kényszerített rezgések

Az előző fejezetben láttuk, hogy ha egy rugó és egy tömegpont kapcsolatba kerül és energiát adunk erre a két tagból álló rendszerre, akkor az rezgésbe jön, a kapott energiát a rúgó és a tömegpont cserélgeti, az egyik rugalmas a másik mozgási energiát tárolva.

Hasonló jelenség figyelhető meg akkor is, ha a rugó és a test ugyanaz az objektum, egy rugalmas tartó. Gondoljunk arra, hogy egy rugalmas pálca, vagy lemez rezgésbe jön, ha megütjük. Tovább gondolva az általánosítást, egy másik gyakorlati példát is érdemes megnézni.

Mindannyian ültünk már olyan autóban, amelyik útja során olyan talajon haladt, ahol egyenlő távolságban lévő úthibákon kellett átjutnia. Tapasztalataink szerint ilyen esetben a jármű sebességétől függően az egyes hibákon való áthaladáskor a „zökkenés” mértéke jelentősen növekedhetett is. A gépkocsi tömegéből és rúgóiból álló rezgő rendszer az úthibákon való áthaladással energiát kapott (többnyire a zökkenők utáni súlypont süllyedés során, a nehézségi erő munkája következtében), egyes esetekben a saját rezgésének periódus idejében, s ezt az energiát egyre nagyobb és nagyobb rezgési amplitúdó formájához jelenítette meg a jármű.

Egyszerűsítve a gépkocsi tömeg-rúgó rendszert, és a periodikus úthibákat, az alábbi ábrán adjuk meg jelenség modelljét:



A D direkciós erejű rugó helyettesíti a jármű rúgóit, az m tömegpont a tömegét, F a periodikus úthibákat úgy, hogy

$$F = F_0 \cdot \sin \omega_g \cdot t$$

A dinamika alapegyenlete, feltéve, hogy van sebességgel arányos csillapítás is:

$$m \cdot a = -D \cdot x - k \cdot v + F_0 \cdot \sin \omega_g \cdot t$$

a tömeggel osztva kapjuk:

$$a + \frac{k}{m} v + \frac{D}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega_g t$$

Bevezetve a $\beta = \frac{k}{2m}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ $a_0 = \frac{F_0}{m}$ jelöléseket

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a_0 \sin \omega_g t$$

tekintsük csak a kis csillapítás esetét, azaz legyen: $\beta^2 \langle \omega_0^2$

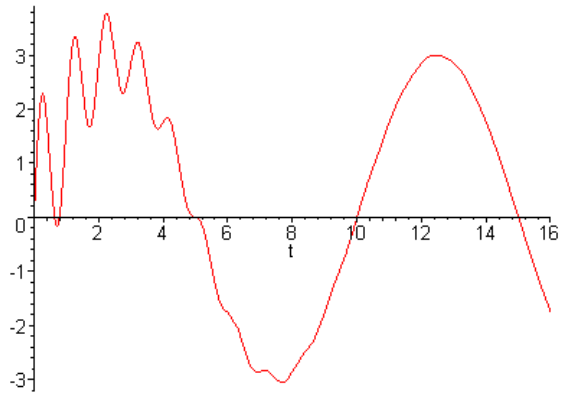
bevezetve az

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Ekkor a megoldás:

$$x = A\sin\left(\omega_g t - \delta\right) + x_0 e^{-\beta\cdot t}\sin\left(\omega_s t + \varphi\right)$$

Ez a kifejezés két tagból áll. A második a rúgóból és a tömegpontból álló rendszer saját frekvenciájával történő rezgése, ami viszonylag hamar elhanyagolhatóvá csillapodik az $e^{-\beta\cdot t}$ szorzótényező miatt. Bizonyos idő után, tehát marad az első tag, ami az ω_g körfrekvenciájú gerjesztésre adott válasz.



A gerjesztésre adott válasz, ami tartósan fennmarad az:

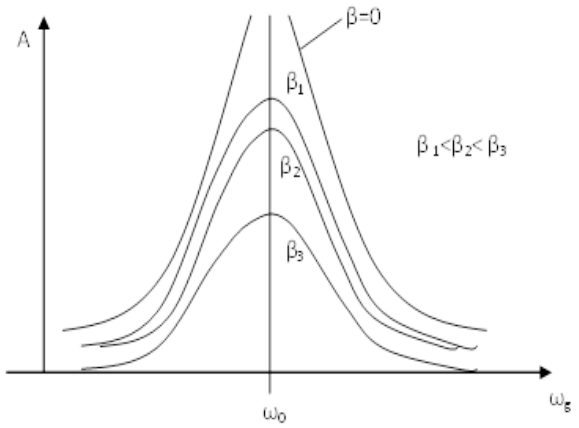
$$x = A\sin\left(\omega_g t - \delta\right)$$

alakban adható meg, ahol az A amplitúdó függ a gerjesztő rezgés körfrekvenciájától az

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_g^2\right) + 4\beta^2\omega_g^2}}$$ egyenlet szerint.

Ez az egyenlet azt jelenti, hogy a gerjesztő frekvencia változtatásával változik az amplitúdó, úgy hogy ha az ω_g az ω_0- hoz közeledik, jelentősen növekszik, zérus csillapítás esetében a végtelenig nő.

Kényszerített rezgést végző rendszer amplitúdója, mint a gerjesztési frekvencia függvénye



Kis csillapítás esetében példaként az említett gépkocsiban az egymás után következő úthibák egyre nagyobb amplitúdókat generálnak. Arra célszerű gondolni, hogy az energia úgy érkezik, hogy a maximálisan összenyomott rúgót minden egyes lökés erősebben összenyomja, vagy a maximálisan megnyújtott rúgót tovább nyújtja. A egymás utáni energia lökések egyre nagyobb amplitúdót eredményeznek, ún. rezonancia lép fe s ha az amplitúdó túllépi a rúgó szilárdsági határá az el is szakadhat, „rezonancia katasztrófa” játszódhat le

Az egyik ilyen rezonancia katasztrófát, az Amerikai Egyesült Államok Takoma folyójának hídján figyelték meg, amikor egy alkalommal a széllökések frekvenciája megegyezik a híd torziós (csavarási) rezgéseinek frekvenciájával, s néhányszor tíz rezgés után a híd összeomlott.
Hasonló okokból nem engedték meg már a rómaiak sem, hogy a csapataik lépést tartva menjenek át a hídon.

A gerjesztő rezgés és a rá adott válasz közötti fáziskülönbség, az egyenletben δ-val jelölt mennyiség, szintén függ az ω_g-től az alábbi kifejezés szerint :

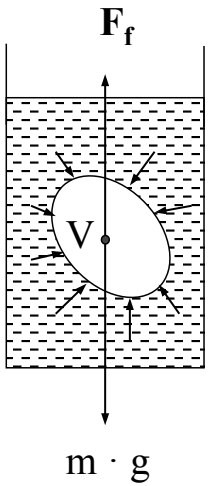
$$\mathrm{tg}\delta = \frac{2\beta\omega_g}{\omega_0^2 - \omega_g}$$

Rezgések felbontása harmonikus rezgések összegére

Fourier-tétel:
Általában bármilyen f(t) periodikus folyamat, amelynek periódusa T, egyértelműen előállítható olyan, megfelelő amplitúdókkal és fázisállandókkal rendelkező harmonikus rezgések összegeként, amelyek körfrekvenciái az adott f(t) rezgés körfrekvenciája (ω) és ennek egész számú többszörösei.

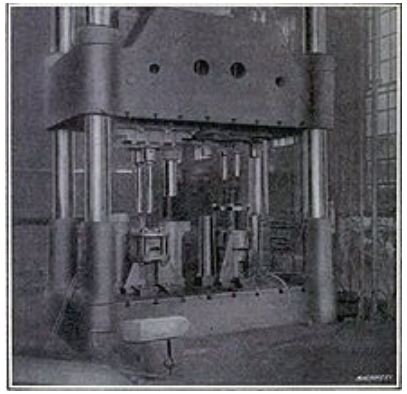
6. fejezet

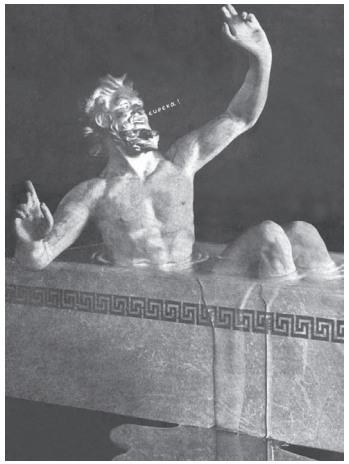
A felhajtó erő



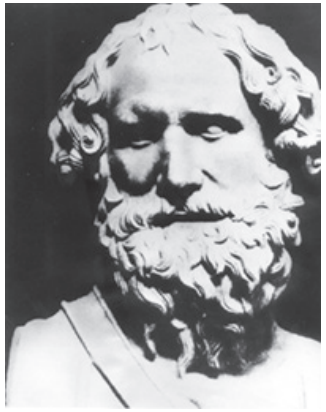
Bevezetés







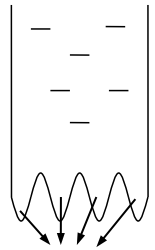




Ideális folyadékok, Pascal törvény

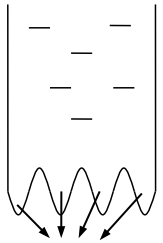
Az ideális folyadék tulajdonságai (a tökéletes folyadék)

1. Rendelkezésre álló teret térfogata erejéig kitölti.
2. Tökéletesen összenyomhatatlan.
3. Ideális folyadék részecskéi egymáson, és az edény falán szabadon elmozdulhatnak. Közöttük, valamint közöttük és az edény, vagy vezeték fala között belső súrlódás nem lép fel. Nyíró feszültség nem ébred.
4. Ideális folyadékok részecskéi és részecskék és az edény fala között sem vonzó, sem taszító erő nem lép fel. Húzó feszültség nem ébred, csak nyomó.



Itt is van folyadék

Valóságos folyadék tulajdonságai



Itt nincs folyadék

1. A valóságos folyadékok esetében a vékonyabb térrészeket nem tölti ki (mintegy 0,5 mm-nél kisebb lineáris edény méretek esetében).
2. Nem tökéletesen összenyomhatatlan
3. Áramló közegek esetében számolni kell belső súrlódással.
4. Valóságos folyadékok részecskéi és részecskék és az edény fala között vonzó és taszító erő léphet fel. Mintegy 0,5 mm-nél kisebb lineáris méretek esetén számolni kell az ún. felületi feszültséggel is.

A sűrűség

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Az egységnyi térfogatra eső tömeg.

Mértékegysége: $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

Néhány anyag sűrűsége:

A víz sűrűsége: ~ 1000 kg/m^3

Higany (Hg) sűrűsége = 13 600 kg/m^3

Vas (Fe) sűrűsége = 7800 kg/m^3

A Föld anyagának átlagsűrűsége: 2600 kg/m^3

Az ideális folyadék felszíne

A 3. tulajdonság következtében az ideális folyadék felszíne mindig a ráható erők eredőjére merőlegesen áll be. Ez azt jelenti, hogy egy edényben ez a felület teljesen síknak látszik, de a tengerek, vagy nagyobb tavak felszínén már felfedezhető, hogy a folyadék felszíne a Föld görbületét követi. Igazság szerint a Föld gömb alakjára éppen ez a jelenség hívta fel a figyelmet legelőször.

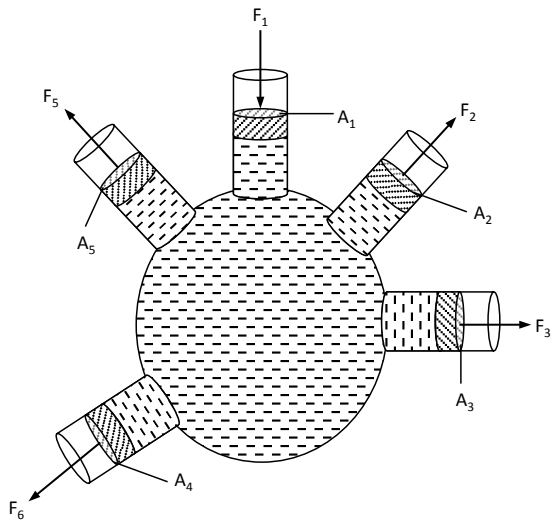
3. Ideális folyadék részecskéi egymáson, és az edény falán szabadon elmozdulhatnak. Közöttük, valamint közöttük és az edény, vagy vezeték fala között belső súrlódás nem lép fel. Nyíró feszültség nem ébred.

A nyomás

Pascal törvénye

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_3}{A_3} = ... = \frac{F_n}{A_n},$$

azaz $\frac{F}{A}$ = állandó.



Matematikai egzaktsággal:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \left(\frac{dF}{dA} \right)$$

Pascal törvénye

Súlytalan, zárt folyadékban a nyomás minden irányban gyengítetlenül tovaterjed.

A nyomás SI mértékegysége: $[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{N}{m^2} = Pa$

Egyéb mértékegységek: $10^5 Pa = 1 bar$

A bar mint nyomás mértékegység csak folyadékokra, és gázokra használható!!!

Régebbi mértékegységek:

Fizikai atmoszféra: Adriai-tenger szintjén a levegő nyomása.

$$1\ \text{atm} = 101\ 325\ \text{Pa} = 760\ \text{Hgmm} = 760\ \text{torr}$$

Technikai atmoszféra: $1\ \text{at} = \ = 98\ 100\text{Pa}$

Az amerikai mértékegység: $1\ \text{bar} = 14{,}7\ \text{psi}$

$$\left.\begin{matrix} PSI \\ psi \\ P.S.I \\ p.s.i. \end{matrix}\right\} \frac{font}{négyzethüvelyk}$$

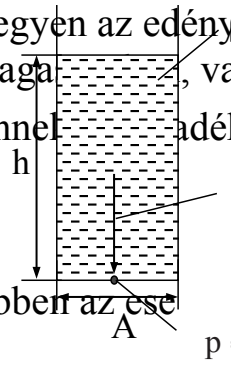
Súlyos folyadékok, Archimedes törvénye

Súlyos folyadék

Súlyos folyadékról beszélünk, ha a nehézségi erő hatását nem hanyagoljuk el.

Legyen az edény fenékkeresztmetszete: A, és a ρ sűrűségű folyadék h magasságban, vagy mélységben van az edényben.

Ennek a folyadéknak a súlya:



$$G = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot A \cdot h$$

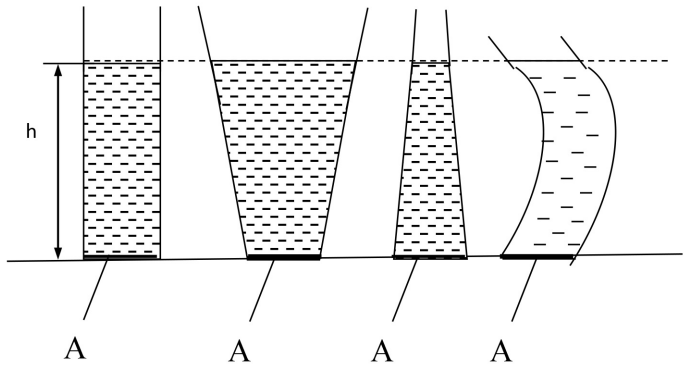
Ebben az esetben a nyomás:

$$p = \frac{G}{A}$$

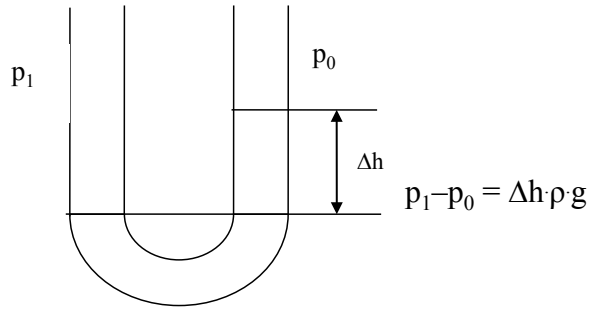
$$p = \frac{G}{A} = \frac{\rho \cdot g \cdot \cancel{A} \cdot h}{\cancel{A}} = \rho \cdot g \cdot h$$

Tehát h magasságú folyadékoszlop nyomása, függetlenül a felülettől $\rho \cdot g \cdot h$. Ebből következik, hogy ha több edényt veszünk, amelyek A fenékkeresztmetszete ugyanakkora, de alakjuk más, továbbá mindegyikben ugyanolyan h magasságban állítjuk be a folyadék szintjét, akkor mindegyik esetben ugyanakkora a nyomás és ugyanakkora erő hat mindegyik alaplapra.

hidrosztatikai paradoxon:



Közlekedő edények

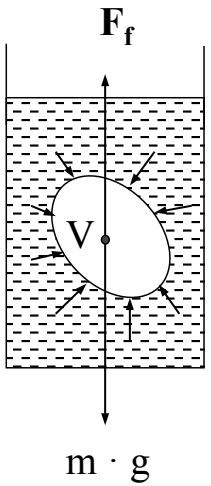


Ha két, a vízszinteshez képest emelkedő (az esetek többségében függőleges) edényt kapcsolatba hozunk, akkor állandósult nyugalmi állapotban a folyadékszintek úgy helyezkednek el, hogy a rendszer minden pontjában érvényes lesz a nyomások egyensúlya.

Az U csöves manométer érzékenysége:

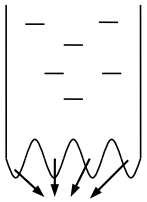
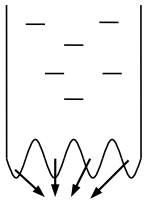
$$é = \frac{\Delta h}{p_1 - p_2} = \frac{1}{\rho \cdot g}$$

A felhajtó erő



6.1. Az ideális folyadékok, Pascal törvény

A folyadékokat a fizikában ideális folyadékként kezeljük, az alábbiakban ezt összehasonlítjuk azokat a valóságos folyadékokkal.

Ideális (tökéletes) folyadék	*Valóságos folyadék*
1. Rendelkezésre álló teret térfogata erejéig kitölti.	A valóságos folyadékok esetében a mintegy 0,5 mm-nél kisebb lineáris edény méretek esetében nem feltétlenül igaz.
 Itt is van folyadék	
6.1.1. ábra Az ideális folyadék teljesen kitölti az edény alját	6.1.2. ábra A valóságos folyadék a vékonyabb térrészeket nem tölti ki
2. Tökéletesen összenyomhatatlan	Nem tökéletesen összenyomhatatlan (ld. kompresszibilitás!)
3. Ideális folyadék részecskéi egymáson, és az edény falán szabadon elmozdulhatnak. Közöttük, valamint közöttük és az edény, vagy vezeték fala között belső súrlódás nem lép fel. Nyíró feszültség nem ébred.	Áramló közegek esetében számolni kell belső súrlódással.
4. Ideális folyadékok részecskéi és részecskék és az edény fala között sem vonzó, sem taszító erő nem lép fel. Húzó feszültség nem ébred, csak nyomó.	Szigorúan véve nem igaz, mivel pl. $30-32\,\frac{N}{m^2}$ a víz szakító szilárdsága. Mintegy 0,5 mm-nél kisebb lineáris méretek esetén számolni kell az ún. felületi feszültséggel is.

A gázok tulajdonságait a termodinamikai fejezetben mutatjuk be.

A sűrűség

A folyadékok és a gázok fontos tulajdonsága a sűrűségük. Ennek definíciója:

$$\rho = \frac{m}{V}\,, \tag{6.1.1}$$

másképpen szólva az egységnyi térfogatra eső tömeg. Mértékegysége:

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}.$$

A sűrűség angol kifejezése a density. (A későbbiek érdekében célszerű megjegyezni, hogy az angol specific gravity kifejezés nem a sűrűséget jelenti: azt mutatja meg, hogy a folyadék, vagy gáz sűrűsége hányszorosa a vízének.)

Néhány anyag sűrűsége:
A víz sűrűsége: ~ 1000 kg/m^3
Higany (Hg) sűrűsége = 13 600 kg/m^3
Vas (Fe) sűrűsége = 7800 kg/m^3
A Föld anyagának átlagsűrűsége: 2600 kg/m^3

A sűrűség mellet sok országban használják fajsúly fogalmát (hazánkban nem szabványos fogalom):

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \rho \cdot g\,; \quad [\gamma] = \frac{N}{m^3} \tag{6.1.2}$$

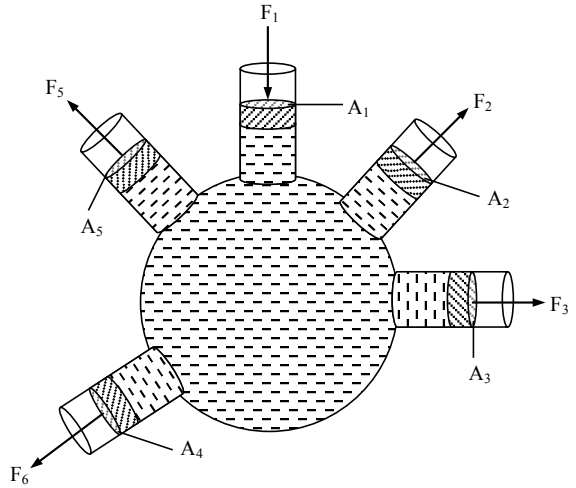
Az ideális folyadék felszíne:

A 3. tulajdonság következtében az ideális folyadék felszíne mindig a ráható erők eredőjére merőlegesen áll be. Ez azt jelenti, hogy egy edényben ez a felület teljesen síknak látszik, de a tengerek, vagy nagyobb tavak felszínén már felfedezhető, hogy a folyadék felszíne a Föld görbületét követi. Igazság szerint a Föld gömb alakjára éppen ez a jelenség hívta fel a figyelmet legelőször.

A nyomás

Pascal törvénye

Folyadékok esetében már a középkor fizikusai megfigyelték, hogy a 6.1.3. ábra szerinti kísérleti elrendezésben a súrlódás nélkül mozgó, de tökéletesen záró dugattyúk egyikére erővel hatva, a többi dugattyúra helyezett erőmérő mind olyan erőt mutat, hogy



6.1.3. ábra Zárt, súlytalannak tekinthető folyadékban ható erők

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_3}{A_3} = ... = \frac{F_n}{A_n}, \text{azaz} \frac{F}{A} = \text{állandó}. \qquad (6.1.3)$$

Matematikai egzaktsággal:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \left(\frac{dF}{dA} \right). \qquad (6.1.4.)$$

Pascal mondta ki a ma az ő emlékére elnevezett **törvény**t:

Súlytalan, zárt folyadékban a nyomás minden irányban gyengítetlenül tovaterjed.

A 6.1.3. egyenletben az állandó a nyomás, ami, mivel egy adott helyen minden irányban állandó, skalár mennyiség.

A nyomás SI mértékegysége:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{N}{m^2} = Pa\,.$$

Egyéb mértékegységek: $10^5 Pa = 1 bar$

A bar mint nyomás mértékegység csak folyadékokra, és gázokra használható!!!

Régebbi mértékegységek:
Fizikai atmoszféra: Adriai-tenger szintjén a levegő nyomása.

1 atm = 101 325 Pa = 760 Hgmm = 760 torr

Technikai atmoszféra:

$$1 \text{ at} = 1 \frac{kp}{cm^2} = 98\,100 Pa$$

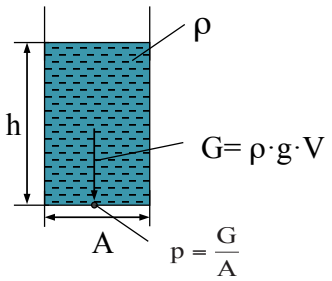
Az amerikai mértékegység:

$$\left.\begin{matrix} PSI \\ psi \\ P.S.I \\ p.s.i. \end{matrix}\right\} \frac{font}{négyzethüvelyk} \qquad 1 \text{ bar} = 14{,}7 \text{ psi}$$

Súlyos folyadékok, Archimedes törvénye

Súlyos folyadék

Súlyos folyadékról beszélünk, ha a nehézségi erő hatását nem hanyagoljuk el.



Legyen az edény fenékkeresztmetszete: A, és a ρ sűrűségű folyadék h magasságban, vagy mélységben van az edényben.

Ennek a folyadéknak a súlya:

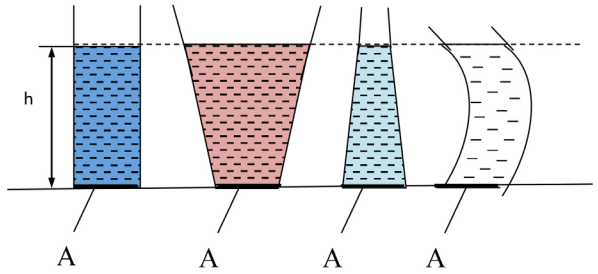
$$G = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot A \cdot h$$

Ebben az esetben a nyomás:

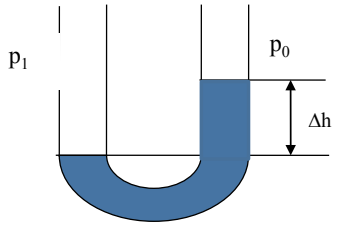
$$p = \frac{G}{A} = \frac{\rho \cdot g \cdot \cancel{A} \cdot h}{\cancel{A}} = \rho \cdot g \cdot h$$

Tehát h magasságú folyadékoszlop nyomása, függetlenül a felülettől $\rho \cdot g \cdot h$. Ebből következik, hogy ha több edényt veszünk, amelyek **A** fenékkeresztmetszete ugyanakkora, de alakjuk más, továbbá mindegyikben ugyanolyan **h** magasságban állítjuk be a folyadék szintjét, akkor mindegyik esetben ugyanakkora a nyomás és ugyanakkora erő hat mindegyik alaplapra.

hidrosztatikai paradoxon:



Közlekedő edények

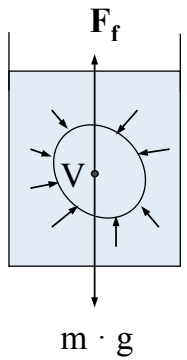


Ha két, a vízszinteshez képest emelkedő (az esetek többségében függőleges) edényt kapcsolatba hozunk, akkor állandósult nyugalmi állapotban a folyadékszintek úgy helyezkednek el, hogy a rendszer minden pontjában érvényes lesz a nyomások egyensúlya.

Ha a két szára különböző nyomású helyekhez kapcsolódik, akkor a csőben levő, ismert sűrűségű folyadék, szintkülönbségéből a nyomáskülönbség kiszámítható.

$$p_1 - p_0 = \Delta h \cdot \rho \cdot g$$

A felhajtó erő



Vegyünk egy edényt, amelyben folyadék van valamekkora magasságban.

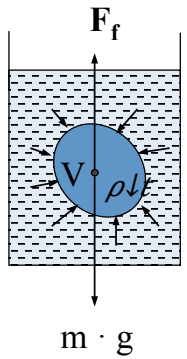
Válasszunk ki egy V térfogatú részt ebben a folyadékban, ami már elég régóta nyugalomban, azaz egyensúlyban van, mert a rá ható erők eredője (F_e) zérus.

Erre a térfogatra több erő hat:

- a súlyerő (m· g),

-a folyadékrészecskék erővel hatnak rá, nyomás alatt van.

Ezen erők eredője felfele mutat, mert másképp nem lenne egyensúlyban. Ez az F_f a felhajtó erő.



Ezután a V térfogatú folyadékrészt kicseréljük egy ugyanolyan V térfogatú ρ_t sűrűségű szilárd testtel, vagy másik folyadékkal (esetleg gázzal).

Ebben az esetben hat a G_t súlyerő, ami általában nem egyezik meg az előbbi súlyerővel - „m· g”-vel -, valamint a folyadékrészecskék ugyanakkora erővel hatnak, mint az előző esetben:

$$F_f = \rho_f \cdot V \cdot g.$$

Ekkor a testre ható erők eredője:

$$F_e = G_t - F_f.$$

Archimedes-törvénye:

Bármely súlyos folyadékba, vagy gázba merülő testre felhajtó erő hat, amely megegyezik a test által kiszorított folyadéknak vagy gáznak a súlyával.

Ha **teljes bemerülés** történik akkor a $G_t = \rho_t \cdot V_t \cdot g$; és $Ff = \rho_f \cdot V_t \cdot g$, ebben az esetben az eredő erő:

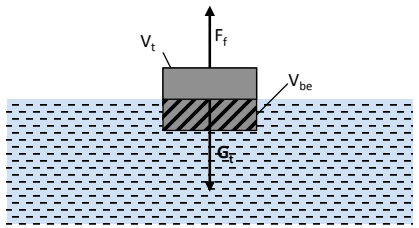
$$Fe = \rho_t \cdot V_t \cdot g - \rho_f \cdot V_t \cdot g = Vt \cdot g(\rho_t - \rho_f).$$

Az eredő erő:

- ha $\rho_t > \rho_f$, akkor az eredő erő lefele mutat, ez az **elmerülés**;
- ha $\rho_t < \rho_f$, akkor az eredő erő felfele mutat, ez az **emelkedés**;
- ha $\rho_t = \rho_f$, akkor az eredő erő zérus ($F_e = 0$), a test a folyadékban mindenütt egyensúlyban van, ez a **lebegés**.

Részleges bemerülés esetén:

Ha a testnek csak egy része merül bele a folyadékba, ekkor:



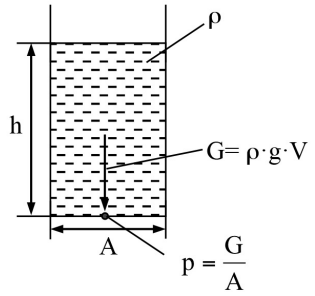
$F_e = G_t - F_f = \rho_t \cdot V_t \cdot g - \rho_f \cdot V_{be} \cdot g = g\,(\rho_t \cdot V_t - \rho_f \cdot V_{be})$

A felhajtó erő a kiszorított folyadék súlyával lesz arányos.
Ennek speciális esete az **úszás**.

$$\frac{V_t}{V_{be}} = \frac{\rho_f}{\rho_t}$$

6.2. Súlyos folyadékok, Archimedes törvénye

Ebben az esetben a nehézségi erő hatását nem hanyagolhatjuk el.
Vegyünk egy edényt, amelyben ρ sűrűségű folyadék van (6.2.1. ábra).

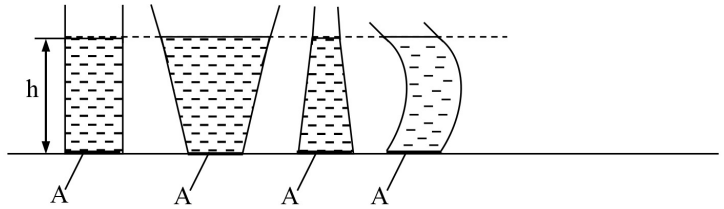


6.2.1. ábra Súlyos folyadék nyomásának értelmezése

Legyen az edény fenékkeresztmetszete: A, és a ρ sűrűségű folyadék h magasságban, vagy mélységben van az edényben.
Ennek a folyadéknak a súlya: $G = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot A \cdot h$
(Ez az erő nyomja a fenéklapot.)

Ebben az esetben a nyomás: $$p = \frac{G}{A} = \frac{\rho \cdot g \cdot \cancel{A} \cdot h}{\cancel{A}} = \rho \cdot g \cdot h \qquad (6.2.1.)$$

Tehát h magasságú folyadékoszlop nyomása, függetlenül a felülettől ρ·g·h. Ebből következik, hogy ha több edényt veszünk (6.2.2. ábra), amelyek A fenékkeresztmetszete ugyanakkora, de alakjuk más, továbbá mindegyikben ugyanolyan h magasságban állítjuk be a folyadék szintjét, akkor mindegyik esetben ugyanakkora a nyomás és ugyanakkora erő hat mindegyik alaplapra.

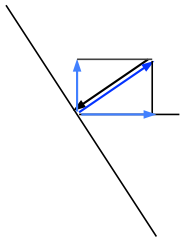


6.2.2. ábra A hidrosztatikai paradoxon edényei

meglehetősen meglepő, első közelítésben ellentmondásos helyzet, mert például a felfele szélesedő edényben sokkal nagyobb súlyú folyadék van, mint a hengeresben, a felfele keskenyedőben pedig kevesebb, és mégis azonos a súly. Ezen látszólagos ellentmondás miatt **hidrosztatikai paradoxon**nak nevezik a jelenséget.

Felmerül a kérdés, hogy a széttartó falak esetében mi tartja a nagyobb tömegű folyadékot, amikor a súlyos folyadék nyomásának törvény értelmében az azonos nagyságú fenékre azonos magasság esetén azonos erő hat, hiszen az erő F=pA.

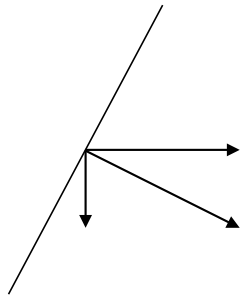
A magyarázat:
1. Érvényes a Pascal törvény, miszerint bármely pontban a nyomás minden irányban ugyanaz. A folyadék nyomja a falat, s a hatás-ellenhatás törvénye értelmében a fal ugyanakkora, de ellentétes erővel nyomja vissza a folyadékot.
2. Az erőnek van egy vízszintes és van egy függőleges komponense.



6.2.3. Felfele szélesedő edény falára ható, és a folyadékra ható erő

A vízszintes komponens az edény másik falon ellenkező irányban hat, ezért kiegyenlítődik, a függőleges pedig az az erő, ami a pont felett levő folyadék egy részét tartja (6.2.3. ábra).

A még nehezebb kérdés az, hogy a befele tartó falú edény esetében mi biztosítja a hiányzó folyadék súlyának megfelelő erőt.
A magyarázat:
1. Érvényes a Pascal törvény, miszerint bármely pontban a nyomás minden irányban ugyanaz. A folyadék nyomja a falat, s a hatás-ellenhatás törvénye értelmében a fal ugyanakkora, de ellentétes erővel nyomja vissza a folyadékot.

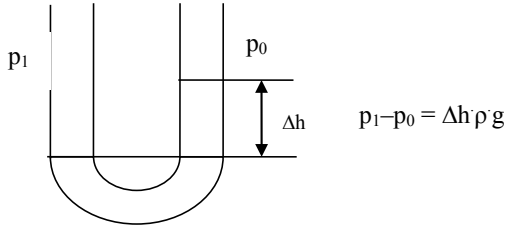


6.2.4. ábra Befele hajló falú edény által a folyadékra kifejtett erő

A reakcióerő most lefele mutat, s a függőleges komponense biztosítja azt az erőt, amit a függőleges falú edényhez képest „hiányzó” folyadéknak kellene.

Közlekedő edények

Ha két, a vízszinteshez képest emelkedő (az esetek többségében függőleges) edényt kapcsolatba hozunk, akkor állandósult nyugalmi állapotban a folyadékszintek úgy helyezkednek el, hogy a rendszer minden pontjában érvényes lesz a nyomások egyensúlya. Erre igen jó példa az ún. U csöves manométer (6.2.5. ábra), amelynek ha a két szára különböző nyomású helyekhez kapcsolódik, akkor a csőben levő, ismert sűrűségű folyadék, szintkülönbségéből a nyomáskülönbség kiszámítható.



$p_1 - p_0 = \Delta h \cdot \rho \cdot g$

6.2.5. ábra Az U csöves manométer

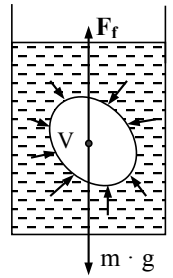
Az U csöves manométer érzékenysége:

$$é = \frac{\Delta h}{p_1 - p_2} = \frac{1}{\rho \cdot g}. \qquad (6.2.2.)$$

A 6.2.2. kifejezésből jól látszik, hogy minél kisebb a mérőfolyadék sűrűsége, annál nagyobb az U csöves manométer érzékenysége.

A felhajtó erő

Vegyünk egy edényt, amelyben folyadék (víz, …stb) van valamekkora magasságban. Válasszunk ki egy V térfogatú részt ebben a folyadékban, ami már elég régóta nyugalomban, azaz egyensúlyban van, mert a rá ható erők eredője (F_e) zérus (6.2.6. ábra).
Erre a térfogatra több erő hat:
Az egyik ilyen erő a súlyerő ($m \cdot g$), de ahhoz, hogy a térfogat egyensúlyban lehessen, a folyadékrészecskék erővel hatnak rá, nyomás alatt van. Ezen erők eredője felfele mutat, mert másképp nem lenne egyensúlyban. Ez az F_f a felhajtó erő:

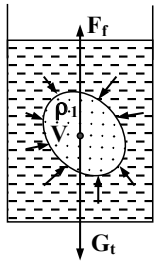


6.2.6. ábra Egy V térfogatú folyadékrészre ható erők

Ezután a V térfogatú folyadékrészt kicseréljük egy ugyanolyan V térfogatú ρ_t sűrűségű szilárd testtel, vagy másik folyadékkal (esetleg gázzal).
Ebben az esetben hat a G_t súlyerő, ami általában nem egyezik meg az előbbi súlyerővel - „m·g”-vel -, valamint a folyadékrészecskék ugyanakkora erővel hatnak, mint az előző esetben, $F_f = \rho_f \cdot V \cdot g$.

Ekkor a testre ható erők eredője:

$$F_e = G_t - F_f. \qquad (6.2.3.)$$



6.2.7. ábra Egy V térfogatú, a folyadéktól eltérő anyagra ható erők

Ezt a jelenséget **Archimedes-törvénye** írja le:

Bármely súlyos folyadékba, vagy gázba merülő testre felhajtó erő hat, amely megegyezik a test által kiszorított folyadéknak vagy gáznak a súlyával.

Ha **teljes bemerülés** történik akkor a $G_t = \rho_t \cdot V_t \cdot g$; és $Ff = \rho_f \cdot V_t \cdot g$, ebben az esetben az eredő erő:

$$Fe = \rho_t \cdot V_t \cdot g - \rho_f \cdot V_t \cdot g = Vt \cdot g(\rho_t - \rho_f). \qquad (6.2.4.)$$

Az eredő erő:

- ha $\rho_t > \rho_f$, akkor az eredő erő lefele mutat, ez az **elmerülés**;
- ha $\rho_t < \rho_f$, akkor az eredő erő felfele mutat, ez az **emelkedés**;
- ha $\rho_t = \rho_f$, akkor az eredő erő zérus ($F_e = 0$), a test a folyadékban mindenütt egyensúlyban van, ez a **lebegés**.

Részleges bemerülés esetén:

Ha a testnek csak egy része merül bele a folyadékba, ekkor:

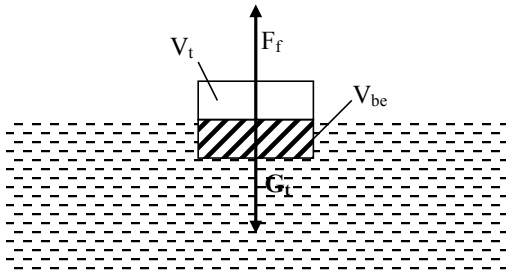
$$F_e = G_t - F_f = \rho_t \cdot V_t \cdot g - \rho_f \cdot V_{be} \cdot g = g\,(\rho_t \cdot V_t - \rho_f \cdot V_{be})$$

A felhajtó erő a kiszorított folyadék súlyával lesz arányos.

Ennek speciális esete az **úszás**.

Ebben az esetben van egy folyadék, amibe elhelyezünk egy szilárd testet, amelynek sűrűsége kisebb, mint a folyadéké. Emelkedés következik be, amíg a felhajtó erő egyenlő nem lesz a test súlyával ($F_f = G_t$) (6.2.8. ábra).

Ekkor a felhajtó erő (F_f) a bemerülő rész geometriai súlypontjában fog hatni.



6.2.8. ábra Úszás estében fellépő erők

Úszás esetében:

$$G_t = F_f,$$

azaz:

$$\rho_t \cdot V_t \cdot g = \rho_f \cdot V_{be} \cdot g,$$

ahol V_t a test teljes térfogata, V_{be} a folyadékba merülő térfogatrész. Átalakítás után kapjuk:

$$\frac{V_t}{V_{be}} = \frac{\rho_f}{\rho_t}$$

Tehát a folyadék és a test sűrűségének aránya megadja a bemerülő térfogatok arányát.

A felhajtó erőről fent elmondottak alkalmazhatók gázokra is.

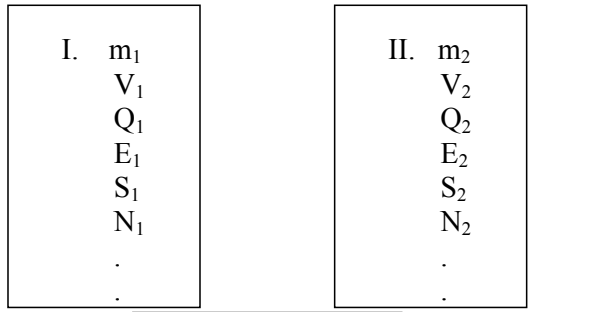
7. fejezet

4. Hőtan (Termodinamika)

4.1. A termodinamika alapjai, az ideális gázok tulajdonságainak statisztikus mechanikai értelmezése

A termodinamika az energiával, illetve a munkával, az energia áramlásával, az anyagi világ alapvető folyamataival foglalkozó tudományág. Eredményét nemcsak a hőtan, de az optika, az elektromágnesesség, a kémia és a biológia is alkalmazza.
A termodinamika az anyaggal, rendszerekkel is dolgozik. Az anyag fogalma majdnem filozófiai általánosságú.
A termodinamikai rendszer egy másik alapfogalom, lehet egy elemi részecske, vagy több, egy atom, vagy egy molekula, illetve azok bármilyen nagy csoportja, vagy akár a világegyetem.
A termodinamikai rendszerek jellemzésére szolgáló paraméterek, jellemzők többféleképpen csoportosíthatók. Egy jól használható felosztás az alábbi két kategóriát tartalmazza.

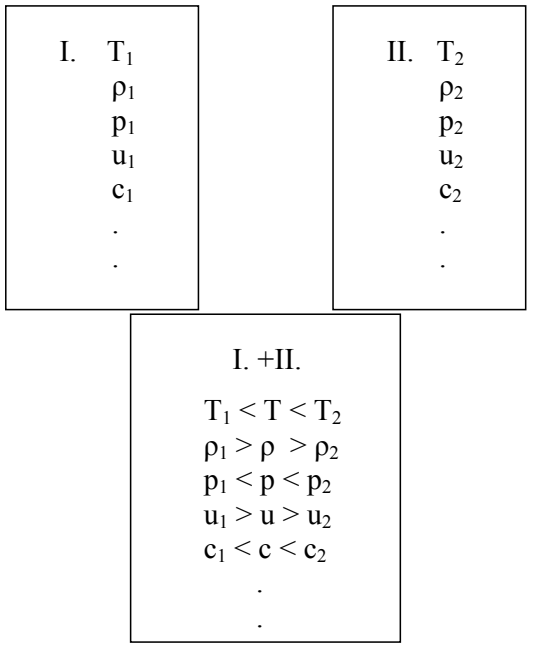
Extenzív paraméterek azok, amelyek két termodinamikai rendszer egyesítésekor összeadódnak.



4.1.1. ábra Az extenzív mennyiségek definíciójához

Extenzív mennyiségek például: a tömeg (m), a térfogat (V), a villamos töltés (Q), az energia (E), az entrópia (S), részecskeszám (N), stb.

Intenzív paraméterek azok, amelyek két termodinamikai rendszer egyesítésekor kiegyenlítődnek.
Ilyen a nyomás (p), a sűrűség (ρ), a hőmérséklet (T), a villamos potenciál (u), a koncentráció (c), stb.



4.1.2. ábra Az intenzív paraméterek definíciójához

Vannak olyan szerzők, akik a két extenzív paraméter hányadosaként felírható mennyiséget (mint pl.: $\rho = \frac{m}{V}$, $c = \frac{N}{V}$) nem tekintik igazi intenzíveknek mi azonban igen.

Érvényes a következő tétel:
Két termodinamikai rendszer egyesítésekor az intenzív mennyiségek kiegyenlítődésére törekszenek, extenzívek áramlása útján.
Ezt könnyen el tudjuk képzelni, hogy ha két különböző koncentrációjú cukoroldatot összeöntünk, akkor a cukorkoncentráció bizonyos idő után kiegyenlítődik azáltal, hogy a nagyobb koncentrációjú helyről a kisebb koncentrációjúba cukormolekulák mennek át.
Hasonló jelenség figyelhető meg két különböző nyomású gáztartály összekapcsolódásakor, akkor ugyanis bizonyos térfogatú gáz megy át a magasabb nyomásúból az alacsonyabba, amíg a két nyomás ki nem egyenlítődik.
A tételekben mégis a törekszik szó a célszerű, mert például ha két, különböző szabad elektron sűrűségű fémdarabot összeérintünk, akkor a nagyobb sűrűségű helyről elektronok mennek át a kisebb sűrűségűre, azonban ezzel taszító mezőt hoznak létre, és az nem engedi a teljes kiegyenlítődést.
Bizonyos extenzív-intenzív párok, esetében az intenzív mennyiség szorozva az extenzív megváltozásával munkát ad, így a pdV, az Tds, UdQ, stb.
Ha egy termodinamikai rendszer n paraméterrel írható le, így azok közül legfeljebb n-1 lehet intenzív,és legalább 1 extenzív is kell a teljes leíráshoz.
A termodinamika sok következtetését, szabályát az ideális gáz vizsgálatával derítették, vagy dolgozták ki, és később általánosították. Így például napjaink informatikai robbanása nem történhetett volna meg a tranzisztor kifejlesztése nélkül (1948), annak lehetségességét pedig a termodinamika 1905-ben Onzager által kidolgozott egyenleteinek az alkalmazásával bizonyították be.
Az alapok megismeréseként foglalkozunk tehát először az ideális gázokkal.

Az ideális gáz tulajdonságai:

1. A rendelkezésre álló teret teljesen kitölti.
2. Tökéletesen összenyomható.
3. Részecskéi között, a részecskék és a tartály fala között súrlódási erő nem lép fel, nyírófeszültség nem ébred.
4. Részecskéi között és a részecskék és a fal között sem vonzó, sem taszító erő nem lép fel, húzó feszültség nem ébred, csak nyomó.

Az ideális gáz leírására a nyomás (p) a hőmérséklet (T) mint intenzív mennyiségek, és a térfogat, mint extenzív mennyiség elegendő. Közöttük a kapcsolatot az alábbi egyenlet adja meg, amit az **egyetemes gáztörvénynek** is nevezünk.

$$p \cdot V = \frac{m}{M} R \cdot T \qquad (4.1.1)$$

$[m] = g$

$[M] = g$

ahol m a gáz tömege grammban, M a moltömege grammban megadva.

Itt emlékeztetünk arra, hogy M mennyiségű gázban $L = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ molekula, vagy atom van.

M: az anyag tömege 1 mol gázban.

L: a Loschmidt - féle szám

R az egyetemes gázállandó, vagy Regnault (ejtsd: Rönyó) állandó, értéke: $R = 8{,}314 \frac{J}{K}$.

Ha a tömeget mólban mérjük, úgy az egyenlet a

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \qquad (4.1.2)$$

alakot ölti, n a mólszám vagy a mólban mért tömeg, és R=8,314 J/mol·K.

Ha egy gázrészecske (molekula vagy atom tömege) μ, akkor $M = L\,\mu$ és ha az m tömeg N részecskéből áll (feltéve, ha homogén gázról van szó), akkor $m = N \cdot \mu$.

Ezek alapján:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} RT = \frac{N \cdot \cancel{\mu}}{L \cdot \cancel{\mu}} RT = N \frac{R}{L} T \qquad (4.1.3)$$

Jelölje $k = \frac{R}{L} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ az (ún. Boltzmann állandó). (4.1.4)

Így a

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

alakot kapjuk, ami (1)-nél egyszerűbb kifejezés, azonban N igen nehezen mérhető, míg m könnyen. Ugyancsak egyszerű alakja van $r = \frac{R}{M}$ behelyettesítéssel kapott

$$p \cdot V = m \cdot r \cdot T \qquad (4.1.5)$$

$[r] = \frac{J}{kg \cdot K}, [m] = kg$

egyenletnek. Itt r az ún. specifikus gázállandó, amit az adott gázra mérhetünk meg, illetve találhatunk meg a táblázatokban. Általában minden anyagra más az értéke.

Bizonyos műszaki termodinamikai számításokban az egységnyi tömegű gáz (vagy gőz) térfogatát $\left(v = \frac{V}{m}\left[\frac{m^3}{kg}\right] \right)$ szokás használni, az alábbi egyenlet szerint:

$$p \cdot v = r \cdot T \qquad (4.1.6)$$

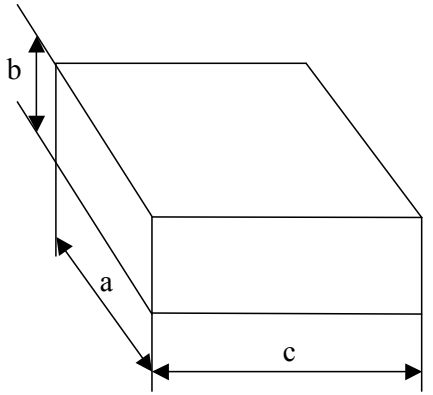
Az ideális gáz egy másik jellemzése is megadható az alábbiak szerint. Ezt az értelmezést szokás statisztikus mechanikai értelmezésnek is nevezni, mert a részecskéket az alábbiakban írja le.

I. Az ideális gáz pontszerű (-nek tekinthető) részecskékből áll, amelyek a tér minden irányában, különböző sebességgel mozoghatnak.
II. A részecskék sebességének irány szerinti eloszlása egyenletes. (Ha nem az lenne, a tartályokban lévő gáznak nem lenne zérus az eredő impulzusa, és a tartály ide-oda ugrálna a helyén, amit nem tapasztalunk.)
III. A részecskék mozgásuk során egymással és a tartály falával ütköznek és az ütközés tökéletesen rugalmas.
IV. Az ütközésen kívül nem lép fel más erőhatás a részecskék között és a részecskék és a fal között.

Belátható, hogy a I. +II. tulajdonság megfelel az 1. és 2. -nek, s a III. magyarázza a 3. –at, és a IV. a 4.-et.

A statisztikus mechanikai leírást alkalmazva, az alábbi egyszerűsített modellt használva, nézzük meg, milyen következtetésekre juthatunk.

Legyen egy tartály, amelynek oldalai a, b és c a 4.1.3. ábra szerint.



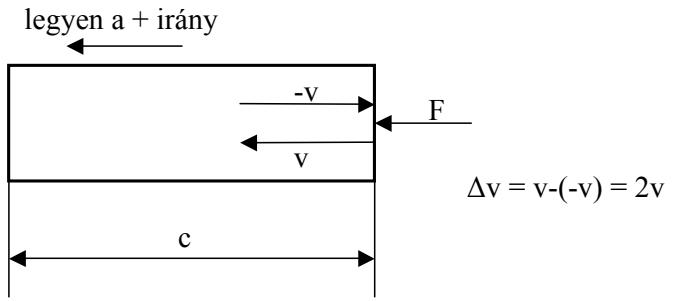
4.1.3. ábra A gondolatkísérlet tartálya

Legyen a tartályba N darab μ tömegű részecske (molekula vagy atom), amelyek mozogjanak ugyanakkora, v sebességgel (amennyiben különböznek a sebességek, akkor vegyük az átlagos sebességet) úgy, hogy a sebességek iránya legyen a falakra merőleges és mindegyik fal felé $\frac{N}{6}$ molekula mozogjon.

Vegyük akkor a c oldallal párhuzamosan, az „ab” lapra merőlegesen mozgó, $\frac{N}{6}$ részecskét. Azok a két véglap között pattognak ide-oda. Mindegyik véglap felé mozognak, s ez $\tau = \frac{c}{V}$ ideig tart. Az ütközés tökéletesen rugalmas, így az ütközés előtti és utáni sebességük ellentétes, így $\Delta v = 2v$.

Ezek szerint az erőhatás egy ütközésre:

$$F_{\text{ütk}} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_{\text{végső}} - I_{\text{kezdeti}}}{\tau} = \frac{\mu v - (-\mu v)}{\tau} = \frac{\mu 2v}{\tau} = \frac{2\mu v}{\frac{c}{v}} = \frac{2}{c}\mu v^2 \qquad (4.1.7)$$



4.1.4. ábra A részecskék ütközése a fallal

$\frac{N}{6}$ részecske esetében:

$$F_{\frac{N}{6}} = \frac{N}{6} \cdot \frac{2}{c}\mu \cdot v^2 = \frac{N}{3c} \cdot \mu \cdot v^2 \qquad (4.1.8)$$

Az „ab” véglapra ható nyomás:

$$p = \frac{F_{\frac{N}{6}}}{A} = \frac{F_{\frac{N}{6}}}{ab} = \frac{\frac{N}{3c} \cdot v^2}{ab} = \frac{N}{3} \cdot \frac{1}{abc}\mu \cdot v^2 \qquad (4.1.9)$$

Tudjuk, hogy abc = V, és így:

$$p = \frac{N}{3} \cdot \frac{1}{V}\mu \cdot v^2 = \frac{2}{3}N\frac{1}{V}\frac{1}{2}\mu \cdot v^2, \qquad (4.1.10)$$

s így:

$$p \cdot V = \frac{2}{3}N\frac{1}{2}\mu \cdot v^2. \qquad (4.1.11)$$

Másrészről tudjuk, hogy:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

így

$$N \cdot k \cdot T = \frac{2}{3}N\frac{1}{2}\mu \cdot v^2, \qquad (4.1.12)$$

és

$$T = \frac{2}{3k}\frac{1}{2}\mu \cdot v^2. \qquad (4.1.13)$$

Ez azt jelenti, hogy a hőmérséklet az a fizikai mennyiség, ami arányos a részecskék átlagos sebességének a négyzetével, azaz minél nagyobb a gáz hőmérséklete, annál gyorsabban mozognak a gáz részecskéi és fordítva. Ha ε jelöli az $\frac{1}{2}\mu \cdot v^2$ -et egy részecske mozgási energiáját, akkor

$$\varepsilon = \frac{3}{2}k \cdot T. \qquad (4.1.14)$$

A gáz részecskéinek mozgásából származó összenergia, amit belső energiának nevezünk (ha elhanyagoljuk a részecskék együttes mozgásából, csak a tartály mozgásából származó és a közös helyzeti energiát).

$$U = N \cdot \varepsilon = \frac{3}{2}N \cdot k \cdot T, \qquad (4.1.15)$$

azaz az ideális gázok belső energiája arányos a gáz hőmérsékletével és visszaírva $k = \frac{R}{L}$ -t:

$$U = \frac{3}{2}N\frac{R}{L}T,$$

és $\frac{\mu}{\mu}$ -vel beszorozva a baloldalt kapjuk:

$$U = \frac{3}{2}\frac{N\mu}{L\mu}RT = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT = \frac{3}{2}\frac{R}{M}mT, \qquad (4.1.16)$$

és mivel

$$p \cdot V = \frac{m}{M}RT,$$

így

$$U = \frac{3}{2}pV, \qquad (4.1.17)$$

pontszerű egyatomos gáz esetében.
Írjuk vissza az egy részecske kinetikai energiáját a 4.1.14 egyenletbe, amiből kapjuk:

$$\frac{1}{2}\mu \cdot v^2 = \frac{3}{2}kT. \qquad (4.1.18)$$

A sebesség vektor mennyiség, így ha v = v(v_x; v_y; v_z), akkor

$$\frac{1}{2}\mu\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{3}{2}kT. \qquad (4.1.19)$$

N részecske esetén az eredő impulzus zérus. Ha az edény zárt, a belső erők által okozott eredő impulzus nem lenne zérus, azaz a doboz ugrálna.
Azaz

$$\frac{1}{2}\mu \cdot v_x^2 + \frac{1}{2}\mu \cdot v_y^2 + \frac{1}{2}\mu \cdot v_z^2 = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT. \qquad (4.1.20)$$

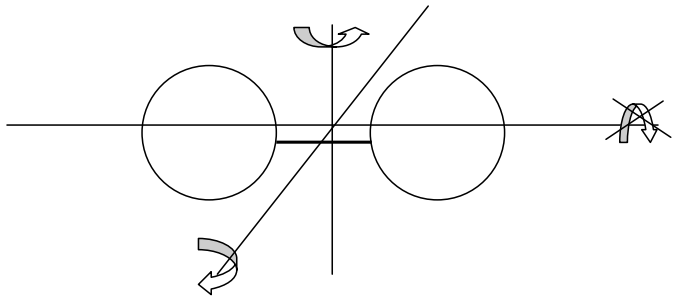
Ha sok részecskéről van szó, akkor

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2,$$

mert ha nem így lenne, akkor a sok gázrészecske eredő impulzusa nem lenne zérus. Így a négyzetes tagok mindegyike azonos, $\frac{1}{2}kT$ értéket, energiát „ér”.

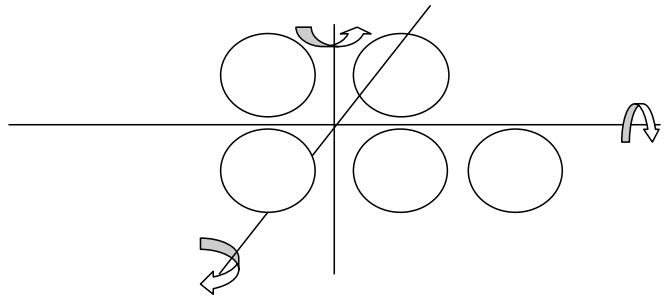
Definíció: a szabadsági fokok száma az ideális gáz kinetikai energiájának kifejezésében lévő egymástól független négyzetes tagok száma.
A fenti pontszerű részecskék esetén ez 3.
Érvényes az ekvipartíció tétele vagy az energia egyenletes eloszlásának az elve, miszerint:
az ideális gáz bármely szabadsági fokára ugyanannyi, mégpedig $\frac{1}{2}kT$ energia jut.

Ha a részecskék nem pontszerűek, hanem mint a kétatomos molekulák súlyzóként modellezhetők.
Egyatomos molekula f=3 szabadsági fokkal rendelkezik.
Kétatomos és többatomos de lineáris molekulák esetében 3 transzlációs és 2 rotációs szabadsági fokra, f=5 a szabadsági foka. (A kinetikai energia transzlációs.) Többatomos molekula pl: az CO_2, NO_2.



4.1.5. ábra Kétatomos molekula modellje

Többatomos nem lineáris molekula: szabadsági fokok száma: f=6.



4.1.6. ábra Többatomos nem lineáris molekula modellje

A gázrészecskék (atomok, vagy molekulák transzlációs és rotációs energiát vesznek fel, közönséges hőmérsékleten a rezgés nem gerjesztődik.

$$\frac{1}{2}\mu \cdot v_x^2 + \frac{1}{2}\mu \cdot v_y^2 + \frac{1}{2}\mu \cdot v_z^2 + \frac{1}{2}\Theta_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_3\omega_3^2 = \frac{6}{2}kT \qquad (4.1.21)$$

Így (4.1.17) általánosításával:

$$U = \frac{f}{2} pV . \qquad (4.1.22)$$

Összefoglalva az ideális gáz esetében, ha a rezgési energiákat nem számoljuk :

	Szabadságfok (f)	Egy molekula (atom mozgási energiája)
Egy atomos gáz	3	$\varepsilon = \frac{1}{2}\mu v_x^2 + \frac{1}{2}\mu v_y^2 + \frac{1}{2}\mu v_z^2$
Kétatomos gáz v. többatomos lineáris molekula	5	$\varepsilon = \frac{1}{2}\theta_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\mu v_x^2 + \frac{1}{2}\mu v_y^2 + \frac{1}{2}\mu v_z^2$
Többatomos nem lineáris molekulájú gáz	6	$\varepsilon = \frac{1}{2}\theta_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\theta_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}\mu v_x^2 + \frac{1}{2}\mu v_y^2 + \frac{1}{2}\mu v_z^2$

A molekulák szerkezete azonban olyan, hogy bennük az atomok között első közelítésben rugalmas erőnek tekinthető kötőerők lépnek fel, ezért a rugó-tömeg rendszerhez hasonlóan az egyes molekulák rezeghetnek is, azaz a kinetikus energia kifejezésében ennek megfelelő rugalmas és transzlációs tagok is felléphetnek.

A rezgési energia kifejezése csak a rugalmas tagokra:

$$\left(\varepsilon = \frac{1}{2}D_1x_1^2 + \frac{1}{2}D_2x_2^2 + \frac{1}{2}D_3x_3^2 + \ldots\right).$$

A molekulák atomokból épülnek fel, s egy atom szabadsági fokainak száma 3, valamint feltételezzük, hogy mindegyik atom hozza a maga három szabadsági fokát, azaz:

Egy atomhoz 3 szabadsági fok, n atomhoz 3n szabadsági fok tartozik.

3n szabadsági fokból 5, vagy 6 foglalt a transzlációra és a rotációra, ezért a vibrációs szabadsági fokok száma 3n-5, vagy 3n-6.

Többatomos lineáris molekulák esetében nagy az eltérés az ideális gázra számolt paraméterek, és a valóságos értékek között. Gondoljunk csak a széndioxidra, melynek reálgáz tényezője bizonyos körülmények között akár 0,1 is lehet, azaz a sűrűsége az egyetemes gáztörvény alapján meghatározott értéknek a tízszeresét is elérheti.

A szabadsági fokok alapján az ideális gázra érvényes, de a szobahőmérséklet közelében a valóságos gázokra is jó becslést adó gázparamétereket lehet kiszámolni, s ezzel sok esetben a felmerülő problémának legalább is jó becslését adhatjuk meg egyszerű eszközökkel.

Megmutatható, hogy az ideális gázra a fajhők és a fajhőviszony:

$$c_p = \frac{f+2}{2} \cdot \frac{R}{M} \qquad (4.1.23)$$

$$c_v = \frac{f}{2} \cdot \frac{R}{M} \qquad (4.1.24)$$

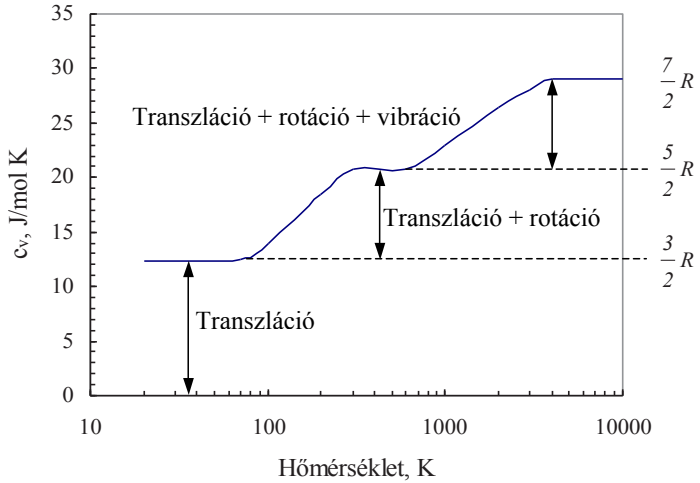
$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$$

$$\kappa_{\text{egyatomos}} = \frac{5}{3} = 1{,}66\dot{}$$

$$\kappa_{\text{többatomos (lineáris)}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$\kappa_{\text{többatomos (nem lineáris)}} = \frac{8}{6} = 1{,}33\dot{}$$

A fajhő hőmérséklet függvényében való mérésével megállapítható, hogy a gázok mennyire engedelmeskednek az ekvipartíció törvényének. A mérési eredmények azt mutatják, hogy a legtöbb gáz jól követi a fenti elméletet, szobahőmérséklet környékén mind a transzlációs,



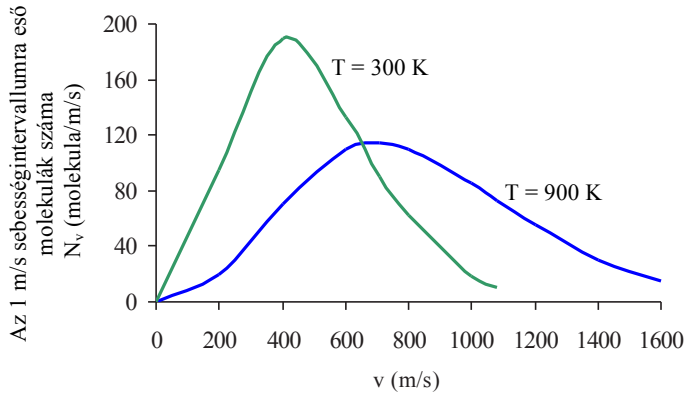
4.1.7. ábra A hidrogén (H_2) állandó térfogatú moláris fajhőjének változása a hőmérséklet függvényében

mind a rotációs szabadsági fokok gerjesztődnek. Ez még a legegyszerűbb molekula, a hidrogén esetében is így van (4.1.7. ábra).

A gázok molekulának, vagy atomjainak sebességeloszlása:
A valóságban a gázok molekuláinak, vagy atomos gázok esetében az atomoknak a sebessége nem azonos, hanem bizonyos eloszlásfüggvényt követ.
Ha a gáz egésze termikus egyensúlyban van, és ha N_v a v sebességgel mozgó részecskék száma, m egy részecske tömege, T az abszolút hőmérséklet (K-ben mérve) és k a Boltzmann állandó ($k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$), akkor a Newton-féle sebesség eloszlási törvény szerint:

$$N_v = 4 \cdot \pi \cdot N \cdot \left(\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}},$$

ahol N az összes részecskék száma.
A 4.1.8. ábrán bemutatjuk a fenti sebesség eloszlási függvényt 10^5 nitrogén molekula esetében két különböző hőmérsékletre.



4.1.8. ábra Százezer nitrogén molekula sebesség eloszlási függvénye

4.1. Dalton törvénye

Ha egy tartályban többféle, különböző anyagi minőségű gáz van, akkor azok egymástól „függetlenül" tartózkodnak abban, egymástól függetlenül fejtik ki hatásukat az edény falára, s hoznak létre független rész vagy „parciális" nyomást, és a nyomás ezen parciális nyomások összege.

Az egyes összetevők nyomása

$$p_1 = \frac{1}{V} \cdot \frac{m_1}{M_1} RT,$$

$$p_2 = \frac{1}{V} \cdot \frac{m_2}{M_2} RT,$$

$$\vdots$$

$$p_n = \frac{1}{V} \cdot \frac{m_n}{M_n} RT.$$

Az eredő nyomás:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n, \qquad (4.1.25)$$

így:

$$p = \frac{1}{V}\cdot\frac{m_1}{M_1}RT + \frac{1}{V}\cdot\frac{m_2}{M_2}RT + \ldots\ldots + \frac{1}{V}\cdot\frac{m_n}{M_n}RT,$$

és ezért:

$$p = \frac{1}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \ldots\ldots + \frac{m_n}{M_n}\right)RT.$$

A gázok összes tömege:

$$m = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n.$$

A teljes keverékre írható, hogy

$$p = \frac{1}{V}\cdot\frac{m}{M_\ell}RT, \qquad (4.1.26)$$

így

$$\frac{m}{M_\ell} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \ldots\ldots + \frac{m_n}{M_n},$$

és

$$M_\ell = \frac{m}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \ldots\ldots + \frac{m_n}{M_n}}.$$

Ha $c_i = \frac{m_i}{m}$ az i-edik gázkomponens koncentrációja akkor:

$$M_\ell = \frac{1}{\frac{c_1}{M_1} + \frac{c_2}{M_2} + \ldots\ldots + \frac{c_n}{M_n}}.$$

4.2. A termodinamikai valószínűség és az entrópia statisztikus mechanikai értelmezése

Az előző fejezetben láttuk, hogy a gáz részecskéi (a molekulák, vagy atomok) a tér minden irányában mindenféle sebességgel mozoghatnak. Ha a mozgásukról pillanatfelvételeket készítenénk olyan nagyításban, hogy mindegyik részecske külön is látható legyen, akkor megkapnánk a részecskék térbeli eloszlását. A nagyszámú részecske miatt az eloszlás értelmezése nehéz, ezért vegyünk egy tartályt, amelyben csak 6 db részecske van, s ezek rendelkezzenek „nevekkel", mégpedig legyenek: a, b, c, d, e, és f. A tartályt osszuk fel két, I. és II. részre. Vizsgáljuk meg, hogyan helyezkedhet el a hat részecske a két fél térben. Tételezzük fel, hogy a tartály egyik felében nulla, egy, kettő, három, négy, öt és hat részecske hányféleképpen helyezkedhet el. Az eloszlást az alábbiakban adjuk meg.

Sor-szám	A részecskék száma	A részecskék lehetséges elhelyezkedése (eloszlása)	A különböző eloszlások száma	A makroállapotok termodinamikai valószínűsége
1.	0	-	1	1
2.	1	a; b; c; d; e; f;	6	6
3.	2	ab; ac; ad; ae; af, bc; bd; be; bf; cd; ce; cf; de; df; ef	15	15
4.	3	abc; abd; abe; abf; acd; ace; acf; ade; adf; aef; bcd; bce; bcf; bde; bdf; bef; cde; cdf; cef; def	20	20
5.	4	abcd; abce; abcf; abde; abdf; abef; acde; acdf; acef; adef; bcde; bcdf; bcef; bdef; cdef	15	15
6.	5	abcde; abcdf; abcef; abdef; acdef; bcdef;	6	6
7.	6	abcdef	1	1

A táblázat hét sora olyan részecske elrendezéseket mutat meg, amelyek makroszkópikusan is különböznek. Mérőműszereinkkel meg tudjuk mondani, hogy egy térrészben hány részecske található (vagy legalább is meg tudjuk ezt becsülni), azonban nincs rá módunk, hogy a részecskéket egymástól is megtudjuk különböztetni. A hat gázrészecskéből és két fél tartályból álló rendszer makroállapotainak nevezzük a táblázat hét sorában látható eloszlás halmazokat, tehát azokat az állapotokat, amelyeket mérőműszereinkkel is meg tudunk különböztetni. Az egy makroállapothoz tartozó eloszlási lehetőségeket a makroállapot mikro állapotainak nevezzük.
A fizikában a makroállapothoz tartozó mikroállapotok számát a makroállapot termodinamikai valószínűségének nevezzük. Vegyük észre, hogy a termodinamikai valószínűség nem kisebb, mint egy. Egy egyszerűen mérhető mennyiségű gázt tartalmazó edényben a legvalószínűbb állapothoz tartozó érték jelentősen meghaladhatja a 10^{80} értéket is.
A termodinamikai valószínűség minél nagyobb, annál nagyobb valószínűséggel figyelhetjük meg az illető makroállapotot. Vegyük észre, hogy egy valóságos mennyiségű gáz esetén is 1 a termodinamikai valószínűsége annak a makroállapotnak, amelyben minden részecske az edény egyik felében van, azaz nem lehetetlen, de ha szinte végtelenül sok pillanatfelvételt csinálunk a részecskékről, valószínűleg lesz egy olyan kép, amelyik pont ezt az állapotot mutatja, azonban csak igen rövid ideig marad fenn ez az állapot.

A táblázatból jól látszik, hogy a legnagyobb számú elhelyezkedés abban az esetben lép fel, amikor mindkét féltérben azonos számú részecske helyezkedik el, azaz, amikor a legrendetlenebbül oszlanak el a tartály két részében. Mondhatjuk, hogy a legnagyobb termodinamikai valószínűsége annak a makroállapotnak van, melyben a részecskék egyenletesen oszlanak el, azaz a legrendezetlenebbül helyezkednek el és a legkisebb pedig annak az állapotnak, amelyben a legrendezettebb elrendezést figyelhetjük meg (amikor minden részecske egy térfélben van). Ha a rendszert magára hagyjuk, a részecskék addig rendeződnek, amíg egyenletesen oszlanak el a tartályban. A folyamat végé, azaz egyensúlyban a rendezetlenség, s ezzel a termodinamikai valószínűség maximális.

Mivel a termodinamikai valószínűség (w) nagyon nagy szám, ezért célszerű ennek a logaritmusával számolni, és még egy kis számmal (k) is beszorozni. Az így kapott fizikai mennyiség az entrópia (S):

$$S = k \cdot \ln W , \tag{4.2.1}$$

ahol k a Boltzmann állandó:

$$k = 10^{-23} \frac{J}{K}.$$

Az entrópia tehát a rendezetlenség mértéke, mértékegysége a

$$\frac{J}{K}.$$

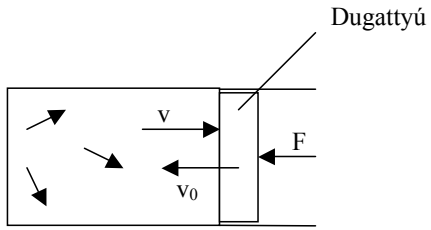
Ha két termodinamikai rendszert egyesítünk, akkor a termodinamikai valószínűségek természetesen összeszorzódnak, az entrópiájuk 4.2.1 egyenletből következően összeadódik, azaz az entrópia extenzív mennyiség.
Ha egy zárt termodinamikai rendszerben folyamat játszódik le, akkor az előbbiek szerint a termodinamikai valószínűség növekszik, s 4.3.1 egyenlet szerint az entrópia is. A folyamtok az egyensúly beálltáig játszódnak le, igy tehát kimondható az entrópia növekedésének (vagy az entrópia produkciónak) az elve:

Ha egy zárt termodinamikai rendszerben folyamat játszódik le, akkor a folyamat során az entrópia növekszik, vagy legalább is nem csökken. Egyensúlyban az entrópia maximális.

Emlékeztetünk rá, hogy egy zárt rendszerben egy folyamat végén, egyensúlyban az energia minimális.
Egyszerű mechanikai rendszerek energia minimumra és entrópia maximumra törekszenek. Az élő szervezetekben ennek a fordítottja figyelhető meg.

4.3. Mechanikai munka

A statisztikai felfogást folytatva, vizsgáljuk meg, hogy a gázon végzett munkáról mit tudunk mondani.
Amikor egy tartályban lévő gázon mechanikai munkát végzünk, akkor összenyomjuk, az alábbi, 4.3.1. ábra szerint.



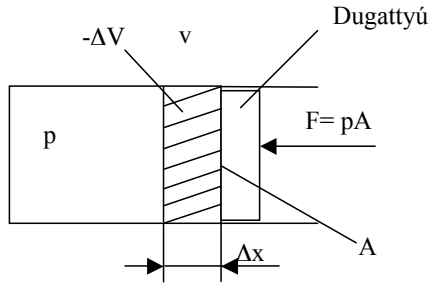
4.3.1. ábra A részecskék ütközése mozgó dugattyúba

Mozogjon a dugattyú súrlódásmentesen egy hengerben, állandó v_0 sebességgel. Tételezzük fel, hogy egy részecske v sebességgel pontosan merőlegesen érkezik a dugattyúra.
Ekkor, mivel a dugattyú tömege a részecske tömegénél nagyságrenddel nagyobb, a részecske $v+v_0$ nagyságú sebességgel pattan vissza, azaz az energiája növekszik.
Természetesen nem csak egy részecske verődik vissza, hanem nagyon sok, ezért a gáz belső energiája mérhetően megnövekszik.
Belátható, hogy a belső energiát megnövelő munkavégzés, a dugattyú befelé való elmozdulása, irányított munka, mivel a visszaverődő részecskék sebessége elmozdulás irányban nő meg. Természetesen, ha a dugattyú ellenkező irányban mozog, a visszavert részecskék sebessége (vagy annak dugattyú-mozgás irányú komponense) csökken, s ezzel a belső energia is.

Számszerűsítve:

$$\Delta U = W\,. \tag{4.3.1}$$

Másrészt, ha a dugattyú mozgását az alábbi (4.3.2. ábra) szerint vesszük figyelembe:



4.3.2. ábra A mechanikai munka értelmezéséhez

a munka: $W = F \cdot \Delta x$ (4.3.2)
azaz $W = p \cdot A \cdot \Delta x$ (4.3.3)
de $A \cdot \Delta x = -\Delta V$ (4.3.4)
azért, mert a gáz térfogata csökken, ΔV negatív.
Így $W=-p\Delta V.$ (4.3.5)
Így $\Delta U=-p\Delta V.$ (4.3.6)

Vegyük észre, hogy p intenzív és V extenzív mennyiség, és a fenti szorzatunk energiát vagy munkát ad.
Ha a W=-pΔV kifejezést nézzük, az éppen addig érvényes, amíg a nyomás állandó.
Változó nyomás esetében a térfogatváltozást olyan kis részekre osztjuk, ahol a nyomás állandónak tekinthető, és a **valóságos munka:**

a $\Delta W = -p\Delta V$ részmunkák összegeként irható fel,

$$W = \sum \Delta W\,,$$

azaz

$$W = -\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta V\,,$$

vagy pontosabban:

$$W = -\lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta W ,$$

amit a matematikusok a:

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p dV \text{ alakba írnak.} \qquad (4.3.7)$$

Ha W a gázon végzett munka, legyen W' a gáz által végzett munka. Míg az előző a gáz összenyomódásával jár, addig az utóbbi, a gáz által végzett munka során a gáz tágul.

$$W'=-W,$$

azaz:

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV , \qquad (4.3.8)$$

illetve elemi, differenciális formában a gáz által végzett munka:

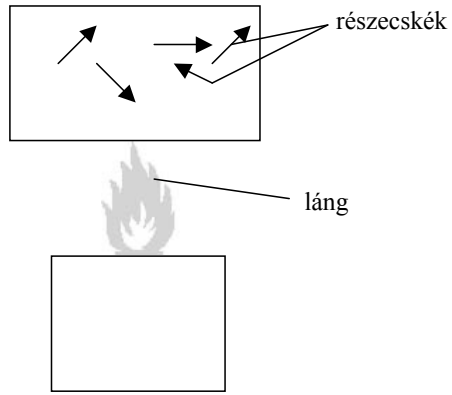
$$dW' = p \cdot dV . \qquad (4.3.9)$$

A gázon végzett elemi munka:

$$dW = -p \cdot dV . \qquad (4.3.10)$$

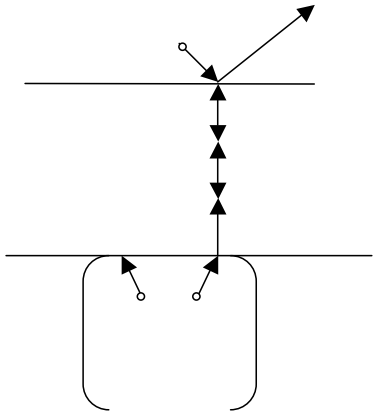
4.4. Hőmennyiség

Melegítsünk egy zárt, állandó térfogatú tartályban gázt a 4.4.1. ábra szerint.



4.4.1. ábra A hőmennyiség értelmezéséhez

A tartályban lévő gáz részecskéi, molekulái, vagy nemesgáz esetén atomjai rendezetlen mozgást végeznek. Az ábrán a láng érintkezését kinagyítva (4.4.2. ábra) láthatjuk, hogy



4.4.2. ábra A hőközlés folyamata

A láng gyors részecskéi beleütközve a tartály falának rezgő részecskéivel (amelynek rezgési amplitúdója növekszik a hőmérséklet növekedésével), s azoknak energiát ad, amit azok először a szomszédjuknak adnak át, majd azok ismét a szomszédúknak. Így az energia végül eléri a fal belső oldalát. A belső oldal ily módon gyorsan rezgő részecskéje átadja az energiáját a vele ütköző részecskéknek, aminek így nő a mozgási energiája, s ezzel a gázé is. Tulajdonképpen ez is a munkavégzés egy formája, azonban ez teljesen rendezetlen, nincs kitüntetett váza. Az ilyen energiaközlést (munkavégzést) **hőközlésnek** nevezzük, neve a hőmennyiség, jele: Q, SI mértékegysége: J.

Így a belső energia megváltozása:

$$\Delta U = Q \tag{4.4.1}$$

A hőmennyiség és az entrópia szoros kapcsolatban van egymással. Ha egy gázzal, vagy rendszerrel T hőmérsékleten ΔQ hőt közlünk, akkor belátható, hogy az entrópia megváltozása:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}, \tag{4.4.2}$$

illetve, ha a hőmérséklet változik:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \tag{4.4.3}$$

ahol az integrálási határok (1 és 2) azt jelzik, hogy a folyamat kezdeti pontjától a végpontjáig, a folyamat által megszabott paraméterektől és paraméterekig és paraméterek szerint kell integrálni a valóságban).

A hőmennyiség kifejezhető a gáz egyéb paramétereivel is az alábbi módon:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T, \tag{4.4.4}$$

ahol c a gáz, vagy általánosan véve a szóban forgó anyag (ami lehet gáznemű, folyékony, vagy szilárd halmazállapotú) fajhője, m a tömege, és ΔT a hőmérséklet változás, amelynek során a hőfelvétel, vagy leadás megtörténik. A formula szigorúan véve valamilyen állapotparaméter (nyomás, vagy térfogat) esetén érvényes, és akkor a fajhőt is ennek megfelelően kell megadni. Szilárd testek és folyadékok esetében az állandó nyomáson (c_p) és az állandó térfogaton (c_v) mért fajhő jó közelítéssel megegyezik, gázok esetében azonban jól megkülönböztethető értékük van, és hányadosuk, az ún. fajhőviszony egynél nagyobb.

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}. \qquad (4.4.5)$$

Az állandó nyomású fajhő a szabadságfokokkal kifejezve:

$$c_v = \frac{f}{2} \cdot \frac{R}{M},$$

az állandó nyomású pedig:

$$c_v = \frac{f+2}{2} \cdot \frac{R}{M},$$

a fajhőviszony:

$$\kappa = \frac{f+2}{f}.$$

A 4.1. fejezet végén a különböző fajhők és a fajhőviszony szabadsági fokokkal való kiszámítását is megadtuk.
A fajhő mértékegysége:

$$[c] = \frac{[Q]}{[m]\cdot[T]} = \frac{J}{kg \cdot K}.$$

A legtöbb anyag fajhője 500 és 5000 J/kgK között van. A szobahőmérséklet környékén alkalmazott anyagok között a vízé kiemelkedően magas, 4184 J/kgK az értéke.
A fajhő mellett szokás még a hőkapacitásról is beszélni, ami egy egyszerű anyagnál a

$$K = c \cdot m \qquad (4.4.6)$$

alakban írható (néha C a jele), s általánosságban az egységnyi hőmérséklet változás során átadott hőmennyiség. Mértékegysége:

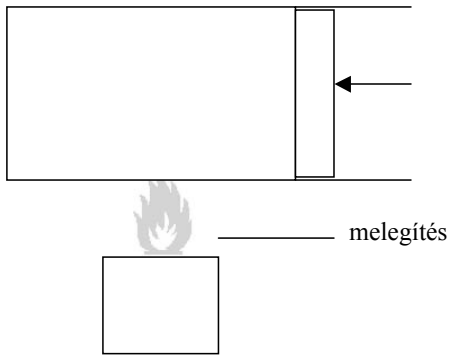
$$[K] = \frac{J}{K}.$$

A hőmennyiség kiszámítása a hőkapacitással:

$$Q = K \cdot \Delta T. \qquad (4.4.7)$$

4.5. A termodinamika I. főtétele:

Vizsgáljuk most egy súrlódásmentes dugattyúval lezárt tartályban lévő gázt, amit melegítsünk a 4.5.1. ábra szerint



4.5.1. ábra Tartályban lévő gáz melegítése és munkavégzés rajta

Ekkor a belső energia megváltozása:

$$\Delta U = Q + W \tag{4.5.1}$$

alakot ölti. A két munkavégzés független egymástól, a belső energia megváltozása nem független attól, hogy milyen módon áll elő, 100J hőmennyiség, 100J munka ugyanakkora belső energiaváltozást okoz, mint 150J +50J, vagy 200J és 0J, stb.
Ilyen módon a belső energia megváltozása független az úttól, csak a kezdő és végállapottól függ. Az előzőekből kiderül, hogy a belső energia arányos a hőmérséklettel, így a megváltozása a hőmérsékletváltozással.
Az (4.5.1) egyenlet átalakításával kapjuk:

$$-W = Q - \Delta U$$

azaz,

$$W' = Q - \Delta U, \tag{4.5.2}$$

ahol W' a gáz, vagy általánosságban a termodinamikai rendszer által végzett munka.
Az egyenlet szerint egy termodinamikai rendszer akkor végezhet munkát (W' pozitív), ha vagy hőt vesz fel (és az nagyobb, mint a belső energia változása), vagy a belső energia csökken (jobban, mint a felvett hő). Ez az energia megmaradás törvényének egy, (a termikus rendszerekre, termikus erőgépekre) szűkített formája. Ebből adódik a Termidinamika első főtétele, amit az alábbiakban adunk meg.

Termodinamika I. főtétele:
Nem készthető olyan gép, amely úgy végezne munkát, hogy közben ne csökkenne a belső energiája, vagy ne venne fel hőt.
Más formában: nem készíthető elsőfajú perpetuum mobile, azaz olyan gép, amely úgy végezne munkát, hogy sem hőt nem venne fel, sem pedig a belső energiája nem csökkenne
Perpetuum mobile: örökmozgó.

Az első főtétel matematikai alakja:

$$\Delta U=Q+W.$$

Elemi folyamatokra az ún. differenciális alakja:

$$dU = dQ + dW\ . \tag{4.5.3}$$

A differenciális alakot bizonyos átalakítással egy másik, szokásos alakra hozhatjuk az alábbiak szerint:

Az entrópia megváltozása:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \tag{4.5.4}$$

Ebből következik, hogy:

$$\mathrm{dQ} = \mathrm{Tds} \tag{4.5.5}$$

hőmennyiséget, azaz egyfajta munkát kaptunk.
Az elemi munka, mint tudjuk:

$$dW=-pdV,$$

ezért a differenciális alak egy másik formája:

$$dU = Tds - pdV \tag{4.5.6}$$

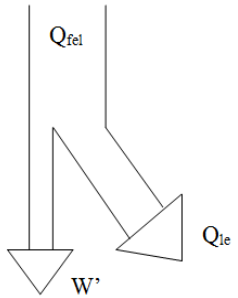
A Termodinamika II. főtétele

A $\eta \leq \eta_{Carnot} < 1$ egyenlőtlenség következménye a Termodinamika II. főtétele, amelynek több megfogalmazása van, s közülük csak a legfontosabbak száma 256. Szinte minden jeles fizikus, illetve vegyész megadta a maga verzióját, természetesen több tudományterületre. Az alábbiakban a három, Helmholtz által adott klasszikus változatot közöljük.

> **Nem lehet másodfajú perpetuum mobilét készíteni, azaz olyan gépet, melynek hatásfoka 1.**

Ez azt jelenti, hogy Q_{le} nem lehet zérus, azaz mindig van hulladékhő.

Az ábrán látható ún. Shenkey diagramon illusztrálva szemléletesen látszik, hogy a tüzelőanyagból felszabadult Q_{fel} hőmennyiség egy része (W') alakul csak át mechanikai munkává, egy másik része (többnyire a nagyobbik fele) hulladék hő formájában kerül elvezetésre, ezzel többnyire termikus környezetszennyezést okozva.



A Termodinamika III. főtétele

Ennek a főtételnek is több megfogalmazása van, az alábbiakban csak az egyiket adjuk meg.

A hőmérséklet csökkenésével a fajhők is csökkennek, s az abszolút 0 felé a nullához tartanak.

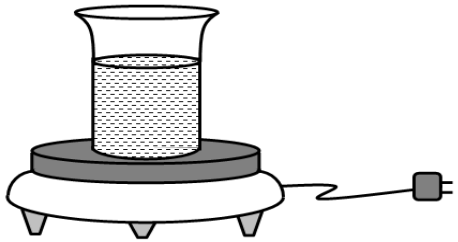
A folyamatok megfordíthatósága

A fizikai folyamatok között vannak olyanok, amelyek esetében a folyamatot megfordítva, a kezdő állapotba jut a test, vagy a rendszer. Ilyen például egy inga lengése, ha eltekintünk a veszteségektől, vagy ilyenek a fentebb tárgyalt folyamatok a gázok esetében. Az ilyen folyamatokat megfordítható, vagy **reverzibilis** folyamatoknak nevezzük. A reverzibilis folyamatok esetében a rendszer és a környezete a folyamat során minden pontban egyensúlyban van.

Azokat a folyamatokat, amelyek esetében a folyamat megfordítása esetén nem a kezdőpontba jut vissza a rendszer, **irreverzibilis** folyamatoknak nevezzük. Ilyen folyamat például a túlcsillapított harmonikus rezgés, egy test lecsúszása lejtőről akkor, ha a súrlódás nem elhanyagolható. Az irreverzibilis folyamatok esetében a folyamat során az egyes állapotok nem egyensúlyiak is.

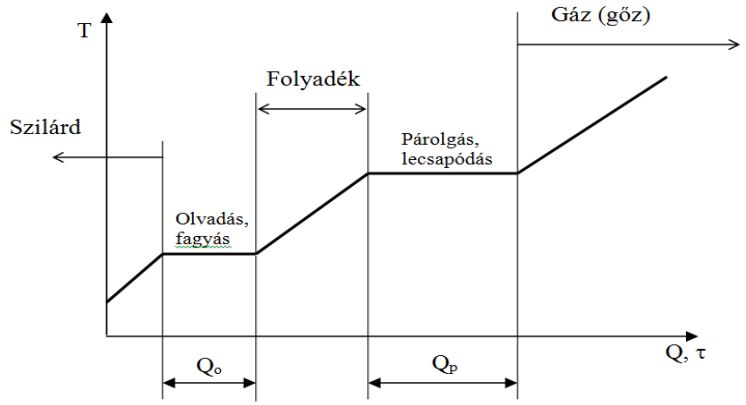
Az entrópia kiszámítása reverzibilis folyamatokra érvényes. Szigorúan vizsgálva az egyes folyamatokat, kiderül, hogy alapvetően egyik sem megfordítható, mert mindig vannak veszteségek. Így az entrópia minden esetben nagyobb, mint amit az egyenletek tartalmaznak.

Vegyünk egy szilárd halmazállapotú anyagot és kezdjük el melegíteni állandó nyomáson egy, az ábrán bemutatott elrendezésben úgy, hogy a felvett hőt és a hőmérsékletet állandóan mérjük.



Egy adott tömegű test melegítése

A melegítés során a testtel közölt hő állandóan növeli annak belső energiáját. Ennek következtében a hőmérséklete a folyamat elején állandóan növekszik, mindaddig, amíg el nem éri az olvadáspontját, amikor is a hőmérséklet nem változik (ábra), amíg az utolsó két atom, vagy molekula között levő, a szilárd halmazállapotot biztosító kötés fel nem lazul a folyadék állapotban megfigyelt értékig.



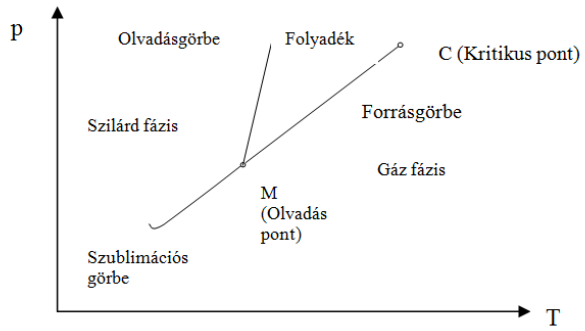
Adott tömegű test hőmérsékletének változása állandó nyomáson állandó hőteljesítménnyel történő melegítés esetében

Az adott tömegű szilárd test megolvasztásához Q_o olvadáshő szükséges. Az egységnyi tömegű szilárd test megolvasztásához az olvadáshőre (L_o) van szükség. A teljes megolvadás után a folyadék melegszik tovább, majd a forráspont elérése után a hőmérséklet ismét állandó marad mindaddig, amíg az utolsó két molekula (vagy) atom között a folyadékra jellemző kötést meg nem szüntetjük. Az adott tömegű folyadék elpárologtatására fordított hő Q_p. Az egységnyi tömegű folyadék elpárologtatásához szükséges energiát párolgáshőnek (L_p) nevezzük.
Az előző ábra állandó hőmérsékletű szakaszain együtt van jelen a két halmazállapot. Mind az olvadáshő, mind a párolgáshő függ a nyomástól a Clausius-Clapeyron egyenlet szerint:

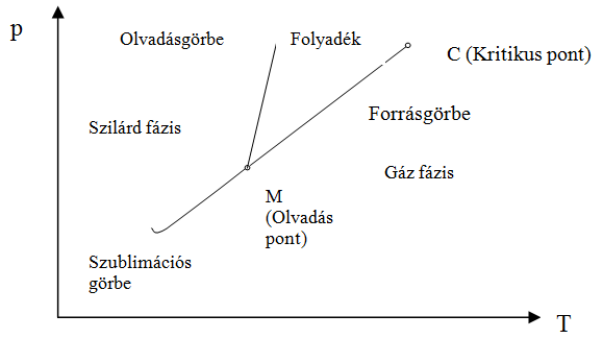
$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T} \cdot \frac{1}{v''-v'},$$

ahol r az állandó nyomású párolgáshő (olvadásnál az olvadáshő, azaz az egységnyi tömegű test megolvasztásához szükséges hő), v" a gáz (olvadásnál a folyadék), v' a folyadék (olvadásnál a szilárd halmazállapot) fajtérfogata.
Azt, hogy a forráspont hőmérséklete függ a nyomástól általánosan ismert. Az előző egyenletből következik, hogy ez a szilárd halmazállapot olvadáspontjánál is így van. Ezt alátámasztja az a tény, hogy a jég olvadáspontja csökken, ha a nyomás nő.

A párolgási folyamat során egyidejűleg két fázis van jelen, a folyadék és a gáz halmazállapot. Mindkettőnek ugyanaz a nyomása és a hőmérséklete. Egyensúlyban vannak, nem változik egymáshoz való arányuk, a párolgási folyamat tökéletesen megfordítható. Ha szilárd és folyékony, valamint gáz fázis van egyszerre jelen, akkor a p-T diagram az ábrán látható.



A halmazállapot változások p-T diagramja

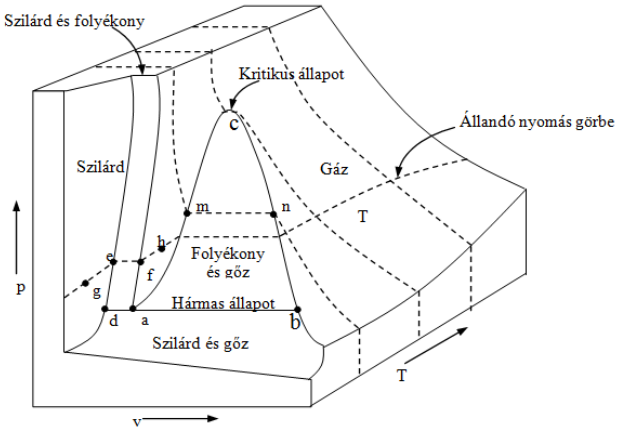


A halmazállapot változások p-T diagramja

Az ábrából jól látszik, hogy a forrásgörbe, a szublimációs görbe és az olvadásgörbe mentén két-két fázis található, s ha z M olvadáspontot, vagy hármaspontot vizsgáljuk, akkor ott három fázis találkozik. Az egész ábrára érvényes, hogy ha F a fázisok, Sz a szabadsági fokok (a függetlenül megválasztható intenzív termodinamikai paraméterek, mint a nyomás, a hőmérséklet, stb.), és K a komponensek (kémiailag különböző anyagok) száma, akkor érvényes a Gibbs – féle fázisszabály:

$$Sz + F = K + 2$$

Gondoljuk végig, hogy egy egykomponensű anyagban például a hármaspontban a fázisok száma 3, így mindegyik paraméter kötött, a szabadsági fok zérus. A fent említett görbék mentén pedig a fázisok száma kettő, így a szabadsági fok 1, azaz egy paraméter választható függetlenül. Az előző diagram alapján meghatározhatjuk az adott közeg halmazállapotaihoz, illetve azok változásaihoz tartozó paramétereket, az átalakulási energiákat pedig a megfelelő T-s diagramok adják. Ha a fajtérfogat, vagy a térfogatot is számításba kell vennünk, akkor az alábbi ábrát kell segítségül hívni.



A különböző halmazállapot változások p-T-v diagramja

Vegyük észre, hogy ezen az ábrán együtt látható a valóságos gáz és folyadék, valamint szilárd halmazállapot minden állapotváltozása, mint a háromdimenziós ábra megfelelő síkmetszete.

Hőtan (Termodinamika)

A termodinamika alapjai, az ideális gázok tulajdonságainak statisztikus mechanikai értelmezése

A termodinamika az energiával, illetve a munkával, az energia áramlásával, az anyagi világ alapvető folyamataival foglalkozó tudományág.
Eredményét nemcsak a hőtan, de az optika, az elektromágnesesség, a kémia és a biológia is alkalmazza.

Termodinamikai rendszer: - lehet egy elemi részecske,
- több, egy atom, vagy egy molekula,
- a világegyetem

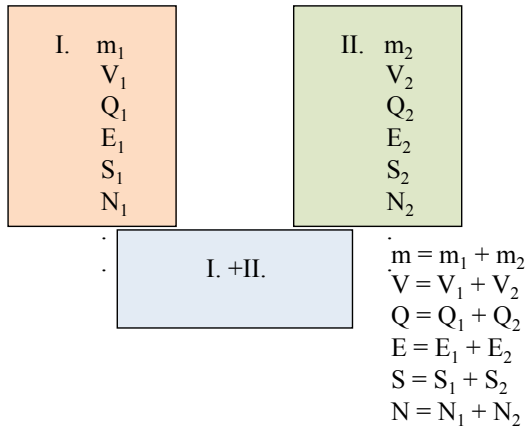
A termodinamikai rendszerek jellemzésére szolgáló paraméterek, jellemzők többféleképpen csoportosíthatók:

- **Extenzív paraméterek** azok, amelyek két termodinamikai rendszer egyesítésekor összeadódnak.
  Ilyenek pl. a tömeg (m), a térfogat (V), a villamos töltés (Q), az energia (E), az entrópia (S), részecskeszám (N)

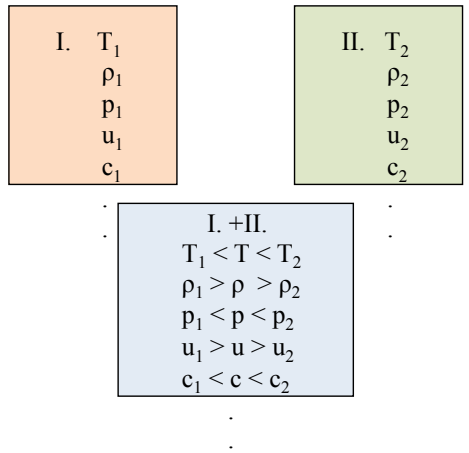
- **Intenzív paraméterek** azok, amelyek két termodinamikai rendszer egyesítésekor kiegyenlítődnek.
  Ilyen a nyomás (p), a sűrűség (ρ), a hőmérséklet (T), a villamos potenciál (u), a koncentráció (c)

Példa: két különböző nyomású gáztartály összekapcsolódásakor bizonyos térfogatú gáz megy át a magasabb nyomásúból az alacsonyabba, amíg a két nyomás ki nem egyenlítődik.

Extenzív paraméterek



Intenzív paraméterek



Tétel: Két termodinamikai rendszer egyesítésekor az intenzív mennyiségek kiegyenlítődésére törekszenek, extenzívek áramlása útján.

Bizonyos extenzív-intenzív párok, esetében az intenzív mennyiség szorozva az extenzív megváltozásával munkát ad:

$$dW= pdV$$
$$dW=Tds$$
$$dW=UdQ$$

Ha egy termodinamikai rendszer n paraméterrel írható le, így azok közül legfeljebb n-1 lehet intenzív, és legalább 1 extenzív kell a teljes leíráshoz.

Az ideális gáz tulajdonságai:

1. A rendelkezésre álló teret teljesen kitölti
2. Tökéletesen összenyomható
3. Részecskéi között, a részecskék és a tartály fala között súrlódási erő nem lép fel, nyírófeszültség nem ébred.
4. Részecskéi között és a részecskék és a fal között sem vonzó, sem taszító erő nem lép fel, húzó feszültség nem ébred, csak nyomó.

Az ideális gáz leírására a nyomás (p) a hőmérséklet (T) mint intenzív mennyiségek, és a térfogat, mint extenzív mennyiség elegendő.

$[m] = g$

Egyetemes gáztörvény: $p \cdot V = \frac{m}{M} R \cdot T$ $[M] = \frac{g}{mol}$

Avogadro törvénye: **Minden ideális gáz egyenlő térfogatában ugyanazon a hőmérsékleten és nyomáson egyenlő számú molekula van.**

Egy molnyi anyagban, tehát függetlenül az anyagi minőségtől ugyanannyi molekula van: L= $6{,}02 \cdot 10^{23}$ db (L: a Loschmidt - féle szám)

Tehát pl. 1 mólnyi oxigén: 32 g ugyanannyi molekulát tartalmaz, mint 1 molnyi hidrogén: 2 g, $6{,}02 \cdot 10^{23}$ db molekulát.

R az egyetemes gázállandó, vagy Regnault állandó: $R = 8{,}314 \frac{J}{mol\ K}$

Ha a tömeget molban mérjük: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ n: molszám

Ha egy gázrészecske (molekula vagy atom tömege) μ, akkor M = L μ és ha az m tömeg N részecskéből áll (feltéve, ha homogén gázról van szó), akkor m = N·μ.

Ezek alapján: $$p \cdot V = \frac{m}{M} RT = \frac{N \cdot \mu}{L \cdot \mu} RT = N \frac{R}{L} T$$

Boltzmann állandó: $$k = \frac{R}{L} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

Így $$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

Illetve: $$p \cdot V = m \cdot r \cdot T$$

Ahol : $$r = \frac{R}{M} \qquad [r] = \frac{J}{kg \cdot K}, \quad [m] = kg$$

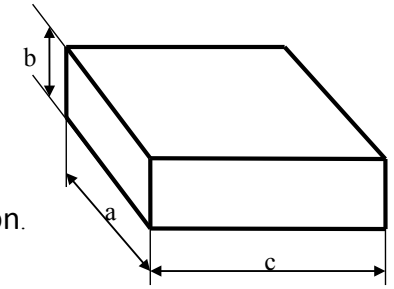
Itt r az ún. specifikus gázállandó, amit az adott gázra mérhetünk meg, illetve találhatunk meg a táblázatokban. Általában minden anyagra más az értéke.

Az ekvipartíció tétele

(Energia egyenletes eloszlásának tétele)

A statisztikus mechanikai leírást alkalmazva, az alábbi egyszerűsített modellt használva, nézzük meg, milyen következtetésekre juthatunk.

Legyen egy tartály, amelynek oldalai a, b és c



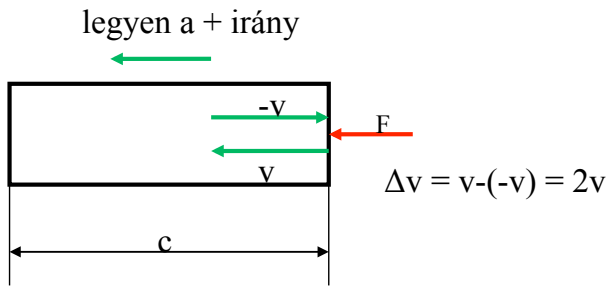
Legyen a tartályban N darab μ tömegű részecske (molekula vagy atom), amelyek mozogjanak ugyanakkora, v sebességgel úgy, hogy a sebességek iránya legyen a falakra merőleges és mindegyik fal felé $\frac{N}{6}$ molekula mozogjon.

Vegyük akkor a c oldallal párhuzamosan, az „ab” lapra merőlegesen mozgó, $\frac{N}{6}$ részecskét.

Mindegyik véglap felé mozognak, s ez $\tau = \frac{c}{v}$ ideig tart.

Az ütközés tökéletesen rugalmas, így az ütközés előtti és utáni sebességük ellentétes, így $\Delta v = 2v$

az erőhatás egy ütközésre: $$F_{1ütk} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_{végső} - I_{kezdeti}}{\tau} = \frac{\mu v - (-\mu v)}{\tau} = \frac{\mu 2v}{\tau} = \frac{2\mu v}{\frac{c}{v}} = \frac{2}{c}\mu v^2$$



$\frac{N}{6}$ részecske esetében az erő: $$F_{\frac{N}{6}} = \frac{N}{6} \cdot \frac{2}{c} \mu \cdot v^2 = \frac{N}{3c} \cdot \mu \cdot v^2$$

Az „ab” véglapra ható nyomás: $$p = \frac{F_{\frac{N}{6}}}{A} = \frac{F_{\frac{N}{6}}}{ab} = \frac{\frac{N}{3c} \cdot v^2}{ab} = \frac{N}{3} \cdot \frac{1}{abc} \mu \cdot v^2$$

Mivel abc = V, és így: $$p = \frac{N}{3} \cdot \frac{1}{V} \mu \cdot v^2 = \frac{2}{3} N \frac{1}{V} \frac{1}{2} \mu \cdot v^2,$$

Ebből: $$p \cdot V = \frac{2}{3} N \frac{1}{2} \mu \cdot v^2$$

Másrészről tudjuk, hogy: $$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

Így kapjuk: $$N \cdot k \cdot T = \frac{2}{3} N \frac{1}{2} \mu \cdot v^2$$

Ebből kifejezve az abszolút hőmérsékletet: $$T = \frac{2}{3k} \frac{1}{2} \mu \cdot v^2$$

Ez azt jelenti, hogy a hőmérséklet az a fizikai mennyiség, ami arányos a részecskék átlagos sebességének a négyzetével, azaz minél nagyobb a gáz hőmérséklete, annál gyorsabban mozognak a gáz részecskéi és fordítva.

Jelölje ε egy részecske mozgási energiáját, ami $\varepsilon = \frac{1}{2}\mu \cdot v^2$

Ekkor az előző egyenletből: $\varepsilon = \frac{3}{2}k \cdot T$

A gáz részecskéinek mozgásából származó összes energia, amit belső energiának nevezünk:

$$U = N \cdot \varepsilon = \frac{3}{2}N \cdot k \cdot T$$

Azaz az ideális gázok belső energiája arányos a gáz hőmérsékletével.

mivel $k = \frac{R}{L}$

$$U = \frac{3}{2}N\frac{R}{L}T$$

$\frac{\mu}{\mu}$ -vel beszorozva a baloldalt kapjuk:

$$U = \frac{3}{2}\frac{N\mu}{L\mu}RT = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT = \frac{3}{2}\frac{R}{M}mT$$

és mivel $$p \cdot V = \frac{m}{M}RT$$

így $$U = \frac{3}{2}pV$$ **pontszerű test, azaz egyatomos gáz** esetében

Beírva az egy részecske kinetikai energiáját az $\varepsilon = \frac{3}{2}k \cdot T$ egyenletbe kapjuk:

$$\frac{1}{2}\mu \cdot v^2 = \frac{3}{2}kT$$

A sebesség vektor mennyiség, így ha $v = v(v_x; v_y; v_z)$, akkor:

$$\frac{1}{2}\mu\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{3}{2}kT$$

részletezve: $$\frac{1}{2}\mu \cdot v_x^2 + \frac{1}{2}\mu \cdot v_y^2 + \frac{1}{2}\mu \cdot v_z^2 = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT$$

Ha sok részecskéről van szó, akkor: $\overline{v}_x^2 = \overline{v}_y^2 = \overline{v}_z^2$

Így a négyzetes tagok mindegyikéhez azonos $\frac{1}{2}kT$ energia tartozik

Definíció: a szabadsági fokok száma az ideális gáz kinetikai energiájának kifejezésében lévő egymástól független négyzetes tagok száma.

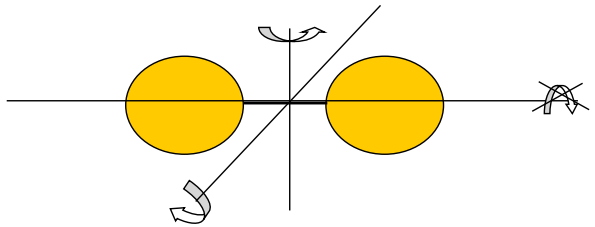
Ekvipartíció tétele:

Az ideális gáz bármely szabadsági fokára ugyanannyi, mégpedig $\frac{1}{2}kT$ energia jut.

Szabadsági fok, fajhő

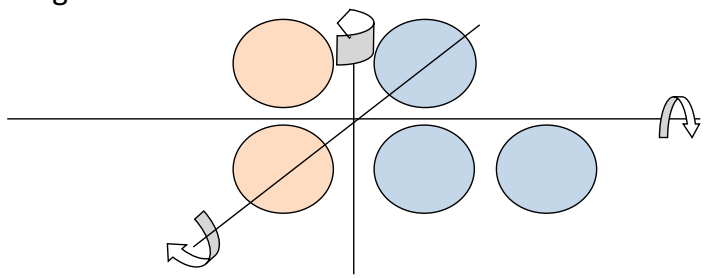
Az egyatomos molekulákat tömegpontként vesszük figyelembe, f=3 szabadsági fokkal rendelkeznek.

A kétatomos molekulák nem tekinthetők pontszerűnek, súlyzóként modellezhetők.



Kétatomos és többatomos de lineáris molekulák esetében 3 transzlációs és 2 rotációs szabadsági fokra, f=5 a szabadsági foka.

Többatomos nem lineáris molekula:
szabadsági fokok száma: f=6.



A gázrészecskék transzlációs és rotációs energiát vesznek fel, közönséges hőmérsékleten a rezgés nem gerjesztődik.

Korábban már láttuk, hogy pontszerű egyatomos gáz esetében (f=3): $U = \frac{3}{2}pV$

Általánosítva: $U = \frac{f}{2}pV$

Összefoglalva:

		Szabadsági fok	Egy molekula mozgási energiája
Egyatomos gáz		3	$\varepsilon = \frac{1}{2}\mu v_x^2 + \frac{1}{2}\mu v_y^2 + \frac{1}{2}\mu v_z^2$
Kétatomos gáz v. lineáris molekula		5	$\varepsilon = \frac{1}{2}\theta_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\mu v_x^2 + \frac{1}{2}\mu v_y^2 + \frac{1}{2}\mu v_z^2$
Többatomos, nem lineáris molekulájú gáz		6	$\varepsilon = \frac{1}{2}\theta_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\theta_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}\mu v_x^2 + \frac{1}{2}\mu v_y^2 + \frac{1}{2}\mu v_z^2$

A molekulák szerkezete azonban olyan, hogy bennük az atomok között első közelítésben rugalmas erőnek tekinthető kötőerők lépnek fel, ezért a rugó-tömeg rendszerhez hasonlóan az egyes molekulák rezeghetnek is. A kinetikus energia kifejezésében ennek megfelelő rugalmas energia tagok is felléphetnek.

A rezgési energia kifejezése csak a rugalmas tagokra:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} D_1 x_1^2 + \frac{1}{2} D_2 x_2^2 + \frac{1}{2} D_3 x_3^2 + ..$$

A molekulák atomokból épülnek fel, s egy atom szabadsági fokainak száma 3, n atomhoz 3n szabadsági fok tartozik.

3n szabadsági fokból 5, vagy 6 foglalt a transzlációra és a rotációra, ezért a vibrációs szabadsági fokok száma 3n-5, vagy 3n-6.

A szabadsági fokok alapján az ideális gázra érvényes, de a szobahőmérséklet közelében a valóságos gázokra is jó becslést adó gázparamétereket lehet kiszámolni, s ezzel sok esetben a felmerülő problémának legalább is jó becslését adhatjuk meg egyszerű eszközökkel.

Megmutatható, hogy az ideális gázra a fajhők és a fajhőviszony:

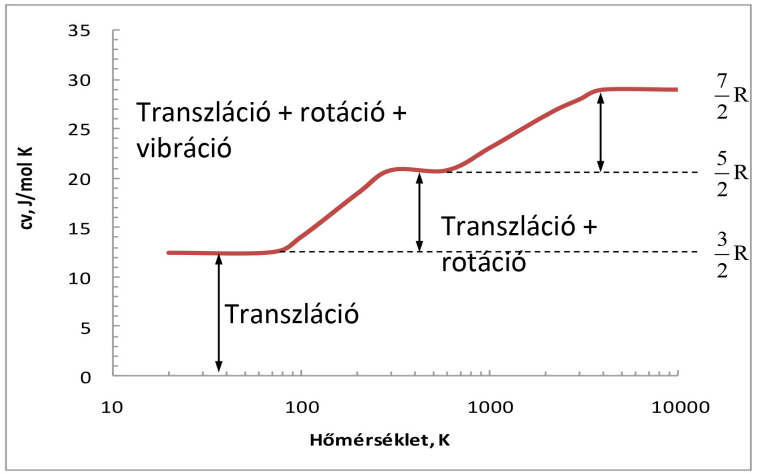
$$c_p = \frac{f+2}{2} \cdot \frac{R}{M} \qquad c_v = \frac{f}{2} \cdot \frac{R}{M} \qquad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$$

$$\kappa_{\text{egyatomos}} = \frac{5}{3} = 1{,}66\dot{}$$

$$\kappa_{\text{többatomos(lineáris)}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$\kappa_{\text{többatomos(nemlineáris)}} = \frac{8}{6} = 1{,}33\dot{}$$

A fajhő hőmérséklet függvényében való mérésével megállapítható, hogy a gázok mennyire engedelmeskednek az ekvipartíció törvényének. A mérési eredmények azt mutatják, hogy a legtöbb gáz jól követi a fenti elméletet, szobahőmérséklet környékén mind a transzlációs, mind a rotációs szabadsági fokok gerjesztődnek.

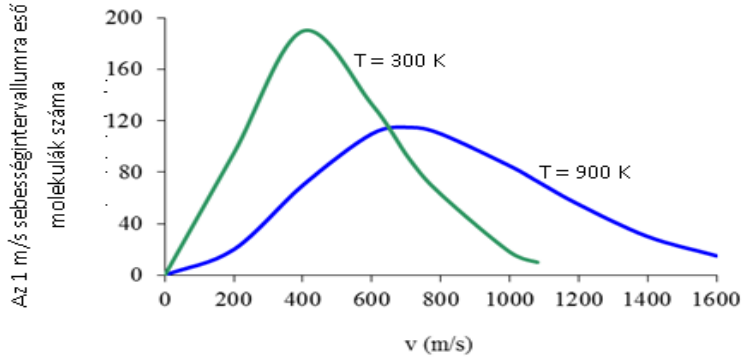


A gázok molekuláinak sebességeloszlása, Dalton törvény

A valóságban a gázok molekuláinak, vagy az atomoknak a sebessége nem azonos, hanem bizonyos eloszlásfüggvényt követ.
Ha a gáz egésze termikus egyensúlyban van, és ha N_v a v sebességgel mozgó, N az összes részecskék száma, m egy részecske tömege, T az abszolút hőmérséklet (K-ben mérve) és k a Boltzmann állandó, akkor a Maxwell-féle sebesség eloszlási törvény szerint:

$$N_v = 4 \cdot \pi \cdot N \cdot \left(\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}}$$

A sebesség eloszlási függvény 10^5 nitrogén molekula esetében két különböző hőmérsékletre.



Dalton törvénye

Egy ideális gázkeverék p nyomása azoknak a p_i parciális nyomásoknak az összege, amelyeket az adott T hőmérsékleten és V térfogaton az egyes alkotórészek egyedül fejtenének ki. (Dalton: 1807)

Az egyes összetevők nyomása

$$p_1 = \frac{1}{V} \cdot \frac{m_1}{M_1} RT$$

$$p_2 = \frac{1}{V} \cdot \frac{m_2}{M_2} RT$$

$$p_n = \frac{1}{V} \cdot \frac{m_n}{M_n} RT$$

Az eredő nyomás: $p = p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n$

így: $$p = \frac{1}{V} \cdot \frac{m_1}{M_1} RT + \frac{1}{V} \cdot \frac{m_2}{M_2} RT + ... + \frac{1}{V} \cdot \frac{m_n}{M_n} RT$$

ezért: $$p = \frac{1}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + ... + \frac{m_n}{M_n} \right) RT$$

A gázok összes tömege: $$\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2 + ... + \mathrm{m}_\mathrm{n}.$$

A teljes keverékre írható, hogy $$p = \frac{1}{V} \cdot \frac{m}{M_\ell} RT$$

így $$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}_\ell} = \frac{\mathrm{m}_1}{\mathrm{M}_1} + \frac{\mathrm{m}_2}{\mathrm{M}_2} + ... + \frac{\mathrm{m}_\mathrm{n}}{\mathrm{M}_\mathrm{n}}$$

Innen $$\mathrm{M}_\ell = \frac{m}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + ... + \frac{m_n}{M_n}}.$$

Ha $c_i = \frac{m_i}{m}$ az i-edik gázkomponens koncentrációja akkor:

$$M_\ell = \frac{1}{\frac{c_1}{M_1} + \frac{c_2}{M_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{c_n}{M_n}}.$$

A termodinamikai valószínűség és az entrópia statisztikus mechanikai értelmezése

A táblázat öt sora olyan részecske elrendezéseket mutat meg, amelyek makroszkópikusan is különböznek. Mérőműszereinkkel meg tudjuk mondani, hogy egy térrészben hány részecske található (vagy legalább is meg tudjuk ezt becsülni), azonban nincs rá módunk, hogy a részecskéket egymástól is megtudjuk különböztetni. A négy gázrészecskéből és két fél tartályból álló rendszer makroállapotainak nevezzük a táblázat öt sorában látható eloszlás halmazokat, tehát azokat az állapotokat, amelyeket mérőműszereinkkel is meg tudunk különböztetni. Az egy makroállapothoz tartozó eloszlási lehetőségeket a makroállapot mikroállapotainak nevezzük.

makroállapot	Az I. cellában levő molekulák		A lehetőségek (mikroállapotok) száma
	száma	neve	
A	4	abcd	1
B	3	abc, abd, acd, bcd	4
C	2	ab, ac, ad, bc, bd, cd	6
D	1	a, b, c, d	4
E	0	-	1

A fizikában a makroállapothoz tartozó mikroállapotok számát a makroállapot termodinamikai valószínűségének nevezzük. Vegyük észre, hogy a termodinamikai valószínűség nem kisebb, mint egy. Egy egyszerűen mérhető mennyiségű gázt tartalmazó edényben a legvalószínűbb állapothoz tartozó érték jelentősen meghaladhatja a 10^{80} értéket is.

Minél nagyobb a termodinamikai valószínűség, annál nagyobb valószínűséggel figyelhetjük meg az illető makroállapotot. Vegyük észre, hogy egy valóságos mennyiségű gáz esetén is 1 a termodinamikai valószínűsége annak a makroállapotnak, amelyben minden részecske az edény egyik felében van, azaz nem lehetetlen, de ha szinte végtelenül sok pillanatfelvételt csinálunk a részecskékről, valószínűleg lesz egy olyan kép, amelyik pont ezt az állapotot mutatja, azonban csak igen rövid ideig marad fenn ez az állapot.

Mondhatjuk, hogy a legnagyobb termodinamikai valószínűsége annak a makroállapotnak van, melyben a részecskék egyenletesen oszlanak el, azaz a legrendezetlenebbül helyezkednek el és a legkisebb pedig annak az állapotnak, amelyben a legrendezettebb elrendezést figyelhetjük meg (amikor minden részecske egy térfélben van). Ha a rendszert magára hagyjuk, a részecskék addig rendeződnek, amíg egyenletesen oszlanak el a tartályban. A folyamat végén, azaz egyensúlyban a rendezetlenség, s ezzel a termodinamikai valószínűség maximális.

Mivel a termodinamikai valószínűség (w) nagyon nagy szám, ezért célszerű ennek a logaritmusával számolni, és még egy kis számmal (k) is beszorozni. Az így kapott fizikai mennyiség az entrópia (S):

$$S = k \cdot \ln W$$

(k a Boltzmann állandó, $k = 10^{-23} \frac{J}{K}$)

Az entrópia tehát a rendezetlenség mértéke, mértékegysége a $\frac{J}{K}$

Ha egy zárt termodinamikai rendszerben folyamat játszódik le, akkor az előbbiek szerint a termodinamikai valószínűség növekszik, és ezzel az entrópia is. A folyamatok az egyensúly beálltáig játszódnak le, igy tehát kimondható az entrópia növekedésének az elve:

Entrópia növekedés elve:

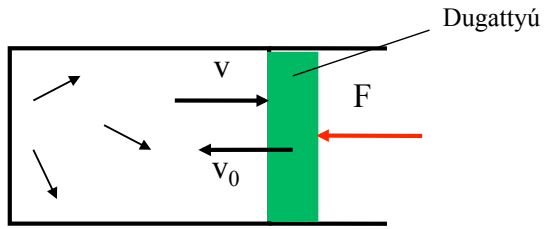
Ha egy zárt termodinamikai rendszerben folyamat játszódik le, akkor a folyamat során az entrópia növekszik, vagy legalább is nem csökken. Egyensúlyban az entrópia maximális.

Emlékeztetünk rá, hogy egy zárt rendszerben egy folyamat végén, egyensúlyban az energia minimális.

Egyszerű mechanikai rendszerek energia minimumra és entrópia maximumra törekszenek. Az élő szervezetekben ennek a fordítottja figyelhető meg.

Mechanikai munka, hőmennyiség

Egy tartályban lévő gázon összenyomással végezhetünk mechanikai munkát:

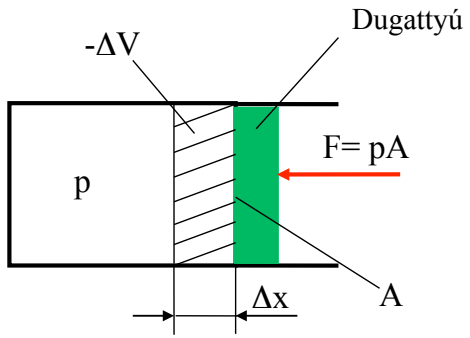


Mozogjon a dugattyú súrlódásmentesen egy hengerben, állandó v_0 sebességgel. Tételezzük fel, hogy egy részecske v sebességgel pontosan merőlegesen érkezik a dugattyúra. Ekkor, mivel a dugattyú tömege a részecske tömegénél nagyságrenddel nagyobb, a részecske $v+v_0$ nagyságú sebességgel pattan vissza, azaz az energiája növekszik.

Természetesen nem csak egy részecske verődik vissza, hanem nagyon sok, ezért a gáz belső energiája mérhetően megnövekszik.
Belátható, hogy a belső energiát megnövelő munkavégzés, a dugattyú befelé való elmozdulása, irányított munka, mivel a visszaverődő részecskék sebessége elmozdulás irányban nő meg.

Számszerűsítve: $\Delta U = W$

ha a dugattyú mozgását az alábbi ábra szerint vesszük figyelembe:



a munka: $W = F \cdot \Delta x$ a gáz térfogata csökken, így ΔV negatív.

$W = p \cdot A \cdot \Delta x$ $\quad W = -p \cdot \Delta V$

$A \cdot \Delta x = -\Delta V$ $\quad$ Így: $\Delta U = -p \cdot \Delta V$

Vegyük észre, hogy p intenzív és V extenzív mennyiség, és a fenti szorzatunk energiát vagy munkát ad. A kapott kifejezés állandó nyomás esetén érvényes.

Változó nyomás esetében a térfogatváltozást olyan kis részekre osztjuk, ahol a nyomás állandónak tekinthető, és a **valóságos munka** a**:**

$$\Delta W = -p\Delta V$$

részmunkák összegeként irható fel:

$$W = \sum \Delta W$$

azaz $$W = -\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta V,$$

pontosabban: $$W = -\lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta V$$

tehát a munka: $$W = -\int_{V_1}^{V_2} p dV$$

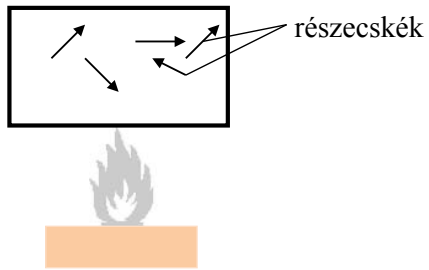
Ha W a gázon végzett munka, legyen W' a gáz által végzett munka. Míg az előző a gáz összenyomódásával jár, addig az utóbbi, a gáz által végzett munka során a gáz tágul.

a gáz által végzett munka tehát:

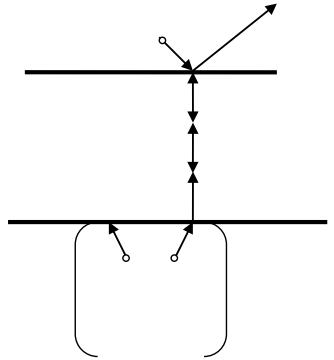
$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

Hőmennyiség

Melegítsünk egy zárt, állandó térfogatú tartályban gázt:



a láng érintkezését kinagyítva



A láng gyors részecskéi beleütközve a tartály falának rezgő részecskéivel (amelynek rezgési amplitúdója növekszik a hőmérséklet növekedésével), s azoknak energiát ad, amit azok először a szomszédjuknak adnak át, majd azok ismét a szomszédúknak. Így az energia végül eléri a fal belső oldalát.

A belső oldal ily módon gyorsan rezgő részecskéje átadja az energiáját a vele ütköző részecskéknek, aminek így nő a mozgási energiája, s ezzel a gázé is.

Lényegében ez is a munkavégzés egy formája, azonban ez teljesen rendezetlen, nincs kitüntetett váza. Az ilyen energiaközlést (munkavégzést) **hőközlésnek** nevezzük, neve a hőmennyiség, jele: Q, SI mértékegysége: J.

Így a belső energia megváltozása:

$$\Delta U = Q$$

A hőmennyiség és az entrópia szoros kapcsolatban van egymással. Ha egy gázzal, vagy rendszerrel T hőmérsékleten ΔQ hőt közlünk, akkor belátható, hogy az entrópia megváltozása:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

ha a hőmérséklet változik:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

A hőmennyiség kifejezhető a gáz egyéb paramétereivel is az alábbi módon:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

Itt c a gáz, vagy általánosan véve a szóban forgó anyag (ami lehet gáznemű, folyékony, vagy szilárd halmazállapotú) fajhője, m a tömege, és ΔT a hőmérséklet változás, amelynek során a hőfelvétel, vagy leadás megtörténik.

A formula szigorúan véve valamilyen állapotparaméter (nyomás, vagy térfogat) esetén érvényes, és akkor a fajhőt is ennek megfelelően kell megadni. Szilárd testek és folyadékok esetében az állandó nyomáson (c_p) és az állandó térfogaton (c_v) mért fajhő jó közelítéssel megegyezik, gázok esetében azonban jól megkülönböztethető értékük van, és hányadosuk, az ún. fajhőviszony egynél nagyobb.

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

Az állandó térfogatú fajhő a szabadságfokokkal kifejezve: $c_v = \frac{f}{2} \cdot \frac{R}{M}$

az állandó nyomású fajhő: $c_v = \frac{f+2}{2} \cdot \frac{R}{M}$

a fajhőviszony: $\kappa = \frac{f+2}{f}$

A fajhő mértékegysége: $[c] = \frac{[Q]}{[m] \cdot [T]} = \frac{J}{kg \cdot K}$

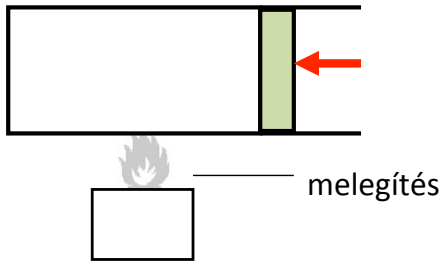
A legtöbb anyag fajhője 500 és 5000 J/kgK között van. A szobahőmérséklet környékén alkalmazott anyagok között a vízé kiemelkedően magas, 4184 J/kgK az értéke.

A fajhő mellett szokás még a hőkapacitásról is beszélni:

$$K = c \cdot m \qquad [K] = \frac{J}{K}$$

A termodinamika I. főtétele

Melegítsünk egy súrlódásmentes dugattyúval lezárt tartályban lévő gázt, és melegítés közben nyomjuk össze!



A belső energia megváltozása:

$$\Delta U = Q + W$$

A két munkavégzés független egymástól, a belső energia megváltozása nem függ attól, hogy milyen módon áll elő, 100J hőmennyiség, 100J munka ugyanakkora belső energiaváltozást okoz, mint 150J +50J, vagy 200J és 0J, stb.

A belső energia megváltozása tehát független az úttól, csak a kezdő és végállapottól függ. Az előzőekből kiderül, hogy a belső energia arányos a hőmérséklettel, így a megváltozása a hőmérsékletváltozással.

$$-W = Q - \Delta U$$

Azaz: $$W' = Q - \Delta U$$

ahol W' a gáz, vagy általánosságban a termodinamikai rendszer által végzett munka.

Az egyenlet szerint egy termodinamikai rendszer akkor végezhet munkát (W' pozitív), ha vagy hőt vesz fel (és az nagyobb, mint a belső energia változása), vagy a belső energia csökken (jobban, mint a felvett hő).

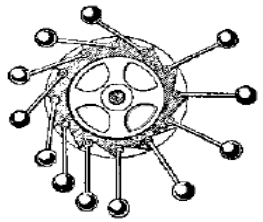
Termodinamika I. főtétele:
Zárt rendszer teljes energiája állandó, nem zárt rendszer teljes energiájának növekedése egyenlő a kívülről bármilyen formában a rendszerhez vezetett munkák és energiák összegével.

Más megfogalmazás:
Nem készthető olyan gép, amely úgy végezne munkát, hogy közben ne csökkenne a belső energiája, vagy ne venne fel hőt. (I. fajú perpetuum mobile)

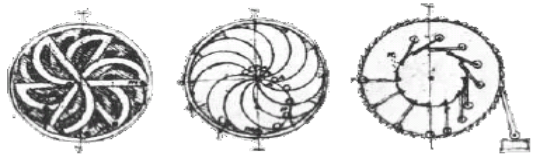
Röviden: **Nem építhető elsőfajú perpetuum mobile.** *(Clausius 1822-88)*

Energia megmaradás törvénye:
Energia semmilyen folyamatnál nem keletkezik vagy semmisül meg, hanem csak egyik energiaformából valamilyen más energiaformává alakul át. (Helmholz 1847)

Villard de Honnecourt, XIII. századi francia építész:



Leonardo da Vinci (1452-1519)



Az első főtétel matematikai alakja:

$$\Delta U = Q + W$$

ΔU pozitív, ha nő a hőmérsklet

Q pozitív, ha a gáz hőt vesz fel

W pozitív, ha a gázt összenyomjuk

Elemi folyamatokra az ún. differenciális alakja: $dU = dQ + dW$

A differenciális alakot bizonyos átalakítással egy másik, szokásos alakra hozhatjuk az alábbiak szerint:
Az entrópia megváltozása:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Ebből következik, hogy: $dQ = Tds$

Tehát hőmennyiséget, azaz egyfajta munkát kaptunk.

Az elemi munka, mint tudjuk:

$$dW=-pdV,$$

ezért a differenciális alak egy másik formája:

$$dU = Tds - pdV$$

Körfolyamatok

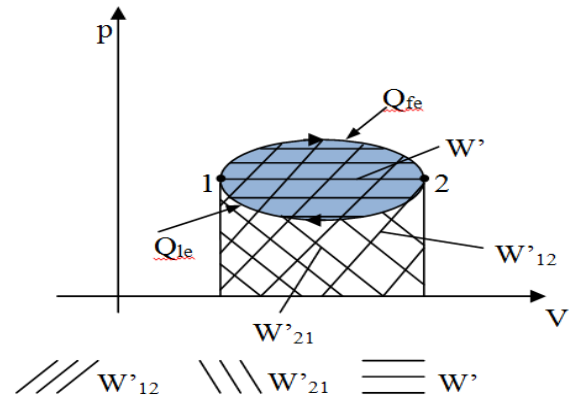
Bevezetés

A termodinamika egyik célja, hogy leírja azokat a folyamatokat, amelyek az egyes tüzelőanyagokban tárolt energiák felhasználásával, mechanikai energiává való átalakításával foglalkozik. Ez utóbbi célra a körfolyamatokat szokás használni. Ezekről lesz szó ebben a fejezetben.

Egy körfolyamat során a gáz, vagy az egész termodinamikai rendszer, ciklikusan visszakerül az eredeti állapotába. A p-V diagram az ábrán látható.

A körfolyamat során a gáz az 1 pontból a 2 pontba kerül, s közben W'_{12} munkát végez (ami arányos az 1-2 görbe alatti területtel).

A dugattyú a végállásába érve visszafordul, és visszatér a gáz az 1 állapotba, miközben mi rajta W'_{21} munkát végzünk, ami a valóságban W_{21} (ami arányos a 2-1 görbe alatti területtel) munka. A körfolyamat során megmaradó, felhasználható munka a két munka összege, az abszolút értékeik különbsége, a két görbe által bezárt területtel arányos.



A termikus erőgép körfolyamatának ábrája

A folyamathoz tartozó matematikai egyenletek az alábbiak (az első főtételbe a fenti W'-k helyett a W-ket írva:

$$\Delta U_{12} = Q_{fel} + W_{12}$$
$$\Delta U_{21} = Q_{le} + W_{21}$$
$$\underbrace{\Delta U_{12} + \Delta U_{21}}_{0} = Q_{fel} + Q_{le} + \underbrace{(W_{12} + W_{21})}_{-W'}$$

$$0 = Q_{fel} + Q_{le} + W$$
$$-W = Q_{fel} + Q_{le}$$
$$W' = Q_{fel} + Q_{le}$$

A felvett és a leadott hő összege (ami az abszolút értékek különbsége, mert Q_{le} negatív) a gáz (rendszer) által végzett munka.

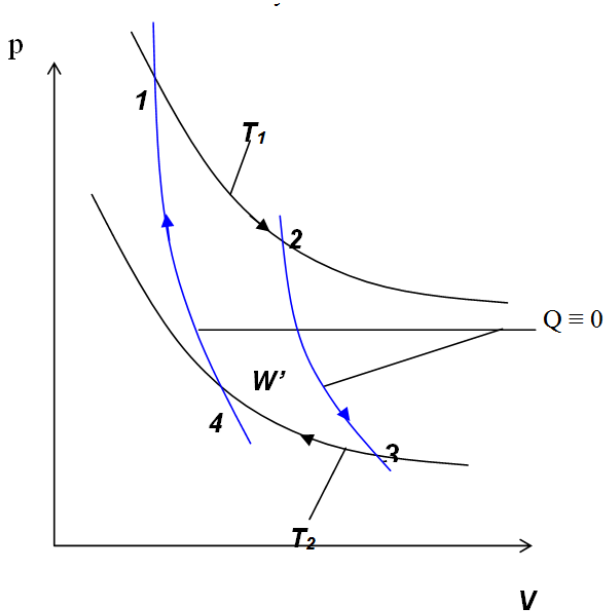
Termikus hatásfok (η):

$$\eta = \frac{W'}{Q_{fel}} = \frac{Q_{fel} + Q_{le}}{Q_{fel}}$$

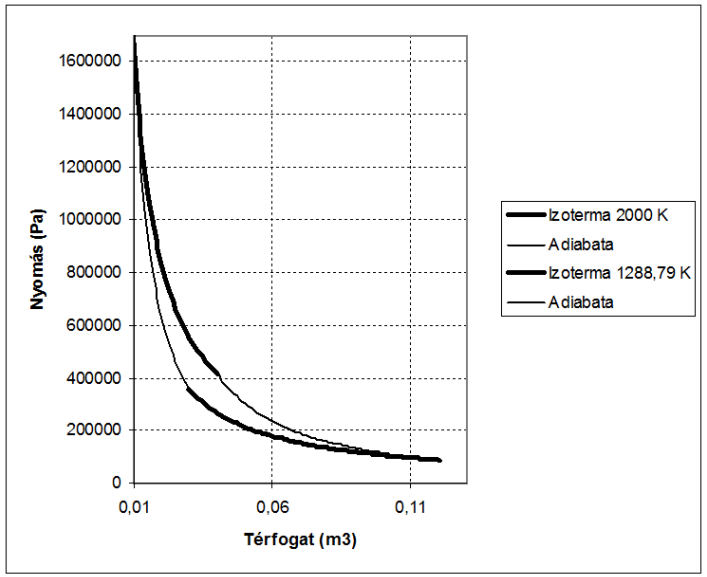
Bármilyen gépet szerkesztünk ez mindig igaz.

Carnot körfolyamat:

A körfolyamatok közül a legnevezetesebb és elméletileg a legfontosabb a Carnot körfolyamat, mely két izotermikus és két adiabatikus folyamatból áll.



Az általánosan használt ábrázolási technika

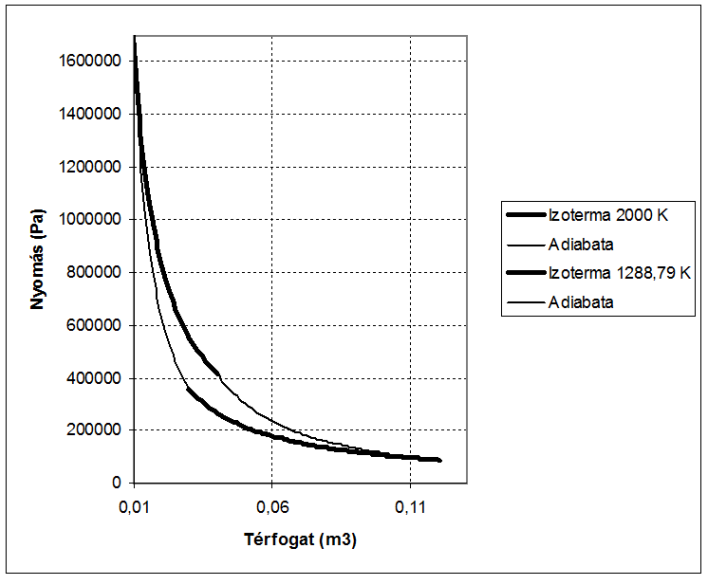


Egy valóságos paraméterekkel ábrázolt Carnot körfolyamat

Az ábrából jól látszik, hogy a valóságos adatokkal ábrázolt körfolyamaton nehezen lehet megkülönböztetni az egyes szakaszokat, és az is, hogy az adiabata meredekebb ugyan mint az izoterma, de a különbség alig látszik.

A Carnot körfolyamat során lejátszódó folyamatok:

- 1-2 izotermikus expanzió (tágulás)
- 2-3 adiabatikus expanzió
- 3-4 izotermikus kompresszió
- 4-1 adiabatikus kompresszió.



Egy valóságos paraméterekkel ábrázolt Carnot körfolyamat

A körfolyamat hatásfoka:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Be lehet látni, hogy bármely körfolyamatnak hatásfoka kisebb, mint azé Carnot körfolyamaté amelyikbe az adott körfolyamat éppen belefér. Másrészt a Carnot körfolyamat hatásfoka mindig kisebb mint 1, mivel csak véges anyagi mennyiségekkel dolgozhatunk, s akkor az abszolút 0-n levő hely, ahova a Q_{le} megy a legkisebb hőtől felmelegszik, s a hőmérséklete a T_2 nem lesz 0 K. Ezt az alábbi egyenlőtlenséggel foglaljuk össze:

$$\eta \leq \eta_{\text{Carnot}} \langle 1 \, .$$

8. fejezet

Állapotváltozások:

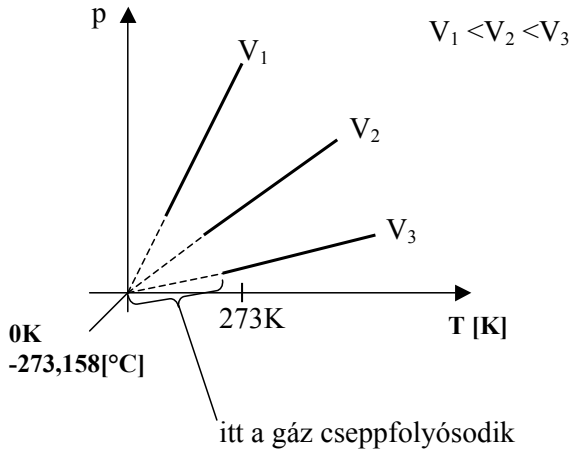
4.6.1. Izochor (állandó térfogatú) állapotváltozás

Induljunk ki az egyetemes gáztörvényből, s fejezzük ki a nyomást, s a 4.6.1 egyenletet kapjuk.

$$p \cdot V = \frac{m}{M} RT$$

$$p = \frac{1}{V} \frac{m}{M} RT \qquad (4.6.1)$$

Ebben az egyenletben, mivel a térfogat állandó, csak a nyomás és a hőmérséklet változik adott anyagmennyiség és minőség esetében. Ebből következik, hogy a nyomás arányos a hőmérséklettel (4.6.1. ábra).
(Minél gyorsabban mozognak a részecskék, azaz minél nagyobb a hőmérséklet, annál nagyobb lesz a nyomás, csökkenő sebesség, azaz csökkenő hőmérséklet esetén, csökken a nyomás).



4.6.1. ábra Az állandó hőmérsékletű állapotváltozás p-T diagramja

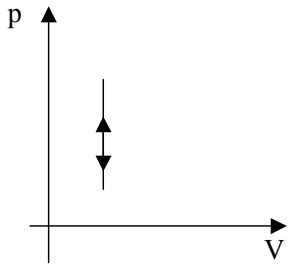
Az állandó térfogathoz tartozó „görbék” egy pontban érnek össze, ami az abszolút 0 hőmérsékletnek tekinthető, hiszen zérusnál kisebb nyomás nem értelmezhető. Ez egy abszolút, vagy Kelvin-féle, hőmérsékleti skála kezdő pontja (=-273,158 [°C]). A valóságos gázok ezt az állapotot nem érik el, mert előbb cseppfolyósodnak, de addig egészen jól követik az egyenest.
A termodinamika I. főtétele most:

$$\Delta U = Q + W$$

helyett, mivel a térfogat állandó, p*dV=0, ezért térfogati munka nincsen, azaz W=0,
így:

$$\Delta U = Q.$$

A p-V diagram a 4.6.2. ábrán látható.



4.6.2. ábra Az izochor állapotváltozás nyomás-térfogat diagrammja

A hőmennyiségben most c_v szerepel, jelezve az állandó térfogatú állapotváltozást.

$$Q = c_v \cdot m \cdot \Delta T . \qquad (4.6.2)$$

A belső energia a hőmérséklet függvénye, ezt már a 4.1. fejezetben is megállapítottuk. Mivel a belső energia ($\Delta U=Q+W$) megváltozása, a hőmennyiség és a munka összege, függetlenül attól, hogy abban melyik milyen súllyal szerepel, ezért a belső energia nem függ az állapotváltozástól, csak a kezdő és a végállapotok határozzák meg változását, azaz a belső energia állapotfüggvény. Ezek alapján is látszik, hogy a belső energia megváltozása ideális gázoknál csak a hőmérséklet függvénye.

$$\Delta U=c_v m\Delta T, \qquad (4.6.3)$$

és ha megállapodunk abban, hogy az abszolút 0-nál a belső energia zérus, úgy bármely hőmérsékleten és állapotváltozásnál:

$$U=c_v mT. \qquad (4.6.4)$$

Valóságos gázoknál ettől van azonban eltérés, első közelítésben azonban ezt a valóságos gázokra is elfogadhatjuk.

Az entrópia változás:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Mivel:

$$Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T,$$

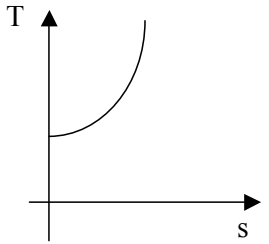
ezért:

$$dQ = c_v \cdot m \cdot \Delta T,$$

és így:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{c_v \cdot m \cdot dT}{T} = c_v \cdot m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = c_v \cdot m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad (4.6.5)$$

izochor esetben az entrópia változás. Az ábrázolásban a T-S diagram terjedt el, amelyet a 4.6.3. ábrán mutatunk be.



4.6.3. ábra Izochor állapotváltozás T-S diagramja

4.6.2. Izobár (állandó nyomású) állapotváltozás

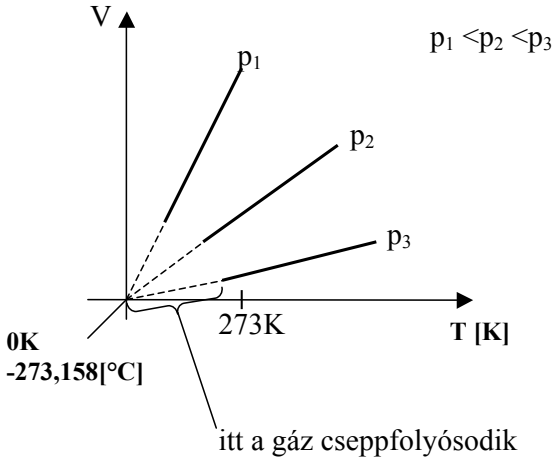
Ha egy állapotváltozás esetében a nyomás állandó, akkor a izobár állapotváltozásról beszélünk. Az izochor esetben elvégzett átalakítást most is elvégezve kapjuk:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} RT ,$$

ebből:

$$V = \frac{1}{p} \frac{m}{M} RT . \qquad (4.6.6)$$

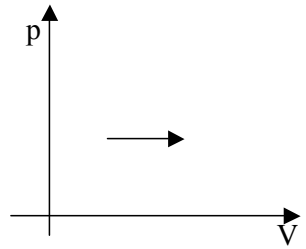
Ezért a térfogat adott nyomáson a hőmérséklettel arányosan változik (4.6.4. ábra).



$p_1 < p_2 < p_3$

4.6.4. ábra Izobár állapotváltozás p-V diagramja

Az összefüggést a mérések is igazolták. A p-V diagramot a 4.6.5. ábrán láthatjuk.



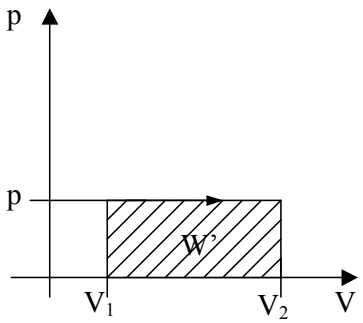
4.6.5. ábra Az izochor állapotváltozás p-V diagramja

Izobár állapotváltozás során az első főtétel alakjai:

$$\Delta U = Q + W$$
$$dW = -pdV$$
$$Q = \Delta U - W$$
$$Q = \Delta U + W',$$

azaz a felvett hő részben a belső energiát növeli, részben a munkavégzésre fordítódik. A gáz által végzett munka állandó nyomáson:

$$W' = p(V_2 - V_1). \qquad (4.6.7)$$



4.6.6. ábra Munkavégzés állandó nyomáson

Ebben az esetben a hőmennyiség, és abból az entrópia változás:

$$Q = c_p \cdot m \cdot \Delta T$$

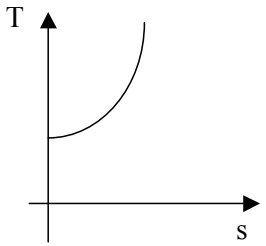
$$dQ = c_p \cdot m \cdot dT$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{c_p \cdot m \cdot dT}{T} = c_p \cdot m \int_1^2 \frac{dT}{T} = c_p \cdot m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

azaz:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_p \cdot m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}. \qquad (4.6.8)$$

A T-S diagramot a 4.6.7. ábrán mutatjuk be.



4.6.7. ábra Az izobár állapotváltozás T-S diagramja

Az első főtételbe beírva a hőmennyiséget ($Q=c_pm\Delta T$) és a belső energiát, kapjuk:

$$Q = \Delta U + W',$$

és

$$c_p \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot \Delta T + p\Delta V.$$

Ebből következik, hogy az állandó nyomáson mérhető fajhő nagyobb, mint az állandó térfogaton mért.

$$c_p > c_v$$

Belátható, hogy érvényes a Meyer összefüggése:

$$c_p - c_v = \frac{R}{M} \qquad (4.6.9)$$

minden gázra.

4.6.3. Izoterm (állandó hőmérsékletű) állapotváltozás

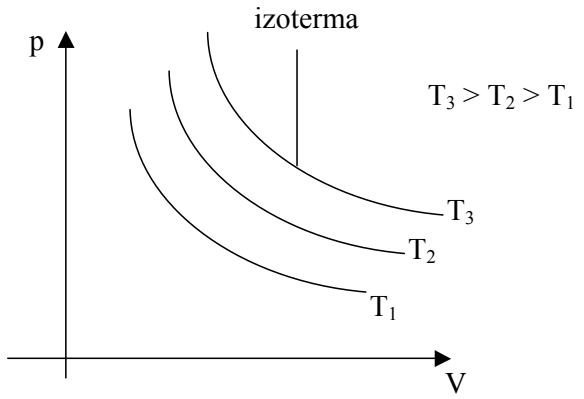
Izotermikus állapotváltozás esetében az egyetemes gáztörvényből

$$p \cdot V = \frac{m}{M} RT$$

következik, hogy pV=állandó. Ennek az egyenletnek a módosítását úgy is hívjuk a **Boyle Mariotte törvény**:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2. \qquad (4.6.9)$$

A $p \cdot V = \text{állandó}$ egyenletet úgy is hívjuk hogy az izoterma egyenlete. Az izotermikus állapotváltozás p-V diagramját a 4.6.8. ábrán mutatjuk be.



4.6.8. ábra Az izotermikus állapotváltozás p-V diagramja

Az első főtételben most a belső energia megváltozása ($\Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T$) a zérus, mert az a hőmérsékletváltozással arányos, az azonban zérus, mivel a hőmérséklet állandó.

$$\Delta U = Q + W$$

felhasználásával kapjuk:

$$0 = \mathrm{Q} + \mathrm{W}.$$

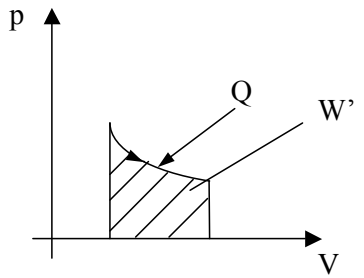
A hőmennyiség most nem írható a

$$\cancel{Q = c_T \cdot m \cdot \Delta T},$$

alakban, mert akkor a fajhő végtelen nagy lenne.
Az első főtétel átalakításával kapjuk:

$$0 = Q + W$$
$$-W = Q \quad .$$
$$W' = Q$$

Izotermikus tágulás során (4.6.9. ábra) a gáz munkát végez, tehát W' pozitív, azaz Q is pozitív. Csak akkor maradhat állandó a hőmérséklet, ha pontosan ugyanannyi munkát közlünk a gázzal (vagy más rendszerrel), mint amennyi munkát végeztetünk vele. Ezt szabályozó berendezés nélkül nem tudjuk megvalósítani. A végtelen hőkapacitású hőtartállyal való csatlakoztatás csak elméleti lehetőség.

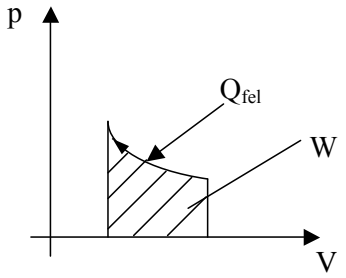


4.6.9. ábra Munkavégzés és hőfelvétel állandó hőmérsékletű tágulás esetében

Az első főtétel egy másféleképpen átalakított alakja:

$$-Q = W,$$

azt jelzi, hogy ha a gázt összenyomjuk (4.6.10. ábra), azaz a W a pozitív, akkor –Q is pozitív, azaz Q negatív, tehát a gáz (vagy rendszer) a rajta végzett munkával megegyező hőt kell hogy leadjon.



4.6.10. ábra Munkavégzés és hőleadás állandó hőmérsékletű összenyomás esetében

Hogy mennyi ez a munka és mekkora hőt kell vele közölni azt a következő egyenletek írják le:

$$W' = Q$$

$$Q = W' = \int_1^2 pdV$$

$$Q = W' = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$

$$Q = W' = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_2}{p_1}$$

Ezek alapján az izotermikus munka és hőmennyiség:

$$W' = Q = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_2}{p_1}. \qquad (4.6.10)$$

Az entrópia változás izoterm állapotváltozás esetében:

$$Q = W'$$

$$dQ = dW' = pdV$$

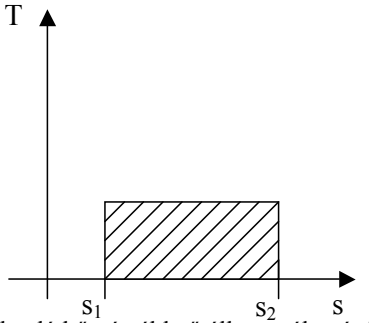
$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT\frac{dV}{TV} = \frac{m}{M}R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}.$$

Így az entrópia változás izotermikus állapotváltozás esetében:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}R\ln\frac{p_1}{p_2} \qquad (4.6.11)$$

Az állandó hőmérsékletű állapotváltozás T-S diagramja a 4.6.11. ábrán látható:



4.6.11. ábra Az állandó hőmérsékletű állapotváltozás T-S diagramja

4.6.4. Adiabatikus (izentróp) állapotváltozás

Az adiabatikus, vagy állandó entrópiájú (azaz izentróp) állapotváltozás során a rendszer és a környezete között hőcsere nem játszódik le ($\Delta Q = 0$). Ez például tökéletes hőszigeteléssel megvalósítható. Adiabatikusnak tekinthető az állapotváltozás akkor is, ha a folyamat olyan gyorsan játszódik le, hogy a hőcserére nincsen idő. Igen jól megközelíti ezt az állapotot a szódavíz készítéséhez alkalmazott patronból kiszúrásakor kiáramló széndioxid gáz (a kb: 6 bar nyomás miatt a gáz annyira kitágul, hogy meg is fagy, a patronra ráfagy a levegő nedvességtartalma).
Az első főtétel az alábbiak szerint alakul:

$$\Delta U = Q + W$$
$$Q = 0$$
$$\Delta U = W$$

tökéletes hőszigetelés gyors állapotváltozás
Példák:
Ha a gázt adiabatikusan összenyomjuk, akkor annak hőmérséklete megnő. Pl.: ha sokáig használjuk a kerékpár pumpáját, az a benne lévő gáz miatt felmelegszik.
Ebben az esetben a W és a ΔU is pozitív mennyiség lesz.

$$W > 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \rightarrow \text{T növekszik}$$

Ha a gáz tágul:

$$W < 0 \Rightarrow W' > 0 \rightarrow akkor - \Delta U = -W$$
$$-\Delta U = W'$$
ha $W' > 0$
$$-\Delta U > 0$$
$$\Delta U < 0 \Rightarrow \text{T csökken}$$

Adiabatikus munka:

$$\Delta U = W$$
$$dU = dW$$
$$c_v \cdot m \cdot dT = -pdV$$
$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$
$$c_v \cdot m \cdot dT = -\frac{m}{M}RT\frac{dV}{V} \; tudjuk, hogy \rightarrow c_p - c_v = \frac{R}{M}$$
$$c_v \cdot dT = -(c_p - c_v)T\frac{dV}{V}$$
$$\frac{dT}{T} = -\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\frac{dV}{V}$$
$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa \rightarrow \text{Kappa: a fajhő viszony.}$$

Ezek alapján az alábbi differenciál egyenletet kapjuk:

$$\frac{dT}{T} = -(\kappa - 1)\frac{dV}{V}.$$

Ennek megoldása:

$$TV^{\kappa-1} = \text{állandó}. \qquad (4.6.12)$$

Az előző és az alábbi egyenletből alkotott rendszert megoldva kapjuk:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{állandó}$$

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{állandó}, \qquad (4.6.13)$$

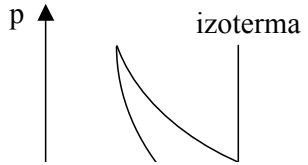
ez az adiabata egyenlete. A nyomás és a hőmérséklet közötti összefüggés adiabatikus állapotváltozásnál:

$$\frac{p^{\kappa-1}}{T^{\kappa}} = \text{állandó}. \qquad (4.6.14)$$

A 4.6.12-14 egyenleteket Poisson egyenleteknek is nevezzük.
Emlékeztetünk, hogy a κ, azaz a fajhőviszony, a szabadsági foktól függ az alábbiak szerint:

$$\kappa = \frac{f+2}{f}.$$

Mivel κ mindig nagyobb mint 1, ezért az adiabata mindig meredekebb, mint az izoterma, amelynek egyenlete pV=áll. Ezt a 4.6.12. ábrán láthatjuk.

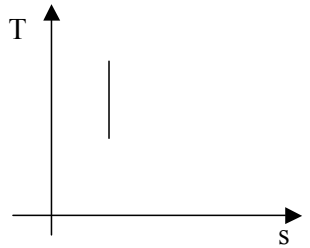


4.6.12. ábra Az izoterma és az adiabata görbék összehasonlítása

Az entrópia változása adiabatikus állapotváltozásnál:

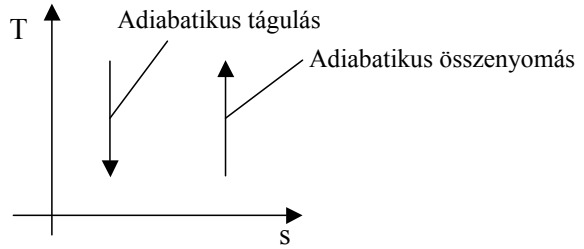
$$Q \equiv 0$$
$$dQ = 0$$
$$s_2 - s_1 = 0$$
$$s = állandó$$

Ennek megfelelően a T-S diagram egy, az S tengelyre merőleges egyenes (4.6.13. ábra). Emiatt nevezik ezt az állapotváltozást izentrópnak, azaz állandó entrópiájúnak



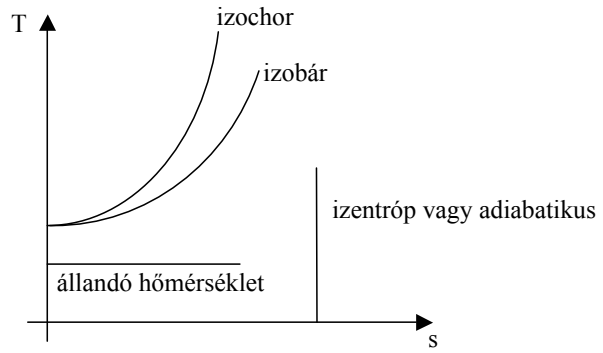
4.6.13. ábra Adiabatikus állapotváltozás T-S diagrammja

A későbbiek miatt fontos annak felismerése, hogy egy adiabatikus folyamat tágulás (expanzió), vagy összenyomódás (kompresszió). Ebben segít a 4.6.14. ábra.



4.6.14. ábra Adiabatikus expanzió és kompresszió

Szintén a későbbiek megértése miatt az alábbi ábrán mutatjuk meg az egyes állapotváltozások T-S diagramjainak összehasonlítását. Az izochor folyamathoz tartozó görbe azért meredekebb mint az izobárhoz tartozó, mert az izochor fajhő kisebb mint az izobár, és a 4.6.5 és 4.6.8 egyenletek szerinti görbék inverze látható a 4.6.14 ábrán.



4.6.14. ábra T-S diagramok összehasonlítása:

Állapotváltozások

Izochor állapotváltozás

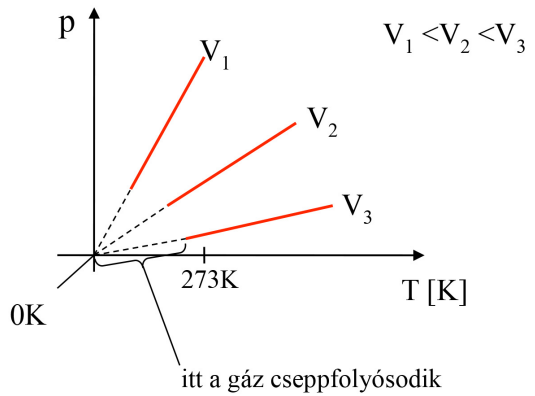
Izochor, vagy állandó térfogatú állapotváltozásról beszélünk, ha a folyamat során a gáz térfogata nem változik.

Az egyetemes gáztörvény: $$p \cdot V = \frac{m}{M} RT$$

átalakítva: $$p = \frac{1}{V} \frac{m}{M} RT$$

Az egyenesek egy pontban érnek össze, ez az abszolút 0 hőmérsékletnek tekinthető, hiszen zérusnál kisebb nyomás nem értelmezhető. Ez egy abszolút, vagy Kelvin-féle, hőmérsékleti skála kezdő pontja (=-273,158 [°C]).

$$p \sim T$$



A valóságos gázok ezt az állapotot nem érik el, mert előbb cseppfolyósodnak, de addig egészen jól követik az egyenest.

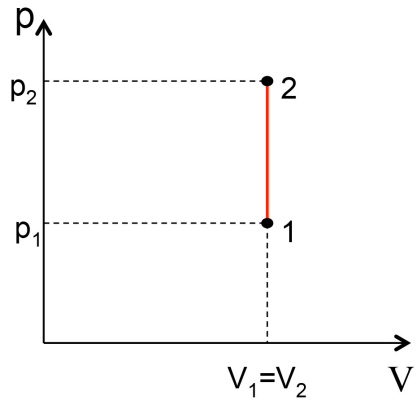
A termodinamika I. főtétele: $\Delta U = Q + W$

mivel a térfogat állandó, térfogati munka nincsen, azaz W=0

így: $\Delta U = Q$

Ebből az következik, hogy a gázzal közölt hő teljes egészében a belső energiát növeli.

A p-V diagram



Izochor állapotváltozásnál a közölt hőmennyiség: $Q = c_v \cdot m \cdot \Delta T$

c_v: állandó térfogatú állapotváltozás

Mivel a belső energia megváltozása, a hőmennyiség és a munka összege, a belső energia nem függ az állapotváltozástól, mindig a kezdő és a végállapotok különbsége adja meg változását, azaz a belső energia állapotfüggvény. Ebből következik, hogy a belső energia megváltozása ideális gázoknál csak a hőmérséklet függvénye.

$$\Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T$$

Ha megállapodunk abban, hogy az abszolút 0-nál a belső energia zérus, úgy bármely hőmérsékleten és állapotváltozásnál:

$$U = c_v \cdot m \cdot T$$

Ez az összefüggés ideális gázokra érvényes, első közelítésben azonban a valóságos gázokra is elfogadhatjuk.

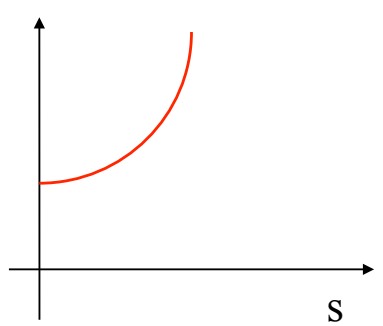
Az entrópia változás: $$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Mivel: $$Q = c_v \cdot m \cdot \Delta T$$

$$dQ = c_v \cdot m \cdot dT$$

így: $$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{c_v \cdot m \cdot dT}{T} = c_v \cdot m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = c_v \cdot m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Izochor állapotváltozás T-S diagramja



Állandó térfogatú állapotváltozásnak tekinthető pl. a gépjárművek gumiabroncsában levő levegő felmelegedése, vagy lehűlése. Mivel a felfújt gumiabroncs térfogata közelítőleg állandónak vehető, az abroncsban felmelegedett levegő nyomása megnő.

A különféle gázpalackokat, szóró palackokat óvni kell a túlzott felmelegedéstől, mivel a bennük lévő gáz térfogata állandó, nyomása melegítés hatására megnő és ez szétrobbanthatja a palackot.
Nagyon veszélyesek lehetnek a lakás- és épülettüzeknél felforrósodott propán-bután gázpalackok, amelyek a megnövekedett nyomás miatt gyújtóbombaként robbanhatnak fel.





Állapotváltozások:

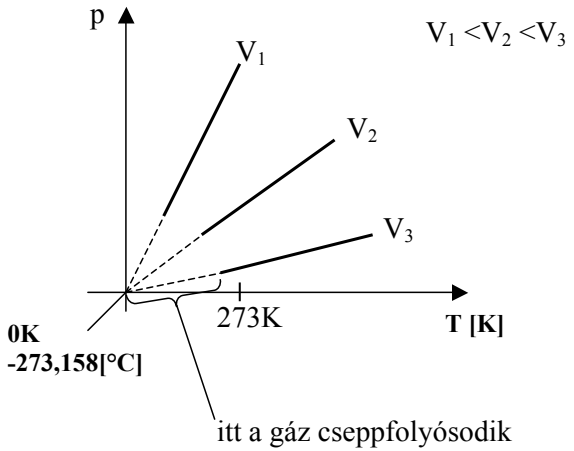
8.1. Izochor (állandó térfogatú) állapotváltozás

Induljunk ki az egyetemes gáztörvényből, s fejezzük ki a nyomást, s a 8.1.1 egyenletet kapjuk.

$$p \cdot V = \frac{m}{M} RT$$

$$p = \frac{1}{V} \frac{m}{M} RT \qquad (8.1.1)$$

Ebben az egyenletben, mivel a térfogat állandó, csak a nyomás és a hőmérséklet változik adott anyagmennyiség és minőség esetében. Ebből következik, hogy a nyomás arányos a hőmérséklettel (8.1.1. ábra).
(Minél gyorsabban mozognak a részecskék, azaz minél nagyobb a hőmérséklet, annál nagyobb lesz a nyomás, csökkenő sebesség, azaz csökkenő hőmérséklet esetén, csökken a nyomás).



8.1.1. ábra Az állandó hőmérsékletű állapotváltozás p-T diagramja

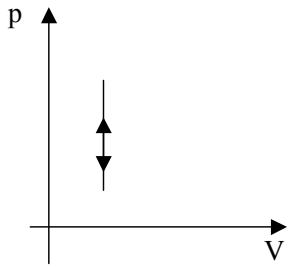
Az állandó térfogathoz tartozó „görbék” egy pontban érnek össze, ami az abszolút 0 hőmérsékletnek tekinthető, hiszen zérusnál kisebb nyomás nem értelmezhető. Ez egy abszolút, vagy Kelvin-féle, hőmérsékleti skála kezdő pontja (=-273,158 [°C]). A valóságos gázok ezt az állapotot nem érik el, mert előbb cseppfolyósodnak, de addig egészen jól követik az egyenest.
A termodinamika I. főtétele most:

$$\Delta U = Q + W$$

helyett, mivel a térfogat állandó, p*dV=0, ezért térfogati munka nincsen, azaz W=0, így:

$$\Delta U = Q.$$

A p-V diagram a 8.1.2. ábrán látható.



8.1.2. ábra Az izochor állapotváltozás nyomás-térfogat diagrammja

A hőmennyiségben most c_v szerepel, jelezve az állandó térfogatú állapotváltozást.

$$Q = c_v \cdot m \cdot \Delta T. \qquad (8.1.2)$$

A belső energia a hőmérséklet függvénye, ezt már a 4.1. fejezetben is megállapítottuk. Mivel a belső energia ($\Delta U=Q+W$) megváltozása, a hőmennyiség és a munka összege, függetlenül attól, hogy abban melyik milyen súllyal szerepel, ezért a belső energia nem függ az állapotváltozástól, csak a kezdő és a végállapotok határozzák meg változását, azaz a belső energia állapotfüggvény. Ezek alapján is látszik, hogy a belső energia megváltozása ideális gázoknál csak a hőmérséklet függvénye.

$$\Delta U = c_v m \Delta T, \qquad (8.1.3)$$

és ha megállapodunk abban, hogy az abszolút 0-nál a belső energia zérus, úgy bármely hőmérsékleten és állapotváltozásnál:

$$U=c_v mT. \qquad (8.1.4)$$

Valóságos gázoknál ettől van azonban eltérés, első közelítésben azonban ezt a valóságos gázokra is elfogadhatjuk.

Az entrópia változás:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Mivel:

$$Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T,$$

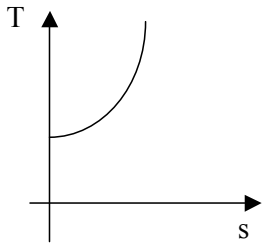
ezért:

$$dQ = c_v \cdot m \cdot \Delta T,$$

és így:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{c_v \cdot m \cdot dT}{T} = c_v \cdot m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = c_v \cdot m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad (8.1.5)$$

izochor esetben az entrópia változás. Az ábrázolásban a T-S diagram terjedt el, amelyet a 4.6.3. ábrán mutatunk be.

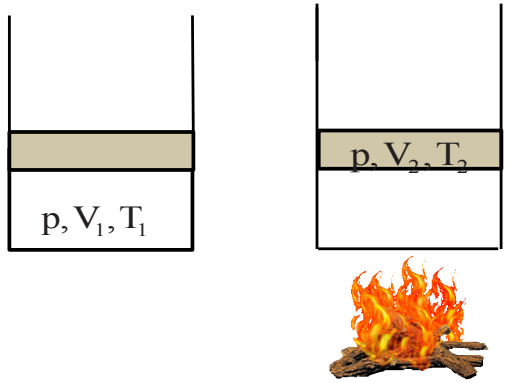


8.1.3. ábra Izochor állapotváltozás T-S diagramja

Izobár (állandó nyomású) állapotváltozás

Ha egy állapotváltozás esetében a nyomás állandó, akkor a izobár állapotváltozásról beszélünk.

Kísérlet:

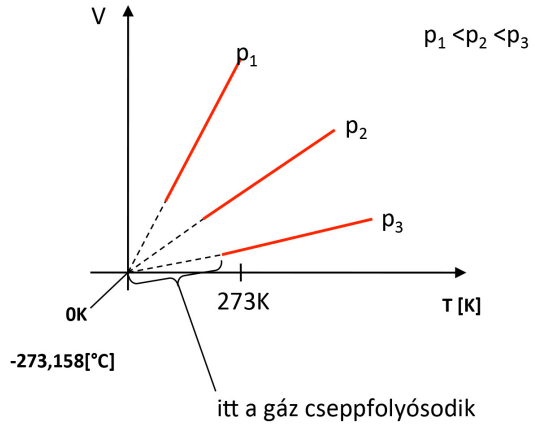


Az egyetemes gáztörvény: $$p \cdot V = \frac{m}{M} RT$$

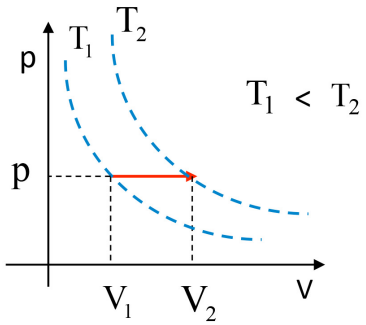
ebből: $$V = \frac{1}{p} \frac{m}{M} RT$$

Ezért a térfogat adott nyomáson a hőmérséklettel arányosan változik

$$V = \frac{1}{p}\frac{m}{M}RT$$



A p-V diagram



Izobár állapotváltozás során az első főtétel:

$$\Delta U = Q + W$$

Az elemi munkavégzés: $dW = -pdV$

$$Q = \Delta U - W$$

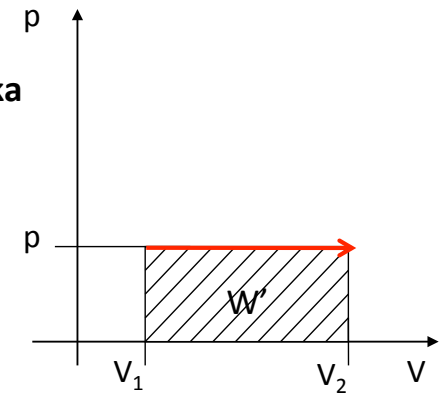
$$Q = \Delta U + W'$$

itt W’ a **gáz által végzett munka**

Ez azt jelenti, hogy a felvett hő részben a belső energiát növeli, részben a munkavégzésre fordítódik

A gáz által végzett munka állandó nyomáson:

$$W' = p(V_2 - V_1)$$



A hőmennyiség, és abból az entrópia változás:

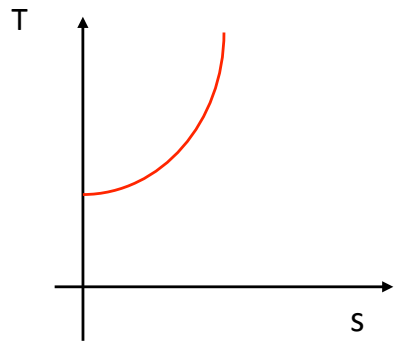
$$Q = c_p \cdot m \cdot \Delta T$$

$$dQ = c_p \cdot m \cdot dT$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{c_p \cdot m \cdot dT}{T} = c_p \cdot m \int_1^2 \frac{dT}{T} = c_p \cdot m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

az entrópia változás tehát: $\Delta S = S_2 - S_1 = c_p \cdot m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$

A T-S diagram:



Az első főtételbe beírva a hőmennyiséget és a belső energiát, kapjuk:

$$Q = \Delta U + W'$$

$$c_p \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot \Delta T + p\Delta V$$

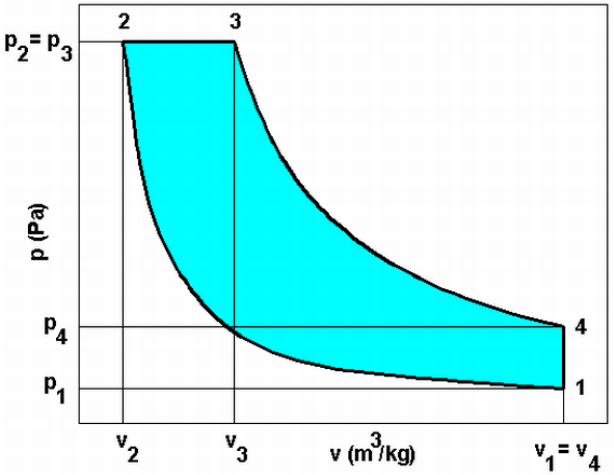
Ebből következik, hogy az állandó nyomáson mérhető fajhő nagyobb, mint az állandó térfogaton mért:

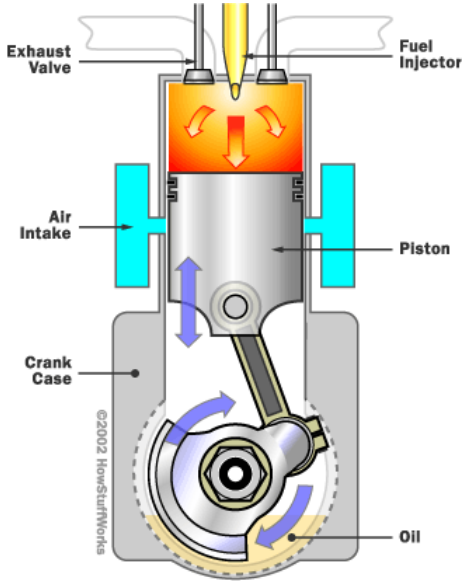
$$c_p > c_v$$

a Robert-Mayer egyenlet:

$$c_p - c_v = r = \frac{R}{M}$$

Izobár folyamat a műszaki gyakorlatban: Diesel-körfolyamat 2-3 szakasza





8.2. Izobár (állandó nyomású) állapotváltozás

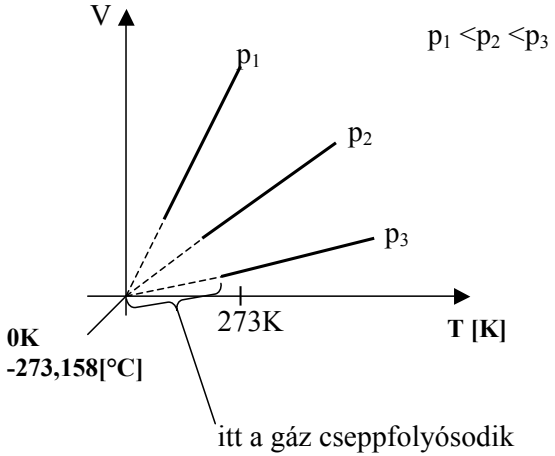
Ha egy állapotváltozás esetében a nyomás állandó, akkor a izobár állapotváltozásról beszélünk. Az izochor esetben elvégzett átalakítást most is elvégezve kapjuk:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} RT ,$$

ebből:

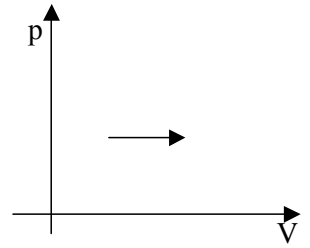
$$V = \frac{1}{p} \frac{m}{M} RT . \qquad (8.2.1.)$$

Ezért a térfogat adott nyomáson a hőmérséklettel arányosan változik (8.2.1. ábra).



8.2.1.. ábra Izobár állapotváltozás p-V diagramja

Az összefüggést a mérések is igazolták. A p-V diagramot a 8.2.2.. ábrán láthatjuk.



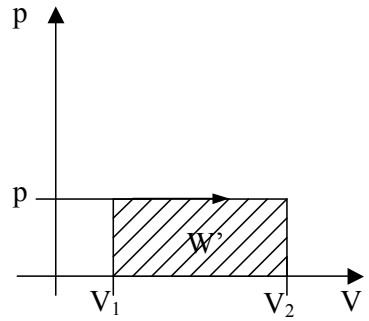
8.2.2. ábra Az izochor állapotváltozás p-V diagramja

Izobár állapotváltozás során az első főtétel alakjai:

$$\Delta U = Q + W$$
$$dW = -pdV$$
$$Q = \Delta U - W$$
$$Q = \Delta U + W'$$

azaz a felvett hő részben a belső energiát növeli, részben a munkavégzésre fordítódik. A gáz által végzett munka állandó nyomáson:

$$W' = p(V_2 - V_1). \qquad (8.2.2.)$$



8.2.3. ábra Munkavégzés állandó nyomáson

Ebben az esetben a hőmennyiség, és abból az entrópia változás:

$$Q = c_p \cdot m \cdot \Delta T$$

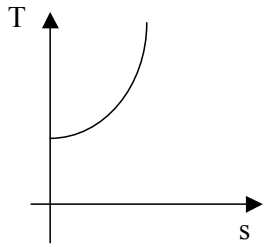
$$dQ = c_p \cdot m \cdot dT$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{c_p \cdot m \cdot dT}{T} = c_p \cdot m \int_1^2 \frac{dT}{T} = c_p \cdot m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

azaz:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_p \cdot m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}. \qquad (8.2.3.)$$

A T-S diagramot a 8.2.4.. ábrán mutatjuk be.



8.2.4. ábra Az izobár állapotváltozás T-S diagramja

Az első főtételbe beírva a hőmennyiséget ($Q=c_pm\Delta T$) és a belső energiát, kapjuk:

$$Q = \Delta U + W',$$

és

$$c_p \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot \Delta T + p\Delta V.$$

Ebből következik, hogy az állandó nyomáson mérhető fajhő nagyobb, mint az állandó térfogaton mért.

$$c_p > c_v$$

Belátható, hogy érvényes a Meyer összefüggése:

$$c_p - c_v = \frac{R}{M} \qquad (8.2.4.)$$

minden gázra.

8.3. Izoterm (állandó hőmérsékletű) állapotváltozás

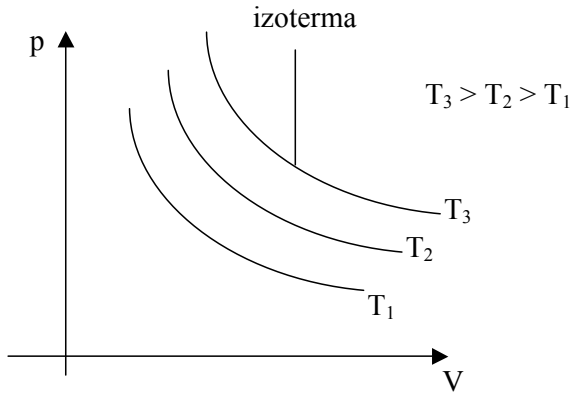
Izotermikus állapotváltozás esetében az egyetemes gáztörvényből

$$p \cdot V = \frac{m}{M} RT$$

következik, hogy pV=állandó. Ennek az egyenletnek a módosítását úgy is hívjuk a **Boyle Mariotte törvény**:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2. \qquad (8.3.1.)$$

A $p \cdot V = \text{állandó}$ egyenletet úgy is hívjuk hogy az izoterma egyenlete. Az izotermikus állapotváltozás p-V diagramját a 8.3.1. ábrán mutatjuk be.



8.3.1. ábra Az izotermikus állapotváltozás p-V diagramja

Az első főtételben most a belső energia megváltozása ($\Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T$) a zérus, mert a a hőmérsékletváltozással arányos, az azonban zérus, mivel a hőmérséklet állandó.

$$\Delta U = Q + W$$

felhasználásával kapjuk:

$$0 = \mathrm{Q} + \mathrm{W}.$$

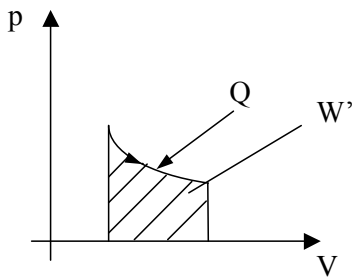
A hőmennyiség most nem írható a

$$\cancel{Q = c_T \cdot m \cdot \Delta T},$$

alakban, mert akkor a fajhő végtelen nagy lenne.
Az első főtétel átalakításával kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= Q + W \\ -W &= Q \\ W' &= Q \end{aligned} .$$

Izotermikus tágulás során (8.3.2. ábra) a gáz munkát végez, tehát W' pozitív, azaz Q is pozitív. Csak akkor maradhat állandó a hőmérséklet, ha pontosan ugyanannyi munkát közlünk a gázzal (vagy más rendszerrel), mint amennyi munkát végeztetünk vele. Ezt szabályozó berendezés nélkül nem tudjuk megvalósítani. A végtelen hőkapacitású hőtartállyal való csatlakoztatás csak elméleti lehetőség.

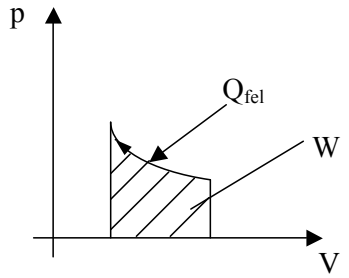


8.3.2. ábra Munkavégzés és hőfelvétel állandó hőmérsékletű tágulás esetében

Az első főtétel egy másféleképpen átalakított alakja:

$$-Q = W,$$

azt jelzi, hogy ha a gázt összenyomjuk (8.3.3. ábra), azaz a W a pozitív, akkor –Q is pozitív, azaz Q negatív, tehát a gáz (vagy rendszer) a rajta végzett munkával megegyező hőt kell hogy leadjon.



8.3.3. ábra Munkavégzés és hőleadás állandó hőmérsékletű összenyomás esetében

Hogy mennyi ez a munka és mekkora hőt kell vele közölni azt a következő egyenletek írják le:

$$W' = Q$$

$$Q = W' = \int_1^2 p\,dV$$

$$Q = W' = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$

$$Q = W' = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_2}{p_1}$$

Ezek alapján az izotermikus munka és hőmennyiség:

$$W' = Q = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_2}{p_1}. \qquad (8.3.2.)$$

Az entrópia változás izoterm állapotváltozás esetében:

$$Q = W'$$

$$dQ = dW' = pdV$$

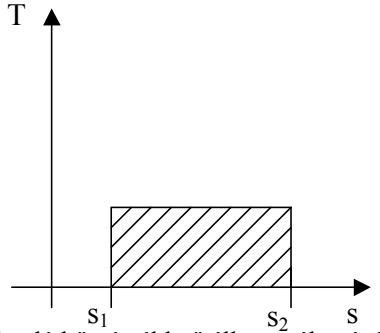
$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT\frac{dV}{TV} = \frac{m}{M}R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}.$$

Így az entrópia változás izotermikus állapotváltozás esetében:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}R\ln\frac{p_1}{p_2} \qquad (8.3.3.)$$

Az állandó hőmérsékletű állapotváltozás T-S diagramja a 8.3.4. ábrán látható:



8.3.4. ábra Az állandó hőmérsékletű állapotváltozás T-S diagramja

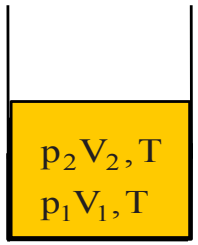
Izoterm (állandó hőmérsékletű) állapotváltozás

Izotermikus állapotváltozás: a hőmérséklet nem változik az állapotváltozás során.

Az egyetemes gáztörvény: $p \cdot V = \frac{m}{M} RT$

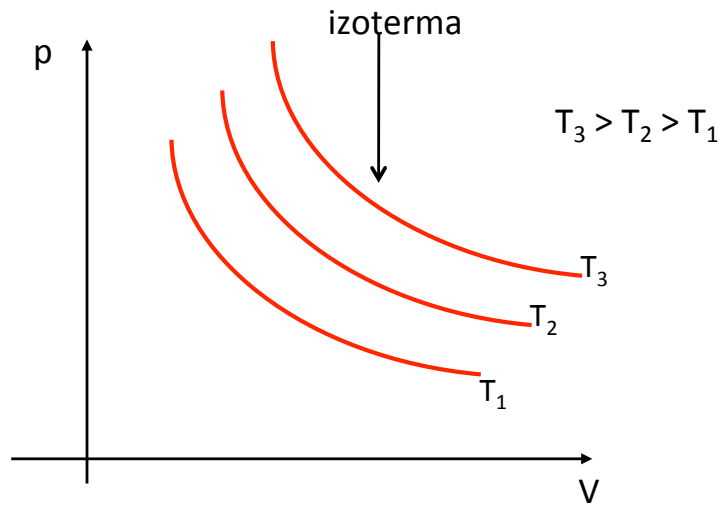
T=állandó, ⟹ pV=állandó,

Boyle Mariotte törvény: $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$



A $p \cdot V = \text{állandó}$ az izoterma egyenlete

Az izotermikus állapotváltozás p-V diagramja:



Mivel a hőmérséklet állandó, $\Delta U = 0$

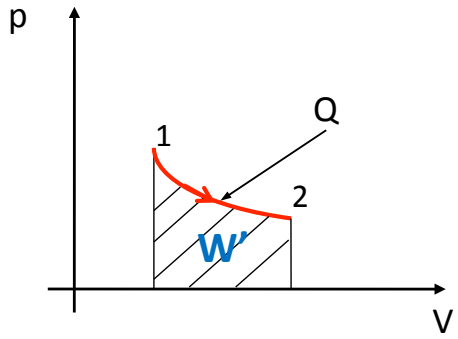
Az első főtétel: $0 = Q + W$

$$-W = Q$$

$$W' = Q$$

azaz a **gáz által végzett munka** (tágulás esetén pozitív) egyenlő a felvett hőmennyiséggel

Izotermikus tágulás:



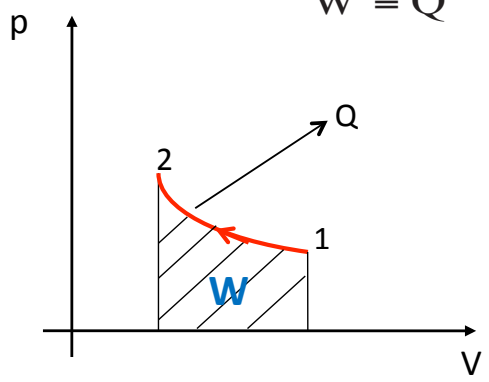
Izotermikus tágulás esetén tehát a gáz tágulási munkát végez, és a munkának megfelelő hőt vesz fel.

Izotermikus kompresszió:

$$W = -Q$$

a gáz a kompressziós munkának megfelelő hőt leadja

$$W' = Q$$



Ha tehát a a gázt összenyomjuk azaz a W a pozitív, akkor –Q is pozitív, azaz Q negatív, tehát a gáz (vagy rendszer) a rajta végzett munkával megegyező hőt kell hogy leadjon.

A munkavégzést az alábbi módon tudjuk kiszámítani:

$$W' = Q$$

$$Q = W' = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$

$$Q = W' = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}$$

Ezek alapján az izotermikus munka és hőmennyiség:

$$W' = Q = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}$$

Az entrópia változás izoterm állapotváltozás esetében:

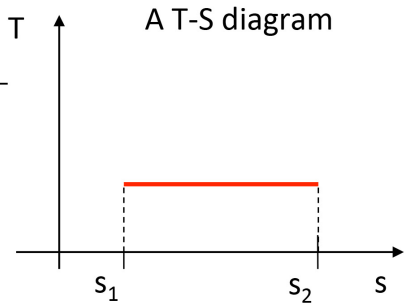
$$Q = W'$$

$$dQ = dW' = pdV$$

$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT\frac{dV}{TV} = \frac{m}{M}R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}R\ln\frac{p_1}{p_2}$$



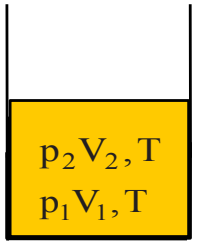
Izoterm (állandó hőmérsékletű) állapotváltozás

Izotermikus állapotváltozás: a hőmérséklet nem változik az állapotváltozás során.

Az egyetemes gáztörvény: $p \cdot V = \frac{m}{M} RT$

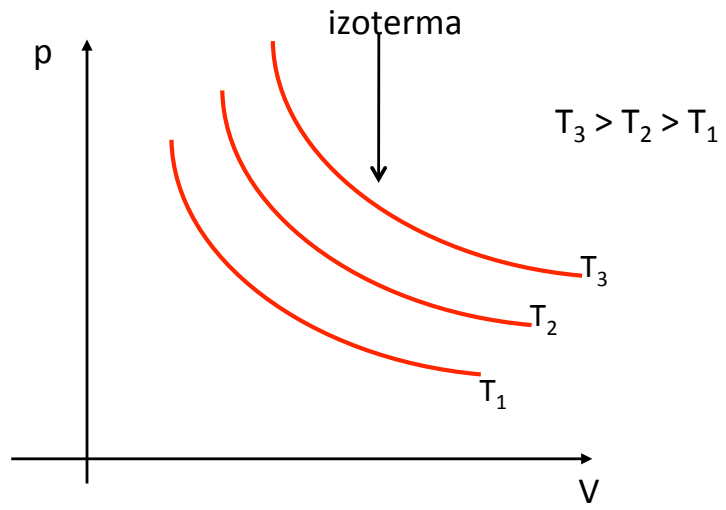
T=állandó, ⟹ pV=állandó,

Boyle Mariotte törvény: $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$



A $p \cdot V = \text{állandó}$ az izoterma egyenlete

Az izotermikus állapotváltozás p-V diagramja:



Mivel a hőmérséklet állandó, $\Delta U = 0$

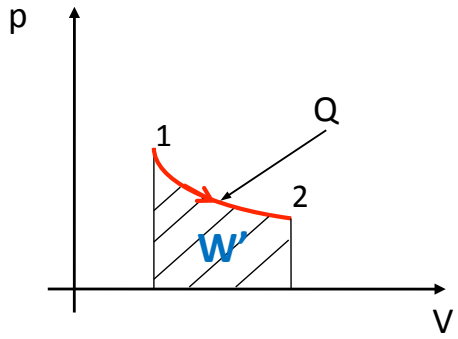
Az első főtétel: $0 = Q + W$

$$-W = Q$$

$$W' = Q$$

azaz a **gáz által végzett munka** (tágulás esetén pozitív) egyenlő a felvett hőmennyiséggel

Izotermikus tágulás:



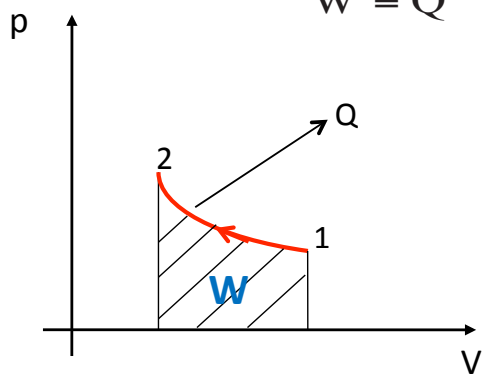
Izotermikus tágulás esetén tehát a gáz tágulási munkát végez, és a munkának megfelelő hőt vesz fel.

Izotermikus kompresszió:

$$W = -Q$$

a gáz a kompressziós munkának megfelelő hőt leadja

$$W' = Q$$



Ha tehát a a gázt összenyomjuk azaz a W a pozitív, akkor –Q is pozitív, azaz Q negatív, tehát a gáz (vagy rendszer) a rajta végzett munkával megegyező hőt kell hogy leadjon.

A munkavégzést az alábbi módon tudjuk kiszámítani:

$$W' = Q$$

$$Q = W' = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$

$$Q = W' = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}$$

Ezek alapján az izotermikus munka és hőmennyiség:

$$W' = Q = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}$$

Az entrópia változás izoterm állapotváltozás esetében:

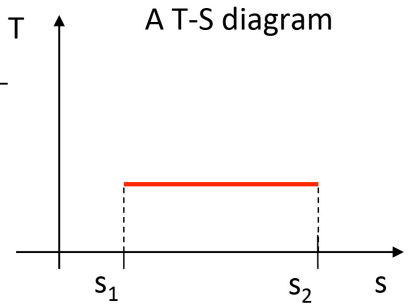
$$Q = W'$$

$$dQ = dW' = pdV$$

$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT\frac{dV}{TV} = \frac{m}{M}R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}R\ln\frac{p_1}{p_2}$$



8.4. Adiabatikus (izentróp) állapotváltozás

Az adiabatikus, vagy állandó entrópiájú (azaz izentróp) állapotváltozás során a rendszer és a környezete között hőcsere nem játszódik le ($\Delta Q \equiv 0$). Ez például tökéletes hőszigeteléssel megvalósítható. Adiabatikusnak tekinthető az állapotváltozás akkor is, ha a folyamat olyan gyorsan játszódik le, hogy a hőcserére nincsen idő. Igen jól megközelíti ezt az állapotot a szódavíz készítéséhez alkalmazott patronból kiszúrásakor kiáramló széndioxid gáz (a kb: 6 bar nyomás miatt a gáz annyira kitágul, hogy meg is fagy, a patronra ráfagy a levegő nedvességtartalma).
Az első főtétel az alábbiak szerint alakul:

$$\Delta U = Q + W$$
$$Q \equiv 0$$
$$\Delta U = W$$

tökéletes hőszigetelés gyors állapotváltozás
Példák:
Ha a gázt adiabatikusan összenyomjuk, akkor annak hőmérséklete megnő. Pl.: ha sokáig használjuk a kerékpár pumpáját, az a benne lévő gáz miatt felmelegszik.
Ebben az esetben a W és a ΔU is pozitív mennyiség lesz.

$$W \rangle 0 \Rightarrow \Delta U \rangle 0 \rightarrow \text{T növekszik}$$

Ha a gáz tágul:

$$W \langle 0 \Rightarrow W' \rangle 0 \rightarrow akkor - \Delta U = -W$$

$$-\Delta U = W'$$
$$\text{ha } W' \rangle 0$$
$$-\Delta U \rangle 0$$
$$\Delta U \langle 0 \Rightarrow \text{T csökken}$$

Adiabatikus munka:

$$\Delta U = W$$
$$dU = dW$$
$$c_v \cdot m \cdot dT = -pdV$$
$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M}RT$$
$$c_v \cdot m \cdot dT = -\frac{m}{M}RT\frac{dV}{V} \; tudjuk, hogy \rightarrow c_p - c_v = \frac{R}{M}$$
$$c_v \cdot dT = -(c_p - c_v)T\frac{dV}{V}$$
$$\frac{dT}{T} = -\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\frac{dV}{V}$$

$\frac{c_p}{c_v} = \kappa \rightarrow$ Kappa: a fajhő viszony.

Ezek alapján az alábbi differenciál egyenletet kapjuk:

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{T}} = -(\kappa - 1)\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}}.$$

Ennek megoldása:

$$\mathrm{TV}^{\kappa-1} = \text{állandó}. \qquad (8.4.1.)$$

Az előző és az alábbi egyenletből alkotott rendszert megoldva kapjuk:

$$\frac{\mathrm{p}\cdot\mathrm{V}}{\mathrm{T}} = \text{állandó}$$

$$\mathrm{p}\cdot\mathrm{V}^{\kappa} = \text{állandó}, \qquad (8.4.2.)$$

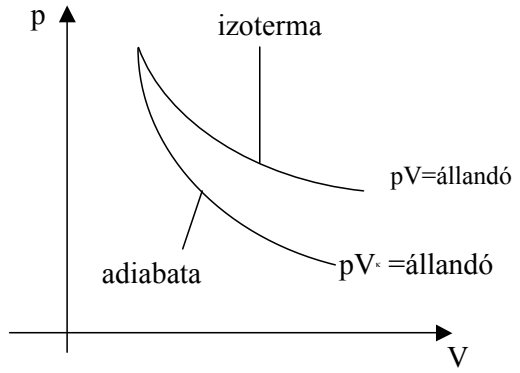
ez az adiabata egyenlete. A nyomás és a hőmérséklet közötti összefüggés adiabatikus állapotváltozásnál:

$$\frac{\mathrm{p}^{\kappa-1}}{\mathrm{T}^{\kappa}} = \text{állandó}. \qquad (8.4.3.)$$

A 4.6.12-14 egyenleteket Poisson egyenleteknek is nevezzük.
Emlékeztetünk, hogy a κ, azaz a fajhőviszony, a szabadsági foktól függ az alábbiak szerint:

$$\kappa = \frac{f+2}{f}.$$

Mivel κ mindig nagyobb mint 1, ezért az adiabata mindig meredekebb, mint az izoterma, amelynek egyenlete pV=áll. Ezt a 8.4.1. ábrán láthatjuk.

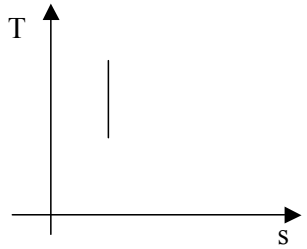


8.4.1. ábra Az izoterma és az adiabata görbék összehasonlítása

Az entrópia változása adiabatikus állapotváltozásnál:

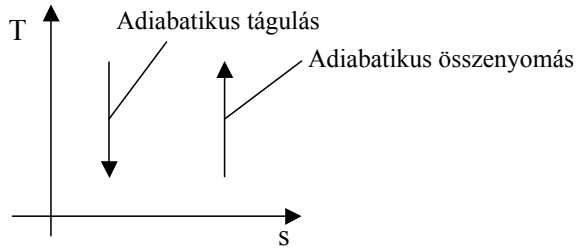
$$\begin{aligned} Q &\equiv 0 \\ dQ &= 0 \\ s_2 - s_1 &= 0 \\ s &= állandó \end{aligned}$$

Ennek megfelelően a T-S diagram egy, az S tengelyre merőleges egyenes (8.4.2. ábra). Emiatt nevezik ezt az állapotváltozást izentrópnak, azaz állandó entrópiájúnak



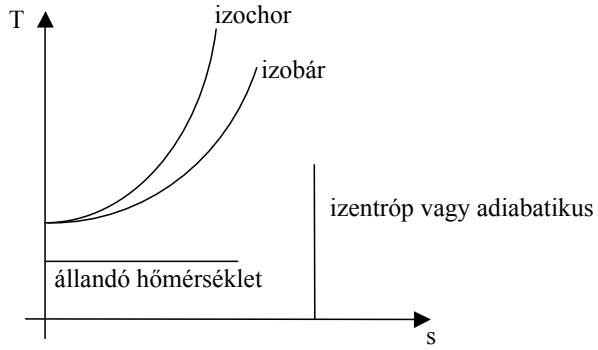
8.4.2.. ábra Adiabatikus állapotváltozás T-S diagrammja

A későbbiek miatt fontos annak felismerése, hogy egy adiabatikus folyamat tágulás (expanzió), vagy összenyomódás (kompresszió). Ebben segít a 8.4.3.. ábra.



8.4.3. ábra Adiabatikus expanzió és kompresszió

Szintén a későbbiek megértése miatt az alábbi ábrán mutatjuk meg az egyes állapotváltozások T-S diagramjainak összehasonlítását. Az izochor folyamathoz tartozó görbe azért meredekebb mint az izobárhoz tartozó, mert az izochor fajhő kisebb mint az izobár, és a 8.1.5 és 8.2.3. egyenletek szerinti görbék inverze látható a 8.4.4 ábrán.



8.4.4. ábra T-S diagramok összehasonlítása:

Adiabatikus (izentróp) állapotváltozás

Az adiabatikus, vagy állandó entrópiájú (azaz izentróp) állapotváltozás során a rendszer és **a környezete között hőcsere nem játszódik le**: $Q \equiv 0$

-tökéletes hőszigetelés

-gyors állapotváltozás

Az első főtétel az alábbiak szerint alakul:

$$\Delta U = Q + W$$

$$Q \equiv 0$$

$$\Delta U = W$$

Kompressziós munka: $W \rangle 0 \Rightarrow \Delta U \rangle 0 \rightarrow$ T nő, melegedés

Expanziós munka: $W \langle 0 \Rightarrow \Delta U \langle 0 \rightarrow$ T csökken, lehűlés

Példák

adiabatikus tágulás (expanzió):
a szódavíz készítéséhez alkalmazott patronból kiszúrásakor kiáramló széndioxid gáz (a kb: 6 bar nyomás miatt a gáz annyira kitágul, hogy meg is fagy, a patronra ráfagy a levegő nedvességtartalma).



adiabatikus összenyomás (kompresszió):
ha egy hosszabb ideig pumpáljuk a kerékpárt, a pumpa oldala felmelegszik, mert a benne lévő gáz a gyors összenyomás során nem tudja leadni a munkának megfelelő hőmennyiséget, és felmelegszik.



Adiabatikus munkavégzés:

$$\Delta U = W$$
$$dU = dW$$
$$c_v \cdot m \cdot dT = -pdV$$

Ezek alapján az alábbi differenciál egyenletet kapjuk:

$$\frac{dT}{T} = -(\kappa - 1)\frac{dV}{V}$$ ahol $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ a fajhőviszony

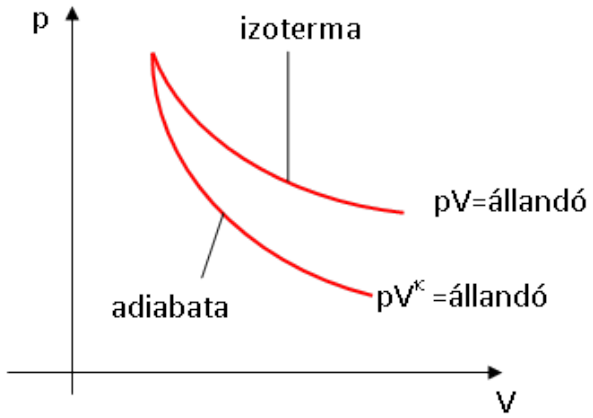
Ennek megoldása: $TV^{\kappa-1} = \text{állandó}$

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{állandó}$$ **Poisson egyenletek**

$$\frac{p^{\kappa-1}}{T^{\kappa}} = \text{állandó}$$

A p-V diagram:

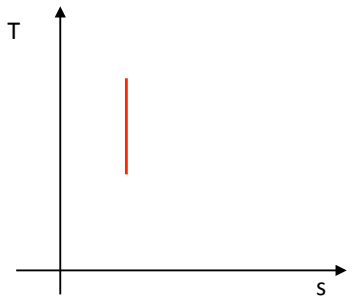
Mivel κ mindig nagyobb mint 1, ezért az adiabata mindig meredekebb, mint az izoterma



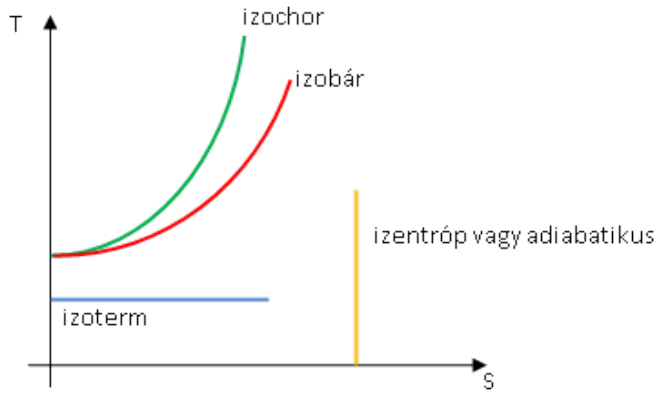
Az entrópia változása adiabatikus állapotváltozásnál:

$$Q \equiv 0$$
$$dQ = 0$$
$$S_2 - S_1 = 0$$
$$S = \text{állandó}$$

Ennek megfelelően a T-S diagram egy, az S tengelyre merőleges egyenes. Emiatt nevezik ezt az állapotváltozást izentrópnak, azaz állandó entrópiájúnak

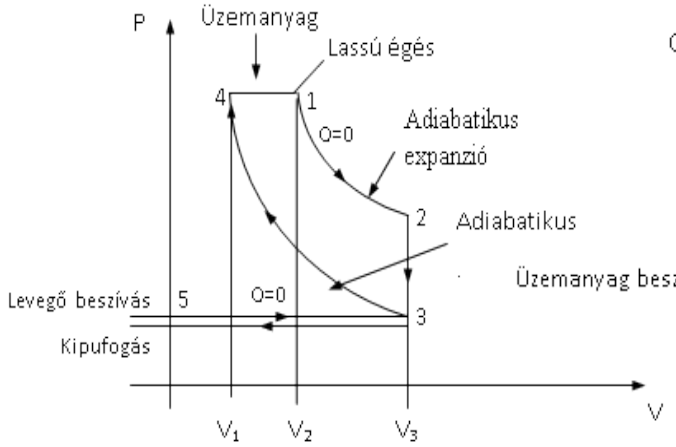


Az egyes állapotváltozások T-S diagramjainak összehasonlítása

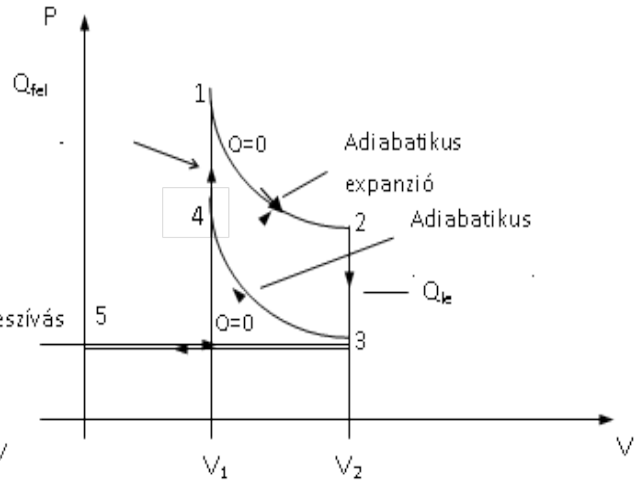


Az izochor folyamathoz tartozó görbe azért meredekebb mint az izobárhoz tartozó, mert az izochor fajhő kisebb mint az izobár fajhő.

Diesel-körfolyamat



Otto-körfolyamat



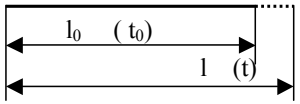
9. fejezet

4.7. Folyadékok és szilárd testek hőtágulása

Nemcsak a gázok, hanem a folyadékok és a szilárd testek térfogata is változik a hőmérséklet változásával. Általában a térfogatuk a hőmérséklet növekedésével növekszik, és fordítva, azonban van néhány fontos kivétel is, amiről később ejtünk néhány szót. A szilárd testeknél lineáris és térfogati hőtágulásról, míg folyadékoknál csak térfogatiról szokás beszélni.

4.7.1. Lineáris hőtágulás

Vékony, hosszához képest elhanyagolható szilárd anyagok, például huzalok hossza változik a hőmérséklet változásával. Magasabb hőmérsékleten hosszabbak (4.7.1. ábra), mint alacsonyon.



4.7.1. Lineáris hőtágulás

Ha a huzal hossza t_0 hőmérsékleten l_0, és t hőmérsékleten l, akkor feltételezve, hogy a Δl megnyúlás arányos a hőmérséklet különbséggel, akkor:

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot (t - t_0), \qquad (4.7.1)$$

ahol α a lineáris hőtágulási tényező, mértékegysége:

$$[\alpha] = \frac{1}{^{\circ}C} = \frac{1}{K}.$$

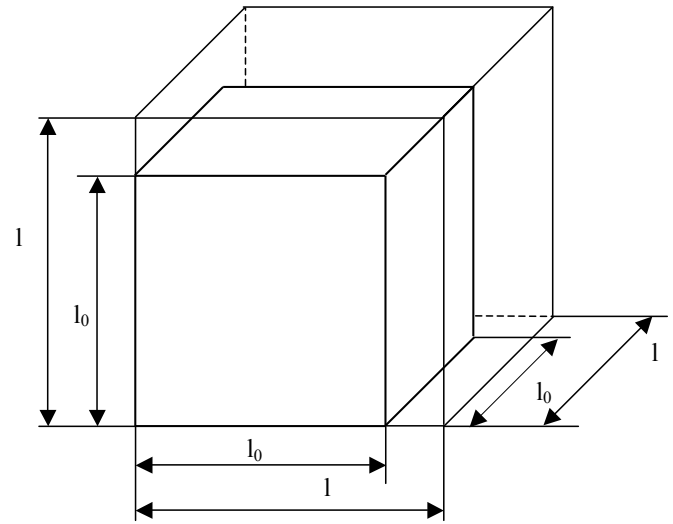
A megnövekedett összhossz:

$$l = l_0 \cdot [1 + \alpha \cdot (t - t_0)]. \qquad (4.7.2)$$

A lineáris hőtágulási együttható elemi fémeknél $10^{-5}\frac{1}{K}$ nagyságrendű, egyes ötvözeteknél (pl.: invar) két nagyságrenddel kisebb.

4.7.2. Térfogati, vagy köbös hőtágulás

Szilárd testek esetében:
Tekintsünk egy t_0 hőmérsékleten l_0 oldalélű kockát, amelnek oldalélei t hőmérsékleten l hosszúságúak (4.7.2. ábra).



4.7.2. ábra Térfogati, vagy köbös hőtágulás

A kocka térfogata t_0 hőmérsékleten:

$$V_0 = l_0^3,$$

t hőmérsékleten pedig:

$$V = l^3.$$

A 4.7.2. egyenletet behelyettesítve kapjuk:

$$V = \left\{l_0 \cdot \left[1 + \alpha\left(t - t_0\right)\right]\right\}^3,$$

és így:

$$V = l_0^3 \cdot \left[1 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \left(t - t\right)^2 + 3 \cdot \alpha \cdot \left(t - t_0\right) + \alpha^3 \cdot \left(t - t_0\right)^3\right].$$

Kis hőmérséklet különbségek (<100 °C) esetében a szögletes zárójelben levő második és negyedik tag elhanyagolható a harmadikhoz, és különösen az elsőhöz, az 1-hez képest. Ezeket elhanyagolva kapjuk:

$$V = l_0^3 \cdot \left[1 + 3 \cdot \alpha \cdot \left(t - t_0\right)^3\right],$$

vagy:

$$V = V_0 \cdot \left[1 + 3 \cdot \alpha \cdot \left(t - t_0\right)\right]. \qquad (4.7.3)$$

A 3α mennyiséget szokás köbös, vagy térfogati hőtágulási együtthatónak is nevezni. **Folyadékoknál** a lineáris hőtágulási együtthatót nem szokás értelmezni, így a β térfogati hőtágulási együttható használatos, és ezzel a 4.7.3 egyenlet:

$$V = V_0 \cdot \left[1 + \beta \cdot \left(t - t_0\right)\right] \qquad (4.7.4)$$

alakot kapjuk.

A sűrűség is változik a hőmérséklet függvényében. Ha t_0 hőmérsékleten ρ_0 a sűrűség, és t hőmérsékleten pedig ρ, akkor:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0 \cdot \left[1 + \beta \cdot \left(t - t_0\right)\right]} = \frac{\rho_0}{1 + \beta \cdot \left(t - t_0\right)}. \qquad (4.7.5)$$

Az egyenlet alapján a hőmérséklet növekedésével a sűrűség csökken, és fordítva. Van néhány anyag, amelyik bizonyos hőmérséklet intervallumok esetében ettől eltérően viselkedik. A legismertebb példa a víz, melynek sűrűsége 4 °C-on a legnagyobb, nem pedig 0 °C-on.

A hőtáguláshoz természetesen térfogatváltozás, s ezzel térfogati munka is társul. Ha egy szilárd testtel, vagy folyadékkal hőt közlünk állandó nyomáson, akkor a közölt hő egy része a hőmérsékletét növeli (azaz a belső energiáját), másik része a tágulási munkára fordítódik. Ez utóbbi rész azonban elhanyagolható. Az állandó térfogatú hőközlés esetében ez szintén elhanyagolható, az állandó térfogat miatt kialakuló mechanikai feszültség azonban óriási lehet.

Az állandó nyomású állapotváltozásnál szilárd testek és folyadékok esetén tehát a tágulási munka elhanyagolható. Így például, ha egy m_1 tömegű, c_1 fajhőjű, t_1 hőmérsékletű folyadékba beledobunk egy m_2 tömegű, c_2 fajhőjű és t_2 hőmérsékletű szilárd testet (vagy folyadékot öntünk), akkor mondhatjuk, hogy a melegebb test által leadott hő a hidegebb testet melegíti, azaz a belső energiáját növeli, és a melegebb test belső energiája ugyanannyival csökken az alábbi egyenlet szerint:

$$c_1 \cdot m_1 \cdot \left(t_1 - t_0\right) = c_2 \cdot m_2 \cdot \left(t_0 - t_2\right),$$

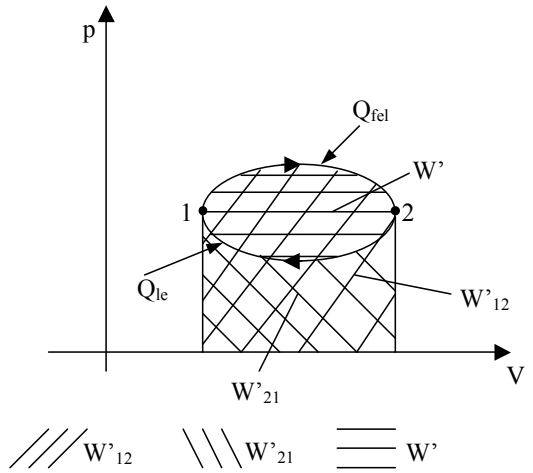
ahol t_0 az egyensúly beállta utáni közös hőmérséklet. Így:

$$t_0 = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2}.$$

4.8. Körfolyamatok

A termodinamika egyik célja, hogy leírja azokat a folyamatokat, amelyek az egyes tüzelőanyagokban tárolt energiák felhasználásával, mechanikai energiává való átalakításával foglalkozik. Ez utóbbi célra a körfolyamatokat szokás használni. Ezekről van szó az alábbiakban.

Egy körfolyamat során a gáz, vagy az egész termodinamikai rendszer, ciklikusan visszakerül az eredeti állapotába. A p-V diagram a 4.8.1. ábrán látható.
A körfolyamat során a gáz az 1 pontból a 2 pontba kerül, s közben W'_{12} munkát végez (ami arányos az 1-2 görbe alatti területtel). A dugattyú a végállásába érve visszafordul, és visszatér a gáz az 1 állapotba, miközben mi rajta W'_{21} munkát végzünk, ami a valóságban W_{21} (ami arányos a 2-1 görbe alatti területtel) munka. A körfolyamat során megmaradó, felhasználható munka a két munka összege, az abszolút értékeik különbsége, a két görbe által bezárt területtel arányos.



4.8.1. ábra A termikus erőgép körfolyamatának ábrája

A folyamathoz tartozó matematikai egyenletek az alábbiak (az első főtételbe a fenti W'-k helyett a W-ket írva:

$$\Delta U_{12} = Q_{fel} + W_{12}$$
$$\Delta U_{21} = Q_{le} + W_{21}$$
$$\underbrace{\Delta U_{12} + \Delta U_{21}}_{0} = Q_{fel} + Q_{le} + \underbrace{(W_{12} + W_{21})}_{-W'}$$

$$0 = Q_{fel} + Q_{le} + W$$
$$-W = Q_{fel} + Q_{le}$$
$$W' = Q_{fel} + Q_{le}$$

A felvett és a leadott hő összege (ami az abszolút értékek különbsége, mert Q_{le} negatív) a gáz (rendszer) által végzett munka.

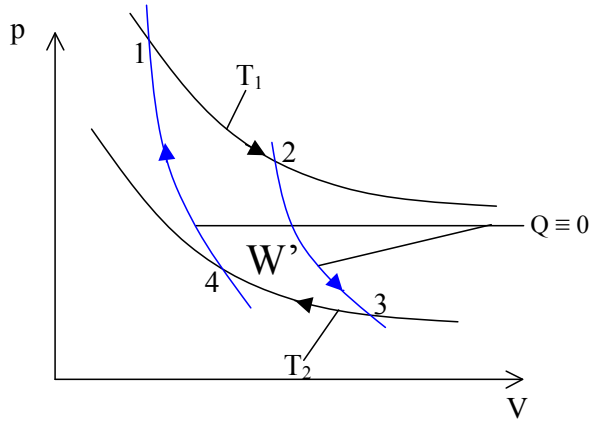
Termikus hatásfok (η):

$$\eta = \frac{W'}{Q_{fel}} = \frac{Q_{fel} + Q_{le}}{Q_{fel}} \qquad (4.8.1)$$

Bármilyen gépet szerkesztünk ez mindig igaz.

4.8.1. A Carnot körfolyamat:

A körfolyamatok közül a legnevezetesebb és elméletileg a legfontosabb a Carnot körfolyamat, mely két izotermikus és két adiabatikus folyamatból áll a 4.8.2. ábra szerint.



4.8.2. ábra A Carnot körfolyamat p-V diagramja

A diagramban lejátszódó folyamatok:
- 1-2 izotermikus expanzió (tágulás)
- 2-3 adiabatikus expanzió
- 3-4 izotermikus kompresszió
- 4-1 izotermikus kompresszió.

A körfolyamat hatásfoka:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (4.8.2)$$

Be lehet látni, hogy bármely körfolyamatnak hatásfoka kisebb, mint azé Carnot körfolyamaté amelyikbe az adott körfolyamat éppen belefér. Másrészt a Carnot körfolyamat hatásfoka mindig kisebb mint 1, mivel csak véges anyagi mennyiségekkel dolgozhatunk, s akkor az abszolút 0-n levő hely, ahova a Q_{le} megy a legkisebb hőtől felmelegszik, s a hőmérséklete a T_2 nem lesz 0 K. Ezt az alábbi egyenlőtlenséggel foglaljuk össze:

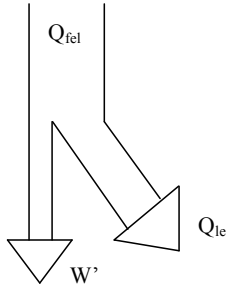
$$\eta \leq \eta_{\text{Carnot}} \langle 1. \qquad (4.8.3)$$

4.8.2. A Termodinamika II. főtétele

A 4.7.3 egyenlőtlenség következménye a Termodinamika II. főtétele, amelynek több megfogalmazása van, s közülük csak a legfontosabbak száma 256. Szinte minden jeles fizikus, illetve vegyész megadta a maga verzióját, természetesen több tudományterületre. Az alábbiakban a három, Helmholtz által adott klasszikus változatot közöljük.

- **Nem lehet másodfajú perpetuum mobilét készíteni, azaz olyan gépet, melynek hatásfoka 1.**

Ez azt jelenti, hogy Q_{le} nem lehet zérus, azaz mindig van hulladékhő.
A 4.8.3. ábrán látható ún. Shenkey diagramon illusztrálva szemléletesen látszik, hogy a tüzelőanyagból felszabadult Q_{fel} hőmennyiség egy része (W') alakul csak át mechanikai munkává, egy másik része (többnyire a nagyobbik fele) hulladék hő formájában kerül elvezetésre, ezzel többnyire termikus környezetszennyezést okozva.



4.8.3. ábra A tüzelőanyagban rejlő energia felhasználása

Az ábra szerinti hasznos munka - hulladékhő arány nem is túlzás, hiszen vannak olyan széntüzelésű erőművek, amelyekben a termelt villamos energia kevesebb mint húsz százaléka az elégetett szénből felszabaduló erőműnek. Ilyenkor az egyetlen lehetséges megoldás a hulladékhő hasznosítása. Ez napjaink egyik legnagyobb energetikai feladata.

- **Egy hőerőgéphez legalább két hőtartály szükséges, az egyikből hőt vesz fel, a másikba pedig hőt ad le a gép.**

Ez azt jelenti, hogy a gép nem működhet úgy, hogy ne legyen egy olyan része, ahova a hulladékhőt el lehet vezetni, ennek a hőmérséklete pedig alacsonyabb kell hogy legyen, mint annak a térnek a hőmérséklete, ahonnan a felvett hő jön.

- **Hő nem megy magától hidegebb helyről melegebb helyre.**

Ez az állítás azt jelenti, hogy a hulladékhőt nem lehet energia befektetés nélkül visszavinni a magasabb hőmérsékletű térbe.
Nem magától, azaz energia befektetéssel természetesen lehet alacsonyabb hőmérsékletű helyről magasabb hőmérsékletűre vinni hőt, gondoljunk csak a hűtőszekrényre, vagy a környezet alacsonyabb hőmérsékletű energiájának a felhasználásával működő hőszivattyús fűtési rendszerekre.

4.8.3. A Termodinamika III. főtétele

Ennek a főtételnek is több megfogalmazása van, az alábbiakban csak az egyiket adjuk meg.
A hőmérséklet csökkenésével a fajhők is csökkennek, s az abszolút 0 felé a nullához tartanak.

4.9. A folyamatok megfordíthatósága

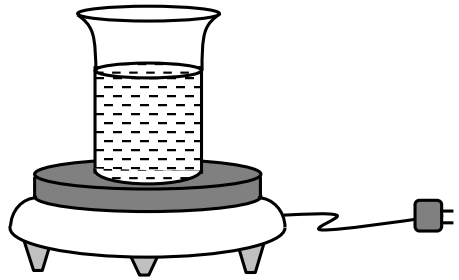
A fizikai folyamatok között vannak olyanok, amelyek esetében a folyamatot megfordítva, a kezdő állapotba jut a test, vagy a rendszer. Ilyen például egy inga lengése, ha eltekintünk a veszteségektől, vagy ilyenek a fentebb tárgyalt folyamatok a gázok esetében. Az ilyen folyamatokat megfordítható, vagy **reverzibilis** folyamatoknak nevezzük. A reverzibilis folyamatok esetében a rendszer és a környezete a folyamat során minden pontban egyensúlyban van.
Azokat a folyamatokat, amelyek esetében a folyamat megfordítása esetén nem a kezdőpontba jut vissza a rendszer, **irreverzibilis** folyamatoknak nevezzük. Ilyen folyamat például a túlcsillapított harmonikus rezgés, egy test lecsúszása lejtőről makkor, ha a súrlódás nem elhanyagolható. Az irreverzibilis folyamatok esetében a folyamat során az egyes állapotok nem egyensúlyiak is.
Az entrópia 4.6. fejezetben való kiszámítása reverzibilis folyamatokra érvényes. Szigorúan vizsgálva az egyes folyamatokat, kiderül, hogy alapvetően egyik sem megfordítható, mert mindig vannak veszteségek. Így az entrópia minden esetben nagyobb, mint amit az egyenletek tartalmaznak.

4.10. Halmazállapot változások

Vegyünk egy szilárd halmazállapotú anyagot és kezdjük el melegíteni állandó nyomáson egy, a 4.10.1. ábrán bemutatott elrendezésben úgy, hogy a felvett hőt és a hőmérsékletet állandóan mérjük.

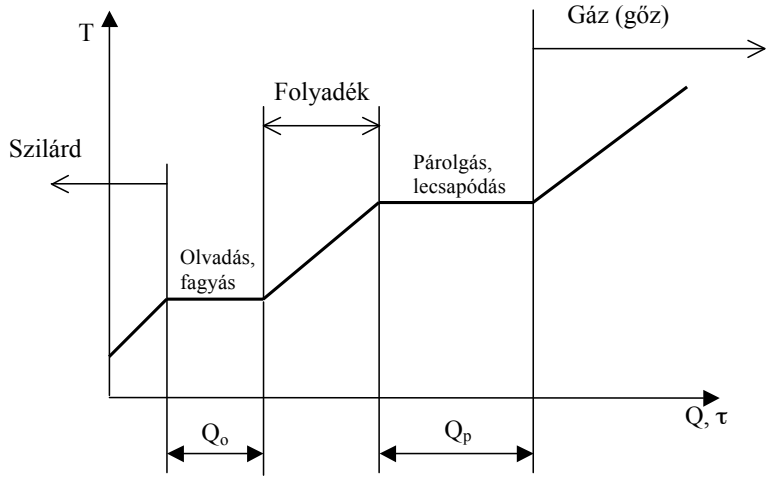
4.10. Halmazállapot változások

Vegyünk egy szilárd halmazállapotú anyagot és kezdjük el melegíteni állandó nyomáson egy, a 4.10.1. ábrán bemutatott elrendezésben úgy, hogy a felvett hőt és a hőmérsékletet állandóan mérjük.



4.10.1. ábra Egy adott tömegű test melegítése

A melegítés során a testtel közölt hő állandóan növeli annak belső energiáját. Ennek következtében a hőmérséklete a folyamat elején állandóan növekszik, mindaddig, amíg el nem éri az olvadáspontját, amikor is a hőmérséklet nem változik (4.10.2. ábra), amíg az utolsó két atom, vagy molekula között levő, a szilárd halmazállapotot biztosító kötés fel nem lazul a folyadék állapotban megfigyelt értékig.



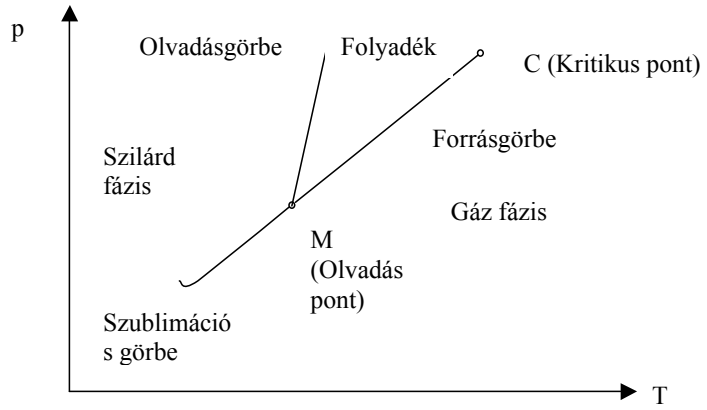
4.10.2. ábra Adott tömegű test hőmérsékletének változása állandó nyomáson állandó hőteljesítménnyel történő melegítés esetében

Az adott tömegű szilárd test megolvasztásához Q_o olvadáshő szükséges. Az egységnyi tömegű szilárd test megolvasztásához az olvadáshőre (L_o) van szükség. A teljes megolvadás után a folyadék melegszik tovább, majd a forráspont elérése után a hőmérséklet ismét állandó marad mindaddig, amíg az utolsó két molekula (vagy) atom között a folyadékra jellemző kötést meg nem szüntetjük. Az adott tömegű folyadék elpárologtatására fordított hő Q_p. Az egységnyi tömegű folyadék elpárologtatásához szükséges energiát párolgáshőnek (Lp) nevezzük.
A 4.10.2. ábra állandó hőmérsékletű szakaszain együtt van jelen a két halmazállapot. Mind az olvadáshő, mind a párolgáshő függ a nyomástól a Clausius-Clapeyron egyenlet szerint:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T} \cdot \frac{1}{v''-v'}, \qquad (4.10.1)$$

ahol r az állandó nyomású párolgáshő (olvadásnál az olvadáshő, azaz az egységnyi tömegű test megolvasztásához szükséges hő), v” a gáz (olvadásnál a folyadék), v’ a folyadék (olvadásnál a szilárd halmazállapot) fajtérfogata.
Azt, hogy a forráspont hőmérséklete függ a nyomástól általánosan ismert. A 4.10.1 egyenletből következik, hogy ez a szilárd halmazállapot olvadáspontjánál is így van. Ezt alátámasztja az a tény, hogy a jég olvadáspontja csökken, ha a nyomás nő. A korcsolyázást is ez teszi lehetővé.

A párolgási folyamat során egyidejűleg két fázis van jelen, a folyadék és a gáz halmazállapot. Mindkettőnek ugyanaz a nyomása és a hőmérséklete. Egyensúlyban vannak, nem változik egymáshoz való arányuk, a párolgási folyamat tökéletesen megfordítható. Ha szilárd és folyékony, valamint gáz fázis van egyszerre jelen, akkor a p-T diagram a 4.10.3. ábrán látható.

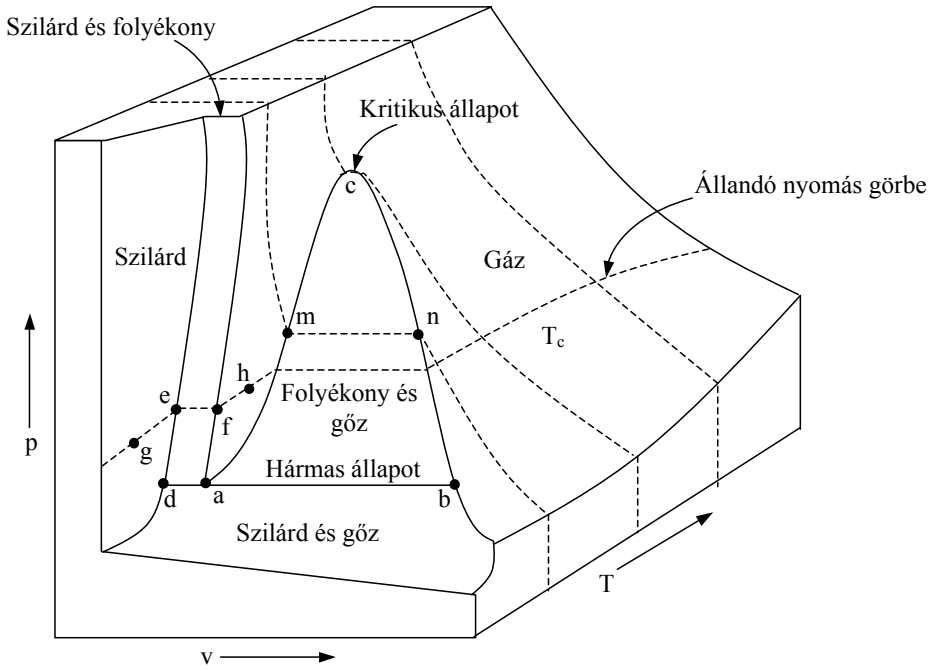


4.10.3. ábra A halmazállapot változások p-T diagramja

Az ábrából jól látszik, hogy a forrásgörbe, a szublimációs görbe és az olvadásgörbe mentén két-két fázis található, s ha z M olvadáspontot, vagy hármaspontot vizsgáljuk, akkor ott három fázis találkozik. Az egész ábrára érvényes, hogy ha F a fázisok, Sz a szabadsági fokok (a függetlenül megválasztható intenzív termodinamikai paraméterek, mint a nyomás, a hőmérséklet, stb.), és K a komponensek (kémiailag különböző anyagok) száma, akkor érvényes a Gibbs – féle fázisszabály:

$$Sz+F=K+2. \qquad (4.10.2)$$

Gondoljuk végig, hogy egy egykomponensű anyagban például a hármaspontban a fázisok száma 3, így mindegyik paraméter kötött, a szabadsági fok zérus. A fent említett görbék mentén pedig a fázisok száma kettő, így a szabadsági fok 1, azaz egy paraméter választható függetlenül. A 4.10.3. diagram alapján meghatározhatjuk az adott közeg halmazállapotaihoz, illetve azok változásaihoz tartozó paramétereket, az átalakulási energiákat pedig a megfelelő T-s diagramok adják. Ha a fajtérfogat, vagy a térfogatot is számításba kell vennünk, akkor a 4.10.4. ábrát kell segítségül hívni.



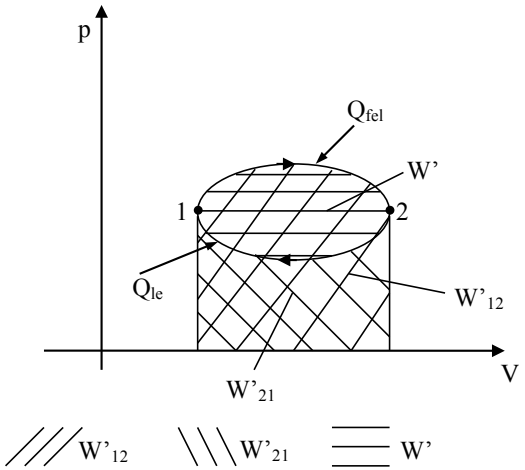
4.10.4. ábra A különböző halmazállapot változások p-T-v diagramja

Vegyük észre, hogy ezen az ábrán együtt látható a valóságos gáz és folyadék, valamint szilárd halmazállapot minden állapotváltozása, mint a háromdimenziós ábra megfelelő síkmetszete.

9.1. Körfolyamatok

A termodinamika egyik célja, hogy leírja azokat a folyamatokat, amelyek az egyes tüzelőanyagokban tárolt energiák felhasználásával, mechanikai energiává való átalakításával foglalkozik. Ez utóbbi célra a körfolyamatokat szokás használni. Ezekről van szó az alábbiakban.

Egy körfolyamat során a gáz, vagy az egész termodinamikai rendszer, ciklikusan visszakerül az eredeti állapotába. A p-V diagram a 9.1.1. ábrán látható.
A körfolyamat során a gáz az 1 pontból a 2 pontba kerül, s közben W'_{12} munkát végez (ami arányos az 1-2 görbe alatti területtel). A dugattyú a végállásába érve visszafordul, és visszatér a gáz az 1 állapotba, miközben mi rajta W'_{21} munkát végzünk, ami a valóságban W_{21} (ami arányos a 2-1 görbe alatti területtel) munka. A körfolyamat során megmaradó, felhasználható munka a két munka összege, az abszolút értékeik különbsége, a két görbe által bezárt területtel arányos.



9.1.1. ábra A termikus erőgép körfolyamatának ábrája

A folyamathoz tartozó matematikai egyenletek az alábbiak (az első főtételbe a fenti W'-k helyett a W-ket írva:

$$\Delta U_{12} = Q_{fel} + W_{12}$$
$$\Delta U_{21} = Q_{le} + W_{21}$$
$$\underbrace{\Delta U_{12} + \Delta U_{21}}_{0} = Q_{fel} + Q_{le} + \underbrace{(W_{12} + W_{21})}_{-W'}$$

$$0 = Q_{fel} + Q_{le} + W$$
$$-W = Q_{fel} + Q_{le}$$
$$W' = Q_{fel} + Q_{le}$$

A felvett és a leadott hő összege (ami az abszolút értékek különbsége, mert Q_{le} negatív) a gáz (rendszer) által végzett munka.

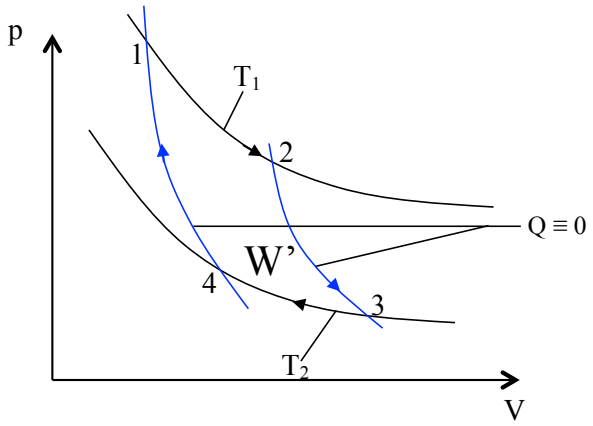
Termikus hatásfok (η):

$$\eta = \frac{W'}{Q_{fel}} = \frac{Q_{fel} + Q_{le}}{Q_{fel}} \qquad (9.1.1)$$

Bármilyen gépet szerkesztünk ez mindig igaz.

A Carnot körfolyamat:

A körfolyamatok közül a legnevezetesebb és elméletileg a legfontosabb a Carnot körfolyamat, mely két izotermikus és két adiabatikus folyamatból áll a 9.1.2. ábra szerint.



9.1.2. ábra A Carnot körfolyamat p-V diagramja

A diagramban lejátszódó folyamatok:
- 1-2 izotermikus expanzió (tágulás)
- 2-3 adiabatikus expanzió
- 3-4 izotermikus kompresszió
- 4-1 izotermikus kompresszió.

A körfolyamat hatásfoka:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (9.1.2)$$

Be lehet látni, hogy bármely körfolyamatnak hatásfoka kisebb, mint azé Carnot körfolyamaté amelyikbe az adott körfolyamat éppen belefér. Másrészt a Carnot körfolyamat hatásfoka mindig kisebb mint 1, mivel csak véges anyagi mennyiségekkel dolgozhatunk, s akkor az abszolút 0-n levő hely, ahova a Q_{le} megy a legkisebb hőtől felmelegszik, s a hőmérséklete a T_2 nem lesz 0 K. Ezt az alábbi egyenlőtlenséggel foglaljuk össze:

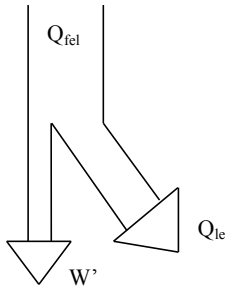
$$\eta \leq \eta_{\text{Carnot}} \langle 1. \qquad (9.1.3)$$

9.2. A Termodinamika II. főtétele

A 9.1.3 egyenlőtlenség következménye a Termodinamika II. főtétele, amelynek több megfogalmazása van, s közülük csak a legfontosabbak száma 256. Szinte minden jeles fizikus, illetve vegyész megadta a maga verzióját, természetesen több tudományterületre. Az alábbiakban a három, Helmholtz által adott klasszikus változatot közöljük.

- **Nem lehet másodfajú perpetuum mobilét készíteni, azaz olyan gépet, melynek hatásfoka 1.**

Ez azt jelenti, hogy Q_{le} nem lehet zérus, azaz mindig van hulladékhő.
A 9.2.1. ábrán látható ún. Shenkey diagramon illusztrálva szemléletesen látszik, hogy a tüzelőanyagból felszabadult Q_{fel} hőmennyiség egy része (W') alakul csak át mechanikai munkává, egy másik része (többnyire a nagyobbik fele) hulladék hő formájában kerül elvezetésre, ezzel többnyire termikus környezetszennyezést okozva.



9.2.1. ábra A tüzelőanyagban rejlő energia felhasználása

Az ábra szerinti hasznos munka - hulladékhő arány nem is túlzás, hiszen vannak olyan széntüzelésű erőművek, amelyekben a termelt villamos energia kevesebb mint húsz százaléka az elégetett szénből felszabaduló erőműnek. Ilyenkor az egyetlen lehetséges megoldás a hulladékhő hasznosítása. Ez napjaink egyik legnagyobb energetikai feladata.

- **Egy hőerőgéphez legalább két hőtartály szükséges, az egyikből hőt vesz fel, a másikba pedig hőt ad le a gép.**

Ez azt jelenti, hogy a gép nem működhet úgy, hogy ne legyen egy olyan része, ahova a hulladékhőt el lehet vezetni, ennek a hőmérséklete pedig alacsonyabb kell hogy legyen, mint annak a térnek a hőmérséklete, ahonnan a felvett hő jön.

- **Hő nem megy magától hidegebb helyről melegebb helyre.**

Ez az állítás azt jelenti, hogy a hulladékhőt nem lehet energia befektetés nélkül visszavinni a magasabb hőmérsékletű térbe.
Nem magától, azaz energia befektetéssel természetesen lehet alacsonyabb hőmérsékletű helyről magasabb hőmérsékletűre vinni hőt, gondoljunk csak a hűtőszekrényre, vagy a környezet alacsonyabb hőmérsékletű energiájának a felhasználásával működő hőszivattyús fűtési rendszerekre.

A Termodinamika III. főtétele

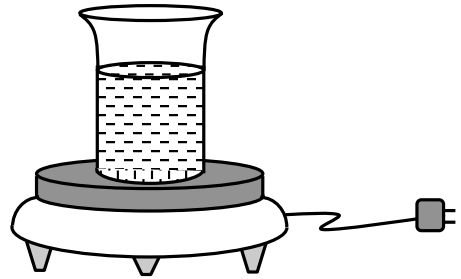
Ennek a főtételnek is több megfogalmazása van, az alábbiakban csak az egyiket adjuk meg.
A hőmérséklet csökkenésével a fajhők is csökkennek, s az abszolút 0 felé a nullához tartanak.

A folyamatok megfordíthatósága

A fizikai folyamatok között vannak olyanok, amelyek esetében a folyamatot megfordítva, a kezdő állapotba jut a test, vagy a rendszer. Ilyen például egy inga lengése, ha eltekintünk a veszteségektől, vagy ilyenek a fentebb tárgyalt folyamatok a gázok esetében. Az ilyen folyamatokat megfordítható, vagy **reverzibilis** folyamatoknak nevezzük. A reverzibilis folyamatok esetében a rendszer és a környezete a folyamat során minden pontban egyensúlyban van.
Azokat a folyamatokat, amelyek esetében a folyamat megfordítása esetén nem a kezdőpontba jut vissza a rendszer, **irreverzibilis** folyamatoknak nevezzük. Ilyen folyamat például a túlcsillapított harmonikus rezgés, egy test lecsúszása lejtőről makkor, ha a súrlódás nem elhanyagolható. Az irreverzibilis folyamatok esetében a folyamat során az egyes állapotok nem egyensúlyiak is.
Az entrópia 7. fejezetben való kiszámítása reverzibilis folyamatokra érvényes. Szigorúan vizsgálva az egyes folyamatokat, kiderül, hogy alapvetően egyik sem megfordítható, mert mindig vannak veszteségek. Így az entrópia minden esetben nagyobb, mint amit az egyenletek tartalmaznak.

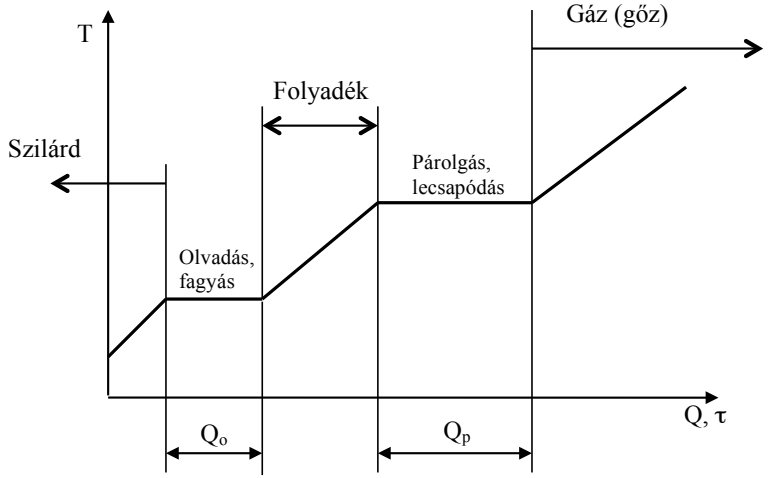
Halmazállapot változások

Vegyünk egy szilárd halmazállapotú anyagot és kezdjük el melegíteni állandó nyomáson egy, a 9.2.2. ábrán bemutatott elrendezésben úgy, hogy a felvett hőt és a hőmérsékletet állandóan mérjük.



9.2.2. ábra Egy adott tömegű test melegítése

A melegítés során a testtel közölt hő állandóan növeli annak belső energiáját. Ennek következtében a hőmérséklete a folyamat elején állandóan növekszik, mindaddig, amíg el nem éri az olvadáspontját, amikor is a hőmérséklet nem változik 9.2.3. ábra), amíg az utolsó két atom, vagy molekula között levő, a szilárd halmazállapotot biztosító kötés fel nem lazul a folyadék állapotban megfigyelt értékig.



9.2.3. ábra Adott tömegű test hőmérsékletének változása állandó nyomáson állandó hőteljesítménnyel történő melegítés esetében

Az adott tömegű szilárd test megolvasztásához Q_o olvadáshő szükséges. Az egységnyi tömegű szilárd test megolvasztásához az olvadáshőre (L_o) van szükség. A teljes megolvadás után a folyadék melegszik tovább, majd a forráspont elérése után a hőmérséklet ismét állandó marad mindaddig, amíg az utolsó két molekula (vagy) atom között a folyadékra jellemző kötést meg nem szüntetjük. Az adott tömegű folyadék elpárologtatására fordított hő Q_p. Az egységnyi tömegű folyadék elpárologtatásához szükséges energiát párolgáshőnek (Lp) nevezzük.

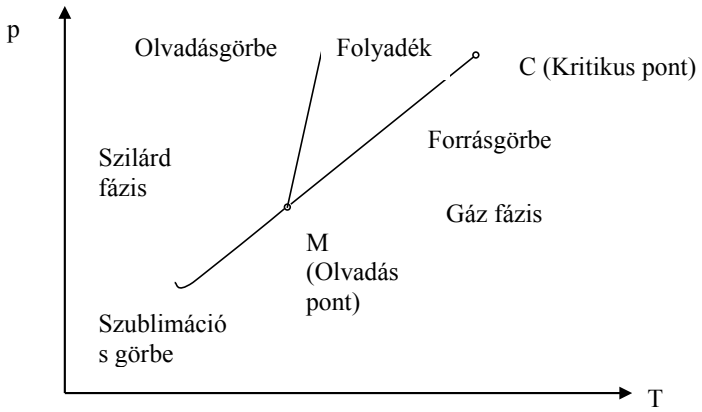
A 9.2.3. ábra állandó hőmérsékletű szakaszain együtt van jelen a két halmazállapot. Mind az olvadáshő, mind a párolgáshő függ a nyomástól a Clausius-Clapeyron egyenlet szerint:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T} \cdot \frac{1}{v''-v'}, \qquad (9.2.1)$$

ahol r az állandó nyomású párolgáshő (olvadásnál az olvadáshő, azaz az egységnyi tömegű test megolvasztásához szükséges hő), v” a gáz (olvadásnál a folyadék), v’ a folyadék (olvadásnál a szilárd halmazállapot) fajtérfogata.

Azt, hogy a forráspont hőmérséklete függ a nyomástól általánosan ismert. A 9.2.1 egyenletből következik, hogy ez a szilárd halmazállapot olvadáspontjánál is így van. Ezt alátámasztja az a tény, hogy a jég olvadáspontja csökken, ha a nyomás nő. A korcsolyázást is ez teszi lehetővé.

A párolgási folyamat során egyidejűleg két fázis van jelen, a folyadék és a gáz halmazállapot. Mindkettőnek ugyanaz a nyomása és a hőmérséklete. Egyensúlyban vannak, nem változik egymáshoz való arányuk, a párolgási folyamat tökéletesen megfordítható. Ha szilárd és folyékony, valamint gáz fázis van egyszerre jelen, akkor a p-T diagram a 9.2.4. ábrán látható.

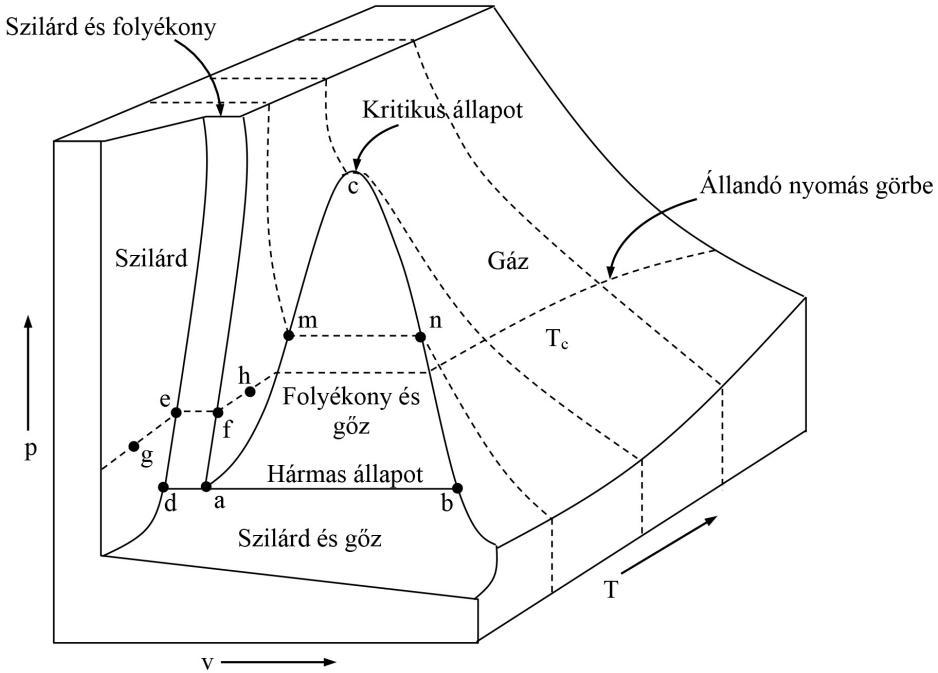


9.2.4. ábra A halmazállapot változások p-T diagramja

Az ábrából jól látszik, hogy a forrásgörbe, a szublimációs görbe és az olvadásgörbe mentén két-két fázis található, s ha z M olvadáspontot, vagy hármaspontot vizsgáljuk, akkor ott három fázis találkozik. Az egész ábrára érvényes, hogy ha F a fázisok, Sz a szabadsági fokok (a függetlenül megválasztható intenzív termodinamikai paraméterek, mint a nyomás, a hőmérséklet, stb.), és K a komponensek (kémiailag különböző anyagok) száma, akkor érvényes a Gibbs – féle fázisszabály:

$$Sz+F=K+2. \qquad (9.2.2)$$

Gondoljuk végig, hogy egy egykomponensű anyagban például a hármaspontban a fázisok száma 3, így mindegyik paraméter kötött, a szabadsági fok zérus. A fent említett görbék mentén pedig a fázisok száma kettő, így a szabadsági fok 1, azaz egy paraméter választható függetlenül. A 4.10.3. diagram alapján meghatározhatjuk az adott közeg halmazállapotaihoz, illetve azok változásaihoz tartozó paramétereket, az átalakulási energiákat pedig a megfelelő T-s diagramok adják. Ha a fajtérfogat, vagy a térfogatot is számításba kell vennünk, akkor a 9.2.5. ábrát kell segítségül hívni.



9.2.5. ábra A különböző halmazállapot változások p-T-v diagramja

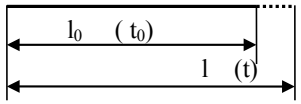
Vegyük észre, hogy ezen az ábrán együtt látható a valóságos gáz és folyadék, valamint szilárd halmazállapot minden állapotváltozása, mint a háromdimenziós ábra megfelelő síkmetszete.

9.3. Folyadékok és szilárd testek hőtágulása

Nemcsak a gázok, hanem a folyadékok és a szilárd testek térfogata is változik a hőmérséklet változásával. Általában a térfogatuk a hőmérséklet növekedésével növekszik, és fordítva, azonban van néhány fontos kivétel is, amiről később ejtünk néhány szót. A szilárd testeknél lineáris és térfogati hőtágulásról, míg folyadékoknál csak térfogatiról szokás beszélni.

Lineáris hőtágulás

Vékony, hosszához képest elhanyagolható szilárd anyagok, például huzalok hossza változik a hőmérséklet változásával. Magasabb hőmérsékleten hosszabbak (9.3.1. ábra), mint alacsonyon.



9.3.1. Lineáris hőtágulás

Ha a huzal hossza t_0 hőmérsékleten l_0, és t hőmérsékleten l, akkor feltételezve, hogy a Δl megnyúlás arányos a hőmérséklet különbséggel, akkor:

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot (t - t_0), \qquad (9.3.1)$$

ahol α a lineáris hőtágulási tényező, mértékegysége:

$$[\alpha] = \frac{1}{^{o}C} = \frac{1}{K}.$$

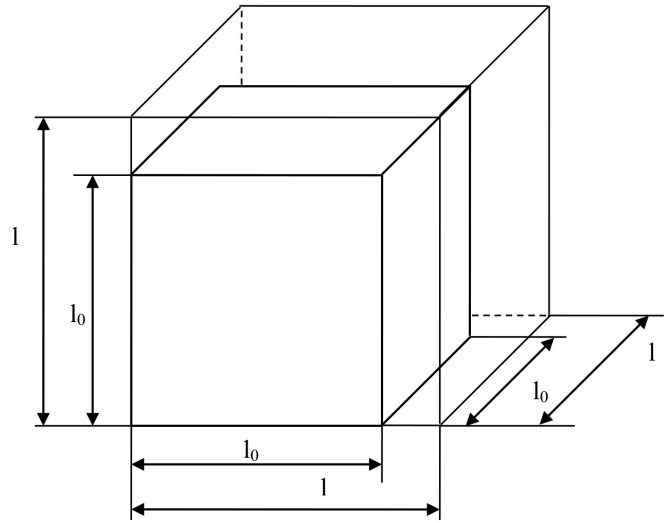
A megnövekedett összhossz:

$$l = l_0 \cdot [1 + \alpha \cdot (t - t_0)]. \qquad (9.3.2)$$

A lineáris hőtágulási együttható elemi fémeknél $10^{-5}\frac{1}{K}$ nagyságrendű, egyes ötvözeteknél (pl.: invar) két nagyságrenddel kisebb.

Térfogati, vagy köbös hőtágulás

Szilárd testek esetében:
Tekintsünk egy t_0 hőmérsékleten l_0 oldalélű kockát, amelnek oldalélei t hőmérsékleten l hosszúságúak (9.3.2. ábra).



9.3.2. ábra Térfogati, vagy köbös hőtágulás

A kocka térfogata t_0 hőmérsékleten:

$$V_0 = l_0^3,$$

t hőmérsékleten pedig:

$$V = l^3.$$

A 9.3.2. egyenletet behelyettesítve kapjuk:

$$V = \{l_0 \cdot [1 + \alpha(t - t_0)]\}^3,$$

és így:

$$V = l_0^3 \cdot \left[1 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot (t - t)^2 + 3 \cdot \alpha \cdot (t - t_0) + \alpha^3 \cdot (t - t_0)^3\right].$$

Kis hőmérséklet különbségek (<100 ^oC) esetében a szögletes zárójelben levő második és negyedik tag elhanyagolható a harmadikhoz, és különösen az elsőhöz, az 1-hez képest. Ezeket elhanyagolva kapjuk:

$$V = l_0^3 \cdot \left[1 + 3 \cdot \alpha \cdot (t - t_0)^3\right],$$

vagy:

$$V = V_0 \cdot [1 + 3 \cdot \alpha \cdot (t - t_0)]. \qquad (9.3.3)$$

A 3α mennyiséget szokás köbös, vagy térfogati hőtágulási együtthatónak is nevezni. **Folyadékoknál** a lineáris hőtágulási együtthatót nem szokás értelmezni, így a β térfogati hőtágulási együttható használatos, és ezzel a 4.7.3 egyenlet:

$$V = V_0 \cdot [1 + \beta \cdot (t - t_0)] \qquad (9.3.4)$$

alakot kapjuk.

A sűrűség is változik a hőmérséklet függvényében. Ha t_0 hőmérsékleten ρ_0 a sűrűség, és t hőmérsékleten pedig ρ, akkor:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0 \cdot [1 + \beta \cdot (t - t_0)]} = \frac{\rho_0}{1 + \beta \cdot (t - t_0)}. \qquad (9.3.5)$$

Az egyenlet alapján a hőmérséklet növekedésével a sűrűség csökken, és fordítva. Van néhány anyag, amelyik bizonyos hőmérséklet intervallumok esetében ettől eltérően viselkedik. A legismertebb példa a víz, melynek sűrűsége 4 ^oC-on a legnagyobb, nem pedig 0 ^oC-on.

A hőtáguláshoz természetesen térfogatváltozás, s ezzel térfogati munka is társul. Ha egy szilárd testtel, vagy folyadékkal hőt közlünk állandó nyomáson, akkor a közölt hő egy része a hőmérsékletét növeli (azaz a belső energiáját), másik része a tágulási munkára fordítódik. Ez utóbbi rész azonban elhanyagolható. Az állandó térfogatú hőközlés esetében ez szintén elhanyagolható, az állandó térfogat miatt kialakuló mechanikai feszültség azonban óriási lehet.

Az állandó nyomású állapotváltozásnál szilárd testek és folyadékok esetén tehát a tágulási munka elhanyagolható. Így például, ha egy m_1 tömegű, c_1 fajhőjű, t_1 hőmérsékletű folyadékba beledobunk egy m_2 tömegű, c_2 fajhőjű és t_2 hőmérsékletű szilárd testet (vagy folyadékot öntünk), akkor mondhatjuk, hogy a melegebb test által leadott hő a hidegebb testet melegíti, azaz a belső energiáját növeli, és a melegebb test belső energiája ugyanannyival csökken az alábbi egyenlet szerint:

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (t_1 - t_0) = c_2 \cdot m_2 \cdot (t_0 - t_2),$$

ahol t_0 az egyensúly beállta utáni közös hőmérséklet. Így:

$$t_0 = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2}.$$

10. fejezet

Elektromágneses jelenségek

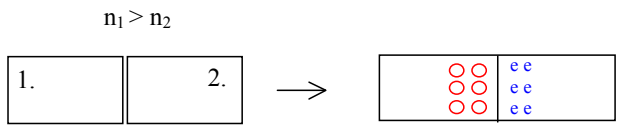
Az elektromágneses jelenségek című fejezet az elektrosztatikával, az egyenáramokkal, a mágnességtannal és a váltakozó áramokkal foglalkozik.

5.1. Elektrosztatika

Már a régi görögök észrevették, hogy ha borostyánt bőrhöz dörgölték, utána a juhok szőrét magához vonzotta, majd elengedte. Nagyon sok jelenséget fedeztek fel, melyek magyarázata az alábbi elemi kísérletre vezethető vissza.

5.1.1. A villamos töltés

Ha két, különböző anyagi minőséggel rendelkező testet összeérintünk, a bennük levő, szabad mozgásra képes elektronok koncentrációja nem egyezik meg, következésképpen a koncentrációkülönbségek kiegyenlítődésre való törekvése miatt a nagyobb koncentrációjú testről elektronok mennek át a kisebb elektronkoncentrációjú testre (5.1.1. ábra). Az egyik anyagon elektron felesleg, a másikon hiány lép fel.



5.1.1. ábra Villamos töltés keletkezése
n_1 az 1. testben szabadon mozgó elektronok száma, n_2 a 2. testben a szabad elektronok száma

Hirtelen szétválasztva a két testet az elektronok visszamennének az eredeti helyzetükbe, de nem mindegyikek sikerül, mert a sebességük nem végtelen, ezért az 1-ben elektronhiány, a 2-ban elektronfelesleg keletkezik (marad). Ez a jelenség könnyen megfigyelhető két különböző fémlap összeérintése és hirtelen szétrántása esetében.
Ha egy testen elektron felesleg, vagy elektron hiány mutatható ki, akkor azt mondjuk, hogy villamos (elektromos) töltése van.
Elektron felesleg: negatív elektromos töltés
Elektron hiány: pozitív elektromos töltés

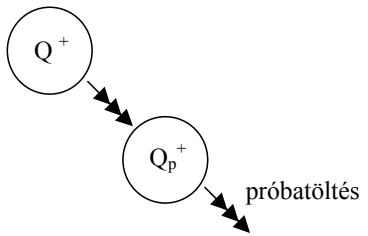
Az elektromos töltés jele: Q
Mértékegysége: C (Coulomb). Másként: 1 C=1 As. Ennek nagyságát mutatja, hogy 1 elektron töltése:

$$e = -1{,}6 * 10^{-19}\ \text{C}.$$

Az elektrosztatika alapvetően olyan jelenségekkel foglalkozik, amelyek esetében a villamos töltés és a belőle származtatott mennyiségek időben nem változnak.

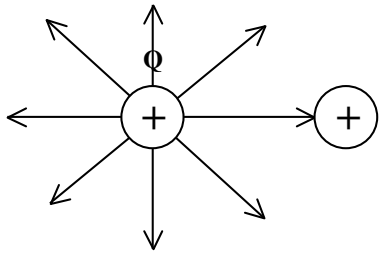
5.1.2. A villamos (elektromos) mező és a térerősség

A tapasztalok szerint, ha van a térben egy Q töltés, és létrehozunk (5.1.2. ábra) egy másikat (Q_p), akkor az előző már a létrehozás pillanatában hat az újra. Ez csak úgy lehetséges, hogy az első töltés hatása valamilyen módon mindenütt jelen van.
Úgy mondjuk: maga körül elektromos teret (mezőt) hoz létre keletkezése pillanatában.



5.1.2. ábra Egy Q töltés azonnal hat egy keletkező Q_p próbatöltésre

A mezőt (teret) az egységnyi pozitív töltésre ható erővel, a mezőerősséggel (térerősséggel) jellemezük. Az 5.1.3. ábrán egy pozitív Q töltés által egy pozitív próbatöltésre ható erőket szemléltettük nyilakkal.



5.1.3. ábra Pozitív töltés (Q) által egy pozitív próbatöltésre ható erő a töltés körül különböző irányokban

A villamos mezőt (teret) az egységnyi pozitív próbatöltésre ható erővel, a **villamos** (elektromos) **térerősség**gel jellemezzük:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}. \qquad (5.1.1)$$

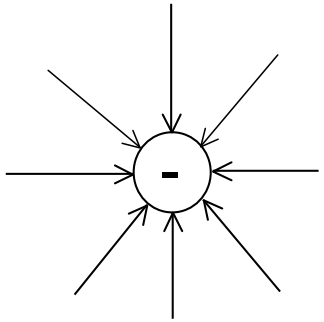
Mértékegysége:

$$[E] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}.$$

A villamos mezőt mezővonalakkal (erővonalakkal) szemléltethetjük. Ennek alapja az, hogy ha egy papírlapra apró, szigetelő porszemcséket (pl.: likopódium port) szórunk, és a lap alá egy villamosan töltött testet helyezünk, akkor a porszemcsék vonalak mentén rendeződnek el. Ezek alapján kézenfekvő a villamos teret vonalakkal, vagy ahogyan ma hívjuk ezeket, erővonalakkal (mezővonalakkal) szemléltetni. Természetesen a villamos mezőt végtelen sok vonallal szemléltethetjük, hiszen a tér mindenütt ott van. A tér erősségével arányosan célszerű felvenni az erővonalak sűrűségét. Legyen tehát az egységnyi felületen merőlegesen „áthaladó" erővonalak (mezővonalak) száma egyenlő a térerősség adott felületen, pontban mérhető értékének abszolút értéke!

Egységnyi mezőerősség: 1 m^2 felületen egy erővonal megy át.
A mezővonalak pozitív töltéseken erednek és negatív töltéseken végződnek. Önmagukban zárt mezővonalak nincsenek.
A villamos mező forrásos (forrás: pozitív, nyelő: negatív töltés) **és örvénymentes vektortér** (örvénymentes: nincsenek önmagukba zárt mezővonalak).

Ezek alapján a mezővonalak pozitív töltések körüli képe hasonló az 5.1.3. ábrán ábrázolt vonalrendszerhez, és a negatív töltések esetében pedig az 5.1.4. ábra adja a megfelelő ábrázolást.

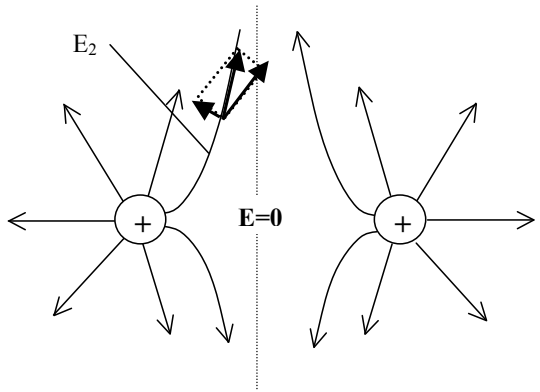


5.1.4. ábra Negatív töltés körüli mező szemléltetése mezővonalakkal

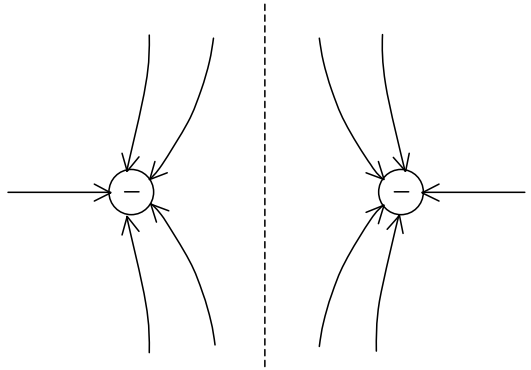
Két külön töltéseloszlás mezőerősségének eredője a vektori eredő képzési szabálya szerint számítható:

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}.$$

Az ennek következtében két pozitív töltés együttes hatására előálló erővonalképet az 5.1.5., a két negatív töltés esetében előálló erővonalképet az 5.1.6. ábrán láthatjuk

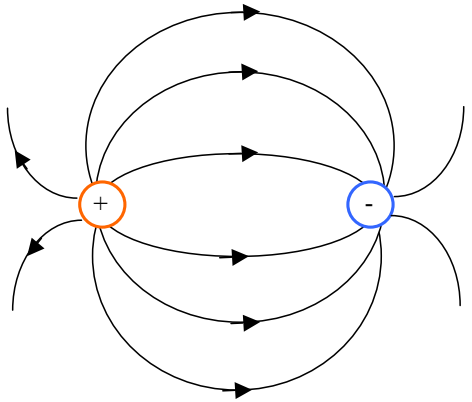


5.1.5. ábra Két pozitív töltés kölcsönhatásaként előálló erővonalkép



5.1.6. ábra Két negatív töltés hatására kialakuló villamos mezővonalkép

Egy pozitív és egy negatív töltés együttesen az 5.1.7. ábrán látható erővonalképet adja.



5.1.7. ábra Egy pozitív és egy negatív töltés által generált villamos mezőt szemléltető mezővonalak

Ha a két, ellenkező előjelű ponttöltés abszolút értéke megegyezik, villamos dipólusról, vagy dipólról beszélünk.
A villamos mező nagyságát jól szemlélteti, hogy levegőben legfeljebb 30kV/cm térerősség alakulhat ki, mert ennél nagyobb mezőerősség esetében a levegő vezetővé válik. Egy másik adat: a Föld felszínén mintegy 130 V/m a villamos mező erőssége úgy, hogy a Föld negatív töltésű.

Pontszerű töltés elektromos mezőerőssége (Csak pontszerűé!):
Egy Q nagyságú pontszerű töltéstől r távolságra a villamos térerősség (vagy mezőerősség):

$$E = k\frac{Q}{r^2}, \qquad (5.1.2)$$

ahol k a mértékegység rendszer által meghatározott állandó, értéke SI rendszer használata esetében:

$$k = 9\cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\left(=\frac{Vm}{As}\right).$$

Az állandót gyakorlati szempontból szokás

$$\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}$$

alakban is írni, ahol

$$\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\frac{As}{Vm}$$

a vákuum dielektromos állandója, vagy abszolút dielektromos állandó, ε_r a pontszerű testet körülvevő közeg relatív dielektromos állandója. Néha permittivitásnak is mondják nem szabványos kifejezéssel. Ezekkel:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}. \qquad (5.1.3)$$

A különböző közegek relatív dielektromos állandója:
-vákuum: $\varepsilon_r = 1$,
- gázok: $\varepsilon_r \approx 1+10^{-4}$,
- szilárd szigetelő anyagok: $1 \le \varepsilon_r \le 10$,
-víz: $\varepsilon_r = 81$,
- bizonyos kerámiák (ún. ferroelektromos anyagok), pl. báriumtitanát: $\varepsilon_r \ge 1000\,(10000)$.

Belátható, hogy elektrosztatikus esetben egy vezető anyag belsejében (vezető anyag az, amelyben a töltéseket hordozó részecskék, az ún. töltéshordozók szabadon, ellenállás nélkül mozoghatnak) a villamos térerősség zérus, s a rávitt töltéshordozók a felületen helyezkednek el (úgy, hogy a felületi töltéssűrűség annál nagyobb, minél kisebb a felület görbületi sugara). Ez nemcsak tömör vezetőre, hanem egy zárt, vezetőanyagból készült, doboz belsejére is igaz, s ezért annak belsejére a villamos mező nem hatol be. Ezért fémburkolattal (villamos árnyékolással) ellátott eszközök érzéketlenek a külső villamos tér változásaira. Bizonyos fokig még a mágneses terekre is.

5.1.3. A villamos fluxus

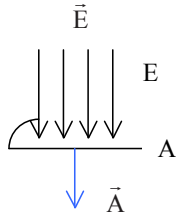
Ha villamos mező erősségének abszolút értéke az egységnyi felületen merőlegesen áthaladó mezővonalak száma, akkor egy adott felületen merőlegesen áthaladó mezővonalak számát (amivel a Ψ villamos fluxust jellemezhetjük) az alábbiakban határozhatjuk meg.
Ha a mezővonalak egy A felületen haladnak keresztül, és a mezővonalak $\perp$-ek a felületre és a mező homogén (a mezővonalak párhuzamosak és mindenütt azonos a sűrűségük) azaz térerősség állandó (5.1.8. ábra) akkor a mezővonalak száma

$$\Psi_E = E\cdot A.$$

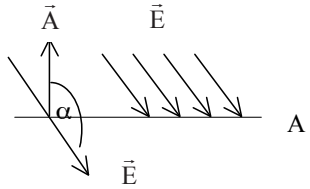
Ha a mező homogén, de az adott felülettel α szöget zár be (5.1.9. ábra), akkor

$$\psi = EA\cos\alpha = \vec{E}\vec{A},$$

ahol $\vec{A}$ a felület normálvektora.



5.1.8. ábra Homogén villamos mező felületre merőleges mezővonalakkal



5.1.9. ábra Homogén villamos mező a felülettel α szöget bezáró mezővonalakkal

Változó $\vec{E}$ esetében: $\Psi = \sum_i \vec{E}_i \Delta\vec{A}$, vagy pontosabban:

$$\Psi = \lim_{\Delta A \to 0} \sum \vec{E} \Delta\vec{A} = \int_A \vec{E} d\vec{A} = \int_A E_n dA, \qquad (5.1.4)$$

ahol E_n a térerősség vektor felületre merőleges komponense.
A fluxus mértékegysége:

$$[\Psi] = [E] \cdot [A] = \frac{V}{m} \cdot m^2 = Vm (= Wb, \text{Weber}).$$

5.1.4. Gauss tétele

A gyakorlatban felmerül a kérdés, hogy mennyi az erővonalak száma egy R sugarú gömbön, ha annak középpontjában van egy pontszerű töltés, vagy más szóval mekkora a fluxusa egy pontszerű töltésnek. Ennek megállapításához vegyünk egy Q töltésű pozitív pontszerű töltést, és vegyük körül egy R sugarú gömbbel (5.1.10. ábra). A gömb felszínén a térerősség:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2},$$

és a mezővonalak, azaz a térerősség vektorok merőlegesek a gömb felszínére, melynek nagysága:

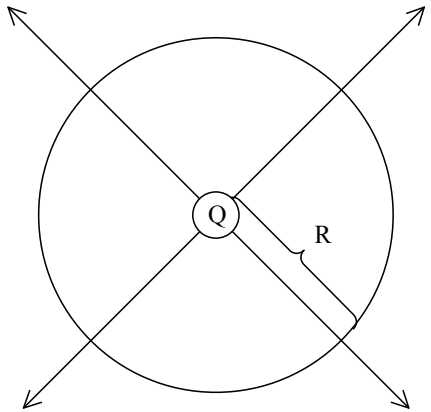
$$A = 4\pi R^2.$$

Így a felszínen a fluxus:

$$\Psi = EA,$$

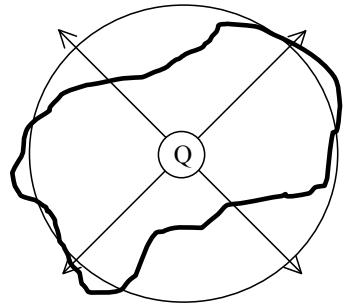
azaz:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}. \qquad (5.1.5)$$



5.1.10. ábra Pontszerű töltés fluxusának meghatározásához szükséges segédábra

Ha a pontszerű töltést nem gömbbel, hanem egy tetszőleges térbeli felülettel vesszük körül (5.1.11. ábra) akkor a mezővonalak száma ugyanaz, mint a gömb esetében, mert a mezővonalak töltéseken erednek és végződnek, töltés pedig csak egy van a gömbben.



5.1.11. ábra A pontszerű töltést körülvevő tetszőleges felület

A fluxus a gömbfelületen:

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r},$$

és a fluxus a tetszőleges felületen:

$$\Psi = \oint_A \vec{E}d\vec{A},$$

így:

$$\oint_A \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}.$$

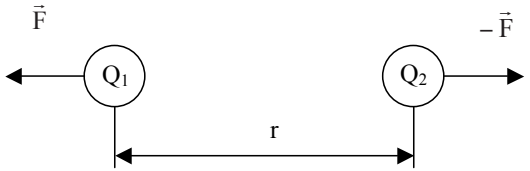
Ha a zárt felületen belül több töltés helyezkedik el:

$$\Psi_{zárt} = \underbrace{\oint_A \vec{E}d\vec{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_V \rho(V)dV}. \qquad (5.1.6)$$

Ez a Gauss tétele.

5.1.5. Coulomb törvénye:

Vegyünk két pontszerű töltést egymástól r távolságra (5.1.12. ábra). Ezek erővel hatnak egymásra.



5.1.12. ábra Két töltött test között ható erő

A két ponttöltés között ható erőt a Coulomb törvény adja meg:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

ahol $k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$. A ponttöltés térerősségénél már bemutatott módon az arányossági tényező egy másik alakját használva kapjuk:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \qquad (5.1.7)$$

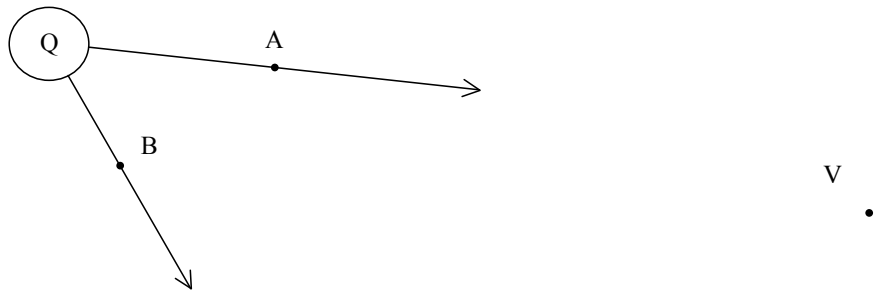
Az erő iránya: két azonos előjelű töltés között taszító, két ellentétes előjelű között pedig vonzó erő lép fel.

5.1.6. Potenciál és feszültség

A villamos mező jellemzésére a térerősség vektor alkalmas, azonban mivel általában háromdimenziós vektorról van szó, ezért minden pontban a mező (tér) jellemzésére három adat szükséges. Egy egyszerűbb alternatívát kínál a potenciál bevezetése az alábbiak szerint.

Potenciál:

Tekintsünk egy pontszerű töltést valahol a térben, majd keressünk egy olyan pontot, vagy felületet, ahol egy próbatöltés egyensúlyban van, azaz a ráható erők eredője zérus. Ezt a pontot, vagy felületet, nevezzük el azt vonatkoztatási pontnak, vagy felületnek. Vigyünk egy pozitív próbatöltést a vonatkoztatási pontból a tér ellenében egy A (5.1.13. ábra) pontba. Ekkor a munkavégzés legyen W_{VA}. Ez a munka jellemző az A pontra, a vonatkoztatási pontra és a próbatöltés nagyságára. Ez természetesen újra három adat, azonban ez a szám csökkenthető az alábbiak szerint.



5.1.13. ábra Ponttöltés és a vonatkoztatási pont

A vonatkoztatási pont többnyire a Föld felszíne, esetleg a végtelen távoli pont. A próbatöltés legyen az egységnyi pozitív töltés, amit ha az előbbi próbatöltést Q'-vel jelöljük, az alábbi eredményt kapjuk:

$$U_A = \frac{W_{VA}}{Q'},$$

ahol U_A az A pont potenciálja.

A potenciál definíciója:

Egy pont potenciálja az a munka, amit akkor végzünk amikor az egységnyi pozitív próbatöltést a tér ellenében a vonatkoztatási pontból az adott pontba visszük.

A definíció akkor is érvényes, ha azt a munkát nézzük, amit a tér végez, miközben az egységnyi pozitív próbatöltést a pontból a vonatkoztatási pontba viszi. Természetesen mindkét esetben állandó sebességű mozgatásról van szó, a gyorsítási munkával nem kell számolnunk.
A potenciál mértékegysége:

$$[U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{J}{C} = V \quad (Volt).$$

A munka értelmezéséből, és az $\vec{F} = \vec{E} \cdot Q$ összefüggésből, és abból, hogy egységnyi pozitív próbatöltéssel dolgozunk, következik, hogy:

$$U_A = -\int_V^A \vec{E} \cdot d\vec{r}. \qquad (5.1.8)$$

Csak ponttöltésre érvényes:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r}. \qquad (5.1.9)$$

Ha az ábrán egy másik, B pontot is tekintünk, akkor annak a potenciálja az előzőhöz hasonlóan

$$U_B = \frac{W_{VB}}{Q'}.$$

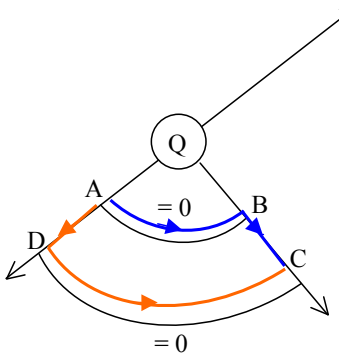
A tér azon pontjait, amelyeke a potenciál állandó ekvipotenciális pontoknak, és a felületeket amit alkotnak ekvipotenciális felületeknek nevezzük

Feszültség:
Két pont potenciáljának különbsége:

$$U_{AB} = U_B - U_A.$$

Mértékegysége a potenciálénak megfelelően V.

Zárt görbén végzett munka:
Vigyünk egy próbatöltést az 5.1.14. ábrán látható A pontból először B-n keresztül C-be. Az A-B mozgás történjen ekvipotenciális görbén (vagy felületen), ami ponttöltés estében egy olyan körív (vagy gömbfelület) amelynek középpontjában helyezkedik el a ponttöltés. Ezen a szakaszon a munkavégzés zérus, mert az erő sugárirányú, az elmozdulás pedig arra merőleges. A B-C elmozdulás a mezővonalak irányában történik, ennek során a tér végez munkát.



5.1.14. ábra Munkavégzés elektrosztatikus térben

Másodszor az út legyen A-D-C. Ebben az esetben a D-C szakasz ismét egy körív (amelyen a munka zérus), vagy gömbfelület, és az A-D szakasz sugárirányú (amelyen atér végez pontosan akkora munkát mint a B-C szakaszon. Ezek alapján:

$$W_{ABC} = W_{ADC}.$$

Ha a testet az A-B-C-D-A úton mozgatjuk az eredő munka zérus lesz, mert:

$$W_{ABCDA} = W_{ABC} + W_{CDA},$$

és mivel

$$W_{CDA} = -W_{ADC},$$

valamint

$$W_{ABC} = W_{ADC},$$

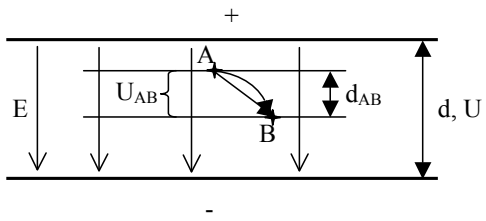
ezért

$$W_{ABCDA} = W_{ADC} + W_{CDA} = 0.$$

Zárt görbén a tér által (v. ellenében) végzett munka zérus.
Az elektromos vektortér konzervatív vektortér.

Homogén villamos mező:

Vegyünk két vezető síklapot és helyezzük el azokat egymással párhuzamosan, majd kapcsoljunk rájuk U feszültséget úgy, hogy a felső legyen pozitív. Ekkor a kialakuló villamos tér párhuzamos vonalakkal jellemezhető (azaz homogén, mivel a térerősség nagysága mindenütt állandó), az 5.1.15. ábra szerint.



5.1.15. ábra Homogén villamos mező

Az 5.1.8 egyenletből következik, hogy

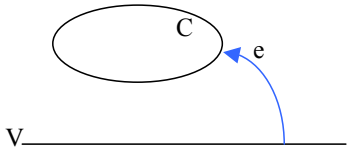
$$E = \frac{U}{d},$$

és az is, ha veszünk két pontot (A és B) az 5.1.15. ábrán, akkor az ott alkalmazott jelölésekkel:

$$U_{AB} = E \cdot d_{AB}.$$

5.1.7. Kapacitás

Vigyünk egy elektront a vonatkoztatási pontból egy töltés nélküli magában álló testre (5.1.16. ábra) a vonatkoztatási pontból, vagy felületből.



5.1.16. ábra A kapacitás fogalmának bevezetéséhez való segédábra

A magában álló testre töltést vinni csak munkával lehet, ezért annak potenciálja van. Ez arányos a töltéssel.

A kísérletek alapján:

$$U = \frac{1}{C} Q, \qquad (5.1.10)$$

ahol C a magában álló test kapacitása vonatkoztatási ponthoz képest. Mértékegysége:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} = F \text{ (Farad)}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy az elszigetelt emberi test kapacitása a földhöz képest 100pF és 200pF között van.

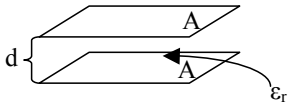
Mivel munkát kell végezni ahhoz, hogy a kapacitáson feszültség legyen, ezért abban energia tárolódik (ami munkát képes végezni). Ennek az energiának az értéke:

$$E = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \qquad (5.1.11)$$

A kapacitás tehát energiát tárol, vagy sűrít, ezért a valóságban energiatárolásra, vagy töltéstárolásra alkalmazott eszközöket kondenzátoroknak nevezzük.

Síkkondenzátor kapacitása

Ha a magában álló testet szeretnénk energia, vagy töltétárolásra felhasználni, akkor azzal találjuk szemben magunkat, hogy egy harmadik test közelítésekor megváltozik a kapacitás, s vele a többi paraméter. Ha a külső hatásoktól gyakorlatilag független eszközt szeretnénk készíteni, akkor két sík lemezt célszerű egymástól kis távolságra elhelyezni, az alábbi (5.1.17.) ábra szerint.

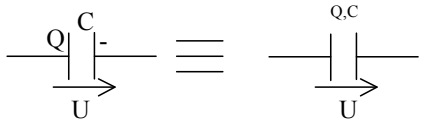


5.1.17. ábra Síkkondenzátor felépítése

Ennek az eszköznek a kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}. \qquad (5.1.12)$$

A síkkondenzátor felépítéséből adódik a kondenzátorok rajzjele az 5.1.18. ábra szerint szerint:



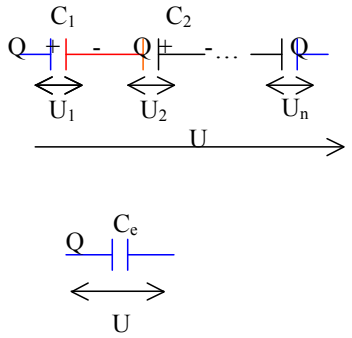
5.1.18. ábra Kondenzátor rajzjele

Az ábrán Q=CU "a kondenzátor töltése"

5.1.8. Kondenzátork kapcsolása

Soros kapcsolás:

Kössünk n darab kondenzátort sorba az 5.1.19. ábra szerint. Ekkor mindegyik kondenzátoron azonos lesz a töltés, mert a sor kezdetére vezetett elektron a kondenzátorok lemezein és hozzávezetésein (amelyek vezetők, tehát bennük a töltéshordozók szabadon mozoghatnak) mozogva az első párhuzamos lemezt elfoglalva a vele párhuzamos lemezről egy lektront eltaszít, tehát azon pozitív töltés alakul ki, s ez a folyamat folytatódik mindegyik kondenzátoron.



5.1.19. ábra Kondenzátorok soros kapcsolása és eredője

Felmerül a kérdés, hogy mekkora kapacitású egyetlen ún. eredő kapacitással helyettesíthető a soros kapcsolás. A választ az alábbi levezetés adja meg. Az erdő jól hlyettesíti a többit, ha a feszültsége

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n,$$

vagy a kapacitással kifejezve

$$U = \frac{Q}{C_e} \quad .$$

A többi kondenzátor feszültségét is kifejezve:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \cdots U_n = \frac{Q}{C_n}.$$

A feszültség egyenletbe behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{Q}{C_e} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n},$$

azaz

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n},$$

és egy nehezebben tanulható, de nehezebben eltéveszthető alakban:

$$C_e = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}. \qquad (5.1.13)$$

Csak két kondenzátorra:

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Kondenzátorok soros kapcsolása esetében az eredő értéke mindig kisebb, mint bármelyik kondenzátor kapacitása. Ha n darab azonos kapacitású kondenzátort kötünk sorba, azerdő kapacitás:

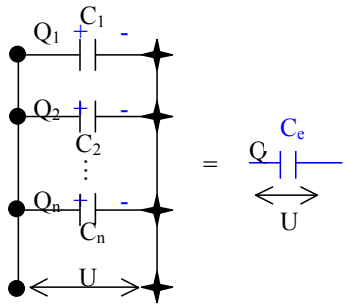
$$C_e = \frac{C}{n}.$$

Párhuzamos kapcsolás:

Kössünk párhuzamosan n darab kondenzátort az 5.1.20. ábra szerint. Ekkor mindegyik kondenzátoron azonos lesz a feszültség. Egy kondenzátor, amelynek kapacitása az eredő kapacitás akkor helyettesíti a többit, ha azokkal azonos feszültségre kapcsolva ugyanakkora töltés alakul ki rajta, mint a részkondenzárok töltésének az összege.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n.$$

Az eredőn kialakuló töltés:



5.1.20. ábra kondenzátorok párhuzamos kapcsolása és a párhuzamos eredő

$$Q = UC_e,$$

a többin pedig:

$$Q_1 = UC_1$$
$$Q_2 = UC_2$$
$$\vdots$$
$$Q_n = UC_n$$

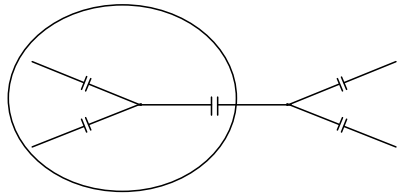
Innen:

$$\text{Ø}C_e = \text{Ø}C_1 + \text{Ø}C_2 + \cdots + \text{Ø}C_n,$$

és az eredő:

$$C_e = C_1 + C_2 + \cdots + C_4. \qquad (5.1.14)$$

Két kondenzátor akkor és csak akkor van sorbakötve, ha egyik kivezetésük közös pontra csatlakozik, és arra a pontra más nem csatlakozik.
Két kondenzátor akkor van párhuzamosan kötve, ha mindkét lábuk (páronként) közös pontra csatlakozik. Arra a két pontra más alkatrész is csatlakozhat.
Az alábbi (5.1.21 ábrán bekeretezett három kondenzátor se nem soros, se nem párhuzamos kapcsolában nincsen, ún. csillag kapcsolásba van kötve, melyet itt nem tárgyalunk.



5.1.21. ábra Se nem soros, se nem párhuzamosan, hanem csillag kapcsolásban kötött kondenzátorok

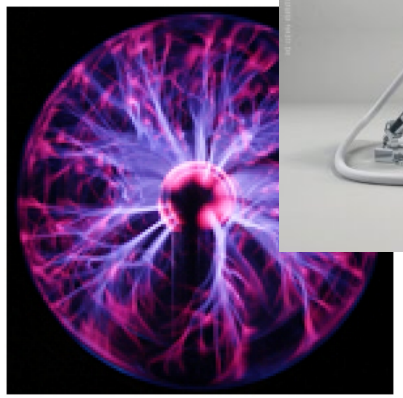
Elektromosságtan

Bevezetés











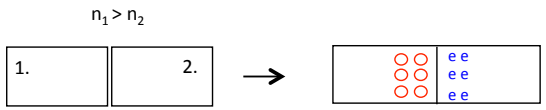
Elektrosztatika

Az elektrosztatikus mező alaptulajdonságai

Már a régi görögök észrevették, hogy ha borostyánt bőrhöz dörgölték, utána a juhok szőrét magához vonzotta, majd elengedte. Nagyon sok jelenséget fedeztek fel, melyek magyarázata az alábbi elemi kísérletre vezethető vissza.

A villamos töltés

Ha két, különböző anyagi minőséggel rendelkező testet összeérintünk, a bennük levő, szabad mozgásra képes elektronok koncentrációja nem egyezik meg, következésképpen a koncentrációkülönbségek kiegyenlítődésre való törekvése miatt a nagyobb koncentrációjú testről elektronok mennek át a kisebb elektronkoncentrációjú testre. Az egyik anyagon elektron felesleg, a másikon hiány lép fel.



Hirtelen szétválasztva a két testet az elektronok visszamennének az eredeti helyzetükbe, de nem mindegyiknek sikerül, mert a sebességük nem végtelen, ezért az 1-ben elektronhiány, a 2-ban elektronfelesleg keletkezik (marad). Ez a jelenség könnyen megfigyelhető két különböző fémlap összeérintése és hirtelen szétrántása esetében.

Ha egy testen elektron felesleg, vagy elektron hiány mutatható ki, akkor azt mondjuk, hogy villamos (elektromos) töltése van.

Elektron felesleg: negatív elektromos töltés

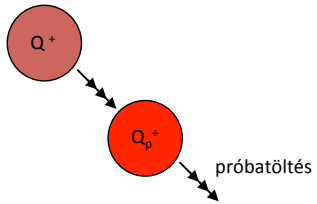
Elektron hiány: pozitív elektromos töltés

Az elektromos töltés jele: Q

Mértékegysége: C (Coulomb). Másként: 1 C=1 As. Ennek nagyságát mutatja, hogy 1 elektron töltése: $e = -1{,}6 * 10^{-19}$ C.

Az elektrosztatika alapvetően olyan jelenségekkel foglalkozik, amelyek esetében a villamos töltés és a belőle származtatott mennyiségek időben nem változnak.

. A villamos (elektromos) mező és a térerősség



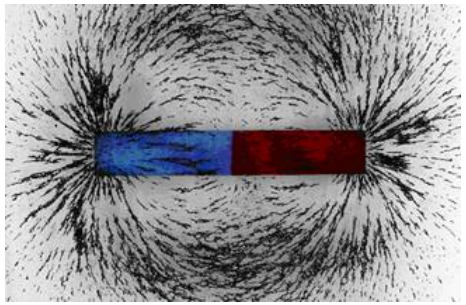
A tapasztalok szerint, ha van a térben egy Q töltés, és létrehozunk egy másikat (Q_p), akkor az előző már a létrehozás pillanatában hat az újra. Ez csak úgy lehetséges, hogy az első töltés hatása valamilyen módon mindenütt jelen van.

Úgy mondjuk: maga körül elektromos teret (mezőt) hoz létre keletkezése pillanatában.

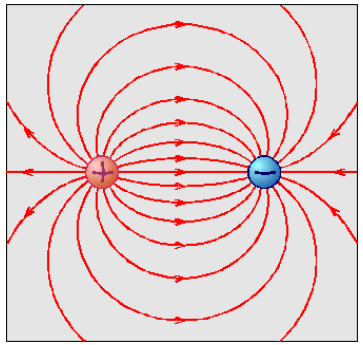
A mezőt (teret) az egységnyi pozitív töltésre ható erővel, a mezőerősséggel (térerősséggel) jellemezük. Az ábra egy pozitív Q töltés által egy pozitív próbatöltésre ható erőket szemléltettük nyilakkal.

A villamos mezőt (teret) az egységnyi pozitív próbatöltésre ható erővel, a **villamos** (elektromos) **térerősség**gel jellemezzük:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \qquad [E] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$



A villamos mezőt mezővonalakkal (erővonalakkal) szemléltethetjük. Ennek alapja az, hogy ha egy papírlapra apró, szigetelő porszemcséket (pl.: likopódium port) szórunk, és a lap alá egy villamosan töltött testet helyezünk, akkor a porszemcsék vonalak mentén rendeződnek el. Ezek alapján kézenfekvő a villamos teret vonalakkal, vagy ahogyan ma hívjuk ezeket, erővonalakkal (mezővonalakkal) szemléltetni. Természetesen a villamos mezőt végtelen sok vonallal szemléltethetjük, hiszen a tér mindenütt ott van. A tér erősségével arányosan célszerű felvenni az erővonalak sűrűségét. Legyen tehát az egységnyi felületen merőlegesen „áthaladó” erővonalak (mezővonalak) száma egyenlő a térerősség adott felületen, pontban mérhető értékének abszolút értéke!



A mezővonalak pozitív töltéseken erednek és negatív töltéseken végződnek. Önmagukban zárt mezővonalak nincsenek.

A villamos mező forrásos (forrás: pozitív, nyelő: negatív töltés) **és örvénymentes vektortér** (örvénymentes: nincsenek önmagukba zárt mezővonalak).

Ha a két, ellenkező előjelű ponttöltés abszolút értéke megegyezik, villamos dipólusról, vagy dipólról beszélünk

Pontszerű töltés elektromos mezőerőssége (Csak pontszerűé!):

Egy Q nagyságú pontszerű töltéstől r távolságra a villamos térerősség (vagy mezőerősség):

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

ahol k a mértékegység rendszer által meghatározott állandó, értéke SI rendszer használata esetében:

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\left(=\frac{Vm}{As}\right)$$

Az állandót gyakorlati szempontból szokás

$$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

alakban is írni, ahol

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\frac{As}{Vm}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

a vákuum dielektromos állandója, vagy abszolút dielektromos állandó, ε_r a pontszerű testet körülvevő közeg relatív dielektromos állandója. Néha permittivitásnak is mondják nem szabványos kifejezéssel. Ezekkel:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}$$

A különböző közegek relatív dielektromos állandója:

-vákuum: $\varepsilon_r = 1$

- gázok: $\varepsilon_r \approx 1 + 10^{-4}$

- szilárd szigetelő anyagok: $1 \le \varepsilon_r \le 10$

-víz: $\varepsilon_r = 81$

- bizonyos kerámiák (ún. ferroelektromos anyagok), pl. báriumtitanát: $\varepsilon_r \ge 1000\,(10\,000)$

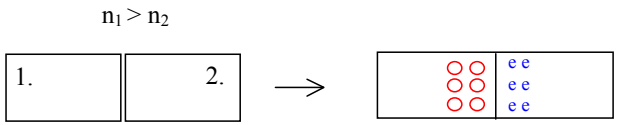
Belátható, hogy elektrosztatikus esetben egy vezető anyag belsejében (vezető anyag az, amelyben a töltéseket hordozó részecskék, az ún. töltéshordozók szabadon, ellenállás nélkül mozoghatnak) a villamos térerősség zérus, s a rávitt töltéshordozók a felületen helyezkednek el (úgy, hogy a felületi töltéssűrűség annál nagyobb, minél kisebb a felület görbületi sugara). Ez nemcsak tömör vezetőre, hanem egy zárt, vezetőanyagból készült, doboz belsejére is igaz, s ezért annak belsejére a villamos mező nem hatol be. Ezért fémburkolattal (villamos árnyékolással) ellátott eszközök érzéketlenek a külső villamos tér változásaira. Bizonyos fokig még a mágneses terekre is.

10.1. Elektrosztatika

Már a régi görögök észrevették, hogy ha borostyánt bőrhöz dörgölték, utána a juhok szőrét magához vonzotta, majd elengedte. Nagyon sok jelenséget fedeztek fel, melyek magyarázata az alábbi elemi kísérletre vezethető vissza.

A villamos töltés

Ha két, különböző anyagi minőséggel rendelkező testet összeérintünk, a bennük levő, szabad mozgásra képes elektronok koncentrációja nem egyezik meg, következésképpen a koncentrációkülönbségek kiegyenlítődésre való törekvése miatt a nagyobb koncentrációjú testről elektronok mennek át a kisebb elektronkoncentrációjú testre (10.1.1. ábra). Az egyik anyagon elektron felesleg, a másikon hiány lép fel.



10.1.1. ábra Villamos töltés keletkezése
n_1 az 1. testben szabadon mozgó elektronok száma, n_2 a 2. testben a szabad elektronok száma

Hirtelen szétválasztva a két testet az elektronok visszamennének az eredeti helyzetükbe, de nem mindegyikek sikerül, mert a sebességük nem végtelen, ezért az 1-ben elektronhiány, a 2-ban elektronfelesleg keletkezik (marad). Ez a jelenség könnyen megfigyelhető két különböző fémlap összeérintése és hirtelen szétrántása esetében.
Ha egy testen elektron felesleg, vagy elektron hiány mutatható ki, akkor azt mondjuk, hogy villamos (elektromos) töltése van.
Elektron felesleg: negatív elektromos töltés
Elektron hiány: pozitív elektromos töltés

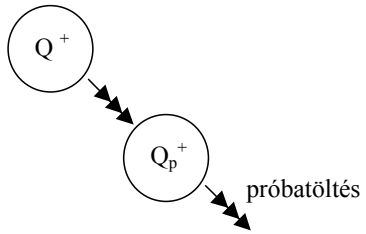
Az elektromos töltés jele: Q
Mértékegysége: C (Coulomb). Másként: 1 C=1 As. Ennek nagyságát mutatja, hogy 1 elektron töltése:

$$e = -1{,}6*10^{-19}\ \text{C}.$$

Az elektrosztatika alapvetően olyan jelenségekkel foglalkozik, amelyek esetében a villamos töltés és a belőle származtatott mennyiségek időben nem változnak.

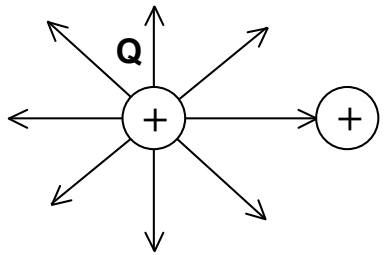
A villamos (elektromos) mező és a térerősség

A tapasztalok szerint, ha van a térben egy Q töltés, és létrehozunk (10.1.2. ábra) egy másikat (Q_p), akkor az előző már a létrehozás pillanatában hat az újra. Ez csak úgy lehetséges, hogy az első töltés hatása valamilyen módon mindenütt jelen van.
Úgy mondjuk: maga körül elektromos teret (mezőt) hoz létre keletkezése pillanatában.



10.1.2. ábra Egy Q töltés azonnal hat egy keletkező Q_p próbatöltésre

A mezőt (teret) az egységnyi pozitív töltésre ható erővel, a mezőerősséggel (térerősséggel) jellemezük. Az 10.1.3. ábrán egy pozitív Q töltés által egy pozitív próbatöltésre ható erőket szemléltettük nyilakkal.



10.1.3. ábra Pozitív töltés (Q) által egy pozitív próbatöltésre ható erő a töltés körül különböző irányokban

A villamos mezőt (teret) az egységnyi pozitív próbatöltésre ható erővel, a **villamos** (elektromos) **térerősség**gel jellemezzük:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}. \qquad (10.1.1)$$

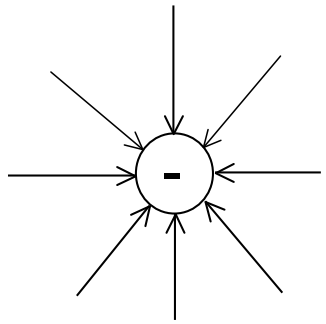
Mértékegysége:

$$[E] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}.$$

A villamos mezőt mezővonalakkal (erővonalakkal) szemléltethetjük. Ennek alapja az, hogy ha egy papírlapra apró, szigetelő porszemcséket (pl.: likopódium port) szórunk, és a lap alá egy villamosan töltött testet helyezünk, akkor a porszemcsék vonalak mentén rendeződnek el. Ezek alapján kézenfekvő a villamos teret vonalakkal, vagy ahogyan ma hívjuk ezeket, erővonalakkal (mezővonalakkal) szemléltetni. Természetesen a villamos mezőt végtelen sok vonallal szemléltethetjük, hiszen a tér mindenütt ott van. A tér erősségével arányosan célszerű felvenni az erővonalak sűrűségét. Legyen tehát az egységnyi felületen merőlegesen „áthaladó" erővonalak (mezővonalak) száma egyenlő a térerősség adott felületen, pontban mérhető értékének abszolút értéke!

Egységnyi mezőerősség: 1 m^2 felületen egy erővonal megy át.
A mezővonalak pozitív töltéseken erednek és negatív töltéseken végződnek. Önmagukban zárt mezővonalak nincsenek.
Nyugvó töltés villamos mezeje forrásos (forrás: pozitív, nyelő: negatív töltés) **és örvénymentes vektortér** (örvénymentes: nincsenek önmagukba zárt mezővonalak).

Ezek alapján a mezővonalak pozitív töltések körüli képe hasonló az 10.1.3. ábrán ábrázolt vonalrendszerhez, és a negatív töltések esetében pedig az 10.1.4. ábra adja a megfelelő ábrázolást.

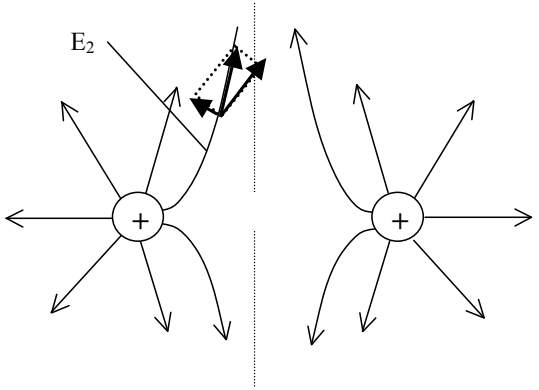


10.1.4. ábra Negatív töltés körüli mező szemléltetése mezővonalakkal

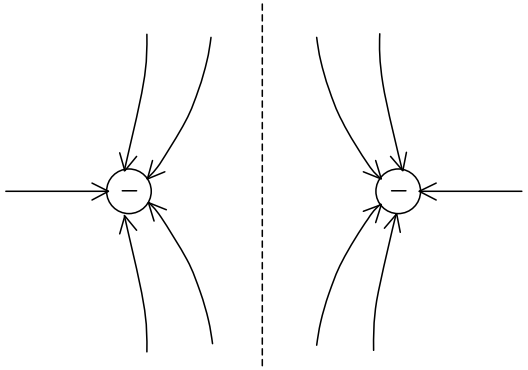
Két külön töltéseloszlás mezőerősségének eredője a vektori eredő képzési szabálya szerint számítható:

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}.$$

Az ennek következtében két pozitív töltés együttes hatására előálló erővonalképet az 10.1.5., a két negatív töltés esetében előálló erővonalképet az 10.1.6. ábrán láthatjuk

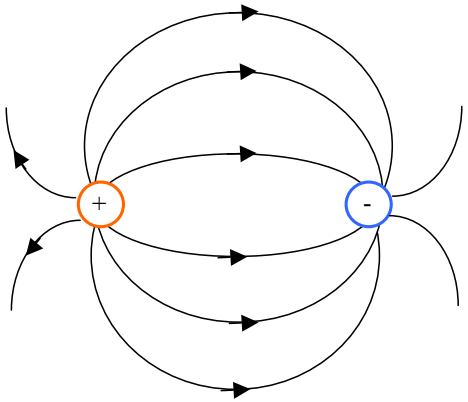


10.1.5. ábra Két pozitív töltés kölcsönhatásaként előálló erővonalkép



10.1.6. ábra Két negatív töltés hatására kialakuló villamos mezővonalkép

Egy pozitív és egy negatív töltés együttesen az 10.1.7. ábrán látható erővonalképet adja.



10.1.7. ábra Egy pozitív és egy negatív töltés által generált villamos mezőt szemléltető mezővonalak

Ha a két, ellenkező előjelű ponttöltés abszolút értéke megegyezik, villamos dipólusról, vagy dipólról beszélünk.
A villamos mező nagyságát jól szemlélteti, hogy levegőben legfeljebb 30kV/cm térerősség alakulhat ki, mert ennél nagyobb mezőerősség esetében a levegő vezetővé válik. Egy másik adat: a Föld felszínén mintegy 130 V/m a villamos mező erőssége úgy, hogy a Föld negatív töltésű.

Pontszerű töltés elektromos mezőerőssége (Csak pontszerűé!):

Egy Q nagyságú pontszerű töltéstől r távolságra a villamos térerősség (vagy mezőerősség):

$$E = k\frac{Q}{r^2}, \qquad (10.1.2)$$

ahol k a mértékegység rendszer által meghatározott állandó, értéke SI rendszer használata esetében:

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \left(= \frac{Vm}{As} \right).$$

Az állandót gyakorlati szempontból szokás

$$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

alakban is írni, ahol

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

a vákuum dielektromos állandója, vagy abszolút dielektromos állandó, ε_r a pontszerű testet körülvevő közeg relatív dielektromos állandója. Néha permittivitásnak is mondják nem szabványos kifejezéssel. Ezekkel:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^2}. \qquad (10.1.3)$$

A különböző közegek relatív dielektromos állandója:
-vákuum: $\varepsilon_r = 1$,
- gázok: $\varepsilon_r \approx 1 + 10^{-4}$,
- szilárd szigetelő anyagok: $1 \le \varepsilon_r \le 10$,
-víz: $\varepsilon_r = 81$,
- bizonyos kerámiák (ún. ferroelektromos anyagok), pl. báriumtitanát: $\varepsilon_r \ge 1000\,(10000)$.

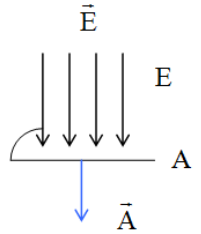
Belátható, hogy elektrosztatikus esetben egy vezető anyag belsejében (vezető anyag az, amelyben a töltéseket hordozó részecskék, az ún. töltéshordozók szabadon, ellenállás nélkül mozoghatnak) a villamos térerősség zérus, s a rávitt töltéshordozók a felületen helyezkednek el (úgy, hogy a felületi töltéssűrűség annál nagyobb, minél kisebb a felület görbületi sugara). Ez nemcsak tömör vezetőre, hanem egy zárt, vezetőanyagból készült, doboz belsejére is igaz, s ezért annak belsejére a villamos mező nem hatol be. Ezért fémburkolattal (villamos árnyékolással) ellátott eszközök érzéketlenek a külső villamos tér változásaira. Bizonyos fokig még a mágneses terekre is.

A villamos fluxus

Ha villamos mező erősségének abszolút értéke az egységnyi felületen merőlegesen áthaladó mezővonalak száma, akkor egy adott felületen merőlegesen áthaladó mezővonalak számát (amivel a ψ villamos fluxust jellemezhetjük) az alábbiakban határozhatjuk meg.

Ha a mezővonalak egy A felületen haladnak keresztül, és a mezővonalak ⊥-ek a felületre és a mező homogén (a mezővonalak párhuzamosak és mindenütt azonos a sűrűségük) azaz térerősség állandó, akkor a mezővonalak száma

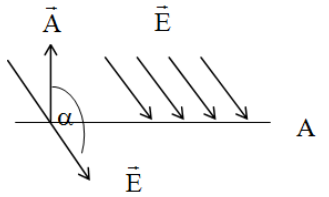
$$\Psi_E = E \cdot A$$



Ha a mező homogén, de az adott felülettel α szöget zár be, akkor

$$\psi = EA\cos\alpha = \vec{E}\vec{A}$$

$$[\Psi]=[E]\cdot[A]=\frac{V}{m}\cdot m^2 = Vm(= Wb, \text{Weber})$$



Ahol $\vec{A}$ a felület normálvektora.

Változó $\vec{E}$ esetében: $\Psi = \sum_i \vec{E}_i \Delta\vec{A}$, vagy pontosabban:

$$\Psi = \lim_{\Delta A \to 0} \sum \vec{E}\Delta\vec{A} = \int_A \vec{E}d\vec{A} = \int_A E_n dA$$

ahol E_n a térerősség vektor felületre merőleges komponense.

Gauss tétele

A gyakorlatban felmerül a kérdés, hogy mennyi az erővonalak száma egy R sugarú gömbön, ha annak középpontjában van egy pontszerű töltés, vagy más szóval mekkora a fluxusa egy pontszerű töltésnek. Ennek megállapításához vegyünk egy Q töltésű pozitív pontszerű töltést, és vegyük körül egy R sugarú gömbbel. A gömb felszínén a térerősség: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2}$

és a mezővonalak, azaz a térerősség vektorok merőlegesek a gömb felszínére, melynek nagysága:

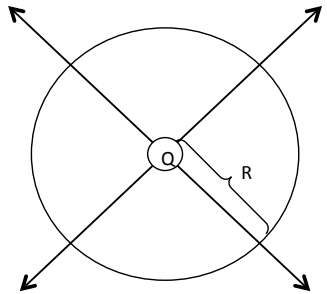
$$A = 4\pi R^2$$

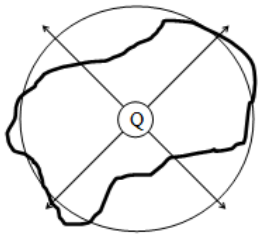
Így a felszínen a fluxus:

$$\Psi = EA$$

azaz:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$





Ha a pontszerű töltést nem gömbbel, hanem egy tetszőleges térbeli felülettel vesszük körül, akkor a mezővonalak száma ugyanaz, mint a gömb esetében, mert a mezővonalak töltéseken erednek és végződnek, töltés pedig csak egy van a gömbben.

A fluxus a gömbfelületen:

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

és a fluxus a tetszőleges felületen:

$$\Psi = \oint_A \vec{E} d\vec{A}$$

így:

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

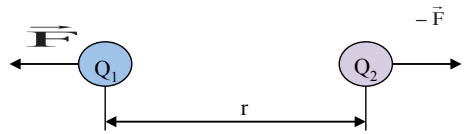
Ha a zárt felületen belül több töltés helyezkedik el:

$$\Psi_{zárt} = \underbrace{\int_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_V \rho(V) dV}$$

Ez a Gauss tétele.

Coulomb törvénye

Vegyünk két pontszerű töltést egymástól r távolságra. Ezek erővel hatnak egymásra.



A két ponttöltés között ható erőt a Coulomb törvény adja meg:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Ahol $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$. A ponttöltés térerősségénél már bemutatott módon az arányossági tényező egy másik alakját használva kapjuk:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

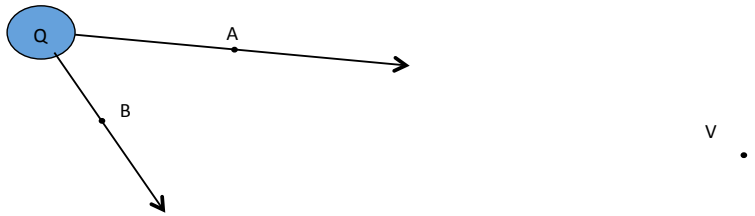
Az erő iránya: két azonos előjelű töltés között taszító, két ellentétes előjelű között pedig vonzó erő lép fel.

Potenciál és feszültség

A villamos mező jellemzésére a térerősség vektor alkalmas, azonban mivel általában háromdimenziós vektorról van szó, ezért minden pontban a mező (tér) jellemzésére három adat szükséges. Egy egyszerűbb alternatívát kínál a potenciál bevezetése.

Potenciál

Tekintsünk egy pontszerű töltést valahol a térben, majd keressünk egy olyan pontot, vagy felületet, ahol egy próbatöltés egyensúlyban van, azaz a ráható erők eredője zérus. Ezt a pontot, vagy felületet, nevezzük el vonatkoztatási pontnak (V), vagy felületnek. Vigyünk egy pozitív próbatöltést a vonatkoztatási pontból a tér ellenében egy A pontba. Ekkor a munkavégzés legyen W_{VA}. Ez a munka jellemző az A pontra, a vonatkoztatási pontra és a próbatöltés nagyságára. Ez természetesen újra három adat, azonban ez a szám csökkenthető.



A vonatkoztatási pont többnyire a Föld felszíne, esetleg a végtelen távoli pont. A próbatöltés legyen az egységnyi pozitív töltés, amit ha az előbbi próbatöltést Q'-vel jelöljük, az alábbi eredményt kapjuk:

$$U_A = \frac{W_{VA}}{Q'}$$

ahol U_A az A pont potenciálja.

A potenciál definíciója:

Egy pont potenciálja az a munka, amit akkor végzünk amikor az egységnyi pozitív próbatöltést a tér ellenében a vonatkoztatási pontból az adott pontba visszük.

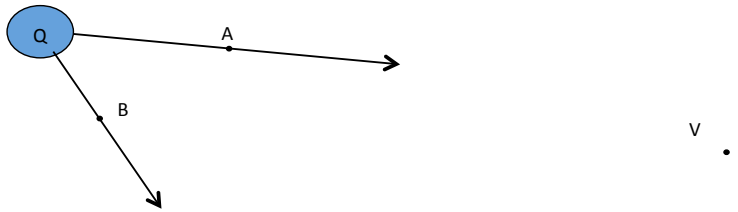
A definíció akkor is érvényes, ha azt a munkát nézzük, amit a tér végez, miközben az egységnyi pozitív próbatöltést a pontból a vonatkoztatási pontba viszi. Természetesen mindkét esetben állandó sebességű mozgatásról van szó, a gyorsítási munkával nem kell számolnunk.

A potenciál mértékegysége: $[U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{J}{C} = V \quad (Volt)$

A munka értelmezéséből, és az $\vec{F} = \vec{E} \cdot Q$ összefüggésből, és abból, hogy egységnyi pozitív próbatöltéssel dolgozunk, következik, hogy:

$$U_A = -\int_V^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Csak ponttöltésre érvényes: $$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r}$$



Ha az ábrán egy másik, B pontot is tekintünk, akkor annak a potenciálja az előzőhöz hasonlóan

$$U_B = \frac{W_{VB}}{Q'}$$

A tér azon pontjait, amelyeke a potenciál állandó ekvipotenciális pontoknak, és a felületeket amit alkotnak ekvipotenciális felületeknek nevezzük.

Feszültség:

Két pont potenciáljának különbsége: $U_{AB} = U_B - U_A$

Mértékegysége a potenciálének megfelelően V.

10.2. A villamos fluxus

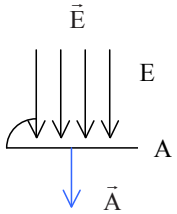
Ha villamos mező erősségének abszolút értéke az egységnyi felületen merőlegesen áthaladó mezővonalak száma, akkor egy adott felületen merőlegesen áthaladó mezővonalak számát (amivel a ψ villamos fluxust jellemezhetjük) az alábbiakban határozhatjuk meg.
Ha a mezővonalak egy A felületen haladnak keresztül, és a mezővonalak $\perp$-ek a felületre és a mező homogén (a mezővonalak párhuzamosak és mindenütt azonos a sűrűségük) azaz térerősség állandó (10.2.1. ábra) akkor a mezővonalak száma

$$\Psi_E = E \cdot A.$$

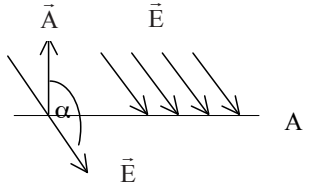
Ha a mező homogén, de az adott felülettel α szöget zár be (10.2.2. ábra), akkor

$$\psi = EA\cos\alpha = \vec{E}\vec{A},$$

ahol $\vec{A}$ a felület normálvektora.



10.2.1. ábra Homogén villamos mező felületre merőleges mezővonalakkal



10.2.2. ábra Homogén villamos mező a felülettel α szöget bezáró mezővonalakkal

Változó $\vec{E}$ esetében: $\Psi = \sum_i \vec{E}_i \Delta\vec{A}$, vagy pontosabban:

$$\Psi = \lim_{\Delta A \to 0} \sum \vec{E}\Delta\vec{A} = \int_A \vec{E}d\vec{A} = \int_A E_n dA, \qquad (10.2.1)$$

ahol E_n a térerősség vektor felületre merőleges komponense.
A fluxus mértékegysége:

$$[\Psi] = [E]\cdot[A] = \frac{V}{m}\cdot m^2 = Vm (= Wb, \text{Weber}).$$

Gauss tétele

A gyakorlatban felmerül a kérdés, hogy mennyi az erővonalak száma egy R sugarú gömbön, ha annak középpontjában van egy pontszerű töltés, vagy más szóval mekkora a fluxusa egy pontszerű töltésnek. Ennek megállapításához vegyünk egy Q töltésű pozitív pontszerű töltést, és vegyük körül egy R sugarú gömbbel (10.2.3. ábra). A gömb felszínén a térerősség:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2},$$

és a mezővonalak, azaz a térerősség vektorok merőlegesek a gömb felszínére, melynek nagysága:

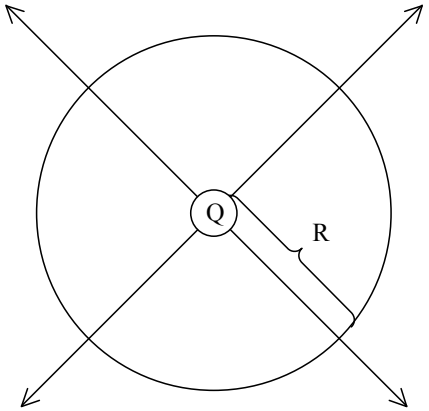
$$A = 4\pi R^2.$$

Így a felszínen a fluxus:

$$\Psi = EA,$$

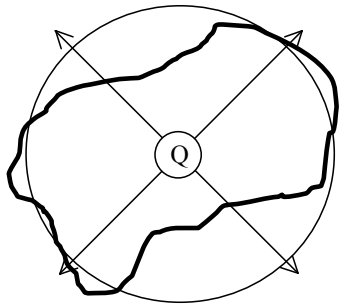
azaz:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}. \qquad (10.2.2)$$



10.2.3. ábra Pontszerű töltés fluxusának meghatározásához szükséges segédábra

Ha a pontszerű töltést nem gömbbel, hanem egy tetszőleges térbeli felülettel vesszük körül (10.2.4. ábra) akkor a mezővonalak száma ugyanaz, mint a gömb esetében, mert a mezővonalak töltéseken erednek és végződnek, töltés pedig csak egy van a gömbben.



10.2.4.. ábra A pontszerű töltést körülvevő tetszőleges felület

A fluxus a gömbfelületen:

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r},$$

és a fluxus a tetszőleges felületen:

$$\Psi = \oint_A \vec{E} d\vec{A},$$

így:

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

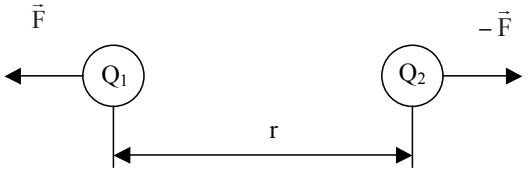
Ha a zárt felületen belül több töltés helyezkedik el:

$$\Psi_{zárt} = \underbrace{\int_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_V \rho(V) dV}. \qquad (10.2.3)$$

Ez a Gauss tétele.

5.1.5. Coulomb törvénye:

Vegyünk két pontszerű töltést egymástól r távolságra (10.2.5. ábra). Ezek erővel hatnak egymásra.



10.2.5. ábra Két töltött test között ható erő

A két ponttöltés között ható erőt a Coulomb törvény adja meg:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

ahol $k = 9\cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$. A ponttöltés térerősségénél már bemutatott módon az arányossági tényező egy másik alakját használva kapjuk:

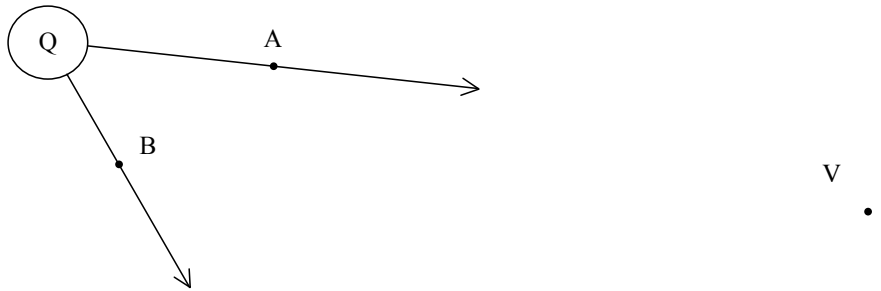
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \qquad (10.2.4)$$

Az erő iránya: két azonos előjelű töltés között taszító, két ellentétes előjelű között pedig vonzó erő lép fel.

Potenciál és feszültség

A villamos mező jellemzésére a térerősség vektor alkalmas, azonban mivel általában háromdimenziós vektorról van szó, ezért minden pontban a mező (tér) jellemzésére három adat szükséges. Egy egyszerűbb alternatívát kínál a potenciál bevezetése az alábbiak szerint.

Potenciál:
Tekintsünk egy pontszerű töltést valahol a térben, majd keressünk egy olyan pontot, vagy felületet, ahol egy próbatöltés egyensúlyban van, azaz a ráható erők eredője zérus. Ezt a pontot, vagy felületet, nevezzük el azt vonatkoztatási pontnak, vagy felületnek. Vigyünk egy pozitív próbatöltést a vonatkoztatási pontból a tér ellenében egy A (10.2.6. ábra) pontba. Ekkor a munkavégzés legyen W_{VA}. Ez a munka jellemző az A pontra, a vonatkoztatási pontra és a próbatöltés nagyságára. Ez természetesen újra három adat, azonban ez a szám csökkenthető az alábbiak szerint.



10.2.6. ábra Ponttöltés és a vonatkoztatási pont

A vonatkoztatási pont többnyire a Föld felszíne, esetleg a végtelen távoli pont. A próbatöltés legyen az egységnyi pozitív töltés, amit ha az előbbi próbatöltést Q'-vel jelöljük, az alábbi eredményt kapjuk:

$$U_A = \frac{W_{VA}}{Q'},$$

ahol U_A az A pont potenciálja.

A potenciál definíciója:

Egy pont potenciálja az a munka, amit akkor végzünk amikor az egységnyi pozitív próbatöltést a tér ellenében a vonatkoztatási pontból az adott pontba visszük.

A definíció akkor is érvényes, ha azt a munkát nézzük, amit a tér végez, miközben az egységnyi pozitív próbatöltést a pontból a vonatkoztatási pontba viszi. Természetesen mindkét esetben állandó sebességű mozgatásról van szó, a gyorsítási munkával nem kell számolnunk.

A potenciál mértékegysége:

$$[U]=\frac{[W]}{[Q]}=\frac{J}{C}=V \quad (Volt).$$

A munka értelmezéséből, és az $\vec{F}=\vec{E}\cdot Q$ összefüggésből, és abból, hogy egységnyi pozitív próbatöltéssel dolgozunk, következik, hogy:

$$U_A=-\int_V^A \vec{E}\cdot d\vec{r}. \qquad (10.2.5)$$

Csak ponttöltésre érvényes:

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r}. \qquad (10.2.6)$$

Ha az ábrán egy másik, B pontot is tekintünk, akkor annak a potenciálja az előzőhöz hasonlóan

$$U_B=\frac{W_{VB}}{Q'}.$$

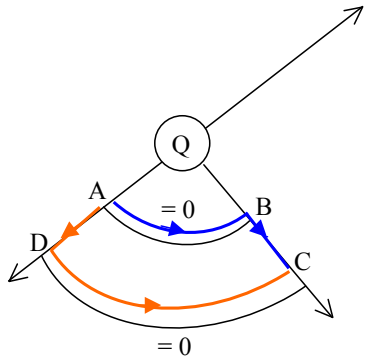
A tér azon pontjait, amelyeke a potenciál állandó ekvipotenciális pontoknak, és a felületeket amit alkotnak ekvipotenciális felületeknek nevezzük

Feszültség:
Két pont potenciáljának különbsége:

$$U_{AB}=U_B-U_A.$$

Mértékegysége a potenciálénak megfelelően V.

Zárt görbén végzett munka:
Vigyünk egy próbatöltést az 10.2.7. ábrán látható A pontból először B-n keresztül C-be. Az A-B mozgás történjen ekvipotenciális görbén (vagy felületen), ami ponttöltés estében egy olyan körív (vagy gömbfelület) amelynek középpontjában helyezkedik el a ponttöltés. Ezen a szakaszon a munkavégzés zérus, mert az erő sugárirányú, az elmozdulás pedig arra merőleges. A B-C elmozdulás a mezővonalak irányában történik, ennek során a tér végez munkát.



10.2.7. ábra Munkavégzés elektrosztatikus térben

Másodszor az út legyen A-D-C. Ebben az esetben a D-C szakasz ismét egy körív (amelyen a munka zérus), vagy gömbfelület, és az A-D szakasz sugárirányú (amelyen atér végez pontosan akkora munkát mint a B-C szakaszon. Ezek alapján:

$$W_{ABC}=W_{ADC}.$$

Ha a testet az A-B-C-D-A úton mozgatjuk az eredő munka zérus lesz, mert:

$$W_{ABCDA}=W_{ABC}+W_{CDA},$$

és mivel

$$W_{CDA}=-W_{ADC},$$

valamint

$$W_{ABC}=W_{ADC},$$

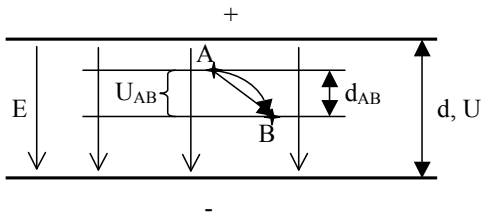
ezért

$$W_{ABCDA}=W_{ADC}+W_{CDA}=0.$$

Zárt görbén a tér által (v. ellenében) végzett munka zérus.
Az elektromos vektortér konzervatív vektortér.

Homogén villamos mező:

Vegyünk két vezető síklapot és helyezzük el azokat egymással párhuzamosan, majd kapcsoljunk rájuk U feszültséget úgy, hogy a felső legyen pozitív. Ekkor a kialakuló villamos tér párhuzamos vonalakkal jellemezhető (azaz homogén, mivel a térerősség nagysága mindenütt állandó), az 10.2.8. ábra szerint.



10.2.8. ábra Homogén villamos mező

Az 5.1.8 egyenletből következik, hogy

$$E = \frac{U}{d},$$

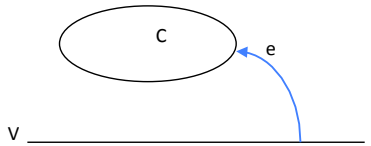
és az is, ha veszünk két pontot (A és B) az 10.2.8. ábrán, akkor az ott alkalmazott jelölésekkel:

$$U_{AB} = E \cdot d_{AB}.$$

Kapacitás, kondenzátorok

Kapacitás

Vigyünk egy elektront a vonatkoztatási pontból
egy töltés nélküli magában álló testre
a vonatkoztatási pontból, vagy felületből.



A magában álló testre töltést vinni csak munkával lehet, ezért annak potenciálja van.
Ez arányos a töltéssel.

A kísérletek alapján: $$U = \frac{1}{C} Q$$

ahol C a magában álló test kapacitása vonatkoztatási ponthoz képest. Mértékegysége:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} = F \text{ (Farad)}$$

Érdemes megjegyezni, hogy az elszigetelt emberi test kapacitása a földhöz képest
100pF és 200pF között van.

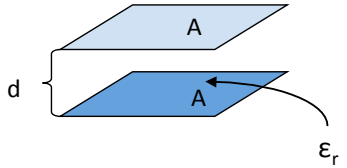
Mivel munkát kell végezni ahhoz, hogy a kapacitáson feszültség legyen, ezért abban energia tárolódik (ami munkát képes végezni). Ennek az energiának az értéke:

$$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

A kapacitás tehát energiát tárol, vagy sűrít, ezért a valóságban energiatárolásra, vagy töltéstárolásra alkalmazott eszközöket kondenzátoroknak nevezzük.

Síkkondenzátor kapacitása

Ha a magában álló testet szeretnénk energia, vagy töltétárolásra felhasználni, akkor azzal találjuk szemben magunkat, hogy egy harmadik test közelítésekor megváltozik a kapacitás, s vele a többi paraméter. Ha a külső hatásoktól gyakorlatilag független eszközt szeretnénk készíteni, akkor két sík lemezt célszerű egymástól kis távolságra elhelyezni, az alábbi ábra szerint.

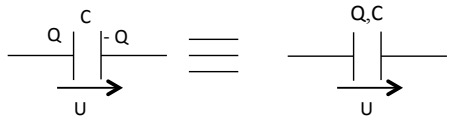


Ennek az eszköznek a kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

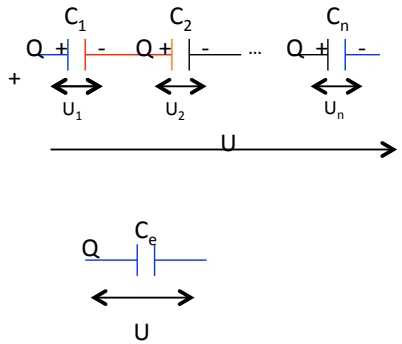
A síkkondenzátor felépítéséből adódik a kondenzátorok rajzjele:

Az ábrán Q=CU “a kondenzátor töltése”.



Kondenzátorok kapcsolása

Soros kapcsolás:



Kössünk n darab kondenzátort sorba az ábra szerint. Ekkor mindegyik kondenzátoron azonos lesz a töltés, mert a sor kezdetére vezetett elektron a kondenzátorok lemezein és hozzávezetésein (amelyek vezetők, tehát bennük a töltéshordozók szabadon mozoghatnak) mozogva az első párhuzamos lemezt elfoglalva a vele párhuzamos lemezről egy elektront eltaszít, tehát azon pozitív töltés alakul ki, s ez a folyamat folytatódik mindegyik kondenzátoron.

Felmerül a kérdés, hogy mekkora kapacitású egyetlen ún. eredő kapacitással helyettesíthető a soros kapcsolás. A választ az alábbi levezetés adja meg. Az erdő jól helyettesíti a többit, ha a feszültsége

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n \qquad U = \frac{Q}{C_e} \qquad U_1 = \frac{Q}{C_1}, \cdots U_n = \frac{Q}{C_n}$$

A feszültség egyenletbe behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{Q}{C_e} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$$

azaz

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

és egy nehezebben tanulható, de nehezebben eltéveszthető alakban:

$$C_e = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

Csak két kondenzátorra:

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

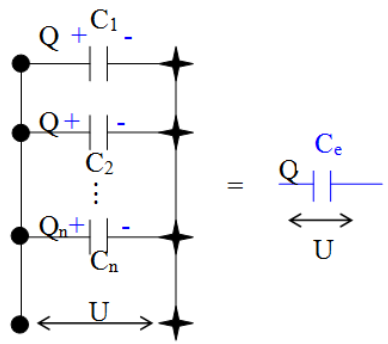
Kondenzátorok soros kapcsolása esetében az eredő értéke mindig kisebb, mint bármelyik kondenzátor kapacitása. Ha n darab azonos kapacitású kondenzátort kötünk sorba, az erdő kapacitás:

$$C_e = \frac{C}{n}$$

Párhuzamos kapcsolás:

Kössünk párhuzamosan n darab kondenzátort az ábra szerint. Ekkor mindegyik kondenzátoron azonos lesz a feszültség. Egy kondenzátor, amelynek kapacitása az eredő kapacitás akkor helyettesíti a többit, ha azokkal azonos feszültségre kapcsolva ugyanakkora töltés alakul ki rajta, mint a részkondenzárok töltésének az összege.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$$



Az eredőn kialakuló töltés:

$$Q = UC_e$$

a többin pedig:

$$Q_1 = UC_1$$
$$Q_2 = UC_2$$
$$\vdots$$
$$Q_n = UC_n$$

Innen:

$$\Psi C_e = \Psi C_1 + \Psi C_2 + \cdots + \Psi C_n$$

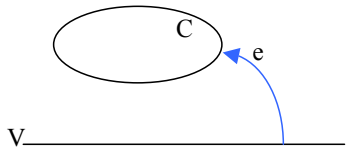
és az eredő:

$$C_e = C_1 + C_2 + \cdots + C_4$$

Két kondenzátor akkor és csak akkor van sorbakötve, ha egyik kivezetésük közös pontra csatlakozik, és arra a pontra más nem csatlakozik.

10. 3. Kapacitás, kondenzátorok

Vigyünk egy elektront a vonatkoztatási pontból egy töltés nélküli magában álló testre (10.3.1.. ábra) a vonatkoztatási pontból, vagy felületből.



10.3.1. ábra A kapacitás fogalmának bevezetéséhez való segédábra

A magában álló testre töltést vinni csak munkával lehet, ezért annak potenciálja van. Ez arányos a töltéssel.

A kísérletek alapján:

$$U = \frac{1}{C}Q, \qquad (10.3.1.)$$

ahol C a magában álló test kapacitása vonatkoztatási ponthoz képest. Mértékegysége:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} = F\ (\text{Farad}).$$

Érdemes megjegyezni, hogy az elszigetelt emberi test kapacitása a földhöz képest 100pF és 200pF között van.

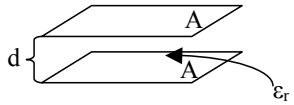
Mivel munkát kell végezni ahhoz, hogy a kapacitáson feszültség legyen, ezért abban energia tárolódik (ami munkát képes végezni). Ennek az energiának az értéke:

$$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \qquad (10.3.2.)$$

A kapacitás tehát energiát tárol, vagy sűrít, ezért a valóságban energiatárolásra, vagy töltéstárolásra alkalmazott eszközöket kondenzátoroknak nevezzük.

Síkkondenzátor kapacitása

Ha a magában álló testet szeretnénk energia, vagy töltétárolásra felhasználni, akkor azzal találjuk szemben magunkat, hogy egy harmadik test közelítésekor megváltozik a kapacitás, s vele a többi paraméter. Ha a külső hatásoktól gyakorlatilag független eszközt szeretnénk készíteni, akkor két sík lemezt célszerű egymástól kis távolságra elhelyezni, az alábbi (10.3.2.) ábra szerint.

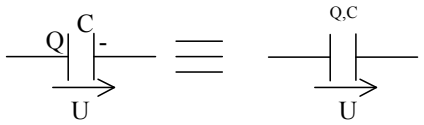


10.3.2. ábra Síkkondenzátor felépítése

Ennek az eszköznek a kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}. \qquad (10.3.3.)$$

A síkkondenzátor felépítéséből adódik a kondenzátorok rajzjele az 10.3.3.. ábra szerint szerint:



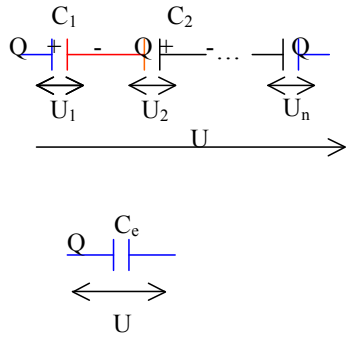
10.3.3. ábra Kondenzátor rajzjele

Az ábrán Q=CU "a kondenzátor töltése"

Kondenzátorok kapcsolása

Soros kapcsolás:

Kössünk n darab kondenzátort sorba az 10.3.4. ábra szerint. Ekkor mindegyik kondenzátoron azonos lesz a töltés, mert a sor kezdetére vezetett elektron a kondenzátorok lemezein és hozzávezetésein (amelyek vezetők, tehát bennük a töltéshordozók szabadon mozoghatnak) mozogva az első párhuzamos lemezt elfoglalva a vele párhuzamos lemezről egy lektront eltaszít, tehát azon pozitív töltés alakul ki, s ez a folyamat folytatódik mindegyik kondenzátoron.



10.3.4. ábra Kondenzátorok soros kapcsolása és eredője

Felmerül a kérdés, hogy mekkora kapacitású egyetlen ún. eredő kapacitással helyettesíthető a soros kapcsolás. A választ az alábbi levezetés adja meg. Az erdő jól hlyettesíti a többit, ha a feszültsége

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n,$$

vagy a kapacitással kifejezve

$$U = \frac{Q}{C_e} \quad .$$

A többi kondenzátor feszültségét is kifejezve:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \cdots U_n = \frac{Q}{C_n}.$$

A feszültség egyenletbe behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{Q}{C_e} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n},$$

azaz

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n},$$

és egy nehezebben tanulható, de nehezebben eltéveszthető alakban:

$$C_e = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}. \qquad (10.3.4)$$

Csak két kondenzátorra:

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Kondenzátorok soros kapcsolása esetében az eredő értéke mindig kisebb, mint bármelyik kondenzátor kapacitása. Ha n darab azonos kapacitásu kondenzátort kötünk sorba, azerdő kapacitás:

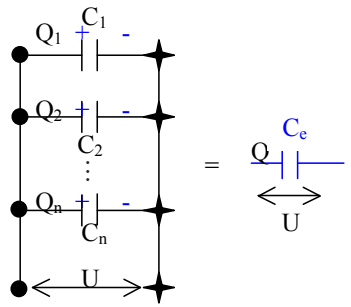
$$C_e = \frac{C}{n}.$$

Párhuzamos kapcsolás:

Kössünk párhuzamosan n darab kondenzátort az 10.3.5. ábra szerint. Ekkor mindegyik kondenzátoron azonos lesz a feszültség. Egy kondenzátor, amelynek kapacitása az eredő kapacitás akkor helyettesíti a többit, ha azokkal azonos feszültségre kapcsolva ugyanakkora töltés alakul ki rajta, mint a részkondenzárok töltésének az összege.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n .$$

Az eredőn kialakuló töltés:



10.3.5. ábra kondenzátorok párhuzamos kapcsolása és a párhuzamos eredő

$$Q = UC_e ,$$

a többin pedig:

$$Q_1 = UC_1$$
$$Q_2 = UC_2$$
$$\vdots$$
$$Q_n = UC_n$$

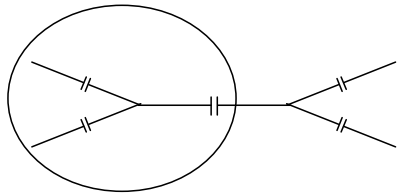
Innen:

$$UC_e = UC_1 + UC_2 + \cdots + UC_n ,$$

és az eredő:

$$C_e = C_1 + C_2 + \cdots + C_4 . \qquad (10.3.5)$$

Két kondenzátor akkor és csak akkor van sorbakötve, ha egyik kivezetésük közös pontra csatlakozik, és arra a pontra más nem csatlakozik.
Két kondenzátor akkor van párhuzamosan kötve, ha mindkét lábuk (páronként) közös pontra csatlakozik. Arra a két pontra más alkatrész is csatlakozhat.
Az alábbi 10.3.6. ábrán bekeretezett három kondenzátor se nem soros, se nem párhuzamos kapcsolában nincsen, ún. csillag kapcsolásba van kötve, melyet itt nem tárgyalunk.



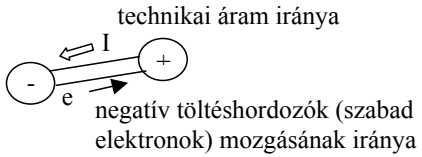
10.3.6. ábra Se nem soros, se nem párhuzamosan, hanem csillag kapcsolásban kötött kondenzátorok

11. fejezet

Egyenáramok

5.2.1. Áramerősség, áramsűrűség

Kössük össze két különböző töltésű testet (5.2.1. ábra) egy olyan anyaggal, amelyben legalább az egyik töltéshordozó szabadon mozoghat. Ekkor a negatív töltéssel rendelkező testről a pozitív felé elektronok mozognak, azt mondjuk, hogy villamos áram folyik. A XIX. század végén úgy gondolták, hogy a pozitív töltések mozognak ezért azok mozgásiránya lett az elfogadott, ún. technikai áramirány.



5.2.1. ábra A villamos áram származtatása

Célszerű bevezetni az **áramerősség** (I) fogalmát, ami az adott keresztmetszeten egységnyi idő alatt átáramlott villamos töltés:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \text{ vagy pontosabban : } I = \frac{dQ}{dt}. \qquad (5.2.1)$$

Az áramerősség mértékegysége:

$$[I] = \frac{C}{s} = A \text{ (Amper)}.$$

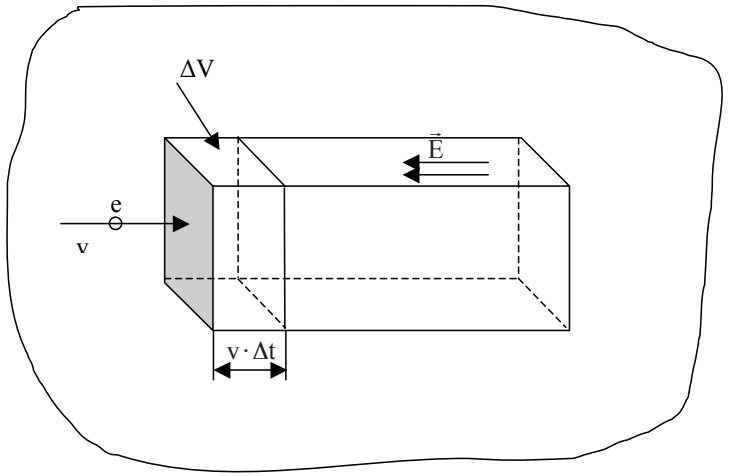
Az 1960-as évekig a C volt a mértékrendszer villamos alapmennyisége, azonban mára a könnyebb mérhetőség miatt az A vette át a szerepét, ezért szokás mondani, hogy 1C=1 As.

Az áramerősség mellett célszerű bevezetni az áramsűrűséget ami: az egységnyi felületen áthaladó áramerősség.

$$J = \frac{dI}{dA} \quad \left(\frac{I}{A}\right) \qquad [J] = \frac{A}{m^2}; \frac{A}{mm^2}$$

5.2.2. Az általános Ohm törvény

Az elektronok csak bizonyos anyagokban mozoghatnak, ezeket a elektromosan vezetőknek, másokban nem mozoghatnak szabadon (vagy egyáltalán nem), azokat a szigetelőknek nevezzük.
A vezető anyagokban mozgó töltéshordozók (elektronok, pozitív és negatív ionok, esetleg protonok) mozgása eredményeképpen lejátszódó jelenségeket vizsgáljuk a továbbiakban. Ehhez képzeljünk el egy nagy anyagmennyiséget, amelyben áram folyik. Gondolatban vágjunk ki belőle egy téglalap keresztmetszetű hasábot (5.2.2. ábra). Tegyük fel, hogy minden töltéshordozó ugyanakkora (e) töltéssel rendelkezik, és mindegyik azonos v sebességgel mozog a kezdő keresztmetszetre merőlegesen. A hasáb keresztmetszete legyen A. A szabadon mozgó töltéshordozók koncentrációja (n), azaz az egységnyi térfogatban levő szabadon mozgó töltéshordozók száma (N) A hasábban állandó villamos mező legyen az ábrán megfelelő irányítással. A töltéshordozók mozogjanak az ábrán megjelölt irányban. A t=0 időpontban a hasáb kezdeti keresztmetszetében levő töltéshordozók Δt idő alatt vΔt utat tesznek meg, és az ezalatt az idő alatt a kezdő keresztmetszetet átlépő töltéshordozók által



5.2.2. ábra Töltéshordozók mozgása egy vezetőből kivágottnak gondolt hasábban elfoglalt térfogat

$$\Delta V = A \cdot v \cdot \Delta t$$
,

az ezalatt belépett töltéshordozók száma:

$$N = \Delta V \cdot n .$$

A hasáb kezdeti keresztmetszetén ezalatt az idő alatt belépett töltés:

$$\Delta Q = N \cdot e = \Delta V \cdot n \cdot e = n \cdot e \cdot v \cdot A \cdot \Delta t .$$

Így az áramerősség:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n \cdot e \cdot v \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = n \cdot e \cdot v \cdot A ,$$

és az áramsűrűség:

$$J = \frac{I}{A} = \frac{n \cdot e \cdot v \cdot \cancel{A}}{\cancel{A}} = n \cdot e \cdot v ,$$

azaz:

$$J = n \cdot e \cdot v .$$

A vizsgálatok szerint a töltéshordozók sebessége arányos a térerősséggel:

$$v = \mu \cdot E ,$$

ahol μ mozgékonyság azaz az egységnyi térerősség hatására kialakuló sebesség. Mértékegysége:

$$[\mu] = \frac{\frac{m}{sec}}{V} = \frac{m}{V\,sec} .$$

Ezért:

$$J = n \cdot e \cdot \mu \cdot E ,$$

ahol a jobb oldal első három tagja az anyagra jellemző állandó, ezért célszerű azokat egyetlen betűvel jelölni.

$$\sigma = n \cdot e \cdot \mu .$$

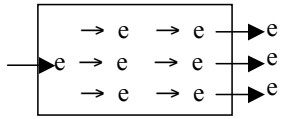
A mennyiség neve fajlagos villamos vezetőképesség. Mértékegységéről később szólunk. Ezzel kapjuk, hogy:

$$J = \sigma \cdot E , \qquad (5.2.2)$$

Aminek a neve **Általános Ohm – törvény**. Ennek vektori alakja:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} . \qquad (5.2.3)$$

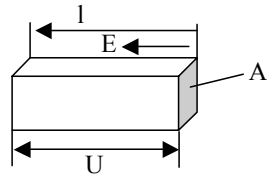
A töltéshordozók mozgását szemléltethetjük az elektronok vezetőben való mozgásával. Mivel az elektronok taszítják egymást(5.2.3.ábra), (az utolsók el is hagyják a vezetőt) a hatás gyorsabban (a fénysebességhez közeli érték is kialakulhat) terjed, mint maga a mozgás (rézben az elektronok sebessége mm/s nagyságrendű).



5.2.3. ábra Elektronok mozgása vezetőben

5.2.3. Vezetődarab Ohm törvénye

A továbbiakban válasszunk egy olyan vezetőt, amely párhuzamos falú, állandó keresztmetszetű (5.2.4. ábra) és az anyagi minősége is homogén. Ekkor az előzőket felhasználva: a térerősség homogén lesz, s vele a töltéshordozók sebessége is.



5.2.4. ábra Állandó keresztmetszetű és hosszúságú vezető

A vezetőben homogén villamos tér lép fel (ettől mozognak a töltéshordozók), ellentétben az elektrosztatikával! A kialakuló térerősség u feszültség esetében:

$$\frac{U}{l} = E.$$

Az általános Ohm törvény következtében:

$$J = \sigma \cdot E$$

$$\downarrow$$

$$\frac{I}{A} = \sigma \cdot \frac{U}{l}.$$

Kis átalakítással kapjuk:

$$U = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} \cdot I,$$

ahol a jobb oldal első két tagja egy adott vezetődarab esetében állandó, jelöljük R-rel, és a neve villamos ellenállás. Ezzel az egyenlet a következő alakot ölti:

$$U = I \cdot R. \qquad (5.2.4)$$

Ez Ohm törvénye, vagy Ohm törvénye vezetődarabra és még két alakban írható:

$$I = \frac{U}{R}$$

$$R = \frac{U}{I}.$$

Az ellenállás mértékegysége:

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} \qquad 1\frac{V}{A} = 1\Omega.$$

Az Ohm törvénye szavakban:
Ha egy R ellenállású vezetőn I áram folyik, akkor azon $U = I \cdot R$ nagyságú **feszültség esik**, vagy mérhető.
Fordítva:

Ha egy R ellenállású vezetőre U feszültséget kapcsolok, akkor $I = \frac{U}{R}$ nagyságú áram fog rajta folyni.
Az ellenállás kifejezésére visszatérve:

$$R = \underbrace{\frac{1}{\sigma}}_{\rho} \cdot \frac{l}{A},$$

azaz:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}, \qquad (5.2.5)$$

ahol ρ a fajlagos ellenállás, mértékegysége:

$$[\rho] = \Omega m \; ; \; \Omega \cdot \frac{mm^2}{m}.$$

Azaz egy l hosszúságú, A keresztmetszetű, ρ fajlagos ellenállású vezető R ellenállása arányos a vezető hosszával, fordítva arányos a keresztmetszetével, és az arányossági tényező a fajlagos ellenállás.

A réz fajlagos ellenállása: $\rho = 0{,}017\Omega\frac{mm^2}{m}$. Szigetelő anyagoké: $1000\Omega\frac{mm^2}{m}$- től kezdődik (teflon, borostyán 10^{26}).

A fajlagos ellenállás (ρ) reciproka a fajlagos vezetőképesség (σ), melynek mértékegysége:

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega m}.$$

5.2.4. A fajlagos ellenállás hőmérséklet függése

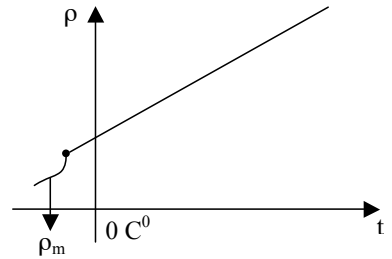
A fajlagos ellenállás függ a hőmérséklettől az alábbiak szerint:

Fémek esetében:

Szobahőmérséklet környékén (általában mintegy 200K felett) a fémek fajlagos ellenállása a hőmérséklet növekedésével lineárisan növekszik, és fordítva az 5.2.5. ábra, és az alábbi egyenlet szerint:

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (t - t_0)) \qquad [\alpha] = \frac{1}{^0C}, \qquad (5.2.6)$$

ahol α a fajlagos ellenállás hőmérsékleti tényezője (értéke fémeknél és ötvözeteknél 10^{-5} és 10^{-3} 1/ °C, között van), ρ_0 a fajlagos ellenállás t_0 hőmérsékleten, és ρ pedig t hőmérsékleten.

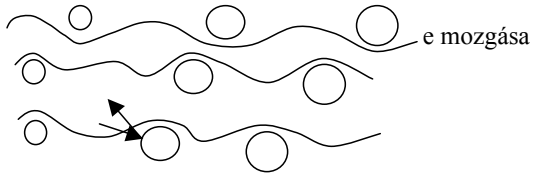


5.2.5. ábra Fémek fajlagos ellenállásának hőmérséklet függése

Mintegy 200K alatt a hőmérséklet csökkenésével a fajlagos ellenállás T^5 hatványfüggvényt követve csökken. Bizonyos fémek (pl. az ólom, de a réz nem), fémötvözetek, illetve újabban kerámiák, fajlagos ellenállása a 100K alatti hőmérséklet tartományban $10^{-24}\Omega m$ alá csökken, azaz gyakorlatilag elveszíti ellenállását. Az anyagok ezen állapotát szupravezető állapotnak nevezzük. Rendkívüli nagy jelentősége van a szupravezető anyagoknak. Egyrészt a villamos energia továbbításában várnak nagy megtakarítást alkalmazásukkal (ezen a területen egyenlőre leküzdhetetlen akadályt jelent, hogy a szupravezető állapot megszűnik, ha a mágneses mező erőssége meghalad egy bizonyos, ma még elég kicsiny értéket), másrészt kis

energiafogyasztású, a számítógépekben használatos igen gyors kapcsolóelemek kifejlesztésére van remény.

Fémek fajlagos ellenállásának a magyarázata: Az atomok meghatározott rend szerint helyezkednek el, a töltéshordozók úgy mozognak, ha ideális a fém, a kristályrács ideális, mintha a fém ott sem lenne.



5.2.6. ábra Ideális fémrácsban az elektron úgy mozog, mintha a rács ott sem lenne, rácshibákon azonban szóródik, és megjelenik az ellenállás

Minden fématom legalább egy elektronját beadja a rács kötésébe, ezek az atomok közötti térben egyenletesen ún. elektronfelhő formájában oszlanak el.

Azért van ellenállás, mert a fématomok rezegnek azokba beleütköznek az elektronok, s ennek következtében mozgásuk iránya megváltozik, csökken az időegység alatt a fémen keresztül jutó elektronok száma, ezzel az áram, azaz az ellenállás nő (ha nő a hőmérséklet nő az atomok rezgési amplitúdója, s ezzel nő annak a valószínűsége, hogy az elektron beleütközik a rezgő atomba). Ha az egyik atom nagyobb, vagy kisebb mint a többi (azaz szennyeződés van) akkor visszapattan az elektron, elektromos ellenállás lép fel. A fajlagos ellenállás az alábbi egyenletnek megfelelően egy, a rácsrezgések, és egy a szennyeződések miatt fellépő tag összegéből áll.

$$\rho = \rho_r + \rho_{sz}. \qquad (5.2.7)$$

Azért van ellenállás, mert a fématomok rezegnek azokba beleütköznek az elektronok, s ennek következtében mozgásuk iránya megváltozik, csökken az időegység alatt a fémen keresztül jutó elektronok száma, ezzel az áram, azaz az ellenállás nő (ha nő a hőmérséklet nő az atomok rezgési amplitúdója, s ezzel nő annak a valószínűsége, hogy az elektron beleütközik a rezgő atomba). Ha az egyik atom nagyobb, vagy kisebb mint a többi (azaz szennyeződés van) akkor visszapattan az elektron, elektromos ellenállás lép fel. A fajlagos ellenállás az alábbi egyenletnek megfelelően egy, a rácsrezgések, és egy a szennyeződések miatt fellépő tag összegéből áll.

$$\rho = \rho_r + \rho_{sz}. \qquad (5.2.7)$$

Az ötvözetek közül a konstantán és a manganin fajlagos ellenállása alig függ a hőmérséklettől, ezért a precíziós mérőellenállásokat ilyen ötvözetekből készítik.

Az ellenállás hőmérsékleti függésének egyek alkalmazása az ellenállás-hőmérő, amely szinte kizárólag vékony platina drótból készült kerámiába ágyazott, platina huzalból készített 100, vagy 200Ω ellenállású spirális.
Az ellenállást megmérve ρ(T) ismeretében a hőmérséklet megállapítható.

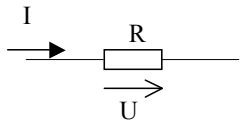
Félvezetők esetében:
Félvezetők esetében a fajlagos ellenállás exponenciálisan

$$\rho = \rho_s \cdot e^{\frac{A}{T}}, \qquad (5.2.8)$$

csökken a hőmérséklet növekedésével, ahol ρ_s és A állandó. A nagyon erős hőmérsékletfüggés miatt nagyon érzékeny és olcsó hőmérsékletmérő készíthető a segítségükkel, a felső hőmérséklet határ azonban ritkán magasabb mint 200 ^oC.

5.2.5. Ellenállások kapcsolása

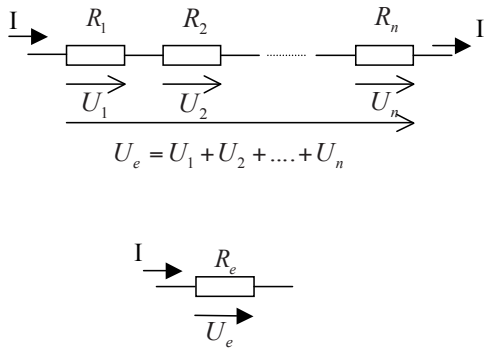
Az elektronikában igen sokszor használunk adott ellenállású vezető darabokat, amelyeket mint alkatrészeket ellenállásnak nevezünk. Az ellenállás rajzjelét az 5.2.7. ábrán mutatjuk be.



5.2.7. ábra Az ellenállás mint alkatrész rajzjele

Ellenállások soros kapcsolása:

Kössünk sorba n darab ellenállást az 5.2.8. ábrának megfelelően.



5.2.8. ábra Ellenállások soros kapcsolása és az eredő ellenállás

Felmerül a kérdés, hogy mekkora eredő ellenállás helyettesíti az n darab sorba kapcsolt ellenállást. A kérdésre a választ az alábbiakban adjuk meg.
Az eredő akkor helyettesíti a többi ellenállást, ha azonos áram esetében a feszültségesés az eredőn megegyezik a z n darab ellenálláson eső feszültség összegével:

$$U_e = U_1 + U_2 + ... + U_n.$$

Az egyes ellenállásokon eső feszültség:

$$U_e = I \cdot R_e,\ U_1 = I \cdot R_1,\ U_2 = I \cdot R_2,\ \ldots.\ \text{és}\ U_n = I \cdot R_n.$$

Ezeket a feszültségeket behelyettesítve a fenti egyenletbe kapjuk:

$$I \cdot R_e = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + ... + I \cdot R_n,$$

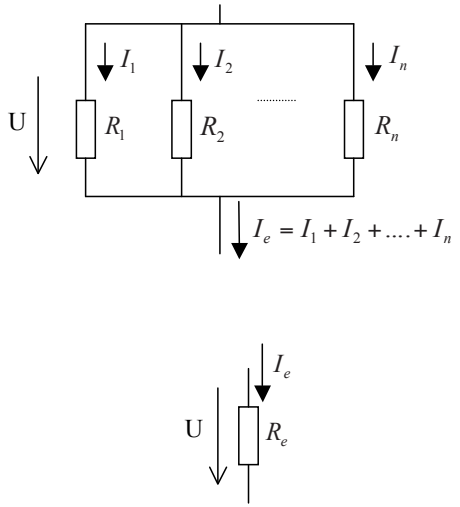
I-vel egyszerűsítve kapjuk:

$$R_e = R_1 + R_2 + ... + R_n . \qquad (5.2.9)$$

Ellenállások soros kapcsolása esetén mindegyik ellenálláson ugyanaz az áram folyik keresztül, és az eredő ellenállás mindig nagyobb mint a rész ellenállások legnagyobbika.

Párhuzamos kapcsolás:

Kapcsoljunk párhuzamosan n darab ellenállást az 5.2.9. ábrán látható módon. Ekkor minden ellenálláson ugyanakkora lesz a feszültség. Az n darab ellenállást helyettesítő egy darab eredő ellenállás akkor megfelelő, ha ugyanakkora feszültségre kapcsolva akkora áram folyik keresztül rajta, mint az n darab ellenálláson átfolyó áramerősségek összege.



5.2.9. ábra Ellenállások párhuzamos kapcsolása és az eredő ellenállás

$$I_e = I_1 + I_2 + ... + I_n .$$

Az egyes áramokat az Ohm törvényből határozhatjuk meg:

$$I_e = \frac{U}{R_e},\ I_1 = \frac{U}{R_1},\ I_2 = \frac{U}{R_2},.... \text{ és } I_n = \frac{U}{R_n}.$$

Behelyettesítve ezeket a fenti egyenletbe kapjuk:

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + ... + \frac{U}{R_n}.$$

U-val egyszerűsítve adódik:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}.$$

Általában ezt a formulát szokták megadni végképletként, de ennek használata sokszor hibás. Az alábbi, bár kicsit bonyolultabb, de mégis könnyebben memorizálható formula:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}}. \qquad (5.2.10)$$

Ellenállások párhuzamos kapcsolásakor az eredő mindig kisebb, mint a legkisebb ellenállás. Ha n darab azonos, R nagyságú ellenállást kapcsolunk párhuzamosan, akkor az eredő:

$$R_e = \frac{R}{n}.$$

Két ellenállás esetében:

$$R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

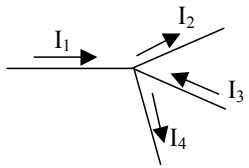
Akárcsak a kondenzátoroknál, itt is el kell mondani az egyes kapcsolások gyors és szemléletes megkülönböztetésének módját, amelyet a következőkben adunk meg.

Két ellenállás akkor, és csakis akkor van sorba kötve, ha csak egyik kivezetésük van közös pontra kötve, és oda más már nem csatlakozik.
Sorosan kötött ellenállásokon folyó áram megegyezik.
Figyelem! Fordítva nem feltétlenül igaz. Ha például két azonos nagyságú ellenállás párhuzamosan van kötve, a rajtuk átfolyó áram megegyezik.

Két ellenállás akkor és csak akkor van párhuzamosan kötve, ha mindkét kivezetésük (páronként) azonos pontra van kötve. (A közös pontokra bármely kapcsolási elem köthető, az előző két ellenállás párhuzamosságát az nem befolyásolja.)
Párhuzamosan kötött ellenállásokon eső feszültség azonos.
Figyelem! Fordítva ez nem feltétlenül igaz. Két azonos nagyságú, sorba kötött ellenállás feszültségének nagysága is azonos!

5.2.6. A Kirchhoff egyenletek

I., vagy csomóponti törvény:
Tekintsünk egy csomópontot, ahova I_1, I_2, I_3, I_4, … áramok folynak (5.2.10. ábra) be (vagy ki). Akkor kimondhatjuk: **egy csomópontba a befolyó és kifolyó áramerősségek algebrai összege zérus.**



$$\sum_{i=n}^{n} I_i = 0 \qquad (5.2.11)$$

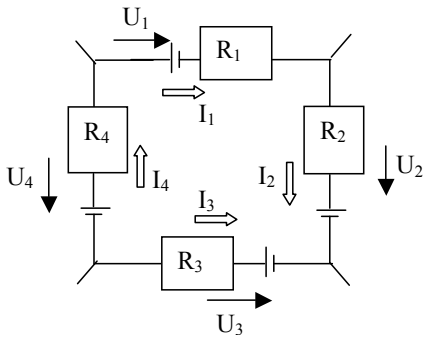
5.2.10. ábra Kirchhoff I. törvénye

Ez a törvény a töltésmegmaradást fejezi ki, a csomópontban töltés nem halmozódik fel, ami befolyik az ki is folyik.

II., vagy huroktörvény:

Vegyünk egy zárt áramkört, vagy hurkot (5.2.11. ábra), s megállapíthatjuk: **zárt áramkörben a feszültségesések és telepfeszültségek algebrai összege zérus.**

Ez a törvény abból származik, hogy az elektrosztatikus mezőben zárt görbén végzett munka zérus.



5.2.11. ábra Egy zárt áramkör (hurok) és a huroktörvény

A törvény matematikai alakja:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i + \sum_{j=1}^{m} I_j \cdot R_j = 0. \qquad (5.2.12)$$

5.2.7. Egyenáram munkája és teljesítménye

A potenciál és feszültség definíciójából következik, hogy ha egy Q töltést a mező végigvisz kér U potenciálkülönbségű pont között, akkor azon W=QU munkát végez. Ha mind a feszültség, mid az áram időben állandó, akkor a töltés Q=It alakban, a munka pedig

$$W = U \cdot I \cdot t \qquad (5.2.13)$$

formában is felírható. Tudjuk, hogy a teljesítmény az időegység alatt végzett munka, azaz az egyenletből

$$P = U \cdot I,$$

vagy az Ohm törvény felhasználásával:

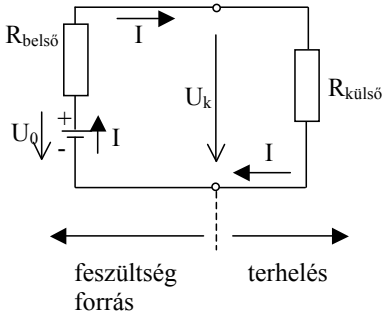
$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}. \qquad (5.2.14)$$

A villamos áram munkát tud végezni, azaz energiát szállít, az energiaszállítás azonban nem a vezetőben, hanem a vezető körüli elektromágneses mezőben történik.
Változó feszültség és áram esetében a munka:

$$W = \int_0^t U(t) \cdot I(t) \cdot dt\,. \qquad (5.2.15)$$

5.2.8. Ohm törvénye teljes áramkörre

Tekintsünk két töltött testet, amelyeken az elektromos töltés nagysága nem egyezik meg. Kössük össze őket egy vezetővel. Töltésáramás indul meg közöttük (elektromos áram folyik), ami addig tart, amíg a töltések ki nem egyenlítődnek.
Ha folyamatos áramot szeretnénk fenntartani, úgy a már átáramlott töltéseket vissza kell vinni a kiindulási pontra. Ezt csak munkavégzés árán tudjuk biztosítani.
Ezt a munkát például mechanikai energiával meghajtott generátorral, molekuláris energiát felhasználó kémiai reakcióval, napenergia segítségével, stb. tudjuk elvégezni.
A termodinamika második főtétele azt mondja ki, hogy nem lehet 100 % hatásfokkal munkát végezni.
Ha a töltéseket (töltéshordozókat) visszajuttató egységet (a továbbiakban feszültségforrás), a folyamat veszteségeit (amit célszerűen egy soros ellenállásban foglalunk össze) és magát a vezetőt (ami egy ellenállás, itt külső ellenállás néven szerepel) egy ábrában szeretnénk ábrázolni, akkor az alábbi (5.2.12. ábra) kapcsolást kapjuk:



5.2.12. ábra Feszültségforrást, belső ellenállást és külső ellenállást tartalmazó zárt áramkör

Az ábrán a szokásoknak megfelelően az áramot tele nyíllal, a feszültséget üres nyíllal ábrázoltuk. A feszültségforrás egy ideális (veszteség nélküli) eszköz, a veszteségeket a belső ellenállás tartalmazza. Vegyük észre, hogy az áram nyilak folytonosak, a feszültségforráson kívül az áram a pozitív pólustól folyik a negatív felé, de a feszültségforrásban pontosan fordítva. A feszültségforrás és a fogyasztó (külső ellenállás) feszültségnyila ütközik egymással.

Az U_0 az ideálisnak gondolt feszültségforrás feszültsége az ún. belső feszültség, vagy elektromotoros erő.
Kirchhoff II. törvénye alapján írhatjuk:

$$U_0 = I \cdot (R_b + R_k),$$

és ebből:

$$I = \frac{U_0}{R_b + R_k}. \qquad (5.2.16)$$

Ez az egyenlet az **Ohm törvénye teljes áramkörre**. Szavakban: **egy feszültség forrást, belső és külső ellenállást tartalmazó zárt áramkörben folyó ára erőssége a belső feszültség és a belső és külső ellenállások összegének a hányadosa.**

A kapocsfeszültség (ami a két kis körrel jelölt kapcsokon mérhető):

$$U_k = I \cdot R_k = U_0 \cdot \frac{R_k}{R_b + R_k}. \qquad (5.2.17)$$

Ha a kapcsokra nem kapcsolunk ellenállást, akkor azt mondjuk, hogy üresjárásról van szó. Ekkor a kapcsokon megjelenő feszültség megegyezik U_0-al, mert nem folyik áram, és igy a belső ellenálláson eső feszültség zérus. Az üresjárási feszültséget szokás $U_ü$-vel is jelölni.
Ha a külső ellenállás zérus, akkor azt mondjuk, hogy rövidrezártuk a feszültségforrást. Ezt az általában nem viseli el, legalábbis nem hosszú ideig. A rövidzárási áram:

$$I_r = \frac{U_0}{R_b}.$$

A feszültségforrás által a külső ellenállásnak szolgáltatott teljesítmény:

$$P_k = U_k \cdot I = U_0^2 \cdot \frac{R_k}{(R_b + R_k)^2}.$$

Szélsőérték számítással kimutatható, hogy a maximális teljesítmény akkor vehető ki a feszültségforrásból, ha $R_k=R_b$. Ha ez az eset áll fenn, akkor illesztésről beszélünk.
A belső feszültséget generáló ideálisnak vélt folyamatok teljesítménye (ez a befektetett teljesítmény):

$$P_0 = U_0 \cdot I = \frac{U_0^2}{R_b + R_k}.$$

A teljes energiatermelés hatásfoka tehát:

$$\eta = \frac{P_k}{P_0} = \frac{R_k}{R_b + R_k}.$$

Behelyettesítve adódik, hogy illesztésnél a hatásfok 50%.

A fentiekben sokszor használtuk a feszültségforrás szót általános jelentésben. Az elektronikában feszültségforrásnak nevezzük azokat a villamos energiaforrásokat, amelyek kapocsfeszültsége a terhelő ellenállástól (R_k) független, vagy közel az. Más szóval belső

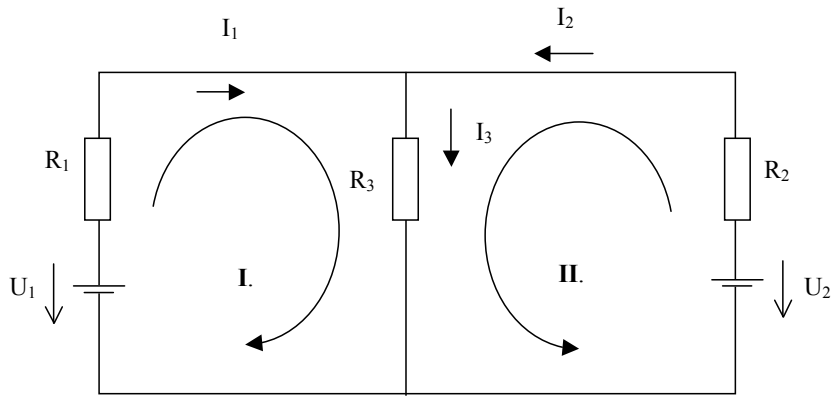
ellenállása a terhelő ellenálláshoz képest elhanyagolható. Áramforrásnak pedig azokat, amelyek áramerőssége közel független a terhelő ellenállástól. Áramforrásoknál a belső ellenállás párhuzamos a terheléssel.

5.2.9. Hálózatszámítási módszerek

Bonyolultabb egyenáramú hálózatok paramétereinek meghatározására külön eljárásokat dolgoztak ki, amelyek közül hármat ismertetünk az alábbiakban.

A Kirchhoff egyenletek módszere:

Vegyünk két feszültségforrást és kössük össze azokat az 5.2.13. ábrán látható módon. Határozzuk meg az egyes ágakban folyó áramok erősségét.



5.2.13. ábra A Kirchhoff egyenletek módszerének bemutatásához használt áramkör

Három ismeretlen áramot kell meghatároznunk, ehhez három, egymástól független egyenlet felírására van szükség. Az áramkörben van két csomópont, azonban az egyik nem független a másiktól, mert ugyanazok az áramok folynak be és ki mindkettő esetében. Így egy csomóponti egyenletet tudunk felírni. Általánosságban is kimondhatjuk, hogy ha egy áramkörben n csomópont van, akkor legfeljebb n-1 csomóponti egyenletet lehet felírni. Ennél többet is ki lehet jelenteni, de az túlmutatna ezen stúdium keretein. Az áramkörön felismerhetünk három hurkot, de azok közül csak kettő független. Általánosságban kimondható, hogy ha egy áramkörben m hurok van, akkor azok közül legfeljebb m-1 független, tehát legfeljebb annyi hurokegyenletet lehet felírni.
A Kirchhoff egyenletek megoldásának lépései:

1. Bejelöljük az áramokat teljesen tetszőlegesen, de attól kedve ezeket az irányokat kell használni. Ha nem találtuk el az irányt, a számítás végén erre az áramra negatív értéket kapunk. .
2. Bejelöljük a feszültségeket az ellenállásokon a rajtuk átfolyó áram irányával megegyezően, a feszültségforrásoknál a nyíl a pozitívtól mutasson a negatív sarokra.
3. Minden független csomópontra felírjuk a csomóponti egyenletet.
4. A független hurkokban felírjuk a hurokegyenletet. Ehhez mindegyik hurokban fel kell venni egy tetszőleges körüljárási irányt, amellyel párhuzamos feszültségnyilak

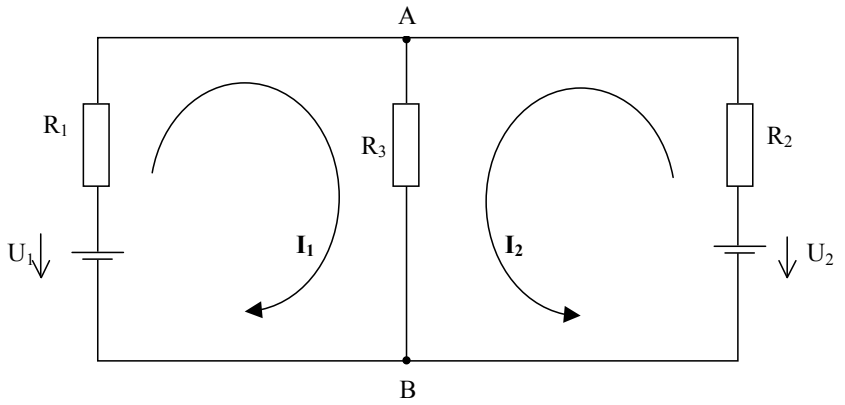
feszültségei pozitívak, az ellentétes nyilakkal jelzettek negatív előjellel kerülnek figyelembe vételre.
5. A kapott egyenletrendszert rendezzük.
6. A lineáris egyenletrendszert megoldjuk.
7. A kapott áramerősségekből az ellenállásokon eső feszültségek és ha szükséges a felvett teljesítmények kiszámolhatóak.

Ezek alapján az 5.2.13. ábrán látható áramkör egyenletei:

$$I_1+I_2+I_3=0$$
$$I_1R_1+I_3R_3-U_1=0$$
$$I_2R_2+I_3R_3-U_2=0.$$

A hurokáramok módszere:

Minden független hurokban felveszünk egy képzelt áramot (5.2.14. ábra) (hurokáram). A hurkok egymáshoz csatolását az fejezi ki, hogy a közös ágakban a hurokáramok algebrai összege jelenik meg.



5.2.14. ábra A hurokáramok módszerének bemutatásához használt áramkör

A módszer alkalmazása során nem szükséges csomóponti egyenleteket felírni, s ezzel csökken az egyenletek, és az ismeretlenek száma. A módszer alkalmazása során az 5.2.14. ábrán látható áramkörre kapott egyenleteket láthatjuk a következőkben:

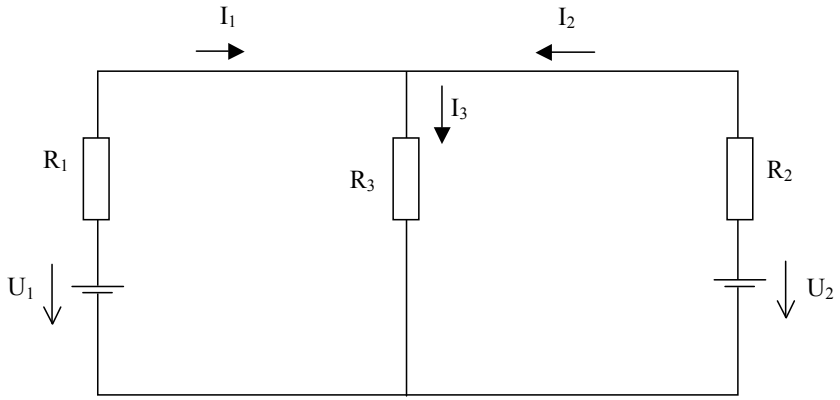
$$I_1R_1+(I_1+I_2)R_3-U_1=0$$

$$I_2R_2+(I_1+I_2)R_3-U_2=0$$

A szuperpozíció elve és módszere:

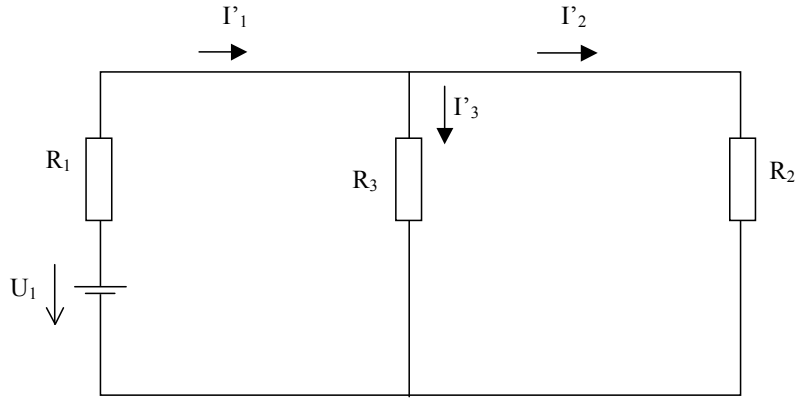
Mindegyik telep (feszültségforrás, illetve azok eredője) a hálózat bármelyik kiszemelt ágában a többi teleptől függetlenül hozza létre saját részáramát. A hálózat kiszemelt ágában az áramerősség a részáramok algebrai összege (szuperpozíciója) lesz.

A szuperpozíció módszere bemutatásához tekintsük az 5.2.15. ábrán látható áramkört.



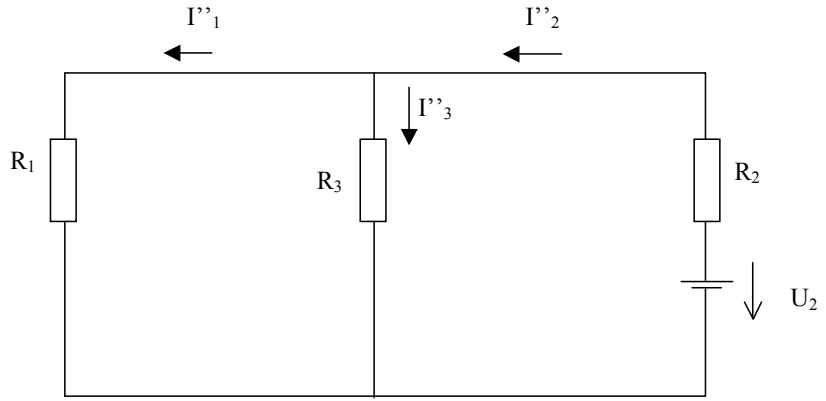
5.2.15. ábra A szuperpozíció módszerének bemutatására alkalmazott áramkör

A módszer során először meghatározzuk, hogy csak az U_1 feszültségű feszültségforrás mekkora áramot hajt át az egyes ellenállásokon. Ekkor a másik feszültségforrást rövidzárral helyettesítjük (5.2.16. ábra). Az áramokat egy vesszővel látjuk el, jelezve, hogy az első feszültségforrás által keltett részáramokról van szó.



5.2.16. ábra Az U_1 feszültségű telep által áthajtott áramok

A második feszültségforrás részáramait az 5.2.17. ábrán látható áramkör alapján határozzuk meg az első részáramaihoz hasonlóan, amelyeket most két vesszővel jelölünk.



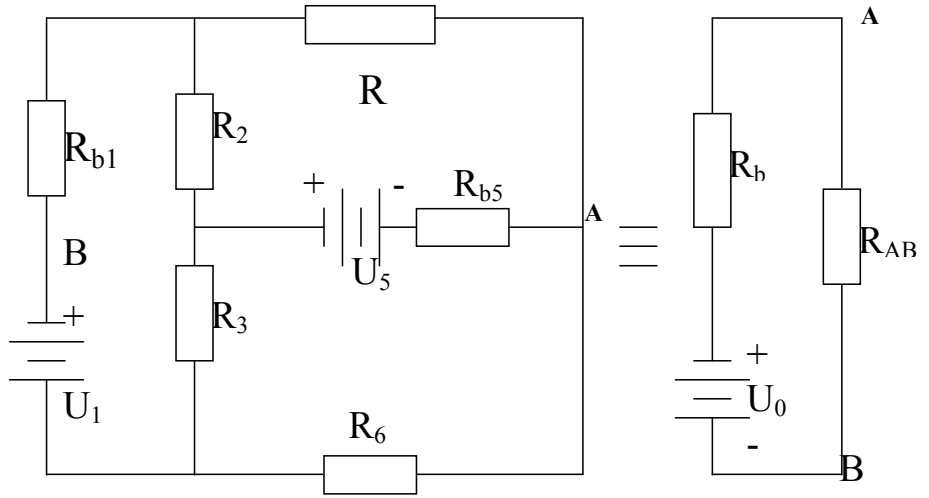
5.2.17. ábra Az U_2 feszültségű telep által áthajtott áramok

A két feszültségforrásból származó részáramok algebrai összege, szuperpozíciója adja a valódi áramokat az alábbiak szerint.

$$I_1 = I'_1 - I''_1,$$
$$I_2 = I''_2 - I'_2,$$

Thevenin tétele:

Egy tetszőlegesen bonyolult hálózat egy kiválasztott ágára nézve az egész hálózat helyettesíthető egy U_0 elektromos feszültségű és R_b belső ellenállású áramforrással 5.2.18. ábra).



5.2.18. ábra Thevenin tételének egy értelmezése

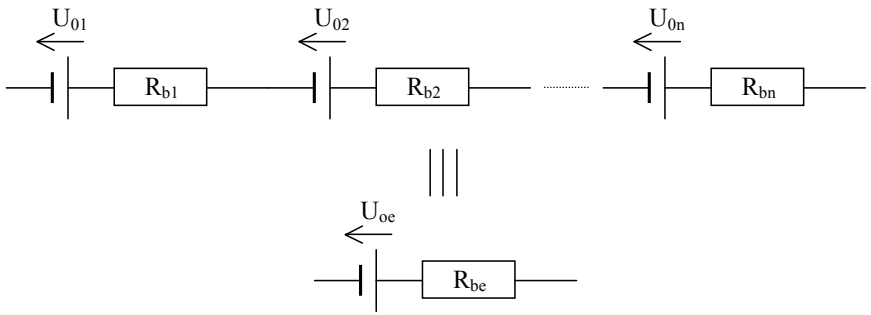
Az U feszültség megegyezik az eredeti hálózatban a kiválasztott ág A-B kapcsain megjelenő feszültséggel (üresjárási feszültség), míg az R_b ellenállás egyenlő a hálózat eredő

ellenállásával az A-B kapcsok között, ha az áramforrások elektromos feszültségét nullának tekintjük.

5.2.10. Feszültségforrások kapcsolása

A napi gyakorlatban igen sokszor van szükségünk több elem sorbakapcsolására, s néha felmerül a párhuzamos kapcsolás gondolata is. Az alábbiakban erről olvashatunk.

Soros kapcsolás:
Vegyünk n darab feszültségforrást és kapcsoljuk őket sorba az 5.2.19. ábra szerint.



5.2.19. ábra Feszültségforrások sorba kapcsolása

Az eredő belső feszültség:

$$U_{0e} = \sum_{i=1}^{n} U_{0i},$$

az eredő belső ellenállás:

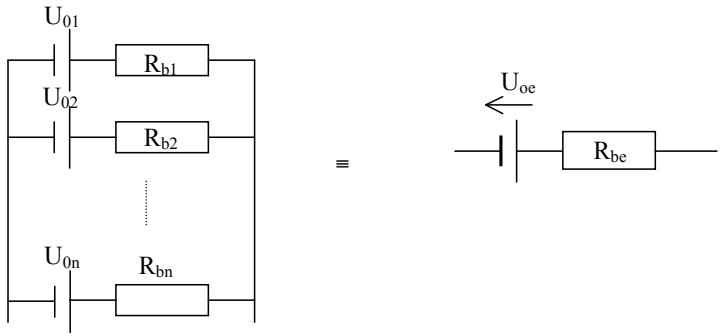
$$R_{be} = \sum_{i=1}^{n} R_{bi},$$

Aza mind a belső feszültség, mind a belső ellenállás összeadódik, a kivehető maximális áramerősség a rész elemek legkisebbikével lesz egyenlő.

A gyakorlatban csak azonos paraméterekkel rendelkező feszültségorrásokat szabad sorbakapcsolni, metrt különben az élettartamuk igen lecsökken, sőt balesetet, esetleg tüzet is okozhatnak a fellépő meghibásodások következtében!

Párhuzamos kapcsolás:

Kössünk párhuzamosan n darab elemet az 5.2.20. ábrának megfelelően.



5.2.20. ábra Feszültségforrások párhuzamos kapcsolása

A feszültségforrások párhuzamos kapcsolása esetében az eredő belső feszültséget a hálózatszámítási módszerek segítségével határozzhatjuk meg, az eredő belső ellenállás pedig a rész belső ellenállások párhuzamos eredője az alábbi, már ismert képlet szerint.

$$R_{be} = \frac{1}{\frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}} + \cdots + \frac{1}{R_{bn}}}.$$

Ebben az esetben még inkább igaz az, hogy párhuzamosan kapcsolni csak teljesen azonos paraméterű feszültségforrásokat szabad elkerülendő a baleseteket és a tüzeket.
Azonos feszültségforrások esetében az eredő belső feszültség megegyezik a rész feszültségforrásokéval, és az eredő belsőellenállás:

$$R_{be} = \frac{R_b}{n}.$$

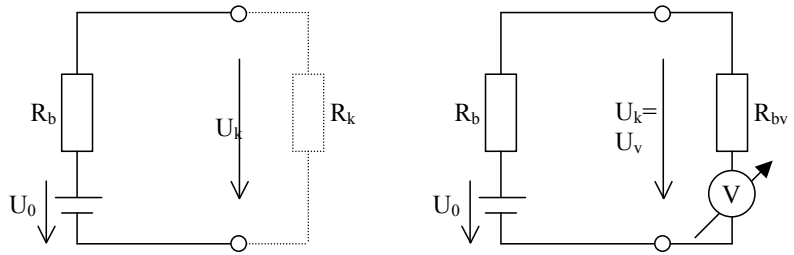
5.2.11. Mérőműszerek kapcsolása és méréshatáruk kiterjesztése

Az elektronikában, a villamos technikákban, de még a számítástechnikában mindennapos a voltmérők és az ampermérők használata. Az alábbiakban ezekről, illetve méréshatáruk kiterjesztéséről szólunk. A közölt ismeretek alapvetőek mind a mutatós, mid a digitális műszerek esetében.

Voltmérő használata:
A voltmérővel két pont közötti feszültséget mérünk egy áramkörben, ami lehet akármilyen bonyolult is. Thevenin tétele értelmében az áramkör erre a két pontra néve helyettesíthető egy ideális feszültségforrással és egy belső ellenállással. Ha a voltmérő helyett egy külső ellenállás van bekötve (5.2.21. ábra bal oldala), akkor kiszámítható a kapocsfeszültség. Ha a voltmérőt kapcsoljuk oda, akkor is meghatározható a kapocsfeszültség az alábbiak szerint:

$$U_v = U_k = U_0 \frac{R_{bv}}{R_b + R_{bv}},$$

ahol R_{bv} a voltmérő belső ellenállása, U_0 pedig a két mérési pont közé képzelt ideális feszültségforrás feszültsége, azaz az a feszültség, amit mérni kell. R_b pedig az áramkör belső ellenállása, ahogy a voltmérő „látja”.



5.2.21. ábra Voltmérő kapcsolása

Az egyenlet kis átalakításával kapjuk:

$$U_v = U_0 \frac{1}{\frac{R_b}{R_{bv}} + 1},$$

azaz:

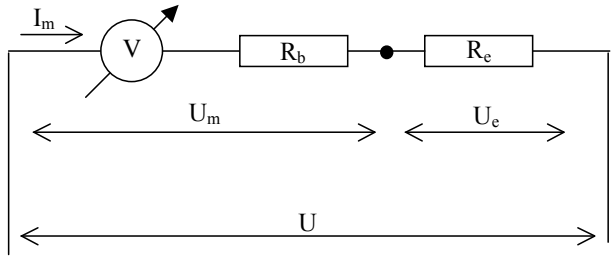
$$U_v \to U_0 \; ha \; R_{bv} \to \infty,$$

tehát az ideális voltmérő belső elenállása végtelen nagy. A voltmérőt a mérendő alkatrésszel párhuzamosan kapcsoljuk az áramkörre.

A belső ellenállás nagyságát a gyakorlatban az alábbiak szerint írhatjuk le:
jó kéziműszer (analóg): 100 kΩ/V, digitális: 10 MΩ. Elérhető: 10^{14} – 10^{15} Ω is, de a zaj komoly hibákat okzhat, elkerülésére igen drága árnyékolási technikákat kell alkalmazni.

Voltmérő méréshatárának kiterjesztése:

Ha a voltmérő méréshatára (U_m, az a legnagyobb feszültség, amelynek mérésére a műszer még képes) kisebb mint a mérendő feszültség, akkor abból egy ún. előtét ellenállás segítségével (5.2.22. ábra) ejtjük le a két feszültség különbségét.



5.2.22. ábra Voltmérő méréshatárának kiterjesztése

Az előtét ellenállást az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

$$R_e = \frac{U_e}{I_m} = \frac{U - U_m}{I_m} = \frac{U - U_m}{\frac{U_m}{R_b}},$$

tudjuk, hogy

$$I_m = \frac{U_m}{R_b},$$

és így:

$$R_e = R_b \frac{U - U_m}{U_m}.$$

Legyen

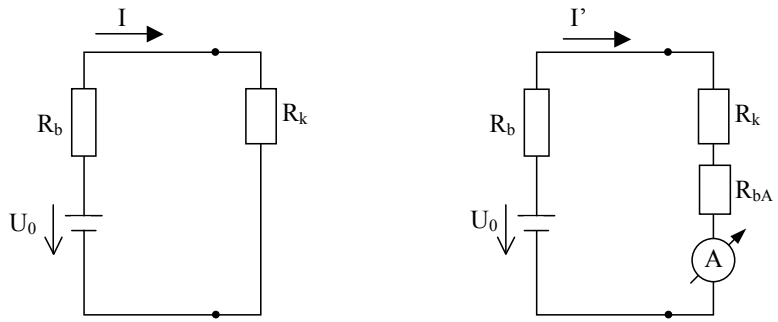
$$n = \frac{U}{U_m},$$

és így:

$$R_e = (n-1)R_b.$$

Árammérő (ampermérő) használata:

Ha az 5.2.23. ábra bal oldala szerinti kapcsolást nézzük, akkor az áramköben I áram folyik, amit meg szeretnénk mérni. Ehhez meg kell szakítanunk az áramkört, és a külső ellenállással sorosan be kell kacsolnunk az ampermérőt. Az ampermérőt az ábra bal oldalán megmutatott módon jelöljük. Mivel az ampermérőnek is van ellenállása, az áram I'-re változik (csökken).



5.2.23. ábra Ampermérő bekapcsolása az áramkörbe

Az ampermérő nélküli áramerősség:

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{U}_0}{\mathrm{R}_b + \mathrm{R}_k}.$$

Az áramerősség mérésekor, azaz az ampermérő beiktatása után:

$$I' = \frac{U_0}{R_b + R_k + R_{bA}},$$

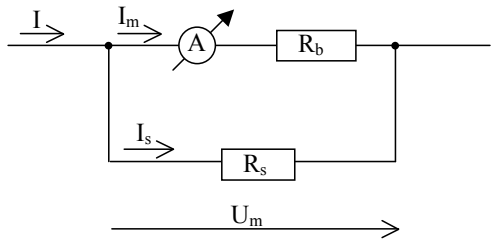
így:

$$I' \to I, \; ha \; R_{bA} \to 0,$$

Azaz az ampermérő által mutatott áram annál jobban megközelíti a mérendő áramot, minél kisebb a belső ellenállása. A gyakorlatban $R_{bA} \geq 0{,}01\,\Omega$. Ennél kisebb értéket igen nehéz megvalósítani.

Ampermérő méréshatárának kiterjesztése:

Sokszor előfordul, hogy az ampermérő méréshatára (I_m, tehát az a legnagyobb áramerősség amit az még mérni tud) kesebb mint a mérendő áram. Ilyen esetekben az ampermérővel párhuzamosan kapcsolunk egy ún. sönt ellenállást(5.2.24. ábra), amelyen a két áram különbségét elvezetjük.



5.2.24. ábra Ampermérő méréshatárának kiterjesztése

A sönt ellenállás nagyságát az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

$$R_s = \frac{U_m}{I_s},$$

$$I_s = I - I_m,$$

és így:

$$R_s = \frac{U_m}{I - I_m}.$$

Az ampermérőn eső feszültség:

$$U_m = I_m R_b,$$

ezért:

$$R_s = \frac{I_m R_b}{I - I_m}.$$

Legyen

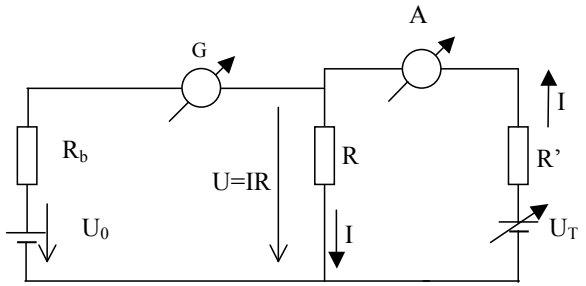
$$m = \frac{I}{I_m},$$

és így:

$$R_s = \frac{R_b}{m - 1}.$$

5.2.12. Kompenzációs feszültség mérés:

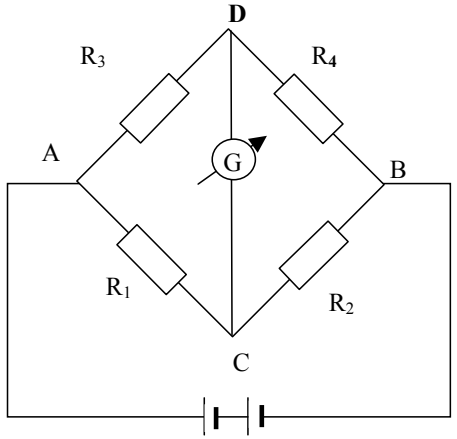
Még manapság is sokszor előfordulnak olyan mérési feladatok, amikor úgy kell meghatározni egy feszültségforrás belső feszültségeit, hogy ne terheljük, vagy nem terhelhetjük a feszültségforrást. Ekkor az un. kompenzációs feszültség mérést használjuk. Szükség van a méréshez (5.2.25. ábra) egy változtatható feszültség forrásra (U_T), egy ismert értékű ellenállásra (R), egy pontos árammérőre és egy galvanométerre (a galvanométer egy olyan mutatós műszer, amely se nem jó voltmérő, se nem jó ampermérő, azonban igen alkalmas kis áramok, illetve feszültségek kijelzésére, illetve mérésére), valamint egy biztonsági, áramkorlátozó ellenállásra (R').



5.2.25. ábra Kompenzációs feszültségmérés kapcsolási rajza

A mérés során az (R) ellenálláson átfolyó áramot addig változtatjuk, amíg a galvanométer 0-át nem mutat. Ekkor az ellenállásokon eső feszültség (I·R), megegyezik a mérendő feszültségforrás belső feszültségével (U_0) és ekkor a mérendő feszültségforrás nincs terhelve, mert a galvanométer 0-át mutat, azaz nem folyik áram rajta. Így U_0=I·R.
A mérés jelentősége ma inkább már méréstechnikai jelentőségű, tekintettel arra, hogy a gyakorlatban egyszerű digitális feszültségmérővel is lehet terhelés nélküli módon mérni. Ugyanakkor a Josepson átmenetek megjelenésével feszültség etalonok állnak rendelkezésünkre, és ezek használatához ezt az áramkört alkalmazzák.

5.2.13. Wheatstone-híd



5.2.26. ábra A Wheatstone híd

A Wheatstone híd az 5.2.26. ábrán bemutatott kapcsolás, illetve szűken véve a négy ellenállás és a galvanométer.
A kapcsolásnak régen igen nagy jelentősége volt az ellenállás mérésnél. Az egyik ellenállás változtatásával elérhető, hogy a hídba kapcsolt galvanométer nem jelez áramot. Ekkor azt mondjuk, hogy a híd ki van egyenlítve. Belátható hogy ez akkor teljesül, ha

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

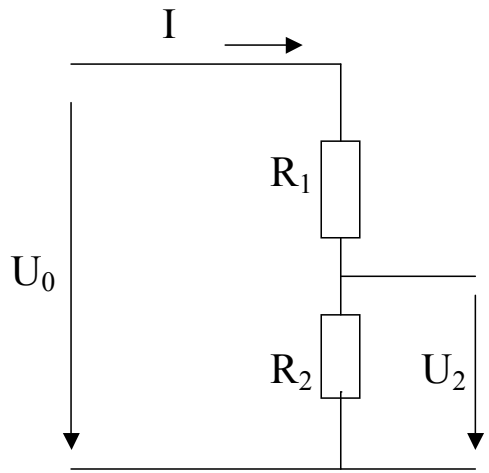
Ha R_4 az ismeretlen ellenállás, akkor:

$$R_4 = R_3 \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

5.2.14. Feszültségosztó éa áramosztó

Az alábbiakban bemutatunk két formulát, amelynek segítségével könnyebben oldhatunk meg elektromos feladatokat.

Feszültségosztó:
A feszültségosztó egy olyan kapcsolás (5.2.27. ábra), melynek segítségével nagyobb (U_0) feszültségből kisebbet (U_2) tudunk előállítani.



5.2.27. ábra A feszültségosztó

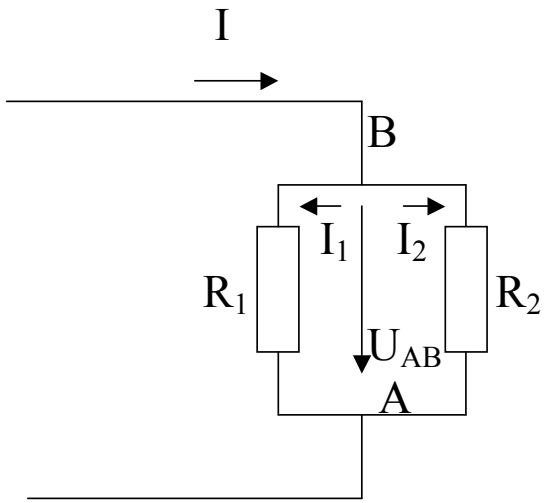
A feszültségosztón folyó áram:

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2},$$

Így az U_2, vagy kimeneti feszültség:

$$U_2 = I \cdot R_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Áramosztó:
Az áramosztó esetében sokszor az a feladat, hogy valamilyen áramerősségből kisebbet állítsunk elő az 5.2.28. ábra segítségével.



5.2.28. ábra Az áramosztó

A kér ellenállás eredője:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

A két ellenállás közös feszültsége:

$$U_{AB} = I \cdot R_e = I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

másrészt:

$$U_{AB} = I_1 \cdot R_1,$$

és így:

$$I \cdot R_e = I_1 \cdot R_1,$$

valamint

$$I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_1 \cdot R_1.$$

Innen:

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

és:

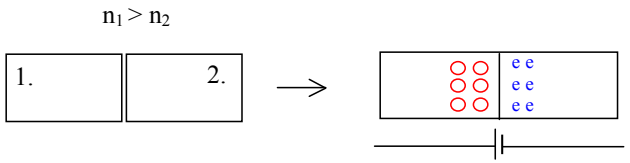
$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Hasonlóan:

$$I_1 = I_2 \cdot \frac{R_2}{R_1}.$$

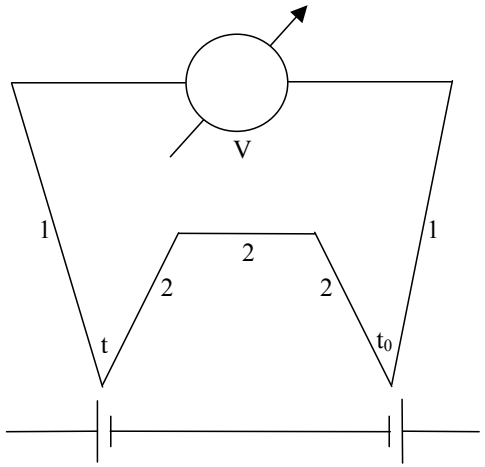
5.2.15. Termoelemek, Seebeck és Peltier effektus

Termoelemek és a Seebeck effektus:
Ha az elektrosztatika bevezetésekor alkalmazott két különböző anyagi minőségű fémdarabot újra egymásnak érintjük, akkor az 5.2.29. ábrának megfelelően ismét elektrontöbblet alakul ki az egyiken, és elektron hiány a másikon. Ez egy feszültségforrást is jelent.



5.2.29. ábra Feszültség keletkezése két érintkező fém között

A feszültségforrás feszültségét azonban nem tudjuk megmérni, mert a mérőeszköz csatlakoztatásával legalább egy új érintkezési felület jön létre, ami újabb feszültségforrást eredményez. Ha két különböző anyagi minőségű huzalból (1 és 2) elkészítjük az 5.2.30. ábrán látható kapcsolást, akkor a voltmérő két szembekapcsolt feszültségforrás eredő feszültségét méri. Ha mindkét érintkezési pont azonos hőmérsékleten van akkor a műszer nem



5.2.30. ábra A termoelem

tér ki. A jelenséget még könnyebb megérteni, ha a műszer és hozzávezetései is az 1 anyagból készülnek. Ha egy harmadik anyag ezek anyaga, akkor kétszer lép fel azonos érintkezési pont, s ha azok azonos hőmérsékleten vannak, az általuk hozott feszültség zérus. Az érintkezési pontokon fellépő feszültség első közelítésben más paramétertől nem függ, vagy ha igen, azt a hatást hanyagoljuk el.
Ha a két érintkezési pont az ábrán jelzett két különböző hőmérsékleten van, akkor a voltmérő mV nagyságrendű feszültséget mutat. Ennek hőmérséklet függését első közelítésben (kis hőmérséklet különbségek esetében) az alábbiakban adjuk meg.

$$U = \alpha(t - t_0),$$

Ahol α az ún. Seebeck együttható, és a jelenséget felfedezőjéről Seebeck effektusnak nevezzük. Azokat az anyag párokat, amelyek Seebeck együtthatója elegendően nagy hőmérséklet mérésre használhatjuk, és az ilyen eszközöket termoelemnek nevezzük. A termolemeket alkotó huzalok anyagának korrózióállónak, reprodukálhatóan működőnek, és az α-nak lehetőség szerint széles hőmérséklethatárok közözött a lehetőség szerint állandónak, vagy csak kicsit változónak kell lenni. Ezek alapján a legelterjedtebben használatos termoelemek és hőmérséklet tartományuk a következő:

Anyagpár	α (mV/100 ^oC)	Alkalmazási hőmérséklet (^{0}C)
Réz-konstantán	4	-200-600
Vas-konstantán	4,5	-200-900
Nikkelkróm-nikkel	5	0-1200
Platina-platinaródium	1	0-1600.

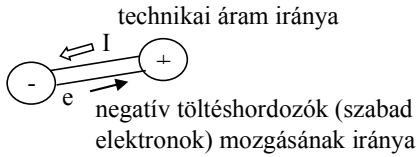
Peltier effektus:

A Seebeck effektus fordítottja is megfigyelhető, és felfedezőjéről Peltier effektusnak nevezzük. Eszerint, ha áram halad át két különböző vezető érintkezési vagy forrasztási helyén, akkor ezen a helyen az áram iránytól függően felmelegedés vagy lehűlés következik be. A hőmérséklet különbség arányos az áramerősséggel.
Általában hűteni szoktak vele. Ma a számítógépek processzorainak hűtésében szokták alkalmazni félvezetőből készült változataikat. Egy 1cm vastag, 10-12 cm^2 felületű példány képes akár 100W teljesítményt hő formájában elvezetni.
A Peltier effektusban a hőmérséklet változás olyan értékű, hogy a vele kiváltott termoáram az átvezetett árammal ellentétes irányú, önmagát gátolja, (energia megmaradás) energia kell a működtetéshez, nem lehet örökmozgót építeni belőle.

11. Egyenáramok

11.1. Áramerősség, áramsűrűség

Kössük össze két különböző töltésű testet (11.1.1. ábra) egy olyan anyaggal, amelyben legalább az egyik töltéshordozó szabadon mozoghat. Ekkor a negatív töltéssel rendelkező testről a pozitív felé elektronok mozognak, azt mondjuk, hogy villamos áram folyik. A XIX. század végén úgy gondolták, hogy a pozitív töltések mozognak ezért azok mozgásiránya lett az elfogadott, ún. technikai áramirány.



11.1.1. ábra A villamos áram származtatása

Célszerű bevezetni az **áramerősség** (I) fogalmát, ami az adott keresztmetszeten egységnyi idő alatt átáramlott villamos töltés:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \text{ vagy pontosabban : } I = \frac{dQ}{dt}. \qquad (11.1.1.)$$

Az áramerősség mértékegysége:

$$[I] = \frac{C}{s} = A \text{ (Amper)}.$$

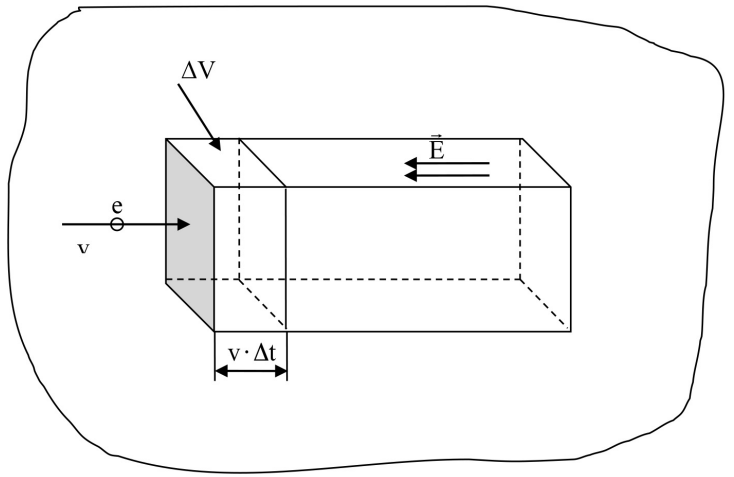
Az 1960-as évekig a C volt a mértékrendszer villamos alapmennyisége, azonban mára a könnyebb mérhetőség miatt az A vette át a szerepét, ezért szokás mondani, hogy 1C=1 As.

Az áramerősség mellett célszerű bevezetni az áramsűrűséget ami: az egységnyi felületen áthaladó áramerősség.

$$J = \frac{dI}{dA} \quad \left(\frac{I}{A}\right) \qquad [J] = \frac{A}{m^2}; \frac{A}{mm^2}$$

Az általános Ohm törvény

Az elektronok csak bizonyos anyagokban mozoghatnak, ezeket a elektromosan vezetőknek, másokban nem mozoghatnak szabadon (vagy egyáltalán nem), azokat a szigetelőknek nevezzük.
A vezető anyagokban mozgó töltéshordozók (elektronok, pozitív és negatív ionok, esetleg protonok) mozgása eredményeképpen lejátszódó jelenségeket vizsgáljuk a továbbiakban. Ehhez képzeljünk el egy nagy anyagmennyiséget, amelyben áram folyik. Gondolatban vágjunk ki belőle egy téglalap keresztmetszetű hasábot (11.1.2.ábra). Tegyük fel, hogy minden töltéshordozó ugyanakkora (e) töltéssel rendelkezik, és mindegyik azonos v sebességgel mozog a kezdő keresztmetszetre merőlegesen. A hasáb keresztmetszete legyen A. A szabadon mozgó töltéshordozók koncentrációja (n), azaz az egységnyi térfogatban levő szabadon mozgó töltéshordozók száma (N) A hasábban állandó villamos mező legyen az ábrán megfelelő irányítással. A töltéshordozók mozogjanak az ábrán megjelölt irányban. A t=0 időpontban a hasáb kezdeti keresztmetszetében levő töltéshordozók Δt idő alatt vΔt utat tesznek meg, és az ezalatt az idő alatt a kezdő keresztmetszetet átlépő töltéshordozók által



11.1.2. ábra Töltéshordozók mozgása egy vezetőből kivágottnak gondolt hasábban elfoglalt térfogat

$$\Delta V = A \cdot v \cdot \Delta t$$
,

az ezalatt belépett töltéshordozók száma:

$$N = \Delta V \cdot n .$$

A hasáb kezdeti keresztmetszetén ezalatt az idő alatt belépett töltés:

$$\Delta Q = N \cdot e = \Delta V \cdot n \cdot e = n \cdot e \cdot v \cdot A \cdot \Delta t .$$

Így az áramerősség:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n \cdot e \cdot v \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = n \cdot e \cdot v \cdot A ,$$

és az áramsűrűség:

$$J = \frac{I}{A} = \frac{n \cdot e \cdot v \cdot \cancel{A}}{\cancel{A}} = n \cdot e \cdot v ,$$

azaz:

$$J = n \cdot e \cdot v .$$

A vizsgálatok szerint a töltéshordozók sebessége arányos a térerősséggel:

$$v = \mu \cdot E ,$$

ahol μ mozgékonyság azaz az egységnyi térerősség hatására kialakuló sebesség. Mértékegysége:

$$[\mu] = \frac{\frac{m}{sec}}{V} = \frac{m}{V sec} .$$

Ezért:

$$J = n \cdot e \cdot \mu \cdot E ,$$

ahol a jobb oldal első három tagja az anyagra jellemző állandó, ezért célszerű azokat egyetlen betűvel jelölni.

$$\sigma = n \cdot e \cdot \mu .$$

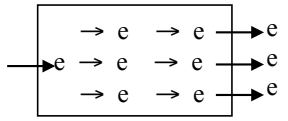
A mennyiség neve fajlagos villamos vezetőképesség. Mértékegységéről később szólunk. Ezzel kapjuk, hogy:

$$J = \sigma \cdot E , \qquad (11.1.2)$$

Aminek a neve **Általános Ohm – törvény**. Ennek vektori alakja:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} . \qquad (11.1.3)$$

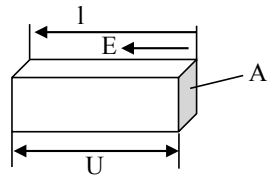
A töltéshordozók mozgását szemléltethetjük az elektronok vezetőben való mozgásával. Mivel az elektronok taszítják egymást(10.1.3.ábra), (az utolsók el is hagyják a vezetőt) a hatás gyorsabban (a fénysebességhez közeli érték is kialakulhat) terjed, mint maga a mozgás (rézben az elektronok sebessége mm/s nagyságrendű).



11.1.3. ábra Elektronok mozgása vezetőben

Vezetődarab Ohm törvénye

A továbbiakban válasszunk egy olyan vezetőt, amely párhuzamos falú, állandó keresztmetszetű (11.1.4. ábra) és az anyagi minősége is homogén. Ekkor az előzőket felhasználva: a térerősség homogén lesz, s vele a töltéshordozók sebessége is.



11.1.4. ábra Állandó keresztmetszetű és hosszúságú vezető

A vezetőben homogén villamos tér lép fel (ettől mozognak a töltéshordozók), ellentétben az elektrosztatikával! A kialakuló térerősség u feszültség esetében:

$$\frac{U}{l} = E .$$

Az általános Ohm törvény következtében:

$$J = \sigma \cdot E$$

$$\downarrow$$

$$\frac{I}{A} = \sigma \cdot \frac{U}{l}$$

Kis átalakítással kapjuk:

$$U = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} \cdot I,$$

ahol a jobb oldal első két tagja egy adott vezetődarab esetében állandó, jelöljük R-rel, és a neve villamos ellenállás. Ezzel az egyenlet a következő alakot ölti:

$$U = I \cdot R. \qquad (11.1.4)$$

Ez Ohm törvénye, vagy Ohm törvénye vezetődarabra és még két alakban írható:

$$I = \frac{U}{R}$$

$$R = \frac{U}{I}.$$

Az ellenállás mértékegysége:

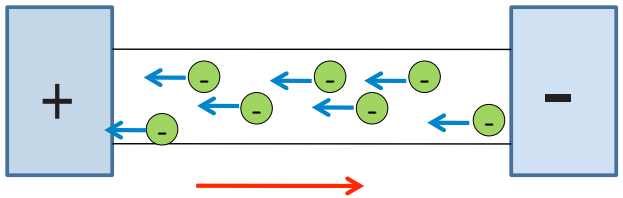
$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} \qquad 1\frac{V}{A} = 1\Omega.$$

Az Ohm törvénye szavakban:
Ha egy R ellenállású vezetőn I áram folyik, akkor azon $U = I \cdot R$ nagyságú **feszültség esik**, vagy mérhető.
Fordítva:

Ha egy R ellenállású vezetőre U feszültséget kapcsolok, akkor $I = \frac{U}{R}$ nagyságú áram fog rajta folyni.

Egyenáram

Két különböző töltésű testet egy olyan anyaggal összekötve, amelyben legalább az egyik töltéshordozó szabadon mozoghat, a negatív töltéssel rendelkező testről a pozitív felé elektronok mozognak, azt mondjuk, hogy villamos áram folyik.



A XIX. század végén úgy gondolták, hogy a pozitív töltések mozognak ezért azok mozgásiránya lett az elfogadott, ún. technikai áramirány.

technikai áramirány: a pozitív pólustól a negatív felé

fizikai áramirány:a negatív pólustól a pozitív felé (elektronok áramlási iránya)

Áramerősség: az adott keresztmetszeten egységnyi idő alatt átáramlott villamos töltés.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \text{ vagy pontosabban : } I = \frac{dQ}{dt}$$

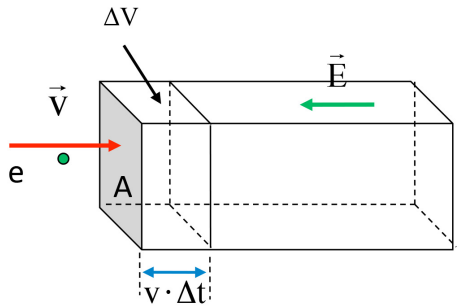
Az áramerősség mértékegysége: $[I] = \frac{C}{sec} = A$

áramsűrűség: az egységnyi felületen áthaladó áramerősség

$$J = \frac{dI}{dA} \quad \left(\frac{I}{A}\right) \qquad [J] = \frac{A}{m^2} ; \frac{A}{mm^2}$$

Az elektronok csak bizonyos anyagokban mozoghatnak, ezeket elektromosan **vezetőknek**, másokban nem mozoghatnak szabadon (vagy egyáltalán nem), azokat a **szigetelőknek** nevezzük.

Tegyük fel, hogy minden töltéshordozó ugyanakkora (e) töltéssel rendelkezik, és mindegyik azonos v sebességgel mozog a kezdő keresztmetszetre merőlegesen.



töltéshordozók koncentrációja: n

hasáb keresztmetszete: A

térerősség: $\vec{E}$

Δt idő alatt a kezdő keresztmetszetet átlépő töltéshordozók által elfoglalt térfogat: $\Delta V = A \cdot v \cdot \Delta t$

az ezalatt belépett töltéshordozók száma: $N = \Delta V \cdot n$

az ezalatt az idő alatt belépett töltés:

$$\Delta Q = N \cdot e = \Delta V \cdot n \cdot e = n \cdot e \cdot v \cdot A \cdot \Delta t$$

az áramerősség:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n \cdot e \cdot v \cdot A \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = n \cdot e \cdot v \cdot A$$

az áramsűrűség: $$J = \frac{I}{A} = \frac{n \cdot e \cdot v \cdot \cancel{A}}{\cancel{A}} = n \cdot e \cdot v$$

a töltéshordozók sebessége arányos a térerősséggel:

$$v = \mu \cdot E$$

ahol μ **mozgékonyság** azaz az egységnyi térerősség hatására kialakuló sebesség

Mértékegysége: $$[\mu] = \frac{\frac{m}{sec}}{\frac{V}{m}} = \frac{m^2}{V\,sec}$$

Ezért: $$J = n \cdot e \cdot \mu \cdot E$$

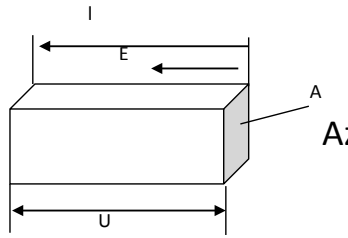
a jobb oldal első három tagja az anyagra jellemző állandó, a **fajlagos villamos vezetőképesség:** $$\sigma = n \cdot e \cdot \mu$$

Ezzel kapjuk, hogy: $J = \sigma \cdot E$

Általános Ohm – törvény: $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$

Válasszunk egy olyan vezetőt, amely párhuzamos falú, állandó keresztmetszetű és az anyagi minősége is homogén. Ekkor a térerősség homogén lesz, s vele a töltéshordozók sebessége is.

A kialakuló térerősség U feszültség esetében:



$$\frac{U}{\ell} = E$$

Az általános Ohm törvény következtében:

$$J = \sigma \cdot E \Rightarrow \frac{I}{A} = \sigma \cdot \frac{U}{\ell}$$

átalakítással kapjuk: $$U = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{A} \cdot I$$

a jobb oldal első két tagja egy adott vezetődarab esetében állandó, jelöljük R-rel, a neve **villamos ellenállás**.

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{A}$$

Az ellenállás mértékegysége: $$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} \qquad 1\frac{V}{A} = 1\Omega$$

Ezzel az egyenlet a következő alakot ölti:

$$U = I \cdot R$$

Ez **Ohm törvénye**, vagy **Ohm törvénye vezetődarabra**

11.2. Ellenállás, fajlagos ellenállás

Az ellenállás kifejezésére visszatérve:

$$R = \frac{1}{\underbrace{\sigma}_{\rho}} \cdot \frac{l}{A},$$

azaz:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}, \qquad (11.2.1.)$$

ahol ρ a fajlagos ellenállás, mértékegysége:

$$[\rho] = \Omega m \; ; \; \Omega \cdot \frac{mm^2}{m}.$$

Azaz egy l hosszúságú, A keresztmetszetű, ρ fajlagos ellenállású vezető R ellenállása arányos a vezető hosszával, fordítva arányos a keresztmetszetével, és az arányossági tényező a fajlagos ellenállás.

A réz fajlagos ellenállása: $\rho = 0{,}017\Omega\frac{mm^2}{m}$. Szigetelő anyagoké: $1000\Omega\frac{mm^2}{m}$- től kezdődik (teflon, borostyán 10^{26}).

A fajlagos ellenállás (ρ) reciproka a fajlagos vezetőképesség (σ), melynek mértékegysége:

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega m}.$$

A fajlagos ellenállás hőmérséklet függése

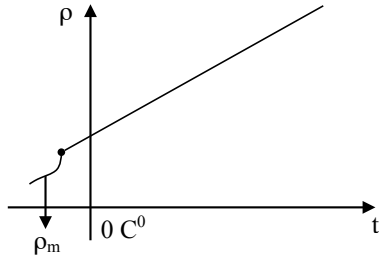
A fajlagos ellenállás függ a hőmérséklettől az alábbiak szerint:

Fémek esetében:

Szobahőmérséklet környékén (általában mintegy 200K felett) a fémek fajlagos ellenállása a hőmérséklet növekedésével lineárisan növekszik, és fordítva az 11.2.1. ábra, és az alábbi egyenlet szerint:

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (t - t_0)) \qquad [\alpha] = \frac{1}{^0C}, \qquad (11.2.2)$$

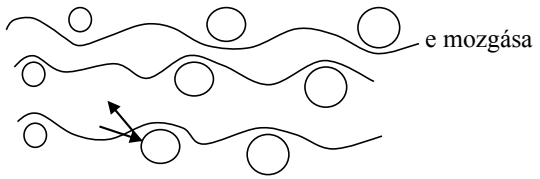
ahol α a fajlagos ellenállás hőmérsékleti tényezője (értéke fémeknél és ötvözeteknél 10^{-5} és 10^{-3} 1/ ^oC, között van), ρ_0 a fajlagos ellenállás t_0 hőmérsékleten, és ρ pedig t hőmérsékleten.



11.2.1. ábra Fémek fajlagos ellenállásának hőmérséklet függése

Mintegy 200K alatt a hőmérséklet csökkenésével a fajlagos ellenállás T^5 hatványfüggvényt követve csökken. Bizonyos fémek (pl. az ólom, de a réz nem), fémötvözetek, illetve újabban kerámiák, fajlagos ellenállása a 100K alatti hőmérséklet tartományban $10^{-24}\Omega$m alá csökken, azaz gyakorlatilag elveszíti ellenállását. Az anyagok ezen állapotát szupravezető állapotnak nevezzük. Rendkívüli nagy jelentősége van a szupravezető anyagoknak. Egyrészt a villamos energia továbbításában várnak nagy megtakarítást alkalmazásukkal (ezen a területen egyenlőre leküzdhetetlen akadályt jelent, hogy a szupravezető állapot megszűnik, ha a mágneses mező erőssége meghalad egy bizonyos, ma még elég kicsiny értéket), másrészt kis energiafogyasztású, a számítógépekben használatos igen gyors kapcsolóelemek kifejlesztésére van remény.

Fémek fajlagos ellenállásának a magyarázata: Az atomok meghatározott rend szerint helyezkednek el, a töltéshordozók úgy mozognak, ha ideális a fém, a kristályrács ideális, mintha a fém ott sem lenne.



11.2.2. ábra Ideális fémrácsban az elektron úgy mozog, mintha a rács ott sem lenne, rácshibákon azonban szóródik, és megjelenik az ellenállás

Minden fématom legalább egy elektronját beadja a rács kötésébe, ezek az atomok közötti térben egyenletesen ún. elektronfelhő formájában oszlanak el.

Azért van ellenállás, mert a fématomok rezegnek azokba beleütköznek az elektronok, s ennek következtében mozgásuk iránya megváltozik, csökken az időegység alatt a fémen keresztül jutó elektronok száma, ezzel az áram, azaz az ellenállás nő (ha nő a hőmérséklet nő az atomok rezgési amplitúdója, s ezzel nő annak a valószínűsége, hogy az elektron beleütközik a rezgő atomba). Ha az egyik atom nagyobb, vagy kisebb mint a többi (azaz szennyeződés van) akkor visszapattan az elektron, elektromos ellenállás lép fel. A fajlagos ellenállás az alábbi egyenletnek megfelelően egy, a rácsrezgések, és egy a szennyeződések miatt fellépő tag összegéből áll.

$$\rho = \rho_r + \rho_{sz}. \qquad (11.2.3)$$

Az ötvözetek közül a konstantán és a manganin fajlagos ellenállása alig függ a hőmérséklettől, ezért a precíziós mérőellenállásokat ilyen ötvözetekből készítik.

Az ellenállás hőmérsékleti függésének egyek alkalmazása az ellenállás-hőmérő, amely szinte kizárólag vékony platina drótból készült kerámiába ágyazott, platina huzalból készített 100, vagy 200Ω ellenállású spirális.
Az ellenállást megmérve ρ(T) ismeretében a hőmérséklet megállapítható.

Félvezetők esetében:
Félvezetők esetében a fajlagos ellenállás exponenciálisan

$$\rho = \rho_s \cdot e^{\frac{A}{T}}, \qquad (11.2.4)$$

csökken a hőmérséklet növekedésével, ahol ρ_s és A állandó. A nagyon erős hőmérsékletfüggés miatt nagyon érzékeny és olcsó hőmérsékletmérő készíthető a segítségükkel, a felső hőmérséklet határ azonban ritkán magasabb mint 200 ^oC.

Ellenállás, fajlagos ellenállás

Ohm törvénye: $$I = \frac{U}{R}$$

szavakban: Ha egy R ellenállású vezetőre U feszültséget kapcsolunk,

akkor $I = \frac{U}{R}$ nagyságú áram fog rajta folyni.

Máshogyan: Ha egy R ellenállású vezetőn I áram folyik, akkor azon $U = I \cdot R$ nagyságú feszültség esik.

Az ellenállás kifejezése: $$R = \underbrace{\frac{1}{\sigma}}_{\rho} \cdot \frac{\ell}{A}$$

azaz: $$R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}$$

ahol ρ a **fajlagos ellenállás**, mértékegysége: $$[\rho] = \Omega m \; ; \; \Omega \cdot \frac{mm^2}{m}$$

Azaz egy ℓ hosszúságú, A keresztmetszetű, ρ fajlagos ellenállású vezető R ellenállása arányos a vezető hosszával, fordítva arányos a keresztmetszetével, az arányossági tényező a fajlagos ellenállás.

A réz fajlagos ellenállása: $\rho = 0{,}017\Omega\frac{mm^2}{m}$

Szigetelő anyagoké $1000\ \Omega\frac{mm^2}{m}$ -nél kezdődik

A fajlagos ellenállás (ρ) reciproka a fajlagos vezetőképesség (σ), melynek mértékegysége:

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega m}$$

A fajlagos ellenállás függ a hőmérséklettől:

Fémek esetében:

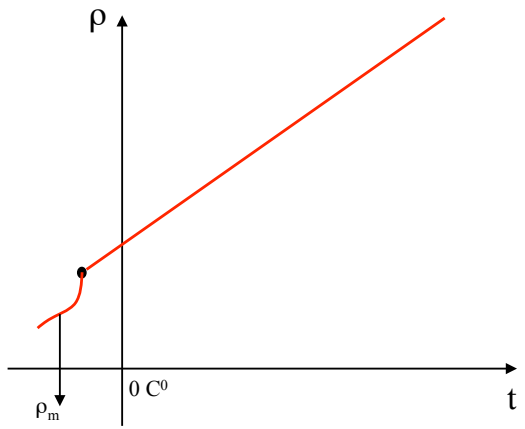
Szobahőmérséklet környékén (általában mintegy 200K felett) a fémek fajlagos ellenállása a hőmérséklet növekedésével lineárisan növekszik:

$$\rho = \rho_0 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (t - t_0)\right]$$

ahol α **a fajlagos ellenállás hőmérsékleti tényezője**, ρ_0 a fajlagos ellenállás t_0 hőmérsékleten, és ρ pedig t hőmérsékleten.

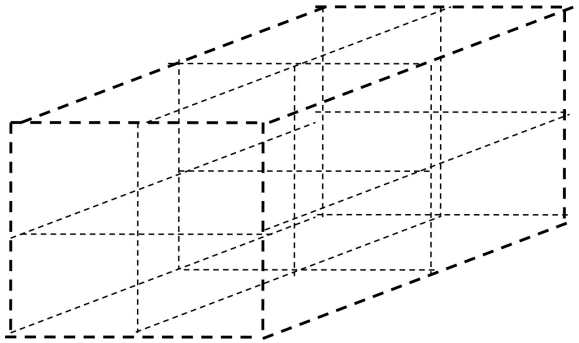
mértékegysége: $[\alpha] = \frac{1}{^0C}$

Mintegy 200K alatt a hőmérséklet csökkenésével a fajlagos ellenállás T^5 hatványfüggvényt követve csökken. Bizonyos fémek (pl. az ólom), fémötvözetek, illetve újabban kerámiák, fajlagos ellenállása a 100K alatti hőmérséklet tartományban $10^{-24}\Omega$m alá csökken, azaz gyakorlatilag elveszíti ellenállását.



Az anyagok ezen állapotát **szupravezető állapotnak** nevezzük. Rendkívüli nagy jelentősége van a szupravezető anyagoknak. Egyrészt a villamos energia továbbításában várnak nagy megtakarítást alkalmazásukkal másrészt a számítógépekben használatos igen gyors kapcsolóelemek kifejlesztésére van remény.

Fémek fajlagos ellenállásának a magyarázata: Az atomok meghatározott rend szerint helyezkednek el, ott rezgőmozgást végeznek:



Ha a kristályrács ideális, a töltéshordozók úgy mozognak, mintha a fém ott sem lenne.

Minden fématom legalább egy elektronját beadja a rács kötésébe, ezek az atomok közötti térben egyenletesen ún. elektronfelhő formájában oszlanak el.

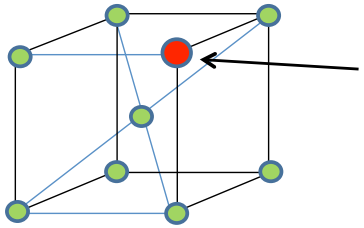
Az ellenállás egyik oka: a fématomok rezegnek azokba beleütköznek az elektronok, ennek következtében mozgásuk iránya megváltozik, csökken az időegység alatt a fémen keresztül jutó elektronok száma, ezzel az ellenállás nő.

Ha nő a hőmérséklet nő az atomok rezgési amplitúdója, s ezzel nő annak a valószínűsége, hogy az elektron beleütközik a rezgő atomba.

Az ellenállás másik oka:

Ha az egyik atom nagyobb, vagy kisebb mint a többi (azaz szennyeződés van) akkor arról „visszapattan” az elektron, elektromos ellenállás lép fel.

térben középpontos kockarács:

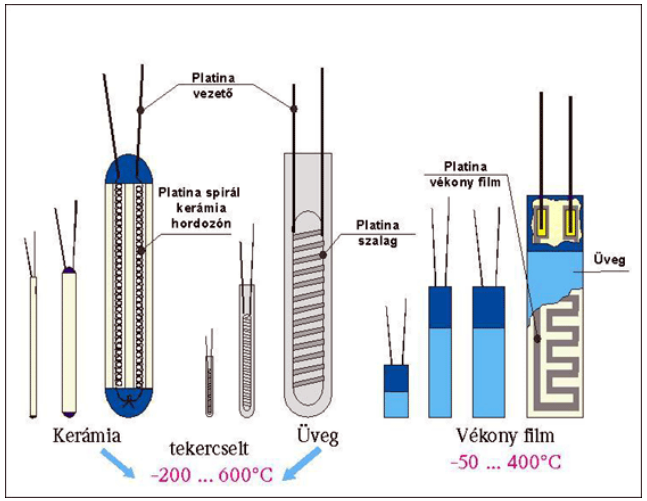


A fajlagos ellenállás az alábbi egyenletnek megfelelően egy, a rácsrezgések, és egy a szennyeződések miatt fellépő tag összegéből áll:

$$\rho = \rho_r + \rho_{sz}$$

Az ötvözetek közül a konstantán és a manganin fajlagos ellenállása alig függ a hőmérséklettől, ezért a precíziós mérőellenállásokat ilyen ötvözetekből készítik.

Az ellenállás hőmérsékleti függésének egyek alkalmazása az ellenállás-hőmérő, amely szinte kizárólag vékony platina drótból készült kerámiába ágyazott, platina huzalból készített 100, vagy 200Ω ellenállású spirális.



Pt100 érzékelők felépítése

Félvezetők esetében:

Félvezetők esetében a fajlagos ellenállás exponenciálisan csökken a hőmérséklet növekedésével:

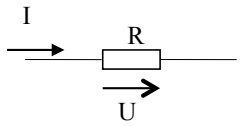
$$\rho = \rho_s \cdot e^{\frac{A}{T}}$$

ahol ρ_s és A állandó

A nagyon erős hőmérsékletfüggés miatt nagyon érzékeny és olcsó hőmérsékletmérő készíthető a segítségükkel, a felső hőmérséklet határ azonban ritkán magasabb mint 200 ^{o}C.

11.3. Ellenállások kapcsolása

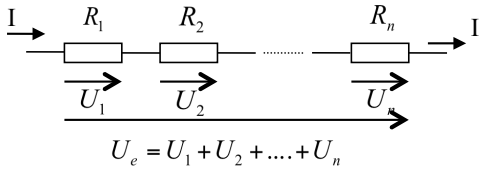
Az elektronikában igen sokszor használunk adott ellenállású vezető darabokat, amelyeket mint alkatrészeket ellenállásnak nevezünk. Az ellenállás rajzjelét az 11.3.1. ábrán mutatjuk be.

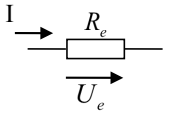


11.3.1. ábra Az ellenállás mint alkatrész rajzjele

Ellenállások soros kapcsolása:

Kössünk sorba n darab ellenállást az 11.3.2. ábrának megfelelően.





11.3.2. ábra Ellenállások soros kapcsolása és az eredő ellenállás

Felmerül a kérdés, hogy mekkora eredő ellenállás helyettesíti az n darab sorba kapcsolt ellenállást. A kérdésre a választ az alábbiakban adjuk meg.
Az eredő akkor helyettesíti a többi ellenállást, ha azonos áram esetében a feszültségesés az eredőn megegyezik a z n darab ellenálláson eső feszültség összegével:

$$U_e = U_1 + U_2 + ... + U_n.$$

Az egyes ellenállásokon eső feszültség:

$$U_e = I \cdot R_e,\ U_1 = I \cdot R_1,\ U_2 = I \cdot R_2,\ ....\ \text{és}\ U_n = I \cdot R_n.$$

Ezeket a feszültségeket behelyettesítve a fenti egyenletbe kapjuk:

$$I \cdot R_e = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + ... + I \cdot R_n,$$

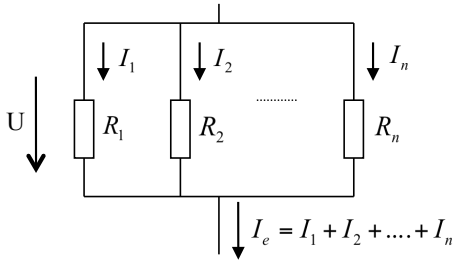
I-vel egyszerűsítve kapjuk:

$$R_e = R_1 + R_2 + ... + R_n . \qquad (11.3.1)$$

Ellenállások soros kapcsolása esetén mindegyik ellenálláson ugyanaz az áram folyik keresztül, és az eredő ellenállás mindig nagyobb mint a rész ellenállások legnagyobbika.

Párhuzamos kapcsolás:

Kapcsoljunk párhuzamosan n darab ellenállást az 11.3.3. ábrán látható módon. Ekkor minden ellenálláson ugyanakkora lesz a feszültség. Az n darab ellenállást helyettesítő egy darab eredő ellenállás akkor megfelelő, ha ugyanakkora feszültségre kapcsolva akkora áram folyik keresztül rajta, mint az n darab ellenálláson átfolyó áramerősségek összege.



11.3.3. ábra Ellenállások párhuzamos kapcsolása és az eredő ellenállás

$$I_e = I_1 + I_2 + ... + I_n .$$

Az egyes áramokat az Ohm törvényből határozhatjuk meg:

$$I_e = \frac{U}{R_e},\ I_1 = \frac{U}{R_1},\ I_2 = \frac{U}{R_2}, ... \text{ és } I_n = \frac{U}{R_n}.$$

Behelyettesítve ezeket a fenti egyenletbe kapjuk:

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + ... + \frac{U}{R_n}.$$

U-val egyszerűsítve adódik:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}.$$

Általában ezt a formulát szokták megadni végképletként, de ennek használata sokszor hibás. Az alábbi, bár kicsit bonyolultabb, de mégis könnyebben memorizálható formula:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}}. \qquad (11.3.2)$$

Ellenállások párhuzamos kapcsolásakor az eredő mindig kisebb, mint a legkisebb ellenállás. Ha n darab azonos, R nagyságú ellenállást kapcsolunk párhuzamosan, akkor az eredő:

$$R_e = \frac{R}{n}.$$

Két ellenállás esetében:

$$R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Akárcsak a kondenzátoroknál, itt is el kell mondani az egyes kapcsolások gyors és szemléletes megkülönböztetésének módját, amelyet a következőkben adunk meg.

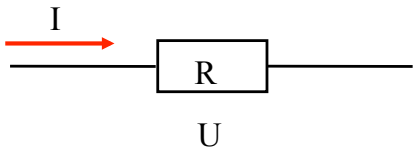
Két ellenállás akkor, és csakis akkor van sorba kötve, ha csak egyik kivezetésük van közös pontra kötve, és oda más már nem csatlakozik.
Sorosan kötött ellenállásokon folyó áram megegyezik.
Figyelem! Fordítva nem feltétlenül igaz. Ha például két azonos nagyságú ellenállás párhuzamosan van kötve, a rajtuk átfolyó áram megegyezik.

Két ellenállás akkor és csak akkor van párhuzamosan kötve, ha mindkét kivezetésük (páronként) azonos pontra van kötve. (A közös pontokra bármely kapcsolási elem köthető, az előző két ellenállás párhuzamosságát az nem befolyásolja.)
Párhuzamosan kötött ellenállásokon eső feszültség azonos.
Figyelem! Fordítva ez nem feltétlenül igaz. Két azonos nagyságú, sorba kötött ellenállás feszültségének nagysága is azonos!

Ellenállások kapcsolása

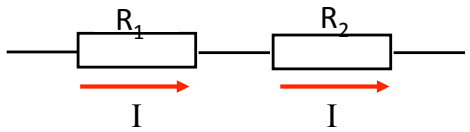
Az elektronikában igen sokszor használunk adott ellenállású vezető darabokat, amelyeket mint alkatrészeket ellenállásnak nevezünk.

Az ellenállás rajzjele:



Ellenállások soros kapcsolása:

Két ellenállás akkor, és csakis akkor van sorba kötve, ha csak egyik kivezetésük van közös pontra kapcsolva, és oda más már nem csatlakozik.

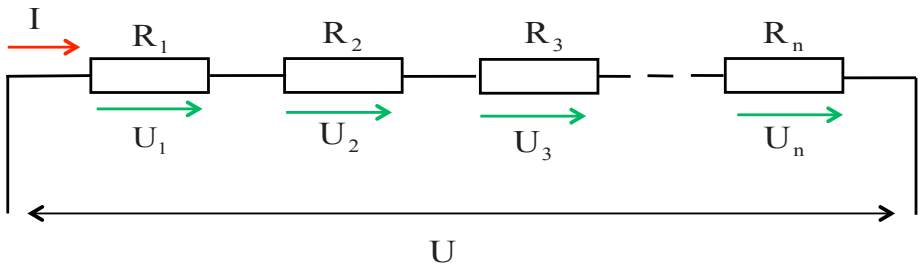


Sorosan kötött ellenállásokon folyó áram megegyezik.

Fordítva nem feltétlenül igaz! Ha például két azonos nagyságú ellenállás párhuzamosan van kötve, a rajtuk átfolyó áram szintén megegyezik.

Kössünk sorba n darab ellenállást:

Kapcsoljunk az ellenállásokra U feszültséget



A különböző ellenállásokon más-más feszültség esik

a feszültségek összege megegyezik a láncra kapcsolt feszültséggel:

$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n$$

Mekkora eredő ellenállás helyettesíti az n darab sorba kapcsolt ellenállást? Az eredő akkor helyettesíti a többi ellenállást, ha azonos áram esetében a feszültségesés az eredőn megegyezik az n darab ellenálláson eső feszültség összegével.

Az ellenállásokon ugyanaz az áram folyik.

Így az egyes ellenállásokon eső feszültség:

$$U_1 = I \cdot R_1 \qquad U_2 = I \cdot R_2 \qquad U_n = I \cdot R_n$$

Az ellenálláslláncra kapcsolt feszültség: $U = I \cdot R_e$

Behelyettesítve a feszültségekre felírt egyenletbe :

$$I \cdot R_e = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + ... + I \cdot R_n$$

I-vel egyszerűsítve kapjuk:

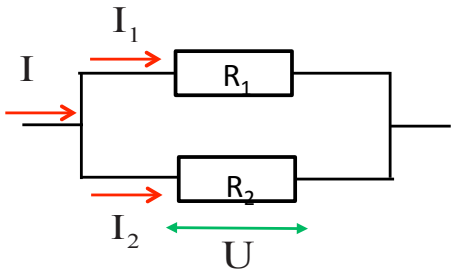
$$R_e = R_1 + R_2 + ... + R_n$$

Azaz: $$R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Ellenállások soros kapcsolása esetén mindegyik ellenálláson ugyanaz az áram folyik keresztül, és az eredő ellenállás mindig nagyobb mint a rész ellenállások legnagyobbika.

Párhuzamos kapcsolás:

Két ellenállás akkor és csak akkor van párhuzamosan kötve, ha mindkét kivezetésük (páronként) azonos pontra van kötve. (A közös pontokra bármely kapcsolási elem köthető, az előző két ellenállás párhuzamosságát az nem befolyásolja.)



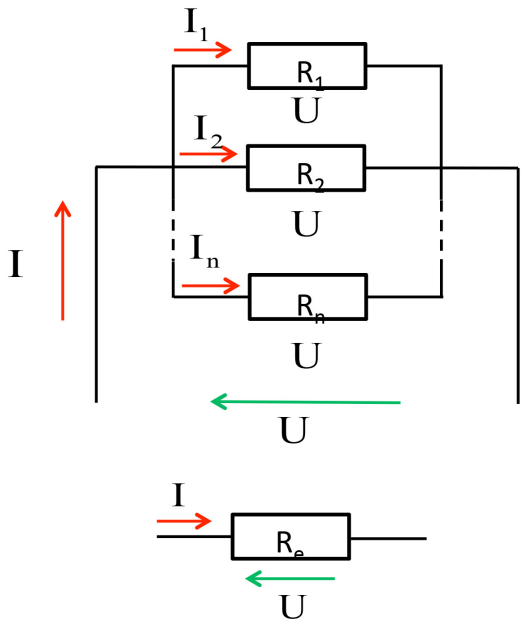
Fordítva ez nem feltétlenül igaz. Két azonos nagyságú, sorba kötött ellenállás feszültségének nagysága is azonos!

Párhuzamosan kötött ellenállásokon az áram megoszlik, a feszültség azonos.

Kapcsoljunk párhuzamosan n darab ellenállást

Kapcsoljunk U feszültséget az ellenállásokra:

Ekkor minden ellenálláson ugyanakkora lesz a feszültség.



A főágban folyó áram az egyes ellenállásokon megoszlik

Az n darab ellenállást helyettesítő egy darab eredő ellenállás akkor megfelelő, ha ugyanakkora feszültségre kapcsolva akkora áram folyik keresztül rajta, mint az n darab ellenálláson átfolyó áramerősségek összege.

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n$$

Az egyes áramokat az Ohm törvényből határozhatjuk meg:

A főág árama: $I = \frac{U}{R_e}$

Az egyes ágak áramerősségei Ohm törvénye alapján:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \qquad I_2 = \frac{U}{R_2} \qquad I_n = \frac{U}{R_n}$$

Behelyettesítve ezeket az áramerősségek egyenletébe:

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + ... + \frac{U}{R_n}$$

U-val egyszerűsítve adódik:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}$$

Az eredő ellenállás párhuzamos kapcsolás esetén tehát:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}}$$

Máshogyan: $$R_e = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \right]^{-1}$$

Ellenállások párhuzamos kapcsolásakor az eredő mindig kisebb, mint a legkisebb ellenállás. Ha n darab azonos, R nagyságú ellenállást kapcsolunk párhuzamosan, akkor az eredő:

$$R_e = \frac{R}{n}$$

Két ellenállás esetében:

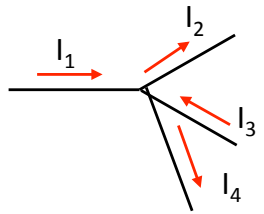
$$R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon tehát ugyanaz a feszültség esik, mint amit az egész rendszerre kapcsoltunk, az egyes ellenállásokon folyó áram viszont megoszlik, az áramok összege egyenlő a főág áramával.

Kirchoff törvényei,
Ohm törvénye teljes áramkörre

Kirchoff I. törvénye (csomóponti törvény):

Tekintsünk egy csomópontot, ahova I_1, I_2, I_3, I_4, … áramok folynak be (vagy ki).



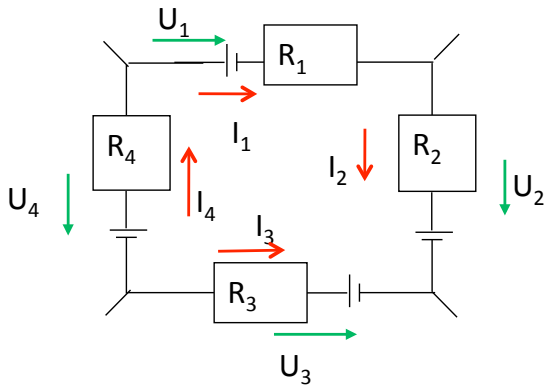
Egy csomópontba a befolyó és kifolyó áramok erősségének algebrai összege zérus.

$$\sum_{i=n}^{n} I_i = 0$$

Ez a törvény a töltésmegmaradást fejezi ki, azaz csomópontban töltés nem tűnik el és nem is keletkezik.

Kirchoff II. törvénye (huroktörvény):

Tekintsünk egy zárt áramkört, amelyben vannak ellenállások és feszültségforrások:



Zárt áramkörben a feszültségesések és telepfeszültségek algebrai összege zérus.

A törvény matematikai alakja: $$\sum_{i=1}^{n} U_i + \sum_{j=1}^{m} I_j \cdot R_j = 0$$

Az egyenáram munkája és teljesítménye

A potenciál és feszültség definíciójából következik, hogy ha egy Q töltést a mező végigvisz kér U potenciálkülönbségű pont között, akkor azon W=QU munkát végez.

Ha a feszültség, és az áram időben állandó, akkor a töltés Q=It alakban, adható meg.

A munka: $$W = U \cdot I \cdot t$$

A teljesítmény az időegység alatt végzett munka:

$$P = U \cdot I$$

illetve: $$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

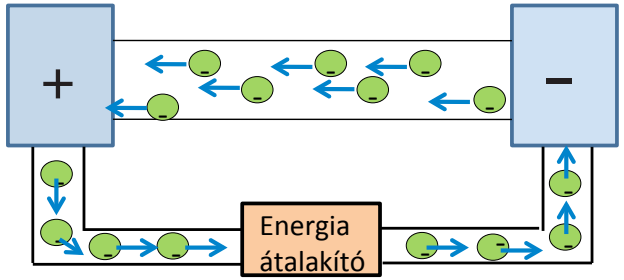
A villamos áram munkát tud végezni, azaz energiát szállít, az energiaszállítás azonban nem a vezetőben, hanem a vezető körüli elektromágneses mezőben történik.

Változó feszültség és áram esetében a munka:

$$W = \int_0^t U(t) \cdot I(t) \cdot dt$$

Ohm törvénye teljes áramkörre

Két elektromosan töltött testet, amelyeken az elektromos töltés nagysága nem egyezik meg összekötve egy vezetővel töltés áramlás indul meg közöttük (elektromos áram folyik), ami addig tart, amíg a töltések ki nem egyenlítődnek.

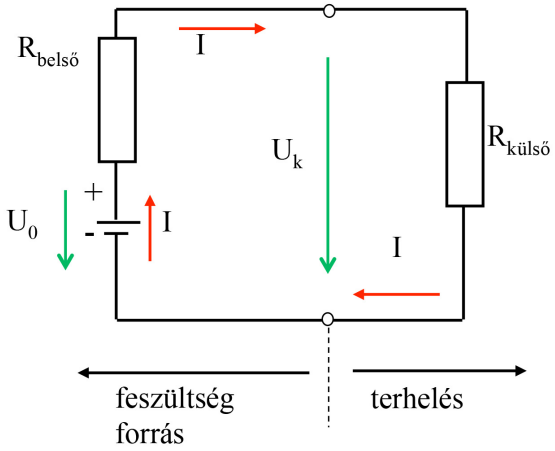


Ha folyamatos áramot szeretnénk fenntartani, úgy a már átáramlott töltéseket vissza kell vinni a kiindulási pontra. Ezt csak munkavégzés árán tudjuk biztosítani: mechanikai energiával meghajtott generátorral, molekuláris energiát felhasználó kémiai reakcióval, napenergia segítségével.

Termodinamika II. főtétele: **energia átalakítás nem lehetséges 100 % hatásfokkal**

Legyen a töltéshordozókat visszajuttató egység egy **feszültségforrás**, a folyamat veszteségeit tekintsük egy sorosan kapcsolt ellenállásnak, ez a feszültségforrás **belső ellenállása** .

Az áramkör összes többi ellenállását, ami az összekötő huzalok illetve a fogyasztó ellenállása szintén egy ellenállásnak tekintjük, ez a **külső ellenállás.**



A feszültségforráson kívül az áram a pozitív pólustól folyik a negatív felé, a feszültségforrásban fordítva. A feszültségforrás és a fogyasztó (külső ellenállás) feszültségnyila egymással ellenkező irányú.

Az U_0 az ideálisnak gondolt feszültségforrás feszültsége az ún**. üresjárási feszültség**, vagy **elektromotoros erő**.

Kirchhoff II. törvénye alapján:

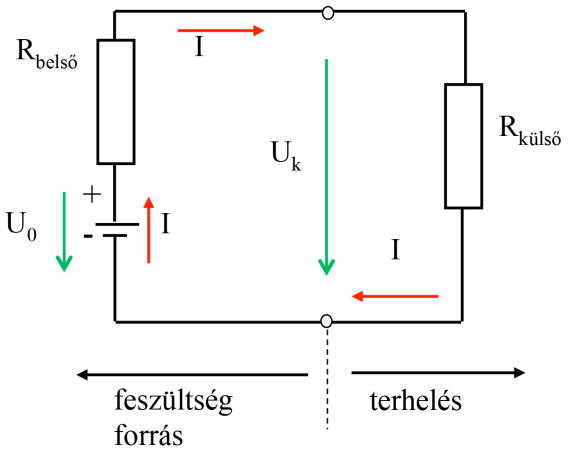
$$U_0 = I \cdot (R_b + R_k)$$

ebből: $$I = \frac{U_0}{R_b + R_k}$$

Ez az egyenlet az **Ohm törvénye teljes áramkörre**.

Szavakban: **egy feszültség forrást, belső és külső ellenállást tartalmazó zárt áramkörben folyó áram erőssége az üresjárási feszültség és a belső és külső ellenállások összegének a hányadosa.**

A **kapocsfeszültség** (ami a két kis körrel jelölt kapcsokon mérhető):



$$U_k = I \cdot R_k = U_0 \cdot \frac{R_k}{R_b + R_k}$$

Ha a kapcsokra nem kapcsolunk ellenállást, hogy üresjárásról van szó.

Ekkor a kapcsokon megjelenő feszültség: U_0 mert nem folyik áram, és így a belső ellenálláson eső feszültség zérus.

Ha $R_k = 0$, akkor azt mondjuk, hogy rövidrezártuk a feszültségforrást. Ezt az általában nem viseli el, legalábbis nem hosszú ideig. A **rövidzárási áram**:

$$I_r = \frac{U_0}{R_b}$$

A feszültségforrás által a külső ellenállásnak szolgáltatott teljesítmény:

$$P_k = U_k \cdot I = U_0^2 \cdot \frac{R_k}{(R_b + R_k)^2}$$

Szélsőérték számítással kimutatható, hogy a maximális teljesítmény akkor vehető ki a feszültségforrásból, ha $R_k=R_b$. Ha ez az eset áll fenn, akkor **illesztésről** beszélünk.

A belső feszültséget generáló ideálisnak vélt folyamatok teljesítménye (ez a befektetett teljesítmény):

$$P_0 = U_0 \cdot I = \frac{U_0^2}{R_b + R_k}$$

A teljes energiatermelés hatásfoka tehát:

$$\eta = \frac{P_k}{P_0} = \frac{R_k}{R_b + R_k}$$

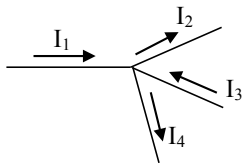
Behelyettesítve ($R_k=R_b$)adódik, **hogy illesztésnél a hatásfok 50%.**

A fentiekben sokszor használtuk a feszültségforrás szót általános jelentésben. Az elektronikában **feszültségforrás**nak nevezzük azokat a villamos energiaforrásokat, amelyek kapocsfeszültsége a terhelő ellenállástól (R_k) független, vagy közel az. Más szóval belső ellenállása a terhelő ellenálláshoz képest elhanyagolható.

Áramforrásnak pedig azokat villamos energiaforrásokat nevezzük, amelyek áramerőssége közel független a terhelő ellenállástól. Áramforrásoknál a belső ellenállás párhuzamos a terheléssel.

11.4. Kirchhoff törvényei, Ohm törvénye teljes áramkörre

I., vagy csomóponti törvény:
Tekintsünk egy csomópontot, ahova I_1, I_2, I_3, I_4, … áramok folynak (11.4.1. ábra) be (vagy ki). Akkor kimondhatjuk: **egy csomópontba a befolyó és kifolyó áramerősségek algebrai összege zérus.**



$$\sum_{i=n}^{n} I_i = 0 \qquad (11.4.1)$$

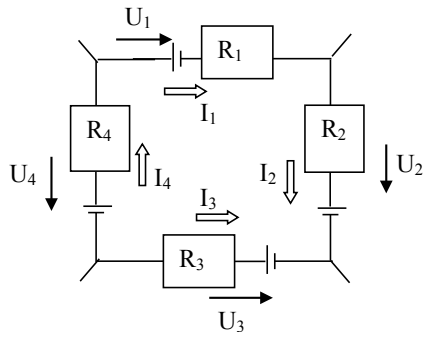
11.4.1. ábra Kirchhoff I. törvénye

Ez a törvény a töltésmegmaradást fejezi ki, a csomópontban töltés nem halmozódik fel, ami befolyik az ki is folyik.

II., vagy huroktörvény:

Vegyünk egy zárt áramkört, vagy hurkot (11.4.2. ábra), s megállapíthatjuk: **zárt áramkörben a feszültségesések és telepfeszültségek algebrai összege zérus.**

Ez a törvény abból származik, hogy az elektrosztatikus mezőben zárt görbén végzett munka zérus.



11.4.2. ábra Egy zárt áramkör (hurok) és a huroktörvény

A törvény matematikai alakja:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i + \sum_{j=1}^{m} I_j \cdot R_j = 0. \qquad (11.4.2)$$

Az egyenáram munkája és teljesítménye

A potenciál és feszültség definíciójából következik, hogy ha egy Q töltést a mező végigvisz kér U potenciálkülönbségű pont között, akkor azon W=QU munkát végez. Ha mind a feszültség, mid az áram időben állandó, akkor a töltés Q=It alakban, a munka pedig

$$W = U \cdot I \cdot t \qquad (11.4.3)$$

formában is felírható. Tudjuk, hogy a teljesítmény az időegység alatt végzett munka, azaz az egyenletből

$$P = U \cdot I ,$$

vagy az Ohm törvény felhasználásával:

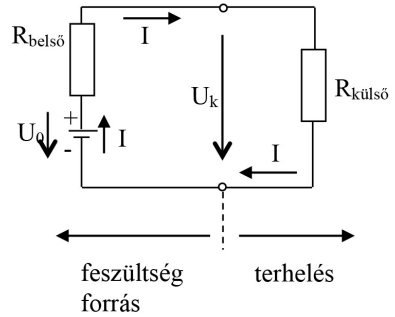
$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}. \qquad (11.4.4)$$

A villamos áram munkát tud végezni, azaz energiát szállít, az energiaszállítás azonban nem a vezetőben, hanem a vezető körüli elektromágneses mezőben történik.
Változó feszültség és áram esetében a munka:

$$W = \int_0^t U(t) \cdot I(t) \cdot dt . \qquad (11.4.5)$$

Ohm törvénye teljes áramkörre

Tekintsünk két töltött testet, amelyeken az elektromos töltés nagysága nem egyezik meg. Kössük össze őket egy vezetővel. Töltésáramás indul meg közöttük (elektromos áram folyik), ami addig tart, amíg a töltések ki nem egyenlítődnek.
Ha folyamatos áramot szeretnénk fenntartani, úgy a már átáramlott töltéseket vissza kell vinni a kiindulási pontra. Ezt csak munkavégzés árán tudjuk biztosítani.
Ezt a munkát például mechanikai energiával meghajtott generátorral, molekuláris energiát felhasználó kémiai reakcióval, napenergia segítségével, stb. tudjuk elvégezni.
A termodinamika második főtétele azt mondja ki, hogy nem lehet 100 % hatásfokkal munkát végezni.
Ha a töltéseket (töltéshordozókat) visszajuttató egységet (a továbbiakban feszültségforrás), a folyamat veszteségeit (amit célszerűen egy soros ellenállásban foglalunk össze) és magát a vezetőt (ami egy ellenállás, itt külső ellenállás néven szerepel) egy ábrában szeretnénk ábrázolni, akkor az alábbi (11.4.3. ábra) kapcsolást kapjuk:



11.4.3. ábra Feszültségforrást, belső ellenállást és külső ellenállást tartalmazó zárt áramkör

Az ábrán a szokásoknak megfelelően az áramot tele nyíllal, a feszültséget üres nyíllal ábrázoltuk. A feszültségforrás egy ideális (veszteség nélküli) eszköz, a veszteségeket a belső ellenállás tartalmazza. Vegyük észre, hogy az áram nyilak folytonosak, a feszültségforráson kívül az áram a pozitív pólustól folyik a negatív felé, de a feszültségforrásban pontosan fordítva. A feszültségforrás és a fogyasztó (külső ellenállás) feszültségnyila ütközik egymással.
Az U_0 az ideálisnak gondolt feszültségforrás feszültsége az ún. belső feszültség, vagy elektromotoros erő.
Kirchhoff II. törvénye alapján írhatjuk:

$$U_0 = I \cdot (R_b + R_k),$$

és ebből:

$$I = \frac{U_0}{R_b + R_k}. \qquad (11.4.6)$$

Ez az egyenlet az **Ohm törvénye teljes áramkörre**. Szavakban: **egy feszültség forrást, belső és külső ellenállást tartalmazó zárt áramkörben folyó ára erőssége a belső feszültség és a belső és külső ellenállások összegének a hányadosa.**

A kapocsfeszültség (ami a két kis körrel jelölt kapcsokon mérhető):

$$U_k = I \cdot R_k = U_0 \cdot \frac{R_k}{R_b + R_k}. \qquad (11.4.7)$$

Ha a kapcsokra nem kapcsolunk ellenállást, akkor azt mondjuk, hogy üresjárásról van szó. Ekkor a kapcsokon megjelenő feszültség megegyezik U_0-al, mert nem folyik áram, és igy a belső ellenálláson eső feszültség zérus. Az üresjárási feszültséget szokás $U_ü$-vel is jelölni.
Ha a külső ellenállás zérus, akkor azt mondjuk, hogy rövidrezártuk a feszültségforrást. Ezt az általában nem viseli el, legalábbis nem hosszú ideig. A rövidzárási áram:

$$I_r = \frac{U_0}{R_b}.$$

A feszültségforrás által a külső ellenállásnak szolgáltatott teljesítmény:

$$P_k = U_k \cdot I = U_0^2 \cdot \frac{R_k}{(R_b + R_k)^2}.$$

Szélsőérték számítással kimutatható, hogy a maximális teljesítmény akkor vehető ki a feszültségforrásból, ha $R_k=R_b$. Ha ez az eset áll fenn, akkor illesztésről beszélünk.
A belső feszültséget generáló ideálisnak vélt folyamatok teljesítménye (ez a befektetett teljesítmény):

$$P_0 = U_0 \cdot I = \frac{U_0^2}{R_b + R_k}.$$

A teljes energiatermelés hatásfoka tehát:

$$\eta = \frac{P_k}{P_0} = \frac{R_k}{R_b + R_k}.$$

Behelyettesítve adódik, hogy illesztésnél a hatásfok 50%.

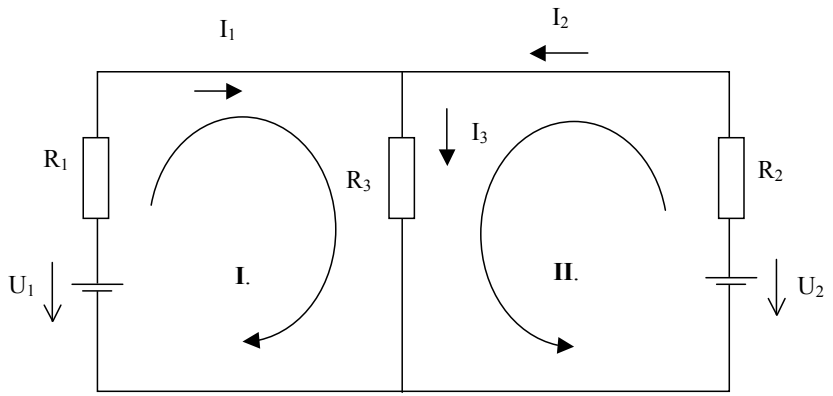
A fentiekben sokszor használtuk a feszültségforrás szót általános jelentésben. Az elektronikában feszültségforrásnak nevezzük azokat a villamos energiaforrásokat, amelyek kapocsfeszültsége a terhelő ellenállástól (R_k) független, vagy közel az. Más szóval belső ellenállása a terhelő ellenálláshoz képest elhanyagolható. Áramforrásnak pedig azokat, amelyek áramerőssége közel független a terhelő ellenállástól. Áramforrásoknál a belső ellenállás párhuzamos a terheléssel.

11.5. Hálózatszámítási módszerek

Bonyolultabb egyenáramú hálózatok paramétereinek meghatározására külön eljárásokat dolgoztak ki, amelyek közül hármat ismertetünk az alábbiakban.

A Kirchhoff egyenletek módszere:

Vegyünk két feszültségforrást és kössük össze azokat a 11.5.1. ábrán látható módon. Határozzuk meg az egyes ágakban folyó áramok erősségét.



11.5.1. ábra A Kirchhoff egyenletek módszerének bemutatásához használt áramkör

Három ismeretlen áramot kell meghatároznunk, ehhez három, egymástól független egyenlet felírására van szükség. Az áramkörben van két csomópont, azonban az egyik nem független a másiktól, mert ugyanazok az áramok folynak be és ki mindkettő esetében. Így egy csomóponti egyenletet tudunk felírni. Általánosságban is kimondhatjuk, hogy ha egy áramkörben n csomópont van, akkor legfeljebb n-1 csomóponti egyenletet lehet felírni. Ennél többet is ki lehet jelenteni, de az túlmutatna ezen stúdium keretein. Az áramkörön felismerhetünk három hurkot, de azok közül csak kettő független. Általánosságban kimondható, hogy ha egy áramkörben m hurok van, akkor azok közül legfeljebb m-1 független, tehát legfeljebb annyi hurokegyenletet lehet felírni.
A Kirchhoff egyenletek megoldásának lépései:

1. Bejelöljük az áramokat teljesen tetszőlegesen, de attól kedve ezeket az irányokat kell használni. Ha nem találtuk el az irányt, a számítás végén erre az áramra negatív értéket kapunk. .
2. Bejelöljük a feszültségeket az ellenállásokon a rajtuk átfolyó áram irányával megegyezően, a feszültségforrásoknál a nyíl a pozitívtól mutasson a negatív sarokra.
3. Minden független csomópontra felírjuk a csomóponti egyenletet.
4. A független hurkokban felírjuk a hurokegyenletet. Ehhez mindegyik hurokban fel kell venni egy tetszőleges körüljárási irányt, amellyel párhuzamos feszültségnyilak feszültségei pozitívak, az ellentétes nyilakkal jelzettek negatív előjellel kerülnek figyelembe vételre.
5. A kapott egyenletrendszert rendezzük.
6. A lineáris egyenletrendszert megoldjuk.

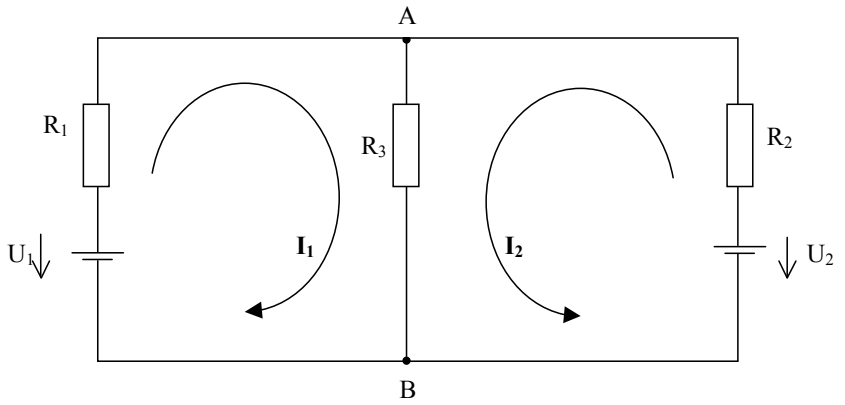
7. A kapott áramerősségekből az ellenállásokon eső feszültségek és ha szükséges a felvett teljesítmények kiszámolhatóak.

Ezek alapján az 5.2.13. ábrán látható áramkör egyenletei:

$$I_1+I_2+I_3 = 0$$
$$I_1R_1+I_3R_3-U_1 = 0$$
$$\underline{I_2R_2+I_3R_3-U_2 = 0.}$$

A hurokáramok módszere:

Minden független hurokban felveszünk egy képzelt áramot (11.5.2. ábra) (hurokáram). A hurkok egymáshoz csatolását az fejezi ki, hogy a közös ágakban a hurokáramok algebrai összege jelenik meg.



11.5.2. ábra A hurokáramok módszerének bemutatásához használt áramkör

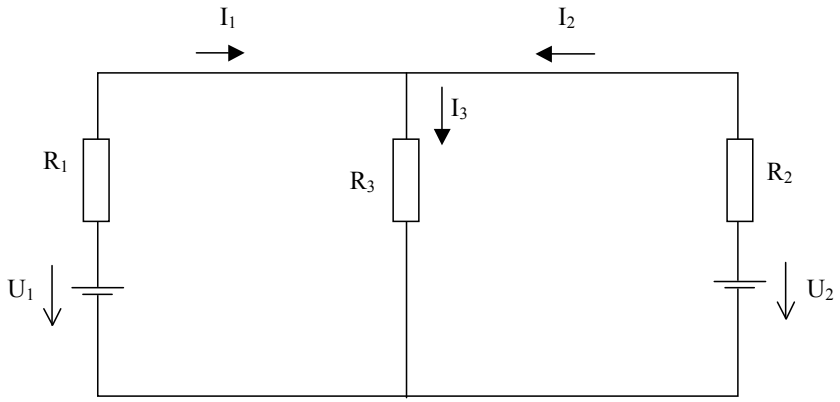
A módszer alkalmazása során nem szükséges csomóponti egyenleteket felírni, s ezzel csökken az egyenletek, és az ismeretlenek száma. A módszer alkalmazása során az 11.5.1. ábrán látható áramkörre kapott egyenleteket láthatjuk a következőkben:

$$I_1R_1+(I_1+I_2)R_3-U_1=0$$

$$I_2R_2+(I_1+I_2)R_3-U_2=0$$

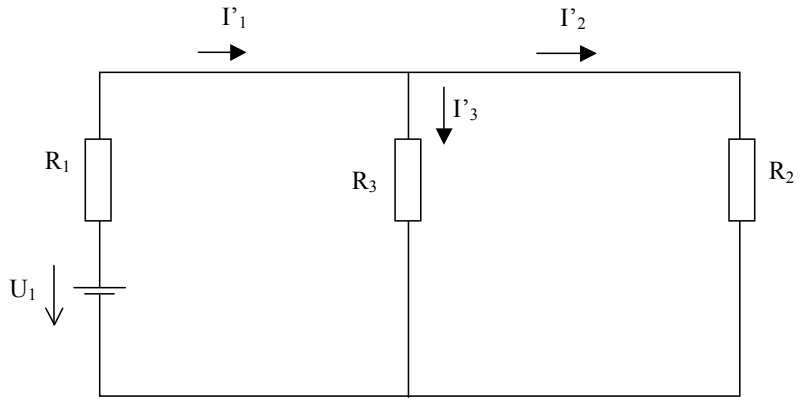
A szuperpozíció elve és módszere:

Mindegyik telep (feszültségforrás, illetve azok eredője) a hálózat bármelyik kiszemelt ágában a többi teleptől függetlenül hozza létre saját részáramát. A hálózat kiszemelt ágában az áramerősség a részáramok algebrai összege (szuperpozíciója) lesz.
A szuperpozíció módszere bemutatásához tekintsük az 11.5.3. ábrán látható áramkört.



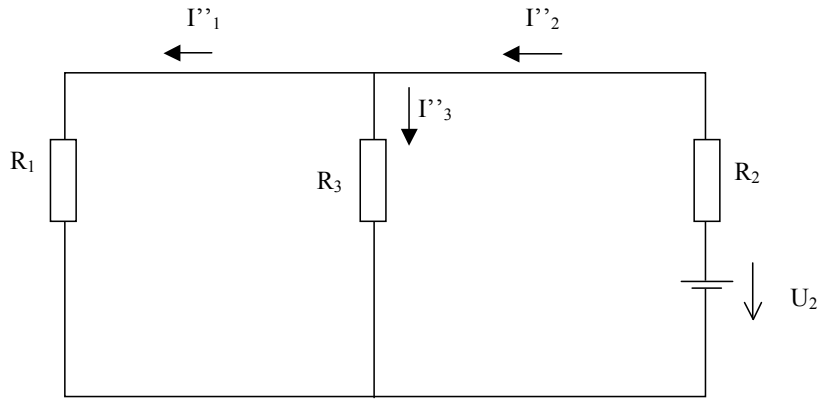
11.5.3. ábra A szuperpozíció módszerének bemutatására alkalmazott áramkör

A módszer során először meghatározzuk, hogy csak az U_1 feszültségű feszültségforrás mekkora áramot hajt át az egyes ellenállásokon. Ekkor a másik feszültségforrást rövidzárral helyettesítjük (11.5.4. ábra). Az áramokat egy vesszővel látjuk el, jelezve, hogy az első feszültségforrás által keltett részáramokról van szó.



11.5.4. ábra Az U_1 feszültségű telep által áthajtott áramok

A második feszültségforrás részáramait az 11.5.5. ábrán látható áramkör alapján határozzuk meg az első részáramaihoz hasonlóan, amelyeket most két vesszővel jelölünk.



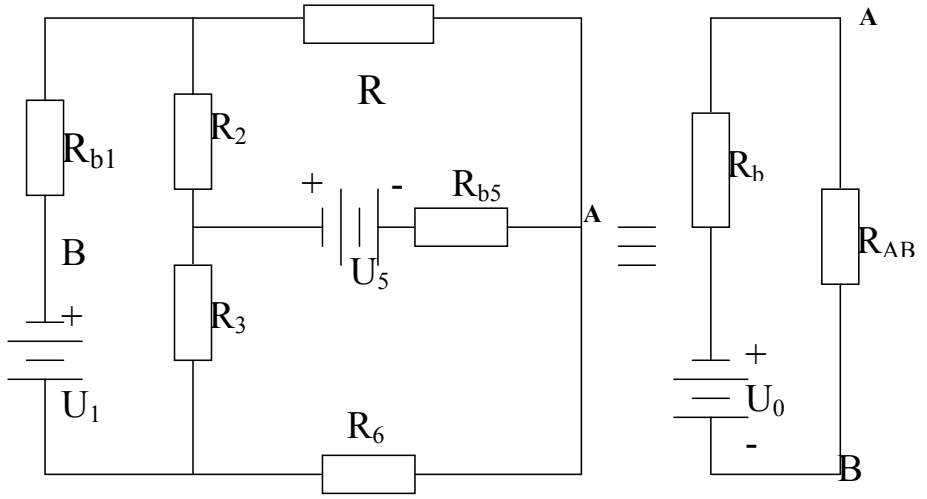
11.5.5. ábra Az U_2 feszültségű telep által áthajtott áramok

A két feszültségforrásból származó részáramok algebrai összege, szuperpozíciója adja a valódi áramokat az alábbiak szerint.

$$I_1 = I'_1 - I''_1,$$
$$I_2 = I''_2 - I'_2,$$

Thevenin tétele:

Egy tetszőlegesen bonyolult hálózat egy kiválasztott ágára nézve az egész hálózat helyettesíthető egy U_0 elektromos feszültségű és R_b belső ellenállású áramforrással 11.5.6. ábra).



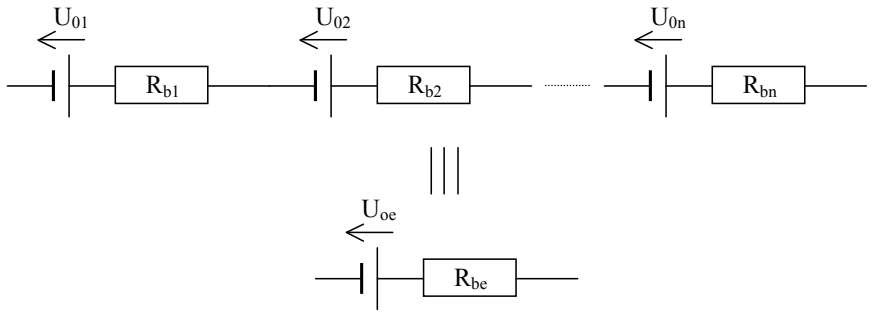
11.5.6. ábra Thevenin tételének egy értelmezése

Az U feszültség megegyezik az eredeti hálózatban a kiválasztott ág A-B kapcsain megjelenő feszültséggel (üresjárási feszültség), míg az R_b ellenállás egyenlő a hálózat eredő ellenállásával az A-B kapcsok között, ha az áramforrások elektromos feszültségét nullának tekintjük.

Feszültségforrások kapcsolása

A napi gyakorlatban igen sokszor van szükségünk több elem sorbakapcsolására, s néha felmerül a párhuzamos kapcsolás gondolata is. Az alábbiakban erről olvashatunk.

Soros kapcsolás:
Vegyünk n darab feszültségforrást és kapcsoljuk őket sorba az 11.5.7. ábra szerint.



11.5.7. ábra Feszültségforrások sorba kapcsolása

Az eredő belső feszültség:

$$U_{0e} = \sum_{i=1}^{n} U_{0i},$$

az eredő belső ellenállás:

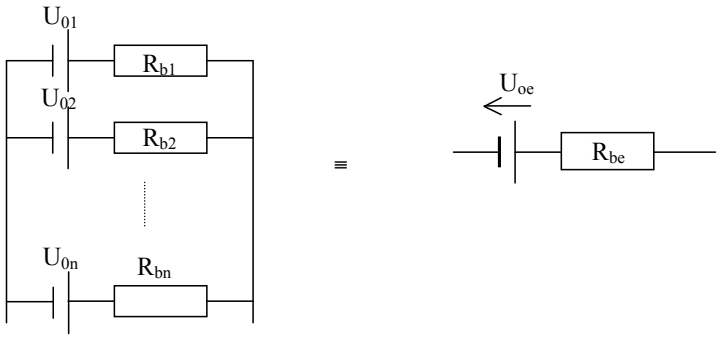
$$R_{be} = \sum_{i=1}^{n} R_{bi},$$

Aza mind a belső feszültség, mind a belső ellenállás összeadódik, a kivehető maximális áramerősség a rész elemek legkisebbikével lesz egyenlő.

A gyakorlatban csak azonos paraméterekkel rendelkező feszültségorrásokat szabad sorbakapcsolni, metrt különben az élettartamuk igen lecsökken, sőt balesetet, esetleg tüzet is okozhatnak a fellépő meghibásodások következtében!

Párhuzamos kapcsolás:

Kössünk párhuzamosan n darab elemet az 11.5.8. ábrának megfelelően.



11.5.8. ábra Feszültségforrások párhuzamos kapcsolása

A feszültségforrások párhuzamos kapcsolása esetében az eredő belső feszültséget a hálózatszámítási módszerek segítségével határozzhatjuk meg, az eredő belső ellenállás pedig a rész belső ellenállások párhuzamos eredője az alábbi, már ismert képlet szerint.

$$R_{be} = \frac{1}{\frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}} + \cdots + \frac{1}{R_{bn}}}.$$

Ebben az esetben még inkább igaz az, hogy párhuzamosan kapcsolni csak teljesen azonos paraméterű feszültségforrásokat szabad elkerülendő a baleseteket és a tüzeket.
Azonos feszültségforrások esetében az eredő belső feszültség megegyezik a rész feszültségforrásokéval, és az eredő belsőellenállás:

$$R_{be} = \frac{R_b}{n}.$$

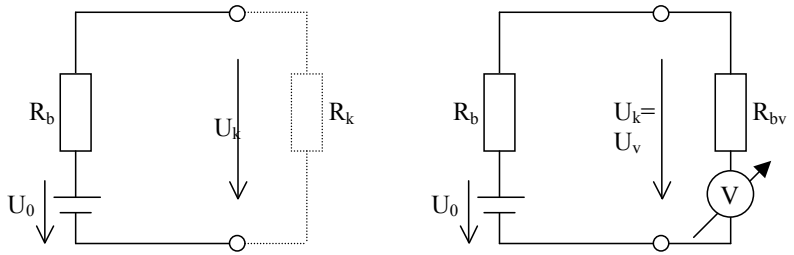
Mérőműszerek kapcsolása és méréshatáruk kiterjesztése

Az elektronikában, a villamos technikákban, de még a számítástechnikában mindennapos a voltmérők és az ampermérők használata. Az alábbiakban ezekről, illetve méréshatáruk kiterjesztéséről szólunk. A közölt ismeretek alapvetőek mind a mutatós, mid a digitális műszerek esetében.

Voltmérő használata:
A voltmérővel két pont közötti feszültséget mérünk egy áramkörben, ami lehet akármilyen bonyolult is. Thevenin tétele értelmében az áramkör erre a két pontra néve helyettesíthető egy ideális feszültségforrással és egy belső ellenállással. Ha a voltmérő helyett egy külső ellenállás van bekötve (11.5.9. ábra bal oldala), akkor kiszámítható a kapocsfeszültség. Ha a voltmérőt kapcsoljuk oda, akkor is meghatározható a kapocsfeszültség az alábbiak szerint:

$$U_v = U_k = U_0 \frac{R_{bv}}{R_b + R_{bv}},$$

ahol R_{bv} a voltmérő belső ellenállása, U_0 pedig a két mérési pont közé képzelt ideális feszültségforrás feszültsége, azaz az a feszültség, amit mérni kell. R_b pedig az áramkör belső ellenállása, ahogy a voltmérő „látja”.



11.5.9. ábra Voltmérő kapcsolása

Az egyenlet kis átalakításával kapjuk:

$$U_v = U_0 \frac{1}{\frac{R_b}{R_{bv}} + 1},$$

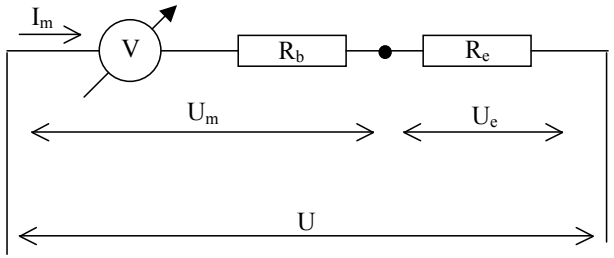
azaz:

$$U_v \to U_0 \; ha \; R_{bv} \to \infty,$$

tehát az ideális voltmérő belső elenállása végtelen nagy. A voltmérőt a mérendő alkatrésszel párhuzamosan kapcsoljuk az áramkörre.
A belső ellenállás nagyságát a gyakorlatban az alábbiak szerint írhatjuk le:
jó kéziműszer (analóg): 100 kΩ/V, digitális: 10 MΩ. Elérhető: 10^{14} – 10^{15} Ω is, de a zaj komoly hibákat okzhat, elkerülésére igen drága árnyékolási technikákat kell alkalmazni.

Voltmérő méréshatárának kiterjesztése:

Ha a voltmérő méréshatára (U_m, az a legnagyobb feszültség, amelynek mérésére a műszer még képes) kisebb mint a mérendő feszültség, akkor abból egy ún. előtét ellenállás segítségével (11.5.10. ábra) ejtjük le a két feszültség különbségét.



11.5.10. ábra Voltmérő méréshatárának kiterjesztése

Az előtét ellenállást az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

$$R_e = \frac{U_e}{I_m} = \frac{U - U_m}{I_m} = \frac{U - U_m}{\frac{U_m}{R_b}},$$

tudjuk, hogy

$$I_m = \frac{U_m}{R_b},$$

és így:

$$R_e = R_b \frac{U - U_m}{U_m}.$$

Legyen

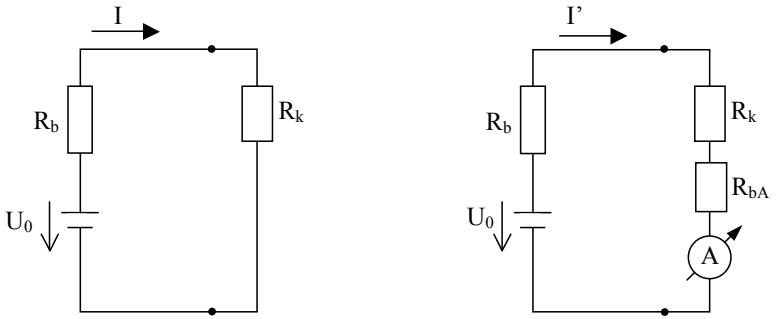
$$n = \frac{U}{U_m},$$

és így:

$$R_e = (n-1)R_b.$$

Árammérő (ampermérő) használata:

Ha az 11.5.11. ábra bal oldala szerinti kapcsolást nézzük, akkor az áramköben I áram folyik, amit meg szeretnénk mérni. Ehhez meg kell szakítanunk az áramkört, és a külső ellenállással sorosan be kell kacsolnunk az ampermérőt. Az ampermérőt az ábra bal oldalán megmutatott módon jelöljük. Mivel az ampermérőnek is van ellenállása, az áram I'-re változik (csökken).



11.5.11. ábra Ampermérő bekapcsolása az áramkörbe

Az ampermérő nélküli áramerősség:

$$I = \frac{U_0}{R_b + R_k}.$$

Az áramerősség mérésekor, azaz az ampermérő beiktatása után:

$$I' = \frac{U_0}{R_b + R_k + R_{bA}},$$

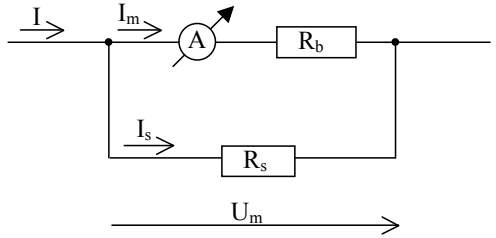
így:

$$I' \to I,\ ha\ R_{bA} \to 0,$$

Azaz az ampermérő által mutatott áram annál jobban megközelíti a mérendő áramot, minél kisebb a belső ellenállása. A gyakorlatban $R_{bA} \geq 0{,}01\ \Omega$. Ennél kisebb értéket igen nehéz megvalósítani.

Ampermérő méréshatárának kiterjesztése:

Sokszor előfordul, hogy az ampermérő méréshatára (I_m, tehát az a legnagyobb áramerősség amit az még mérni tud) kesebb mint a mérendő áram. Ilyen esetekben az ampermérővel párhuzamosan kapcsolunk egy ún. sönt ellenállást(11.5.12. ábra), amelyen a két áram különbségét elvezetjük.



11.5.12. ábra Ampermérő méréshatárának kiterjesztése

A sönt ellenállás nagyságát az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

$$R_s = \frac{U_m}{I_s},$$

$$I_s = I - I_m,$$

és így:

$$R_s = \frac{U_m}{I - I_m}.$$

Az ampermérőn eső feszültség:

$$U_m = I_m R_b,$$

ezért:

$$R_s = \frac{I_m R_b}{I - I_m}.$$

Legyen

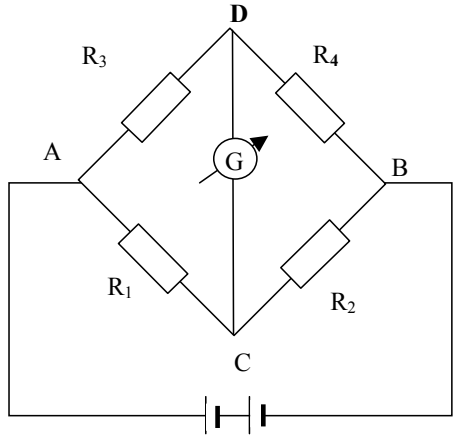
$$m = \frac{I}{I_m},$$

és így:

$$R_s = \frac{R_b}{m - 1}.$$

A mérés jelentősége ma inkább már méréstechnikai jelentőségű, tekintettel arra, hogy a gyakorlatban egyszerű digitális feszültségmérővel is lehet terhelés nélküli módon mérni. Ugyanakkor a Josepson átmenetek megjelenésével feszültség etalonok állnak rendelkezésünkre, és ezek használatához ezt az áramkört alkalmazzák.

Wheatstone-híd



11.5.13. ábra A Wheatstone híd

A Wheatstone híd az 11.5.13. ábrán bemutatott kapcsolás, illetve szűken véve a négy ellenállás és a galvanométer.

A kapcsolásnak régen igen nagy jelentősége volt az ellenállás mérésnél. Az egyik ellenállás változtatásával elérhető, hogy a hídba kapcsolt galvanométer nem jelez áramot. Ekkor azt mondjuk, hogy a híd ki van egyenlítve. Belátható hogy ez akkor teljesül, ha

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

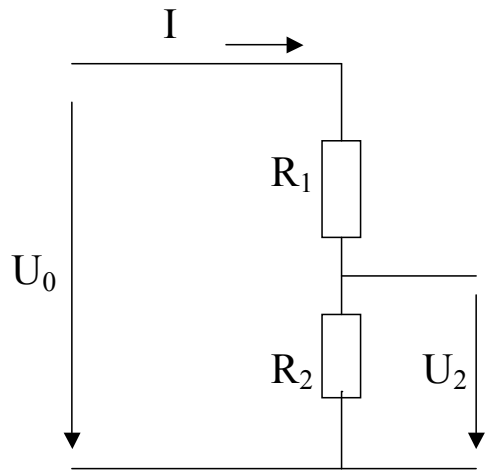
Ha R_4 az ismeretlen ellenállás, akkor:

$$R_4 = R_3 \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

Feszültségosztó éa áramosztó

Az alábbiakban bemutatunk két formulát, amelynek segítségével könnyebben oldhatunk meg elektromos feladatokat.

Feszültségosztó:
A feszültségosztó egy olyan kapcsolás (11.5.14. ábra), melynek segítségével nagyobb (U_0) feszültségből kisebbet (U_2) tudunk előállítani.



11.5.14. ábra A feszültségosztó

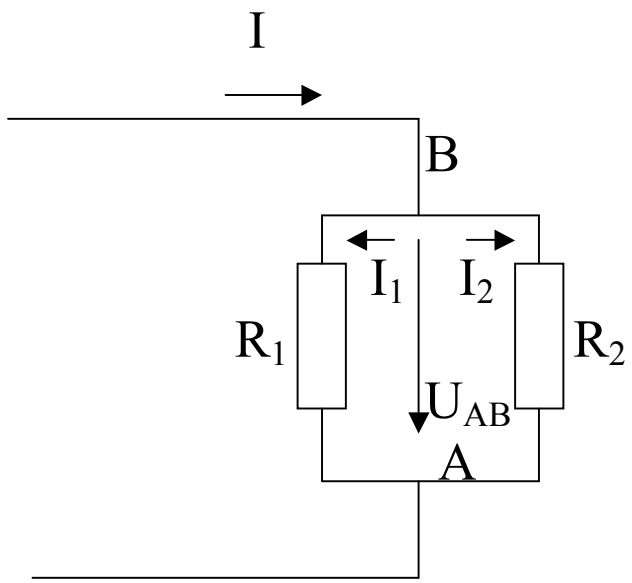
A feszültségosztón folyó áram:

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2},$$

Így az U_2, vagy kimeneti feszültség:

$$U_2 = I \cdot R_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Áramosztó:
Az áramosztó esetében sokszor az a feladat, hogy valamilyen áramerősségből kisebbet állítsunk elő az 11.5.15. ábra segítségével.



11.5.15. ábra Az áramosztó

A kér ellenállás eredője:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

A két ellenállás közös feszültsége:

$$U_{AB} = I \cdot R_e = I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

másrészt:

$$U_{AB} = I_1 \cdot R_1,$$

és így:

$$I \cdot R_e = I_1 \cdot R_1,$$

valamint

$$I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_1 \cdot R_1.$$

Innen:

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

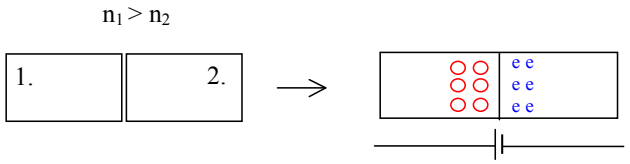
és:

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Hasonlóan:

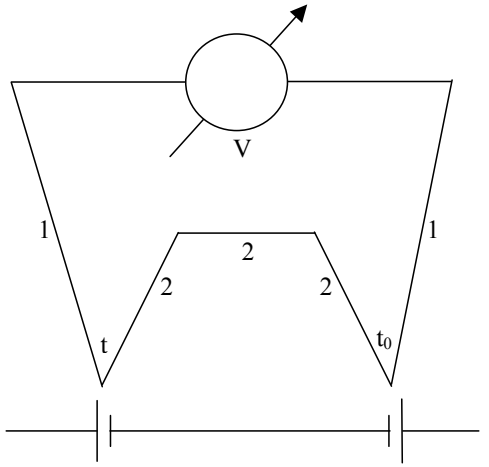
Termoelemek, Seebeck és Peltier effektus

Termoelemek és a Seebeck effektus:
Ha az elektrosztatika bevezetésekor alkalmazott két különböző anyagi minőségű fémdarabot újra egymásnak érintjük, akkor a 11.5.16. ábrának megfelelően ismét elektrontöbblet alakul ki az egyiken, és elektron hiány a másikon. Ez egy feszültségforrást is jelent.



11.5.16. ábra Feszültség keletkezése két érintkező fém között

A feszültségforrás feszültségét azonban nem tudjuk megmérni, mert a mérőeszköz csatlakoztatásával legalább egy új érintkezési felület jön létre, ami újabb feszültségforrást eredményez. Ha két különböző anyagi minőségű huzalból (1 és 2) elkészítjük az 11.5.17. ábrán látható kapcsolást, akkor a voltmérő két szembekapcsolt feszültségforrás eredő feszültségét méri. Ha mindkét érintkezési pont azonos hőmérsékleten van akkor a műszer nem



11.5.17. ábra A termoelem

tér ki. A jelenséget még könnyebb megérteni, ha a műszer és hozzávezetései is az 1 anyagból készülnek. Ha egy harmadik anyag ezek anyaga, akkor kétszer lép fel azonos érintkezési pont, s ha azok azonos hőmérsékleten vannak, az általuk hozott feszültség zérus. Az érintkezési pontokon fellépő feszültség első közelítésben más paramétertől nem függ, vagy ha igen, azt a hatást hanyagoljuk el.
Ha a két érintkezési pont az ábrán jelzett két különböző hőmérsékleten van, akkor a voltmérő mV nagyságrendű feszültséget mutat. Ennek hőmérséklet függését első közelítésben (kis hőmérséklet különbségek esetében) az alábbiakban adjuk meg.

$$U = \alpha(t - t_0),$$

Ahol α az ún. Seebeck együttható, és a jelenséget felfedezőjéről Seebeck effektusnak nevezzük. Azokat az anyag párokat, amelyek Seebeck együtthatója elegendően nagy hőmérséklet mérésre használhatjuk, és az ilyen eszközöket termoelemnek nevezzük. A termolemeket alkotó huzalok anyagának korrózióállónak, reprodukálhatóan működőnek, és az α-nak lehetőség szerint széles hőmérséklethatárok közözött a lehetőség szerint állandónak, vagy csak kicsit változónak kell lenni. Ezek alapján a legelterjedtebben használatos termoelemek és hőmérséklet tartományuk a következő:

Anyagpár	α (mV/100 ^oC)	Alkalmazási hőmérséklet (^{0}C)
Réz-konstantán	4	-200-600
Vas-konstantán	4,5	-200-900
Nikkelkróm-nikkel	5	0-1200
Platina-platinaródium	1	0-1600.

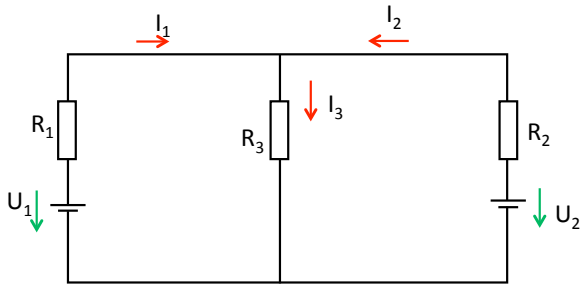
Peltier effektus:

A Seebeck effektus fordítottja is megfigyelhető, és felfedezőjéről Peltier effektusnak nevezzük. Eszerint, ha áram halad át két különböző vezető érintkezési vagy forrasztási helyén, akkor ezen a helyen az áram iránytól függően felmelegedés vagy lehűlés következik be. A hőmérséklet különbség arányos az áramerősséggel.
Általában hűteni szoktak vele. Ma a számítógépek processzorainak hűtésében szokták alkalmazni félvezetőből készült változataikat. Egy 1cm vastag, 10-12 cm^2 felületű példány képes akár 100W teljesítményt hő formájában elvezetni.
A Peltier effektusban a hőmérséklet változás olyan értékű, hogy a vele kiváltott termoáram az átvezetett árammal ellentétes irányú, önmagát gátolja, (energia megmaradás) energia kell a működtetéshez, nem lehet örökmozgót építeni belőle.

Hálózatszámítási módszerek

1. A Kirchhoff egyenletek módszere:

Vegyünk egy egyszerű két hurkos áramkört két feszültségforrással, és határozzuk meg az egyes ágakban folyó áramok erősségét!

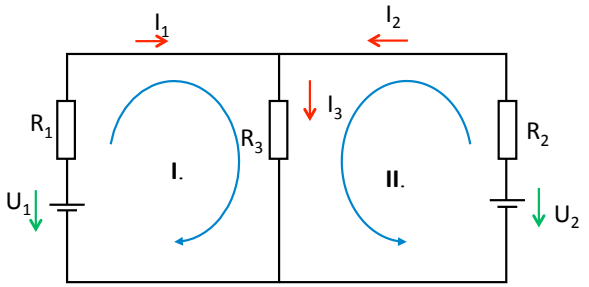


Három ismeretlen áramot kell meghatároznunk, ehhez három, egymástól független egyenlet felírására van szükség.

Az áramkörben van két csomópont, azonban az egyik nem független a másiktól, mert ugyanazok az áramok folynak be és ki mindkettő esetében.

egy csomóponti egyenlet

Általánosságban: **ha egy áramkörben n csomópont van, akkor legfeljebb n-1 csomóponti egyenletet lehet felírni.**



Az áramkörön felismerhetünk három hurkot, de azok közül csak kettő független.

Általánosságban: **ha egy áramkörben m hurok van, akkor azok közül legfeljebb m-1 független, tehát legfeljebb annyi hurokegyenletet lehet felírni.**

A Kirchhoff egyenletek megoldásának lépései:

1. Bejelöljük az áramokat teljesen tetszőlegesen, de attól kedve ezeket az irányokat kell használni. Ha nem találtuk el az irányt, a számítás végén erre az áramra negatív értéket kapunk.

2. Bejelöljük a feszültségeket az ellenállásokon a rajtuk átfolyó áram irányával megegyezően, a feszültségforrásoknál a nyíl a pozitívtól mutasson a negatív sarokra.

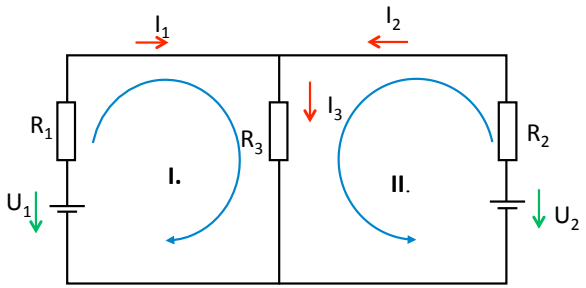
3. Minden független csomópontra felírjuk a csomóponti egyenletet.

4. A független hurkokban felírjuk a hurokegyenletet. Ehhez mindegyik hurokban fel kell venni egy tetszőleges körüljárási irányt, amellyel párhuzamos feszültségnyilak feszültségei pozitívak, az ellentétes nyilakkal jelzettek negatív előjellel kerülnek figyelembe vételre.

5. A kapott egyenletrendszert rendezzük és megoldjuk.

6. A kapott áramerősségekből az ellenállásokon eső feszültségek és ha szükséges a felvett teljesítmények kiszámolhatók.

Ezek alapján az ábrán látható áramkör egyenletei:



$I_1+I_2 = I_3$

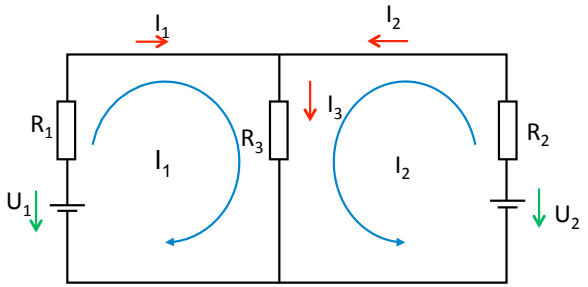
$I_1R_1+I_3R_3-U_1 = 0$

$I_2R_2+I_3R_3-U_2 = 0.$

A három egyenletből a három ismeretlen áramerősség kiszámítható.

A hurokáramok módszere:

Minden független hurokban felveszünk egy képzelt áramot (hurokáram). A hurkok egymáshoz csatolását az fejezi ki, hogy a közös ágakban a hurokáramok algebrai összege jelenik meg.

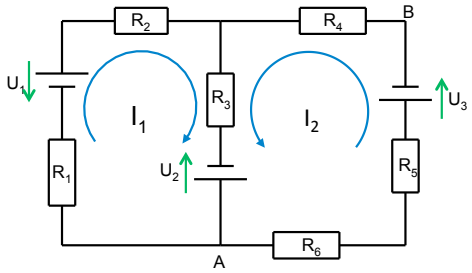


A módszer alkalmazása során nem szükséges csomóponti egyenleteket felírni, s ezzel csökken az egyenletek, és az ismeretlenek száma csökken:

$$I_1R_1+(I_1+I_2)R_3-U_1=0$$

$$I_2R_2+(I_1+I_2)R_3-U_2=0$$

Példa: Számítsa ki az ábrán látható kapcsolásban az egyes ágakban folyó áramok erősségét, valamint az U_{AB} feszültséget! (R_1=150 Ω, R_2=70 Ω, R_3= 250 Ω R_4= 100 Ω, R_5= 50 Ω, R_6= 300 Ω U_1=24 V, U_2= 40 V, U_3=12 V)



Megoldás: hurokáramok módszere

mindkét hurokban felveszünk egy tetszőleges körüljárási irányt, ezt választjuk áramiránynak

felírjuk Kirchoff hurokegyenletét mindkét független hurokra úgy, hogy a közös ágban a két hurok áramainak algebrai összegét írjuk:

$$I_1R_1 - U_1 + I_1R_2 + (I_1 + I_2)R_3 - U_2 = 0$$

$$I_2R_5 + U_3 + I_2R_4 + (I_1 + I_2)R_3 - U_2 + I_2R_6 = 0$$

Behelyettesítve:

$$470I_1 + 250I_2 = 64$$

$$700I_2 + 260I_1 = 28$$

Az első egyenletből I_2 -t kifejezve:

$$I_2 = \frac{64 - 470I_1}{250}$$

beírva a kifejezést a második egyenletbe:

$$700\frac{64 - 470I_1}{250} + 260I_1 = 28$$

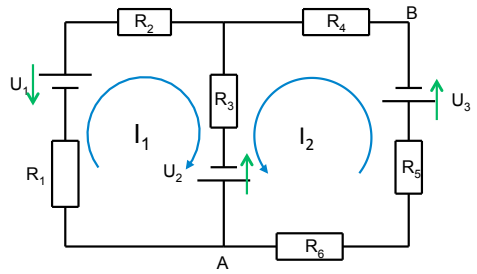
Megoldva, majd visszahelyettesítve az 1. egyenletbe:

$$I_1 = 0.1418\text{A} \qquad I_2 = -0.0106\text{A}$$

A középső ágban a két hurokáram összege folyik:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0.1312\text{A}$$

Az *A, B* pontok közötti feszültség:



$$U_{AB} = I_2R_6 + I_2R_5 + U_3 = 8.29V$$

12. fejezet

Mágnességtan, indukció



A mágneses jelenségekről az első írott emlékek a Kis-Ázsiai Magnésia városból származnak (innen a jelenség neve) és különböző „vasdarabok” egymásra gyakorolt vonzó és taszító hatásairól szólnak.

THALÉSZ is felfigyelt a mágnesesség alapjelenségeire.

Magyarázata: a vas és a mágnes lélekkel bír, „egyidejűleg próbálják egymás részecskéit belélegezni”

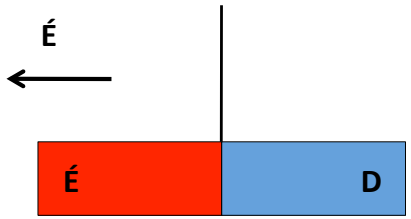


Thalész

(Kr. e. 624 – Kr. e. 546)

A természetben előforduló természetes mágnes egy
mágneses ásvány, a magnetit.

A mágneses tulajdonsággal rendelkező testek mágneses pólusokkal írhatók le. Ha egy a hosszához képest elhanyagolható vastagságú mágnesrudat a közepénél felfüggesztünk, akkor az elfordul, és észak-déli irányba áll be. A rúd észak felé mutató végét északi, a másikat déli pólusnak nevezzük.



A mágneses „töltés” helyett póluserősségről (p) beszélünk, melynek mértékegysége Wb (weber). A villamos térerősségnek megfelelően definiálni lehet a mágneses térerősséget:

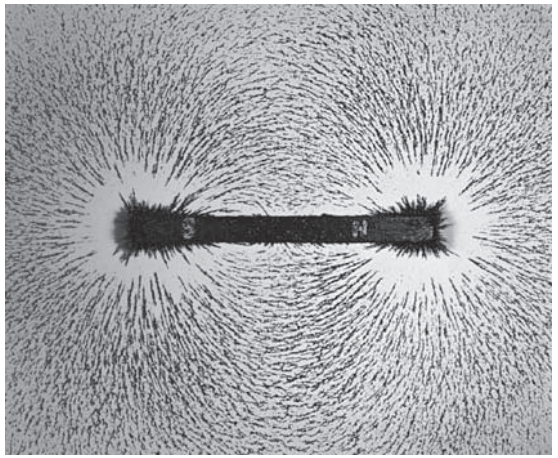
$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{p} \qquad [H] = \frac{A}{m}$$

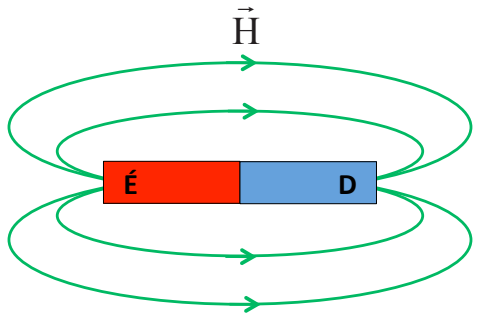
Mágneses monopólus nem létezik!

Ha egy mágnesrudat elfűrészelünk, akkor nem két különálló mágneses pólust, hanem két, mindkét pólussal rendelkező teljes (bár az eredetinél gyengébb) mágnest kapunk.

A mágneses mező leírásához a mágneses mezővonalak nyújthatnak segítséget.

Egy mágnesrúd fölé elhelyezett papírlapra finom vasport szórunk, akkor annak részecskéi az ábrán látható vonalaknak megfelelően oszlanak el.





A mágneses térerősség mezővonalai az északi póluson erednek és a délin végződnek.

Így az állandó mágnesek esetében, azaz a magnetosztatikában, a mágneses mező forrásos és örvénymentes, forrásai az északi és nyelői a déli pólusok.

A mágneses térerősség helyett a fizikában inkább a mágneses indukció használatos

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ a vákuum mágneses permeabilitása (indukció konstans)

μ_r a mágnest körülvevő közeg ún. relatív permeabilitása, értéke:

diamágneses anyagokra: $1 - 10^{-6 \div -4}$

paramágneses anyagokra: $1 + 10^{-6 \div -4}$

ferromágneses anyagokra (vas, kobalt, nikkel, gadolínium és ötvözetei) :>> 1

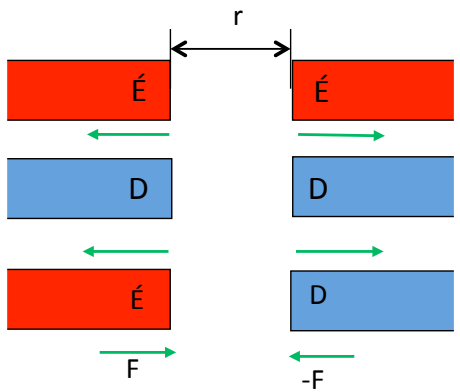
$Gd : T < 72K$

A mágneses indukció mértékegysége: $\left[\vec{B}\right] = \frac{Vs}{m^2}$ $\quad 1\frac{Vs}{m^2} = 1T\ (Tesla)$

$1T = 10^4$ gauss (régi, CGS egység)

A mágneses Coulomb törvény:

Két mágneses pólus erővel hat egymásra. Az azonos pólusok taszítják, a különbözők vonzzák egymást:

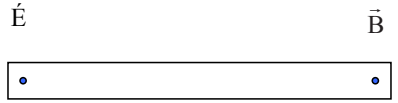


$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0\mu_r}\frac{p_1 p_2}{r^2}$$

12. Mágnességtan, indukció

12.1. Magnetosztatika

Az elektromos jelenségek mellett mágneses jelenségek is fellépnek, melyekről már a régi görögök is beszámoltak. Az első írott emlékek a Kis-Ázsiai Magnésia városból származnak (innen a jelenség neve) és különböző „vasdarabok” egymásra gyakorolt vonzó és taszító hatásairól szólnak. Ez volt a magnetosztatika első leírt észleléssorozata.



12.1.1. ábra Mágnesrúd és a pólusai

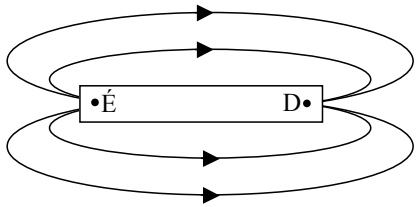
A részletes, mai értelemben véve tudományos, vizsgálatok azt mutatták, hogy a mágneses tulajdonsággal rendelkező testek mágneses pólusokkal írhatók le. A mágneses pólusok elnevezés gyökere az, hogy ha egy a hosszához képest elhanyagolható vastagságú mágnesrudat a közepénél felfüggesztünk, akkor az elfordul. És észak-déli irányba áll be. A rúd észak felé mutató végét északi, a másikat déli pólusnak nevezzük. A mágnes pólusainak (az elektrosztatikából kölcsönzött elnevezés szerint a mágneses ponttöltéseinek) helye a mágnes végétől a hosszának egytizenketted részében van (12.1.1. ábra). A mágneses „töltés” helyett póluserősségről (p) beszélünk, melynek mértékegysége Vs. A villamos térerősségnek megfelelően definiálni lehet a mágneses térerősséget ($\vec{H}$) az alábbi módon:

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{p} \qquad [H] = \frac{A}{m}. \tag{12.1.1}$$

Az analógia a villamos töltés és a mágneses póluserősség között azért sem teljes, mert amíg különálló villamos pozitív és negatív töltés bőségesen található, addig különálló mágneses déli, illetve északi pólus, azaz mágneses monopólus nem létezik. Ha egy mágnesrudat elfűrészelünk, akkor nem két különálló mágneses pólust, hanem két, mindkét pólussal rendelkező teljes (bár az eredetinél gyengébb) mágnest kapunk. A darabolást egészen a molekuláris szintig folytathatjuk azonos eredménnyel. A molekuláris áramok „elvágásával” a mágneses jelenség is megszűnik. A mágneses tulajdonságokat molekuláris, és kristályszerkezeti okokra lehet visszavezetni.

Az állandó mágneses anyagok által keltett mágneses mező leírásához a mágneses mezővonalak nyújthatnak segítséget, hasonlóan az elektrosztatika mezővonalaihoz. Ennek alapját az adja, hogy ha egy mágnesrúd fölé elhelyezett papírlapra finom vasport szórunk, akkor annak részecskéi az 12.1.2. ábrán látható vonalaknak megfelelően oszlanak el. Természetesen a papírt kissé megmozgatva a por eloszlása megváltozik, az azonos jellegű vonalak kissé eltolódnak. Ez azt jelenti, hogy a mező, vagy erővonalak mindenütt ott vannak, nemcsak meghatározott helyeken. A mezőt azonban jól tudjuk szemléltetni kevés vonallal is. A szemléltetéshez használt mágneses térerősség vonalak egységnyi felületre merőleges száma a térerősség abszolút értéke a vizsgált felület helyén. A mágneses térerősség mezővonalai az északi póluson erednek és a délin végződnek mind a mágnesen kívül, mind azon belül. Így az

állandó mágnesek esetében, azaz a magnetosztatikában, a mágneses mező forrásos és örvénymentes, forrásai az északi és nyelői a déli pólusok (ez szigorúan igaz a mágneseken kívüli térben, a mágnesek belsejében azonban bonyolultabb a kép). Mivel a két pólus mindig azonos nagyságú és mindig együtt lép fel, a mágneses alapkonstrukció a mágneses dipólus.



12.1.2. ábra Állandó mágnes mezővonalai

A mágneses térerősség ($\vec{H}$) helyett a fizikában inkább a mágneses indukció ($\vec{B}$) használatos (mivel értelmezése a mágnes belsejében egyszerűbb, mint a térerősségé) az alábbi összefüggés szerint:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}, \qquad (12.1.2)$$

ahol

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \text{ a vákuum mágneses permeabilitása,}$$

és μ_r a mágnest körülvevő közeg ún. relatív permeabilitása, értéke:

diamágneses anyagokra : $1 - 10^{-6 \div -4}$

paramágneses anyagokra : $1 + 10^{-6 \div -4}$

ferromágneses anyagokra (vas, kobalt, nikkel, gadolínium és ötvözetei) : $>> 1$.

Gd : $T < 72K$

A 12.1.2. összefüggés jól érvényes nem ferromágneses anyagokra (gázok, a legtöbb folyadék és szilárd anyag), ferromágneses anyagok esetén csak bizonyos térerősség alatt felel meg a valóságnak, többnyire sokkal bonyolultabb a viszony a két mennyiség között.
A mágneses indukció mértékegysége:

$$[B] = \frac{Vs}{m^2} \qquad 1\frac{Vs}{m^2} = 1T \text{ (Tesla)}.$$

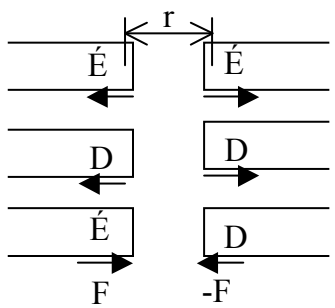
$1T = 10^4$ gauss (régi, CGS egység)

A mágneses térerősség mérőszáma igen nagy is lehet, az indukció ritkán haladja meg a 3at értéket. Nagy erőfeszítéssel tartósan mintegy 50T-át, impulzus üzemben pedig 150T-át sikerült 2007-ig előállítani erre a célra létrehozott laboratóriumokban.

A mágneses Coulomb törvény:
Két mágneses pólus erővel hat egymásra. Az azonos pólusok taszítják, a különbözők vonzzák egymást (12.1.3. ábra) az alábbi egyenletnek megfelelően,

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0\mu_r} \frac{p_1 p_2}{r^2}, \qquad (12.1.3)$$

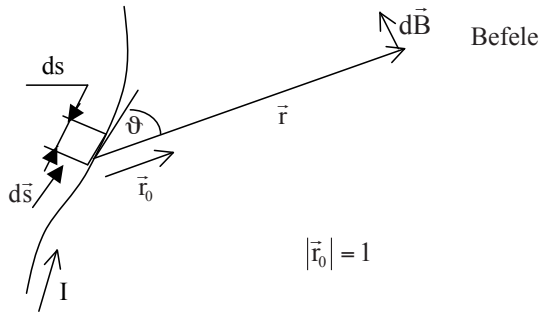
ahol p_1 és p_2 a két póluserősség, és r a két pólus távolsága.



12.1.3. ábra Mágneses pólusok között ható erők

12.2. Áramjárta vezető mágneses mezeje

Már a XVII században észrevették, hogy a villamos áram által járt vezető kitéríti a mágneses iránytűt. Az így keletkezett mágneses tér eltér a magnetosztatikai tértől.
Az áram által keltett indukció meghatározása általában nem egyszerű feladat, első közelítésben határozzuk meg egy, az I áramjárta vezető ds hosszúságú szakasza által létrehozott dB elemi mágneses indukciót egy attól r távolságra és ϑ szög alatt látszó (12.2.1. ábra) pontban. Az ezt megadó összefüggés a Biot-Savart (eljtsd: bio-szávár) törvény melyet az alábbiakban adunk meg.



12.2.1. ábra A Biot-Savart (-Laplace) törvény értelmező ábrája

$$dB = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\frac{Ids\cdot\sin\vartheta}{r^2}. \qquad (12.2.1)$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet jobb oldalán a nevezőben a $d\vec{s}$ és az $\vec{r}_0$ vektorok vektori szorzatának abszolút értéke van, és iíg az egyenlet vektori formában az alábbi alakot ölti:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\frac{Id\vec{s}x\vec{r}_0}{r^2}. \qquad (12.2.2)$$

Megszorozva az egyenlet jobb oldalának számlálóját és nevezőjét r-rel kapjuk:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\frac{Id\vec{s}x\vec{r}}{r^3}. \qquad (12.2.3)$$

A mágneses térerősségre is hasonló egyenletek érvényesek az alábbiak szerint:

$$dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Ids\cdot\sin\vartheta}{r^2}, \qquad (12.2.4)$$

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{Id\vec{s}x\vec{r}_0}{r^2}, \qquad (12.2.5)$$

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{Id\vec{s}x\vec{r}}{r^3}. \qquad (12.2.6)$$

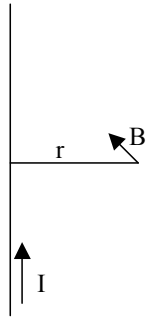
A fenti egyenletek segítségével egy I árammal átjárt ds hosszúságú ívelem, vagy egy Ids áramelem által létrehozott elemi mágneses térerősséget, vagy indukciót tudunk meghatározni. Az egész vezető által keltett térerősséget, vagy indukciót az elemi térerősség, illetve indukció vektorok vektori eredője adja minden pontban. Az alábbiakban megadjuk néhány esetben az így kiszámított értékeket.

Végtelen hosszú egyenes vezetőre:
I árammerősséggel átjárt végtelen hosszú egyenes vezetőtől r távolságra (12.2.2. ábra) a mágneses indukció:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r}. \qquad (12.2.7)$$

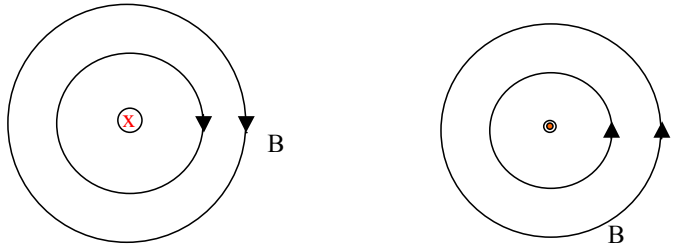
A mágneses térerősség pedig:

$$H = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r}. \qquad (12.2.8)$$



12.2.2. ábra Végtelen hosszú árammal átjárt vezető indukciójának megállapításához solgáló segédábra

Az indukcióvonalak koncentrikus kört alkotnak, az indukcióvektorok iránya a az áram irányával jobb menetű csavart alkot (12.2.3. ábra). A papír síkjába befolyó áram (amelyet a vezetőbe rajzolt X-el jelölünk) által keltett indukciót az alábbi ábra bal, a kifele folyó áram (amelyet ponttal jelölünk) által keltettet pedig a jobb oldalán mutatjuk be.



12.2.3. ábra Áramjárta egyenes vezető körül kiaalakuló mágneses indukció

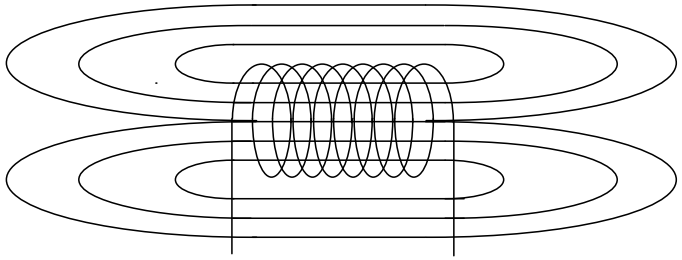
Szolenoid belsejében kialakuló mágneses mező:
Szolenoid (hosszához képest kis átmérőjű tekercs), belsejében (ahol a mező homogénnek tekinthető) kialakuló mágneses mező (12.2.4. ábra):

$$H = \frac{n \cdot I}{l}, \tag{12.2.9}$$

és

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot I}{l}, \tag{12.2.10}$$

Ahol n a szolenoid menetszáma, l a hosszúsága és I a rajta folyó áram erőssége, μ_r a szolenoid, vagy tekercs, belsejében levő közeg relatív permeabilitása.

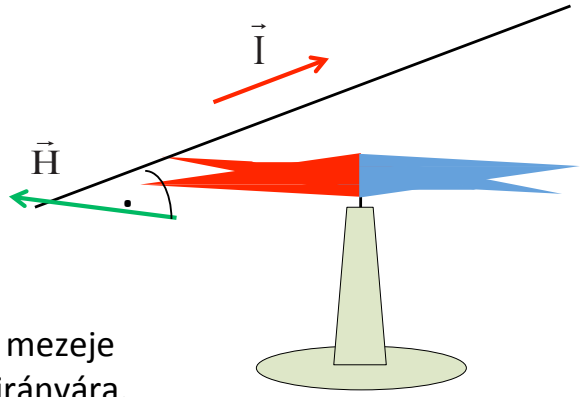


12.2.4. ábra Szolenoid mágneses mezeje

Hatásait tekintve a szolenoid úgy viselkedik, mint egy mágnesrúd.
A fentiek alapján **egyenáram mágneses tere forrásmentes és örvényes**, ami azt jelenti, hogy az indukció és térerősségvonalak önmagukban zárt vonalak, nincsen sem kezdetük, sem végük.

Áramjárta vezető mágneses mezeje

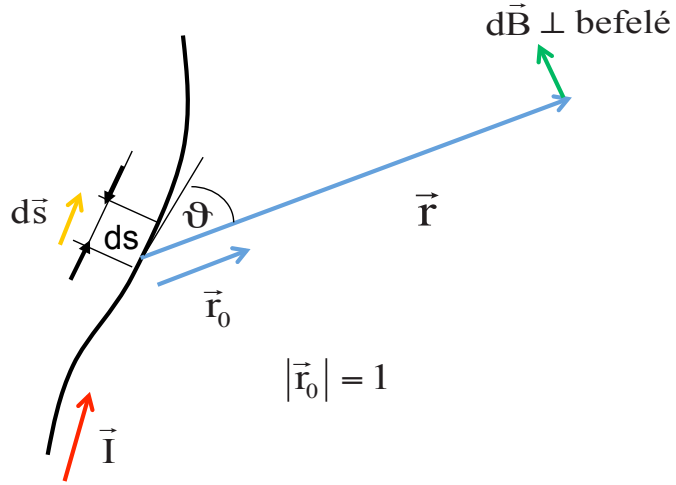
1820-ban egy dán fizikus Hans Christian Ørsted észrevette, hogy az árammal átjárt vezető közelében elhelyezett iránytű az áram hatására elfordul. Megállapította, hogy az elektromos áram mágneses teret létesít.



Az elektromos áram mágneses mezeje merőleges a töltések áramlási irányára.

Biot-Savart törvény:

Határozzuk meg egy, az I áramjárta vezető ds hosszúságú szakasza által létrehozott dB elemi mágneses indukciót egy attól r távolságra és ϑ szög alatt látszó pontban:

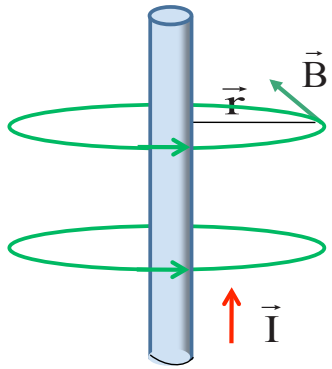


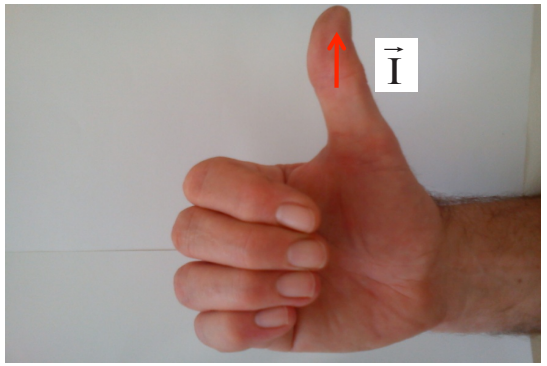
$$dB = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{Ids \cdot \sin\vartheta}{r^2}$$

vektori formában:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{Id\vec{s} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

Végtelen hosszú egyenes vezető mágneses mezeje:

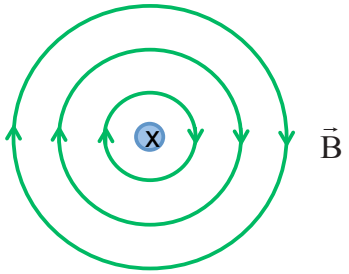




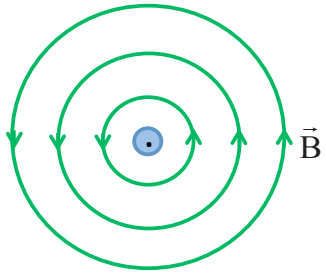
Az indukcióvonalak koncentrikus köröket alkotnak, az indukcióvektorok iránya az áram irányával jobb menetű csavart alkot:

Ha jobb kezünk hüvelykujja mutatja az áramirányt, akkor behajlított ujjaink mutatják a mágneses mező irányát.

Az egyenes vezetőt körülvevő mágneses mező hengerszimmetrikus:



A lap síkjába merőlegesen befolyó áram által keltett mágneses mező



A lap síkjából merőlegesen kifolyó áram által keltett mágneses mező

A mágneses térerősség:

$$H = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r}$$

Az indukció:

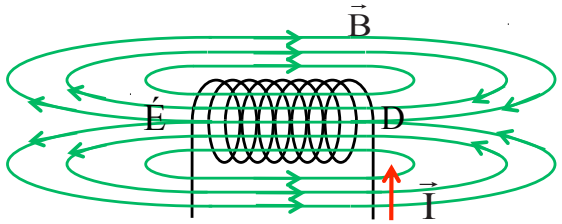
$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r}$$

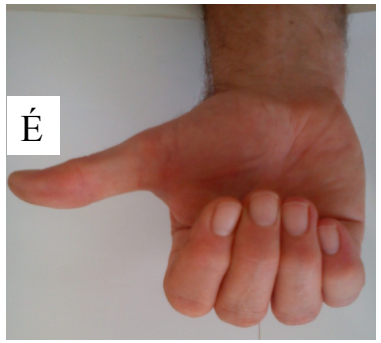
Szolenoid mágneses mezeje:

Az áramjárta szolenoid (hosszához képest kis átmérőjű tekercs) körül, és a belsejében mágneses mező alakul ki.

Az áramjárta tekercs úgy viselkedik, mint egy mágnesrúd: ha a jobbkéz behajlított ujjai adják az áram irányát, akkor a hüvelykujj mutatja az északi pólust.

A tekercs belsejében a mágneses mező homogén.





A mágneses térerősség:

$$H = \frac{n \cdot I}{\ell}$$

az indukció:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot I}{\ell}$$

Ahol n a szolenoid menetszáma, ℓ a hosszúsága és I a rajta folyó áram erőssége, μ_r a tekercs, belsejében levő közeg relatív permeabilitása.

12.3. Erőhatások mágneses mezőben

Mozogjon egy áramjárta vezeték egy homogén mágneses térben (amit egy meghajlított mágneses rúddal tudunk a legegyszerűbben közelíteni) a 12.3.1. ábra szerint. Ekkor az áramjárta vezeték ds elemi hoszúságára haró dF erőt az alábbiakban tudjuk meghatározni:

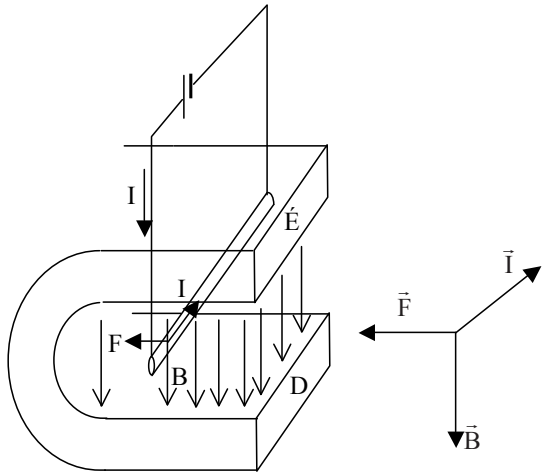
$$d\vec{F} = Id\vec{s}x\vec{B}. \qquad (12.3.1)$$

Az egyenletben a vektorjelet nem az áram, hanem a vezeték hosszára tettük úgy, hogy a vektor az áram irányába mutasson.
Az ábra szerinti elrendezésben, ha l a mágneses térben levő vezető hosszúság:

$$\vec{F} = I \cdot \left[\vec{\ell} x \vec{B}\right],$$

vagy abszolút értékben:

$$F = BlI.$$



12.3.1. ábra Mágneses mezőben levő áramjárta vezetőre ható erő

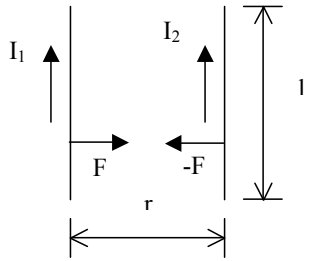
Ha a vezető α szöget zár be a mágneses erővonalakkal:

$$F = BlI\sin\alpha.$$

Az erő, az indukció és az áram iránya az ábra jobb oldalán látható módon ad három egymásra merőleges vektort. Az irányok meghatározására a jobbkézszabály ad egyszerű útmutatást, miszerint, ha a hüvelykújjunkat az áram irányába állítjuk, és a mutatóujjunkat az indukciójéba, akkor a tenyerünkre merőlegesen állított középső ujjunk adja az erő irányát.

Párhuzamos áramvezetők közötti erőhatás:
Tekintsünk két végtelen hosszúságú egymással párhuzamos vezetőt, amelyeken I_1 és I_2 áramok folynak (12.3.2. ábra). Ekkor az I_1 árammal átjárt vezető a másik helyén a papír síkjára merőleges és befele irányuló indukciót hoz létre, melynek nagysága:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot r}.$$

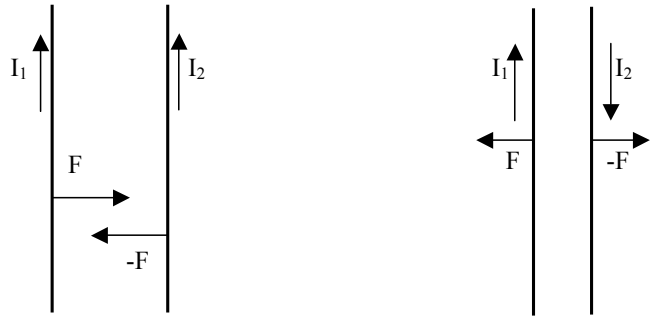


12.3.2. ábra Két párhuzamos, árammal átjárt vezetőre ható erő

A második áramjárta vezető az első mágneses terében van, ezért annak l hosszúságú szakaszára az alábbi erő hat:

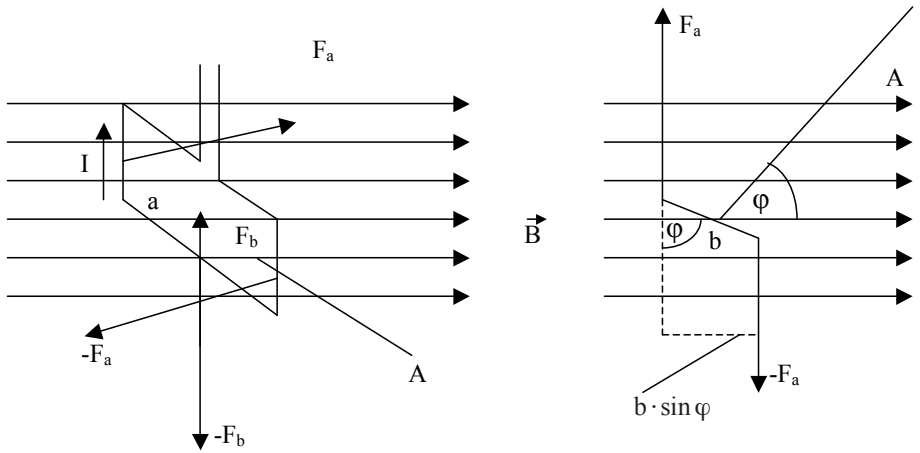
$$F = B \cdot I_2 \cdot l = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot l \qquad (12.3.2)$$

Belátható (akár a jobbkéz szabály segítségével is), hogy az azonos irányú áramokkal átjárt vezetők vozzák, a különböző irányú áramokkal átjártak pedig taszítják egymást (12.3.3.ábra).



12.3.3. ábra Áramjárta vezetők között ébredő erő

Áramjárta keretre vagy tekercsre ható forgató nyomaték mágneses mezőben:
Helyezzünk el egy a és b oldalú téglalap alakkal leírható, I áram járta, keretet homogén mágneses mezőbe a 12.3.4. ábra szerint.



12.3.4. ábra Homogén mágneses térbe helyezett keretre ható erők

A keret a hosszúságú oldalára ható erő:

$$F_a = BaI.$$

A b hosszúságú két oldalra ható erők kiegyenlítik egymást, de az a-ra hatók párhuzamosak, és forgatónyomatékot adnak az alábbiak szerint:

$$M = F_a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

$$M = B\underbrace{ab}_{A} I \sin\varphi$$

$$M = IAB\sin\varphi$$

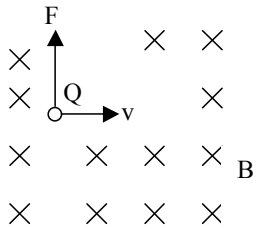
$$\vec{M} = I \cdot \vec{A} x \vec{B}$$

több menet (n) esetében :

$$\vec{M} = nI\vec{A}x\vec{B}.$$

Mágneses mezőben mozgó töltésre ható erő:

Tekintsünk egy Q töltéssel rendelkező pontszerű testet, ami v sebességgel halad egy homogén B indukciójú mágneses (ami a lapra merőlegesen befele mutat) térben a 12.3.5. ábra szerint.



12.3.5. ábra Mágneses térben mozgó pontszerű töltésre ható erő

A pontszerű töltés mozgása áramot jelent az alábbiak szerint:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{Q}{\frac{s}{v}} = \frac{Qv}{s}.$$

Kis átalakítással:

$$Is = Qv,$$

és mivel ds és v is vektor, és egyirányúak is, ezért:

$$Id\vec{s} = Q\vec{v}.$$

Az Ids áramelemre ható erő az 12.3.1 egyenlet szerint:

$$d\vec{F} = Id\vec{s}x\vec{B},$$

így:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v}x\vec{B}. \qquad (12.3.3)$$

Ezt az erőt **Lorentz – erő**nek nevezzük. Ez a töltés mozgásának irányára merőleges erő. homogén mágneses mezőben ez körmozgást eredményez.
A Lorentz erő hatására megváltozik a töltött részecske mozgásának az iránya, de a sebességének a nagysága nem. A jelenséget széles körűen felhasználják az elektronsugár eltérítésében televíziók, monitorok képcsöveiben.

Az előző fejezetekben megismerkedtünk az magnetosztatika alapjaival, valamint az elektromos áram mágneses mezejével. Az itt látott fizikai törvényeknek is számtalan alkalmazása van a mindennapi gyakorlatban, kezdve a permanens mágnessel működő záraktól az elektromágneses relékig. A most következő fejezetben többek között az áramjárta vezetőre mágneses mezőben ható erőkről és az ennek alapján kialakuló forgatónyomatékról lesz szó. Az itt leírt törvények adják a fizikai alapjait annak hogy a villamos energiát mechanikai energiává lehet alakítani, azaz pl. villanymotorokat, vagy lineáris motorokat lehet építeni.

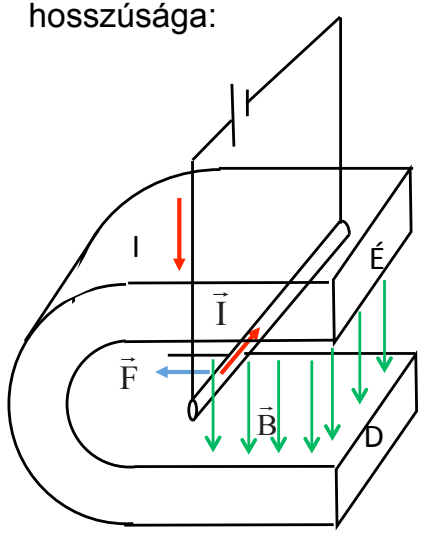
Erőhatások mágneses mezőben

Tekintsünk egy áramjárta vezetéket homogén mágneses mezőben.

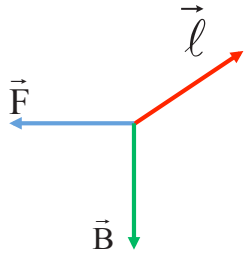
Ekkor a vezeték ds elemi hosszúságára ható dF erőt az alábbiakban tudjuk meghatározni:

$$d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B}$$

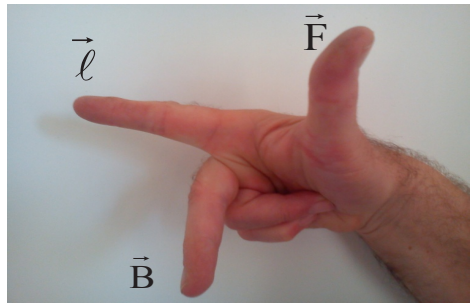
Az ábra szerinti elrendezésben, ha ℓ a vezető mágneses térben levő hosszúsága:



$$\vec{F} = I \cdot \left[\vec{\ell} x \vec{B}\right]$$



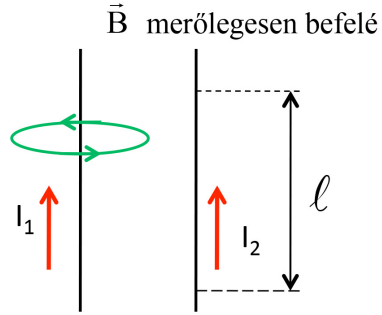
Az erő, az indukció és az áram iránya három egymásra **merőleges** vektor. Az irányok meghatározására a jobbkéz szabály ad egyszerű útmutatást:



Párhuzamos áramvezetők közötti erőhatás:

Tekintsünk két hosszú egymással párhuzamos egyenes vezetőt, amelyeken I_1 és I_2 áramok folynak.

Ekkor az I_1 árammal átjárt vezető a másik helyén a vezetők síkjára merőleges és befele irányuló indukciót hoz létre, melynek nagysága:

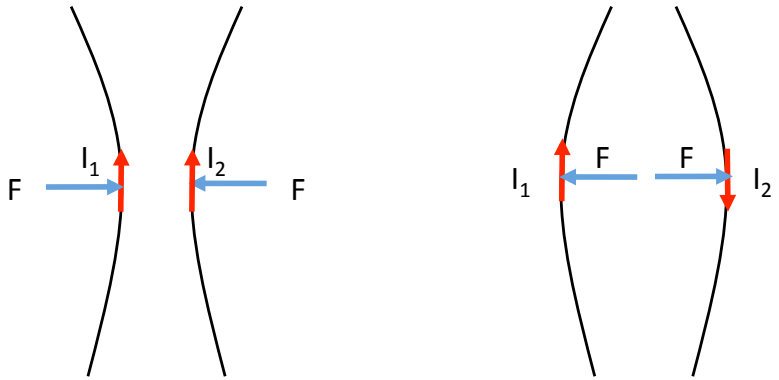


$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

A második áramjárta vezető az első mágneses terében van, ezért annak ℓ hosszúságú szakaszára az alábbi erő hat:

$$F = BI_2\ell = \mu_0\mu_r \frac{I_1 I_2}{2\pi r}\ell$$

Belátható (akár a jobbkéz szabály segítségével is), hogy az azonos irányú áramokkal átjárt vezetők vonzzák, a különböző irányú áramokkal átjártak pedig taszítják egymást:



Áramjárta keretre ható forgatónyomaték

Helyezzünk el egy a és b oldalú téglalap alakkal leírható, I áram járta keretet homogén mágneses mezőben:

A keret *a* hosszúságú oldalára ható erő:

$$F_a = BaI$$

az a oldalakra ható erők párhuzamosak, a forgatónyomatékuk:

$$M = F_a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

$$M = B\underbrace{ab}_{A} I \sin\varphi$$

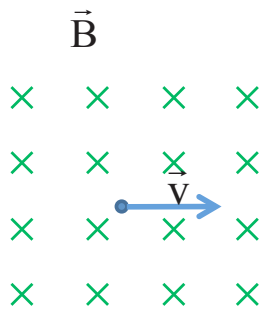
$$\vec{M} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

n menetű I áram által átjárt tekercsre ható forgatónyomaték:

$$\vec{M} = nI\vec{A} \times \vec{B}$$

Mágneses mezőben mozgó töltésre ható erő:

Tekintsünk egy Q töltéssel rendelkező pontszerű testet, ami v sebességgel mozog egy az ábra síkjára merőleges homogén B indukciójú mágneses mezőben:



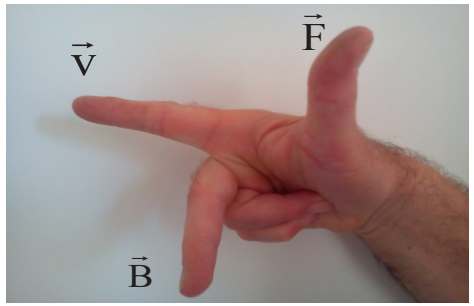
A pontszerű töltés mozgása áramot jelent az alábbiak szerint:

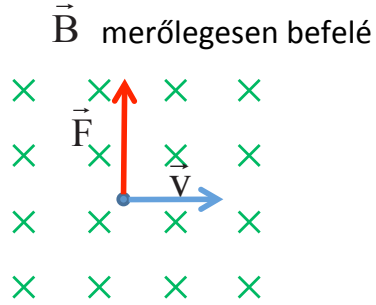
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{\frac{ds}{v}} = \frac{dQv}{ds}$$

átalakítással: $Ids = dQv$

mivel s és v is vektor, és egyirányúak is, ezért:

$$Id\vec{s} = dQ\vec{v}$$





Lorentz – erő: $\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Ez a vektoregyenlet a pozitív töltésre ható erőt adja meg. Negatív töltésre értelemszerűen ellenkező irányú erő hat.

A Lorenz-erő a töltés mozgásának irányára merőleges erő, homogén mágneses mezőben körmozgást eredményez.
A Lorentz erő hatására megváltozik a töltött részecske mozgásának az iránya, de a sebességének a nagysága nem. A jelenséget széles körűen felhasználják az elektronsugár eltérítésében televíziók, monitorok képcsöveiben.

12.4. Elektromágneses indukció

A mágneses indukció fluxus:

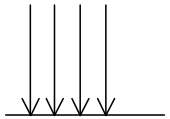
A mágneses indukció szemléltetésénél az a megállapodás, hogy az egységnyi felületen merőlegesen „áthaladó” indukció vonalak száma az indukció abszolút értékével egyezik meg. Felmerül a kérdés, hogy mekkora az adott A felületen merőlegesen áthaladó indukcióvonalak száma, vagy más néven az indukció fluxus. A választ az alábbiakban találhatjuk meg.

Homogén, a felületre merőleges indukcióvonalak esetében (12.4.1. ábra):

$$\Phi = BA\,. \qquad (12.4.1)$$

Ahol Φ a mágneses indukció fluxus. Mértékegysége:

$$[\Phi]=[B]\cdot[A]=\frac{V\cdot s}{m^2}\cdot m^2 = Vs = Wb \text{ (ejtsd : véber)}$$



12.4.1. ábra Az adott felületre merőleges indukcióvonalak

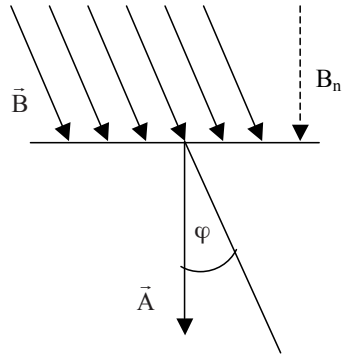
A síkkal φ szöget bezárva:

Az indukció felületre merőleges, vagy normális ($B_n = B\cdot\cos\varphi$) komponense számít az alábbiak szerint:

$$\Phi = B\cdot A\cdot\cos\varphi\cdot$$

Az 5.3.15. ábra szerint ez az alábbiakban írható:

$$\Phi = B_n\cdot A = \vec{B}\cdot\vec{A}\,. \qquad (12.4.2)$$



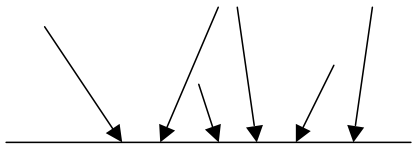
12.4.2. Homogén, de a felülettel szöget bezáró mágneses mező

Inhomogén mező (12.4.3. ábra) esetében:
Inhomogén mező esetében a felületet felosztjuk olyan kicsi ΔA nagyságú darabokra, amelyekben már a tér homogénnek tekinthető, és ezekre az elemi felületekre kiszámítjuk az elemi fluxusokat, és ezeket összeadjuk az alábbiak szerint:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \Delta\vec{A} .$$

Ha a felület beosztását minden határon túl finomítjuk kapjuk:

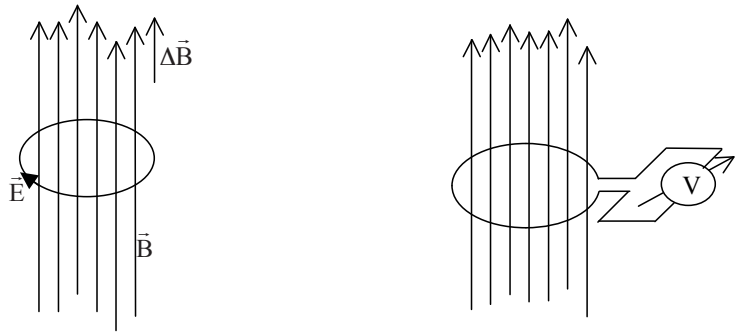
$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A B_n \cdot dA . \qquad (12.4.3)$$



12.4.3.ábra Inhomogén mágneses mező

Elektromágneses indukció:

Tekintsünk egy területet, amelyen mágneses indukció mérhető. Változzon ez az indukció a 12.4.4. ábra bal oldali elrendezésének megfelelően felfelé. Ekkor, mindaddig amíg az indukció változik, az indukcióvonalakat körülövező villamos mező (villamos tér) keletkezik az ábrán látható módon úgy, hogy az indukció változása és a keletkező villamos térerősség bal csavart alkot. Részletesebb vizsgálatok azt mutatják, hogy a térerősség nemcsak az indukció megváltozásától, hanem a felület megváltozásától is függ, az a fluxus megváltozásával arányos. A villamos tér vákuumban, levegőben, mindenféle közegben keletkezik. A megfelelő matematikai összefüggést itt nem adjuk meg, hanem a legkönnyebben mérhető formájával foglalkozunk, azzal a feszültséggel, ami a villamos tér hatására egy zárt vezetőben keletkezik, amely a villamos erővonalak mentén körülöleli a változó mágneses fluxust. Ezt az elrendezést, melyet egy voltmérő egészít ki az12.4.4. ábra olvasó számára jobb oldalán mutatunk be.



12.4.4. ábra Villamos tér és feszültség keletkezése változó mágneses mező körül

A változó fluxust körülövező vezetőben keletkező feszültséget a **Faraday-féle indukciós törvény** adja meg az alábbiak szerint:

$$U_i = -n \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

illetve gyorsan változó fluxus esetében is pontosan:

$$U_i = -n \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \qquad (12.4.4)$$

Ahol n a változó mágneses teret körülvevő tekercs menetszáma. A törvény azt mondja ki, hogy egy n menetű tekercs belsejében változó mágneses fluxus esetében a tekercsben feszültség indukálódik, és annak nagysága arányos a fluxusváltozás sebességével és a tekercs menetszámával. A negatív előjel oka egyrészt az, hogy a keletkezett villamos mező az indukcióváltozással balcsavart alkot, másrészt az, hogy a fluxusváltozás következtében energia keletkezik (azonban nem a semmiből, az energia megmaradás továbbra is érvényes). Az energiamegmaradás törvényéből következik a **Lenz szabály**:
Az indukált feszültség és áram iránya olyan, hogy az őt létrehozó hatást akadályozza.

A Faraday-féle indukciós törvény független attól, hogy a fluxusváltozást állandó mágnes, vagy szolenoid segítségével állítottuk elő.

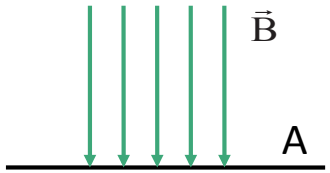
Elektromágneses indukció

A mágneses indukció fluxus

Mágneses indukció: az egységnyi felületen merőlegesen „áthaladó” indukció vonalak száma az indukció abszolút értékével egyezik meg.

Mekkora az adott A felületen merőlegesen áthaladó indukcióvonalak száma, vagy más néven az **indukció fluxus?**

Homogén, a felületre merőleges indukcióvonalak esetében:



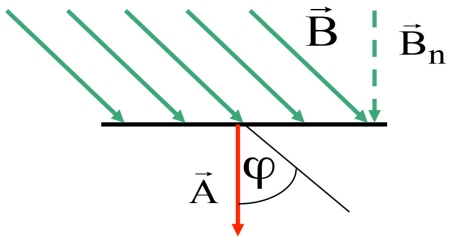
$$\Phi = BA$$

Ahol Φ a mágneses indukció fluxus.
Mértékegysége:

$$[\Phi] = [B] \cdot [A] = \frac{V \cdot s}{m^2} \cdot m^2 = Vs = Wb \quad \text{(véber)}$$

A sík normálisával φ szöget bezáró indukcióvonalak esetén:

Ekkor az indukció felületre merőleges, vagy normális komponense számít az alábbiak szerint:

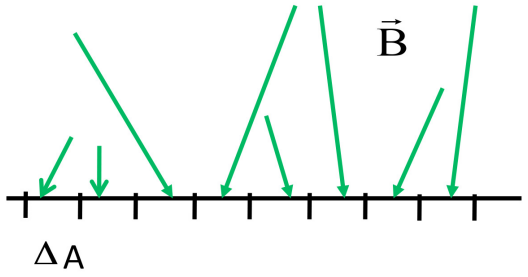


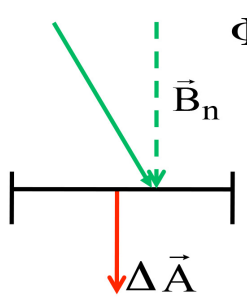
$$B_n = B \cdot \cos\varphi$$

ekkor:

$$\Phi = B_n \cdot A = B \cdot \cos\varphi \cdot A = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Inhomogén mező:





$$\Phi_i = \vec{B}_i \cdot \Delta\vec{A}$$

Ekkor a felületet felosztjuk olyan kicsi ΔA nagyságú darabokra, amelyekben már a tér homogénnek tekinthető:

Ezekre az elemi felületekre kiszámítjuk az elemi fluxusokat, és ezeket összeadjuk:

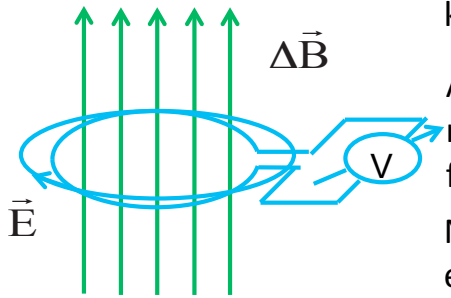
$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \Delta\vec{A}$$

Ha a felület beosztását minden határon túl finomítjuk kapjuk:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A B_n \cdot dA$$

Elektromágneses indukció:

Tekintsünk egy területet, amelyen mágneses indukció mérhető. Változzon ez az indukció úgy, hogy felfelé növekszik:



Ekkor az indukcióvonalakat körülövező villamos mező keletkezik úgy, hogy az indukció változása és a keletkező villamos térerősség bal csavart alkot.

Az elektromos keletkező mező nemcsak az indukció megváltozásától, hanem a felület megváltozásától is függ, az a fluxus megváltozásával arányos

Nézzük azt a feszültséget, ami a villamos tér hatására egy zárt vezetőben keletkezik, amely a villamos erővonalak mentén körülöleli a változó mágneses fluxust:

A változó fluxust körülövező vezetőben keletkező feszültséget a **Faraday-féle indukciós törvény** adja meg az alábbiak szerint:

$$U_i = -n \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

gyorsan változó fluxus esetében általánosan:

$$U_i = -n \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Itt n a változó mágneses teret körülvevő tekercs menetszáma

Szavakkal: **egy n menetű tekercs belsejében változó mágneses fluxus esetében a tekercsben feszültség indukálódik, és annak nagysága arányos a fluxusváltozás sebességével és a tekercs menetszámával.**

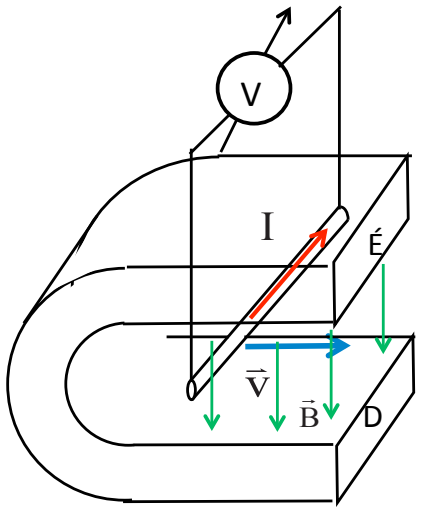
A negatív előjel oka egyrészt az, hogy a keletkezett villamos mező az indukcióváltozással balcsavart alkot, másrészt az, hogy a fluxusváltozás következtében energia keletkezik (azonban nem a semmiből, az energia megmaradás továbbra is érvényes).

Az energiamegmaradás törvényéből következik a **Lenz szabály**:
Az indukált feszültség és áram iránya olyan, hogy az őt létrehozó hatást akadályozza.

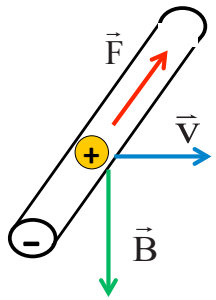
Mozgási indukció

Mozgassunk egy l hosszúságú vezetőt B indukciójú homogén mágneses térben a nyíl irányában:

Ekkor a vezetőbe behatoló mágneses térben a töltéshordozókra, **erő hat,** mivel azok a vezetővel együtt mozognak (Lorenz-erő).



A pozitív töltéshordozók ennek eredményeképpen a nyíl irányában mozognak, azaz áram folyik.



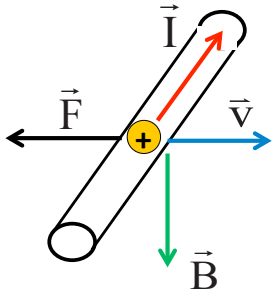
Ha az áramkör zárt, akkor az áram mindaddig folyik, amíg a mozgás tart. Ha az áramkör nem zárt, akkor a töltéshordozók a vezeték végén gyűlnek össze, és ezzel a vezeték két vége között feszültség mérhető.

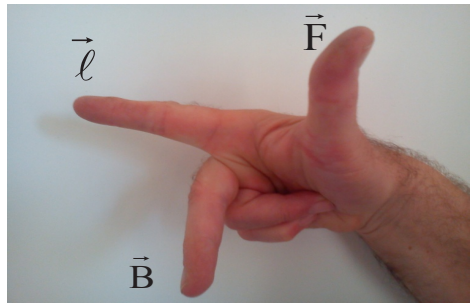
A keletkező feszültség nagysága: $U = B \cdot \ell \cdot v$

Ha a vezető az indukció vonalakra nem merőleges, hanem a szöget zár be akkor:

$$U = B \cdot \ell \cdot v \cdot \sin \alpha$$

Az így létrejövő indukált áram és feszültség irányára nézve a Lenz szabály érvényes. Mivel a vezetőn áram folyik, és a vezető mágneses térben van, ezért erő hat rá, amelynek irányát a jobbkéz szabály segítségével, határozhatjuk meg.





Itt az $\vec{\ell}$ az $\vec{I}$ irányába mutató vektor

Ez az erő a sebességgel ellentétes irányú. Lenz törvénye alapján elmondhatjuk, hogy az indukált áram olyan hatást kelt, (ez a létrejövő erő) hogy akadályozza az őt létrehozó fizikai hatást, ami a mozgás.
Ez azt jelenti, hogy a mozgatáshoz ezzel ellentétes (sebesség irányú) erőt kell kifejtenünk akkor is, ha nem gyorsítunk. Ez megfelel az energia megmaradás törvényének.
Példa: Az ábrán látható párhuzamos vezető sínpár egy 12 V-os 20 W-os izzóva Ez
az

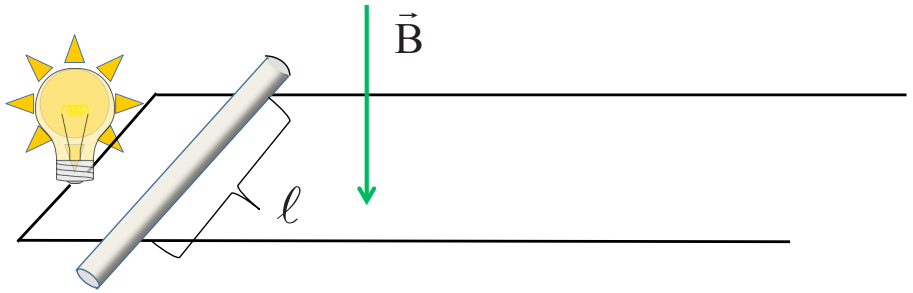
B=0.5 T

ℓ =1m

$R_{rúd}$=5 Ω

$U_{izzó}$=12 V

$P_{izzó}$=20 W



a. Mekkora sebességgel kell a vezető rudat a nyíl irányában mozgatni, hogy az izzó teljes fénnyel világítson?
b. Mekkora erő szükséges ehhez?
c. Mekkora munkát végzünk, miközben 3 m úton mozgatjuk a rudat?

Megoldás a. Először számítsuk ki az izzó üzemi ellenállását:

$$P = U \cdot I \Rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{20W}{12V} = 1{,}67\ A$$

innen: $$R_{izzó} = \frac{U}{I} = 7{,}2\ \Omega$$

Ahhoz, hogy az izzó teljes fénnyel világítson, tehát 1,67 A áram kell hogy folyjon az áramkörben. Az áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = R_{izzó} + R_{rúd} = 12{,}2\ \Omega$$

A szükséges indukált feszültséget az eredő ellenállásból és a kiszámított áramerősségből Ohm törvénye alapján számoljuk ki:

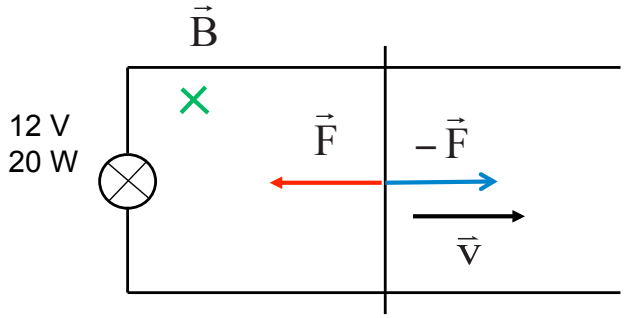
$$U_{ind} = I \cdot R_e = 20{,}33\ V$$

Felhasználva a mozgási indukció képletét, az ehhez szükséges sebesség:

$$U_{ind} = B \cdot \ell \cdot v \Rightarrow v = \frac{U_{ind}}{B \cdot \ell} = 40{,}67 \ \frac{m}{sec}$$

b. Mivel áramjárata vezetőre mágneses mezőben erő hat, a csúszó vezető rúdra is erő fog hatni:

Az erő iránya Lenz törvénye alapján a sebességgel ellentétes irányú (piros nyíl):



Az erő nagysága:

$$F = B \cdot I \cdot \ell = 0.833 \ N$$

Ahhoz, hogy a rúd állandó sebességgel mozogjon ugyanekkora, de ellenkező irányú erőt kell kifejtenünk (kék nyíl).

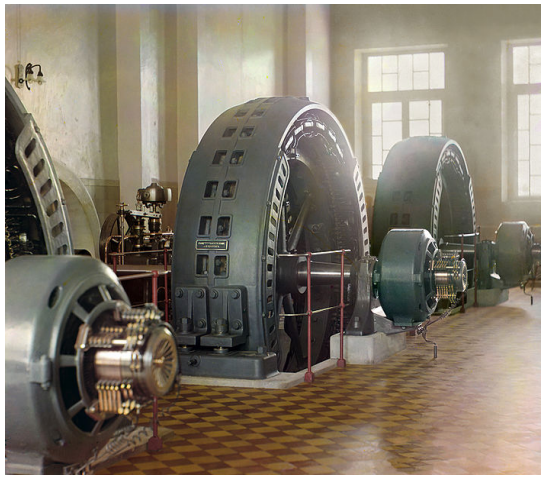
c. Ha erőt fejtünk ki egy adott úton, akkor munkát végzünk. Ebben az esetben a munka:

$$W = F \cdot s = 2{,}5 \ J$$

3m úton mozgatva a vezető rudat, tehát 2,5 J munkát végeztünk.

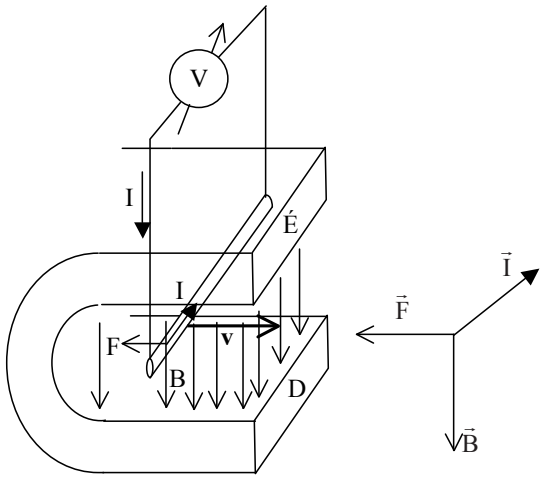
Ezzel mechanikai munkával elektromos energiát fejlesztettünk és egy izzót működtettünk.

Generátorok, erőművek:



12.5. Mozgási indukció

Mozgassunk egy l hosszúságú vezetőt B indukciójú homogén mágneses térben az (12.5.1. ábra). Ekkor a vezetőbe behatoló mágneses térben a töltéshordozókra, mivel azok a vezetővel együtt mozognak, erő hat. A jobbkéz szabály segítségével belátható, hogy a pozitív töltéshordozók ennek eredményeképpen az ábrán berajzolt irányban mozognak, azaz áram folyik. A negatív töltéshordozók mozgása ellentétes lesz, de az ugyanolyan irányú áramot jelent. Ha az áramkör zárt, akkor az áram mindaddig folyik, amíg a mozgás tart. Ha az áramkör nem zárt, akkor a töltéshordozók a vezeték végén gyűlnek össze, és ezzel a vezeték két vége között feszültség mérhető. A keletkezett feszültség nagysága:



12.5.1. ábra A mozgási indukció

$$U = B \cdot l \cdot v . \qquad (12.5.1)$$

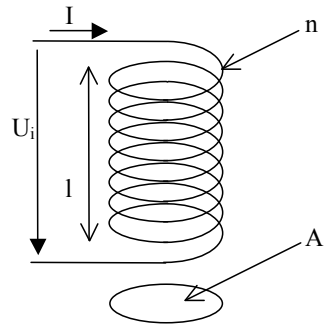
Ha a vezető az indukció vonalakra nem merőleges, hanem α szöget zár be akkor:

$$U = B \cdot l \cdot v \cdot \sin\alpha .$$

Az áramerősséget ez a feszültség és a körben levő ellenállás együttesen határozza meg. Az indukált áram és feszültség irányára nézve a Lenz szabály most is megfelelő útmutatót ad. Mivel a vezetőn áram folyik, és a vezető mágneses térben van, ezért erő hat rá, amelynek irányát az ábrán látható vektorokból, vagy a jobbkéz szabály segítségével határozhatunk meg. Ez az erő a sebességgel ellentétes irányú. Ez azt jelenti, hogy a mozgatáshoz ezzel ellentétes (sebességirányú) erőt kell kifejtenünk akkor is, ha nem gyorsítunk. Ez természetesen megfelel az energiatételnek. Ha nem egy vezető, hanem két párhuzamos vezetőből álló áramkört mozgatunk (és nem forgatunk), akkor a két vezetőben azonos irányú feszültség keletkezik, s azok egy áramkörben kiegyenlítik egymást, áram nem folyik. Ha a két párhuzamos vezetőből álló áramkört megfelelően forgatjuk, akkor a két vezető sebessége ellentétes lesz, tehát a körben feszültség mérhető. Ezzel a jelenséggel itt nem foglalkozunk.

12.6. Önindukció, kölcsönös indukció

Önindukció:
Tekintsünk egy szolenoidot, (tekercset), melynek menetszáma n, hosszúsága l, keresztmetszete A (12.6.1. ábra), és a benne levő anyag relatív permeabilitása μ_r. Folyjék I áram a tekercsen keresztül. Amennyiben a vezeték (amelyből a tekercs készült) ellenállását elhanyagolhatjuk (amit réz vezeték esetében többnyire jó közelítéssel megtehetünk), akkor a rajta eső feszültség zérus. Ha a tekercsen áram folyik, akkor annak belsejében kialakuló mágneses indukció:



12.6.1. ábra Az önindukció meghatározásához használt tekercs

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{n \cdot I}{l},$$

és a fluxus:

$$\Phi = B \cdot A .$$

Az indukciót behelyettesítve kapjuk:

$$\Phi = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot I}{l} \cdot A .$$

Ha az áramerősség Δt idő alatt ΔI értékkel változik, akkor a fluxus is változik az alábbiak szerint:

$$\Delta\Phi = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot A}{l} \cdot \Delta I .$$

Ha a fluxus változik, akkor a Faraday-féle indukciós törvény értelmében feszültség indukálódik a tekercsben:

$$U_i = -n \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -n \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot A}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Az egyenlet jobb oldalán az áram és az idő kivételével minden tényező az adott tekercs esetében állandó, ezért célszerű egy újabb konstans bevezetésével egyszerűsíteni a formulát az alábbiak szerint:

$$L = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{n^2 \cdot A}{l}, \qquad (12.6.1)$$

ahol L a tekercs önindukciós tényezője, vagy induktivitása. Mértékegysége:

$$[L] = \frac{Vs}{A} = H.$$

Így az indukált feszültség:

$$U_i = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

illetve a nagyon gyorsan változó áramok esetében is érvényes alakban:

$$U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt}. \qquad (12.6.2)$$

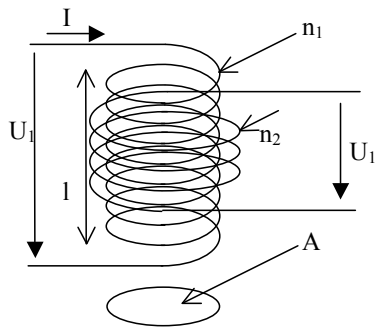
Az egyenlet szerint tehát, ha egy tekercsben változik a rajta keresztül folyó áram, akkor abban feszültség indukálódik, melynek nagysága arányos az áram változási sebességével és a tekercs induktivitásával. Ez az önindukció jelensége.
Az önindukciót a technikában sok helyen alkalmazzák. A benzinmotorok üzemanyag-levegő keverékét például olyan nagyfeszültségű impulzussal szokás begyújtani, amelyet egyenáram szaggatásával állítanak elő.

Kölcsönös indukció:
Tekintsünk egy n_1 menetszámú, l hosszúságú, A keresztmetszetű szolenoidot (tekercset), melyben μ_r relatív permeabilitású anyag van. Szorosan tekerjünk rá egy n_2 menetszámú második tekercset, úgy hogy annak a keresztmetszete is legyen A (12.6.2. ábra). Az ábrán a második tekercset kissé felnagyítottuk a könnyebb ábrázolhatóság miatt. Follyék I_1 áram az első tekercsben. Ekkor a benne kialakuló fluxus:

$$\Phi = B \cdot A,$$

azaz:

$$\Phi = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{n_1 \cdot I_1}{l_1} \cdot A.$$



12.6.2. ábra A kölcsönös induktivitásban résztvevő két tekercs (a másodikat az ábrázolhatóság miatt kissé felnagyítottuk)

Mivel mindkét tekercsnek azonos az átmérője, s ezzel a keresztmetszete, ezért mindkettőben azonos a fluxus. Így, ha az első tekercsben változik az áramerősség, a második tekercsben is feszültség indukálódik, nemcsak az elsőben, az alábbi összefüggés szerint:

$$U_2 = -n_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \frac{A}{l_1} \cdot \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Az egyenlet jobb oldalán az időn és az áramon kívül minden tényező állandó, és jellemző a két tekercsre, ezért az egyszerűség kedvéért célszerű egy újabb állandót bevezetni:

$$M = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1 \cdot n_2 \frac{A}{l_1}, \qquad (12.6.3)$$

Ahol M a kölcsönös indukciós tényező, vagy kölcsönös induktivitás. Mértékegysége az induktivitáséval megegyezően H.
A második tekercsben indukált feszültség tehát:

$$U_2 = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t},$$

illetve a gyorsan változó áramok esetében is pontos formula:

$$U_2 = -M \cdot \frac{dI_1}{dt}. \qquad (12.6.4)$$

Ez az egyenlet adja a kölcsönös indukció törvényét.
Az első tekercsben az önindukciós feszültség indukálódik:

$$U_1 = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1^2 \cdot \frac{A}{l_1} \cdot \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

A két tekercsben indukálódott feszültségek aránya:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \frac{A}{l_1}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1^2 \cdot \frac{A}{l_1}},$$

azaz:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (12.6.5)$$

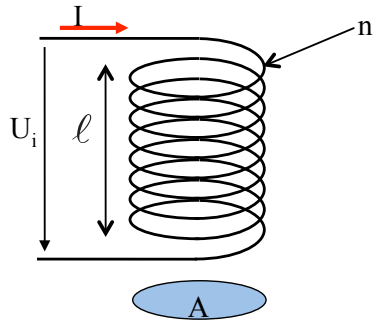
Az 12.6.5 egyenlet szerint a két tekercsben indukálódott feszültség aránya a mentszámok arányával egyezik meg. Ez a transzformátorok számára alapvető egyenlet teszi lehetővé változó feszültségek menetszámok arányában történő növelését, illetve csökkentését a fenti kéttekercses elrendezés segítségével.

Önindukció, kölcsönös indukció

Önindukció

Tekintsünk egy tekercset, melynek menetszáma n, hosszúsága ℓ, keresztmetszete A és a benne levő anyag relatív permeabilitása μ_r. Folyjék I áram a tekercsen keresztül. Ekkor a tekercs belsejében kialakuló mágneses indukció:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{n \cdot I}{\ell}$$



a fluxus: $\Phi = B \cdot A$

Az indukciót behelyettesítve:

$$\Phi = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot I}{\ell} \cdot A$$

Ha az áramerősség Δt idő alatt ΔI értékkel változik, akkor a fluxus is változik az alábbiak szerint:

$$\Delta\Phi = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot A}{\ell} \cdot \Delta I$$

Ha a fluxus időben változik, akkor a Faraday-féle indukciós törvény értelmében feszültség indukálódik a tekercsben:

$$U_i = -n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -n \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot A}{\ell} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Ekkor a tekercs önindukciós tényezője, vagy induktivitása:

$$L = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{n^2 \cdot A}{\ell}$$

Mértékegysége: $[L] = \frac{Vs}{A} = H$ (Henry)

Így az indukált feszültség: $U_i = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$

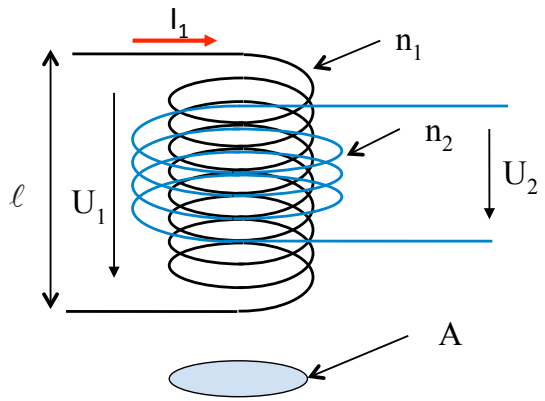
általános alakban: $U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt}$

Az egyenlet szerint tehát, ha egy tekercsben változik a rajta keresztül folyó áram, akkor abban feszültség indukálódik, melynek nagysága arányos az áram változási sebességével és a tekercs induktivitásával. Ez az önindukció jelensége.

Az indukált feszültség Lenz-törvénye alapján olyan, hogy akadályozza az őt létrehozó hatást: itt ez azt jelenti, hogy amennyiben az áram éppen növekszik a tekercsben akkor az indukált feszültség által létrehozott indukált áram éppen az eredeti árammal ellentétes irányú, azaz akadályozza az áram növekedését. Emiatt a tekercs váltakozó áramú áramkörökben ellenállásként viselkedik

Kölcsönös indukció:

Tekintsünk egy n_1 menetszámú, ℓ hosszúságú, A keresztmetszetű tekercset, melyben μ_r relatív permeabilitású anyag van. Szorosan tekerjünk rá egy n_2 menetszámú második tekercset, úgy hogy annak a keresztmetszete is legyen A. Ha az első tekercsben I_1 áram folyik akkor a benne kialakuló fluxus:



$$\Phi = B \cdot A$$

azaz: $$\Phi = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{n_1 \cdot I_1}{\ell} \cdot A$$

Ha az első tekercsben változik az áramerősség, a második tekercsben is feszültség indukálódik, nemcsak az elsőben, az alábbi összefüggés szerint:

$$U_2 = -n_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \frac{A}{l_1} \cdot \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$$

Az egyenlet jobb oldalán az időn és az áramon kívül minden tényező állandó, és jellemző a két tekercsre, ezért az egyszerűség kedvéért célszerű egy újabb állandót bevezetni:

A kölcsönös induktivitás: $$M = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1 \cdot n_2 \frac{A}{\ell}$$

Mértékegysége az induktivitásával megegyezően: H.

A második tekercsben indukált feszültség tehát:

$$U_2 = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$$

általánosan: $$U_2 = -M \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

Ez a kölcsönös indukció törvénye.

Az első tekercsben az önindukciós feszültség indukálódik:

$$U_1 = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1^2 \cdot \frac{A}{\ell} \cdot \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$$

A két tekercsben indukálódott feszültségek aránya:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \frac{A}{\ell}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot {n_1}^2 \cdot \frac{A}{\ell}}$$

azaz:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

Ez azt jelenti, hogy a két tekercsben indukálódott feszültség aránya a mentszámok arányával egyezik meg. Ez a transzformátorok számára alapvető egyenlet teszi lehetővé változó feszültségek menetszámok arányában történő növelését, illetve csökkentését a fenti kéttekercses elrendezés segítségével.

13. fejezet

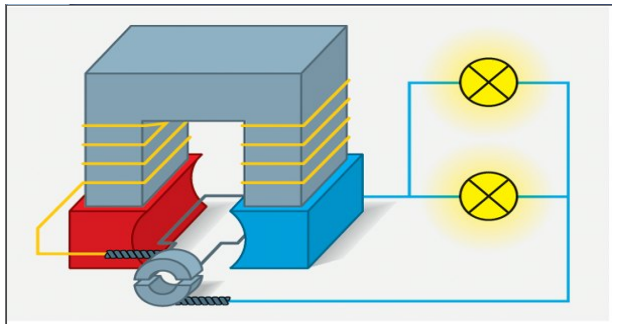
Váltakozó áram

Bevezetés

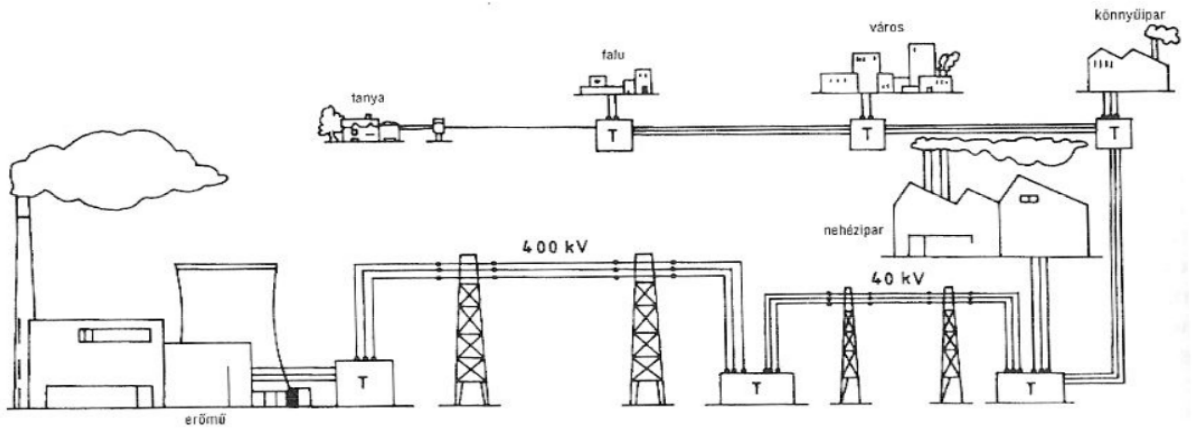
Dinamó:

Jedlik Ányos (1800-1895)



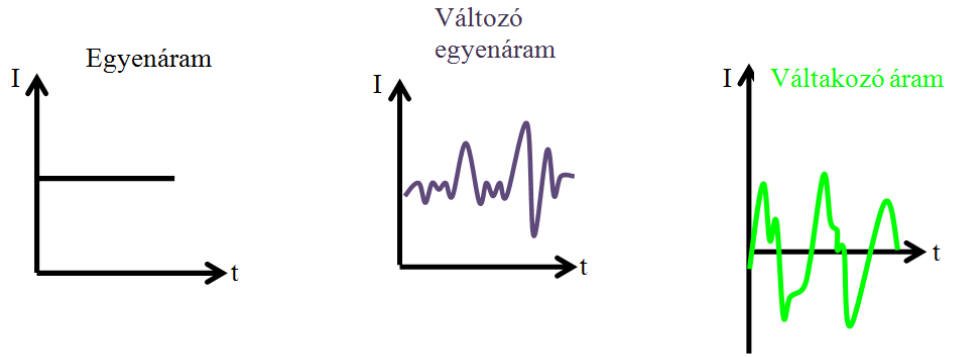


Transzformátor



Elektromos hálózat működési sémája

Az előző fejezetekben az egyenáramokról volt szó, az olyanokról, melyek áramerőssége, és az azokkal kapcsolatos feszültség időben állandó (a. ábra). Az ott elmondottak nagy része érvényes akkor is, ha az áram változó egyenáram (b. ábra). Újabb ismeretekre is van azonban szükségünk, ha az áram, és a kapcsolatos feszültség olyan, hogy nemcsak a nagysága, hanem az irányai is változik időnként, vagy periódikusan (c. ábra), azaz váltakozó árammal van dolgunk. Ebben a fejezetben az időben periódikusan váltakozó előjelű áramokról és feszültségekről, valamint az ezekkel kapcsolatban felmerülő áramköri elemek alapvető részéről esik szó



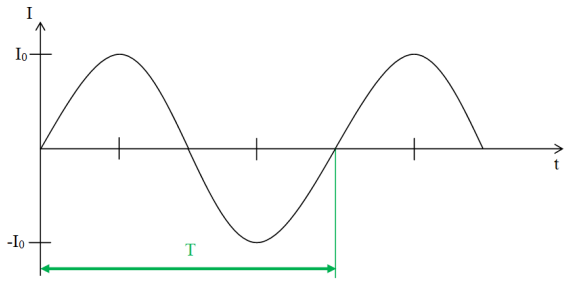
a. b. c.

Szinuszos váltakozó áram

A váltakozó áramok időfüggvénye a Fourier elv alapján felbontható színuszos (és koszinuszos) függvényekre, ezért a továbbiakban csak szinuszos időfüggvénnyel foglalkozunk.

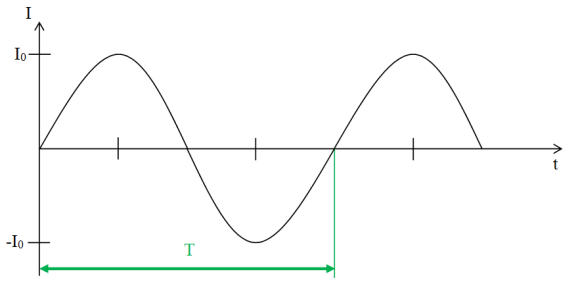
A váltakozóáramnak az a formája, amellyel a hétköznapi életben a leggyakrabban találkozunk. Az otthonokban és a munkahelyeken ezzel találkozunk naponta többször is. Az áramerősség időfüggvényét az alábbi egyenlet adja meg, és azt az ábrán mutatjuk be.

$$i = I_0 \sin \omega t$$



A feszültség időfüggése is hasonló lehet, azonban általába fáziseltérés van a két függvény között, azaz a zérus tengelyt nem egy időben metszik.

Az időben ismétlődő kitérések közötti legrövidebb idő, T a periódus idő, ennek reciproka a frekvencia (f), és a körfrekvencia (ω) az alábbiak szerint számítható:



$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{\text{sec}}\right]$$

$$[f] = \frac{1}{\text{sec}} = \text{Hz}$$

Az áram, illetve a feszültség pillanatnyi értéke általánosságban:

$$i = I_0 \sin\left(\omega t + \varphi_I\right)$$

$$u = U_0 \sin\left(\omega t + \varphi_U\right)$$

ahol u; i a pillanatnyi értékek, φ_I az áramerősség, és φ_U pedig a feszültség kezdőfázisa.

A váltakozó áram effektív értéke

Egy váltakozó áram, vagy feszültség effektív értéke annak az egyenáramnak, vagy feszültségnek az értéke, ami ugyanakkora munkát végez, mint az adott váltakozó áram, vagy feszültség.

$$I_{eff} = I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

$$U_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$

Csak szinuszos hullámforma esetén:

$$U_{eff} \equiv U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

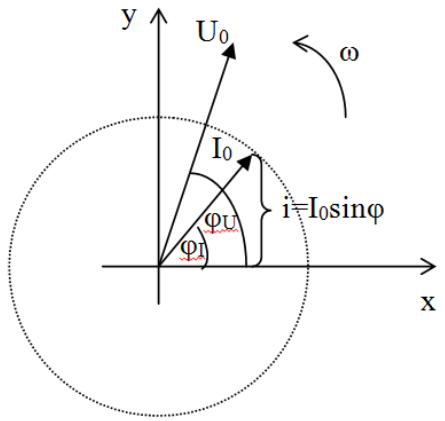
$$I_{eff} \equiv I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$P_{eff} \equiv P = \frac{P_0}{2}$$

A háztartási hálózat esetében: U=230 V, és U_0=325 V.

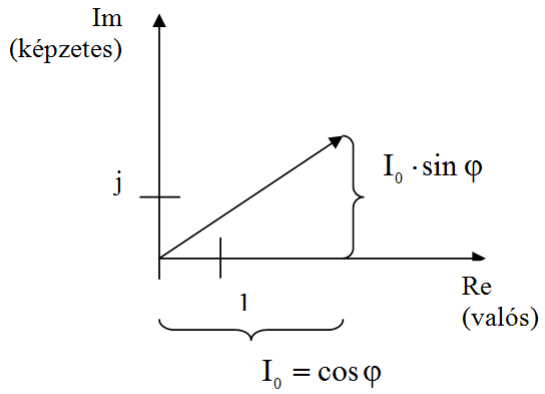
A váltakozó áram és feszültség ábrázolása forgó vektorként

Ha a feszültség és áramerősség csúcsértékének megfelelő vektort a körfrekvenciának megfelelő (az óramutató járásával ellentétes irányban) forgó vektorként fogjuk fel, akkor a pillanatnyi értékek a forgó vektor vetületeként foghatók fel. Az ábrán csak az áram pillanatnyi értékét ábrázoltuk. A két forgó vektor közötti szög az ábrából könnyen meghatározható. A vektorok egymáshoz képesti helyzete forgás közben nem változik, s bármelyik helyzetben megállíthatjuk. Ekkor az ún. vektorábrát, vagy fázor ábrát kapjuk, mellyel a fázisviszonyok könnyen nyomon követhetők.



A feszültség és áram, mint forgó vektorok

Ha a komplex számsíkon forgatjuk a vektorokat, még jobban használható módszerhez jutunk, akkor kapjuk a komplex reprezentációt. Az áramot, mint komplex számot az ábrán ábrázoltuk. Ha a képzetes tengely a függőleges (melynek egysége $j = \sqrt{-1}$, és a valós tengely a vízszintes, és φ a valós tengellyel bezárt szög, akkor a komplex áram ($\bar{I}$):



Áram a komplex síkban

trigonometrikus alakban:

$$\bar{I} = I_0\left(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right) =$$

exponenciális alakban:

$$= I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \quad = I_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

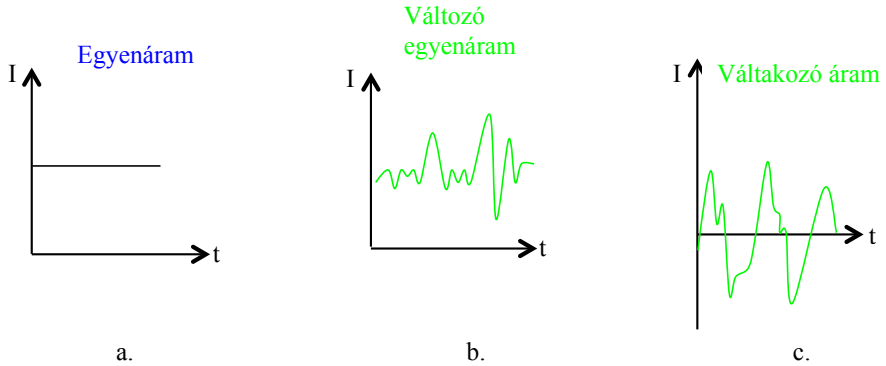
Komplex reprezentációban az $U = RI$ Ohm törvény helyett az

$$\overline{U} = \overline{Z}\overline{I}$$

Komplex ohm törvény használatos, ahol $\overline{Z}$ a komplex impedancia, abszolút értéke Z.

13.1. Váltakozó áram

Az előző fejezetekben az egyenáramokról volt szó, az olyanokról, melyek áramerőssége, és az azokkal kapcsolatos feszültség időben állandó (13.1.1.a. ábra. Az ott elmondottak nagy része érvényes akkor is, ha az áram változó egyenáram (13.1.2.b. ábra). Újabb ismeretekre is van azonban szükségünk, ha az áram. És a kapcsolatos feszültség olyan, hogy nemcsak a nagysága, hanem az irányai is változik időnként, vagy periódikusan (13.1.1.c. ábra), azaz váltakozó árammal van dolgunk. Ebben a fejezetben az időben periódikusan váltakozó előjelű áramokról és feszültségekről, valamint az ezekkel kapcsolatban felmerülő áramköri elemek alapvető részéről esik szó



13.1.1. ábra Egyen, változó egyen és váltakozó áram időfüggése

A váltakozó áramok időfüggvénye a Fourier elv alapján felbontható színuszos (és koszinuszos) függvényekre, ezért a továbbiakban csak szinuszos időfüggvénnyel foglalkozunk.

Szinuszos váltakozó áram

A váltakozóáramnak az a formája, amellyel a hétköznapi életben a leggyakrabban találkozunk. Az otthonokban és a munkahelyeken ezzel találkozunk naponta többször is. Az áramerősség időfüggvényét az alábbi egyenlet adja meg, és azt az 13.1.2. ábrán mutatjuk be.

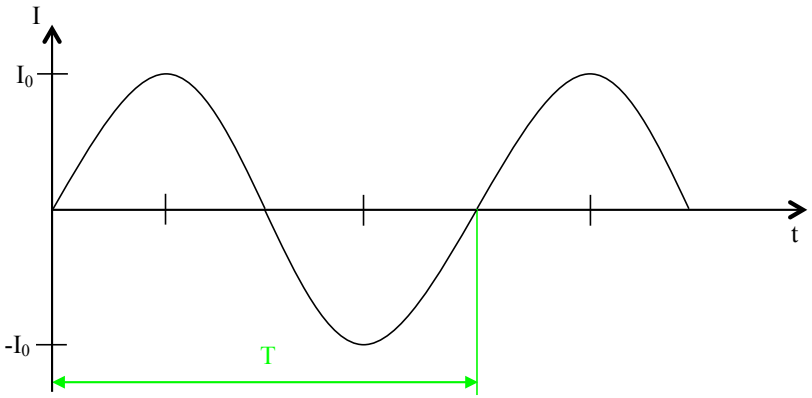
$$i = I_0 \sin \omega t \qquad (13.1.1.)$$

A feszültség időfüggése is hasonló lehet, azonban általába fáziseltérés van a két függvény között, azaz a zérus tengelyt nem egy időben metszik.
Az időben ismétlődő kitérések közötti legrövidebb idő, T a periódus idő, ennek reciproka a frekvencia (f), és a körfrekvencia (ω) az alábbiak szerint számítható:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{\sec}\right]$$

$$[f] = \frac{1}{\sec} = \text{Hz}$$

Az áram, illetve a feszültség pillanatnyi értéke általánosságban:



13.1.2. ábra Szinuszosan változó váltakozó áram

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi_I), \text{ és} \qquad (13.1.2.)$$

$$u = U_0 \sin(\omega t + \varphi_U), \qquad (13.1.3.)$$

ahol u; i a pillanatnyi értékek, φ_I az áramerősség, és φ_U pedig a feszültség kezdőfázisa.

A váltakozó áram effektív értéke:

$$I_{eff} = I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} \qquad (13.1.4.)$$

$$U_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} \qquad (13.1.5.)$$

Egy váltakozó áram, vagy feszültség effektív értéke annak az egyenáramnak, vagy feszültségnek az értéke, ami ugyanakkora munkát végez, mint az adott váltakozó áram, vagy feszültség.

Csak szinuszos hullámforma esetén:

$$U_{eff} \equiv U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

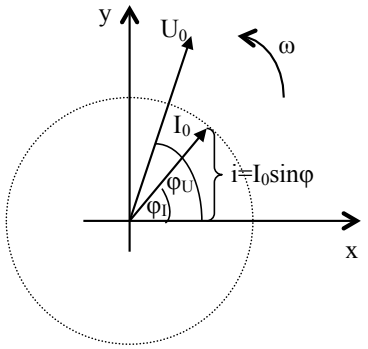
$$I_{eff} \equiv I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$P_{eff} \equiv P = \frac{P_0}{2}$$

A háztartási hálózat esetében: U=230 V, és U_0=325 V.

A váltakozó áram és feszültség ábrázolása forgó vektorként:

Ha a feszülség és áramerősség csúcsértékének megfelelő vektort a körfrekvenciának megfelelő (az óramutató járásával ellentétes irányban) forgó vektorként fogjuk fel (13.1.3. ábra), akkor a pillanatnyi értékek a forgó vektor vetületeként foghatók fel. Az ábrán csak az áram pillanatnyi értékét ábrázoltuk. A két forgó vektor közötti szög az ábrából könnyen meghatározható. A vektorok egymáshoz képesti helyzete forgás közben nem változik, s bármelyik helyzetben megállíthatjuk. Ekkor az ún. vektorábrát, vagy fázor ábrát kapjuk, mellyel a fázisviszonyok könnyen nyomon követhetők.



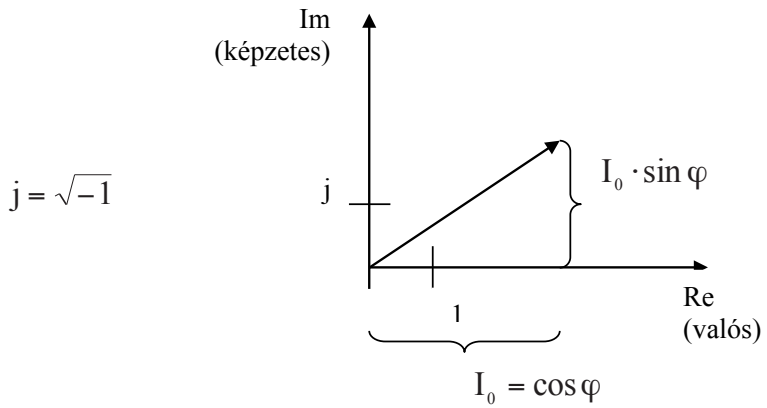
13.1.3. ábra A feszültség és áram, mint forgó vektorok

Ha a komplex számsíkon forgatjuk a vektorokat, még jobban használható módszerhez jutunk, akkor kapjuk a komplex reprezentációt. Az áramot, mint komplex számot az 13.1.4. ábrán ábrázoltuk. Ha a képzetes tengely a függőleges (melynek egysége $j = \sqrt{-1}$, és a valós tengely a vízszintes, és φ a valós tengellyel bezárt szög, akkor a komplex áram ($\bar{I}$):
trigonometrikus alakban:

$$\bar{I} = I_0\left(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right) =$$

exponenciális alakban:

$$= I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = I_0 e^{i\varphi} e^{j\omega t}.$$



13.1.4. ábra Áram a komplex síkban

Komplex reprezentációban az $U = RI$ Ohm törvény helyett az

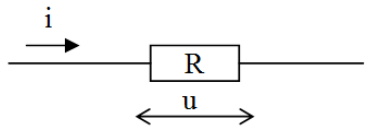
$$\overline{U} = \overline{Z}\overline{I}$$

komplex ohm törvény használatos, ahol $\overline{Z}$ a komplex impedancia, abszolút értéke Z.

Ellenállás, induktivitás és kapacitás váltakozó áramú körökben

Ellenállás váltakozó áramú körökben:

Az ellenállás váltakozó áramú körben (ábra) a pillanatnyi értékeket vizsgálva ugyanúgy viselkedik, mint egyenáramon.



Ellenállás váltakozó áramú körben

$$u = iR = I_0 R \sin(\omega t + \varphi_I),$$

másrészt a feszültség kifejezésére használható formula szerint

$$u = \underbrace{U_0}_{U_0 = I_0 R} \sin\underbrace{(\omega t + \varphi_U)}_{\varphi_I = \varphi_U}$$

Ha a két formula jobb oldala megegyezik, akkor a bal oldalak is, és a szorzótényezők, valamint a szinusz függvény argumentumai is azonosak.

Így az ellenálláson eső feszültség csúcsértéke megegyezik az áram csúcsértékének és az ellenállásnak a szorzatával, s mivel az effektív érték csak egy állandóval különbözik a csúcsértéktől (és az állandó a feszültségre és az áramra azonos), így az effektív értékre (azaz az időbeli átlagra) is érvényes az arányosság:

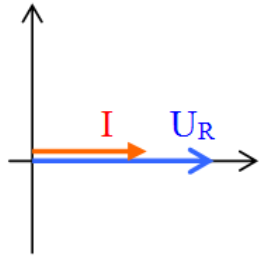
$$U = I \cdot R$$

$$u = iR = I_0 R \sin(\omega t + \varphi_I),$$

$$u = \underbrace{U_0}_{U_0 = I_0 R} \sin\underbrace{(\omega t + \varphi_U)}_{\varphi_I = \varphi_U}$$

$$u = \underbrace{U_0}_{U_0 = I_0 R} \sin\underbrace{(\omega t + \varphi_U)}_{\varphi_I = \varphi_U}$$

Az egyenletből következik, hogy az ellenálláson átfolyó váltakozó áram, és a rajta eső váltakozó feszültség fázisban van. Ennek megfelelően a forgó vektorok (fázorok) ábrája két párhuzamosan forgó vektort mutat.



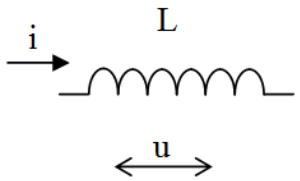
Váltakozó áram esetében az ellenálláson eső feszültség és a rajta folyó áram forgó vektorai párhuzamosan forognak, közöttük fáziseltérés nincs.

A komplex áramra és feszültségre is igaz az arányosság:

$$\overline{U} = \overline{I} \cdot R$$

Induktivitás váltakozó áramú körökben:

Ha egy L induktivitást (legegyszerűbb esetben egy szolenoidot) váltakozó áramra kapcsolunk, és áram folyik rajta keresztül, akkor a rajta eső feszültséget az önindukciós törvény adja



Induktivitás váltakozó áramú körökben

$$U = -L\frac{dI}{dt}$$

Az egyenletbe az áram pillanatnyi értékének függvényét behelyettesítve kapjuk a feszültség pillanatnyi értékét:

$$u = I_0 \cdot \omega \cdot L \cdot \cos \omega t \, .$$

Másrészt a feszültség kifejezése:

$$u = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi \,) \, .$$

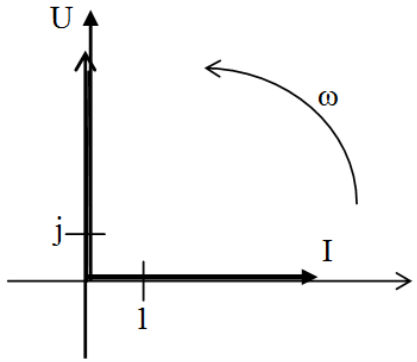
A két függvényt összehasonlítva a feszültség csúcsértékére

$$U_0 = I_0 \cdot \omega \cdot L$$

adódik, azaz az induktivitás úgy viselkedik, mintha ellenállása lenne, amit váltakozó áramon impedanciának, az induktivitás esetében sokszor (speciális kifejezéssel) induktív reaktanciának (X_L) nevezünk:

$$X_L = \omega \cdot L \, .$$

Az argumentumok és a függvények összehasonlítása azt adja, hogy a feszültség vektor egy negyed periódussal, azaz 90°-kal siet az áramhoz képest, amit a forgó vektorokkal az 5.4.8. ábrán mutatunk be.



Az induktivitáson mérhető feszülség és a rajta folyó áram mint forgó vektorok

Mivel a feszülség a komplex síkon az áramból a képzetes egységgel (j) való szorzással is előállítható, ezért az induktív reaktancia az alábbi komplex formát ölti.

$$\overline{X}_L = j \cdot \omega \cdot L$$

Így az Ohm törvénynek megfelelő egyenlet:

$$\overline{U} = \overline{X}_L \cdot \bar{I}\,.$$

Más alakban:

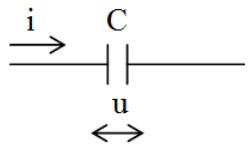
$$\overline{U} = j \cdot \omega \cdot L \cdot I\,.$$

Az effektív értékekre, azaz az időbeli átlagokra, azaz az egyszerű mérőműszerekkel mérhető értékekre:

$$U = X_L \cdot I$$
$$U = \omega \cdot L \cdot I$$

Kapacitás váltakozó áramú körökben:

Kapacitás (azaz általában egy kondenzátor) váltakozó áramú körökben akkor mutat feszültséget, ha töltés jut a fegyverzeteire.



Kapacitás váltakozó áramú körökben

A kapacitásra rákerülő töltés, melynek nagysága változik az idővel a következő feszültséget hozza létre azon:

$$u = \frac{1}{C}\int i \cdot dt\,.$$

Ha az áram pillanatnyi értéke $i = I_0 \sin \omega t$, akkor a fenti művelet:

$$u = \frac{1}{C}\int i \cdot dt = \frac{1}{C}\int I_0 \cdot \sin \omega t \, dt = -\frac{I_0}{\omega \cdot C} \cdot \cos \omega t \, .$$

Másrészről a feszültség kifejezése most is

$$u = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \, .$$

Így a feszültség csúcsértéke:

$$U_0 = \frac{1}{\omega C} I_0 \, ,$$

és így az effektív értéke:

$$U = \frac{1}{\omega C} I \, .$$

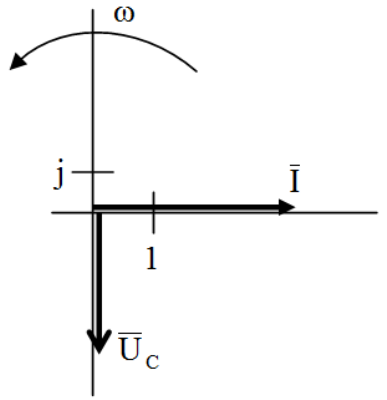
A kapacitás is úgy viselkedik, mintha valamiféle ellenállása lenne, a rajta mérhető feszültség arányos az árammal, az arányossági tényező a kapacitív reaktancia (sokszor csak impedancia):

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \, .$$

A feszültség függvényeket összehasonlítva láthatjuk, hogy a kapacitáson mérhető feszültség egy negyed periódussal, azaz 90°-kal késik az áramhoz képest, amit az ábrán is láthatunk.

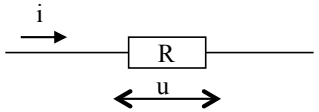
Mivel, az ábra szerint, ha az áramot, megszorozzuk –j-vel, éppen a feszültség irányú komplex számot kapjuk meg, a feszültség abszolút értéke pedig az áramnak a kapacitív reaktanciával való szorzása révén kapható meg, ezért:

$$\overline{X}_C = -j\frac{1}{\omega C}$$



13.2.Ellenállás, induktivitás és kapacitás váltakozó áramú körökben

Ellenállás váltakozó áramú körökben:
Az ellenállás váltakozó áramú körben (13.2.1. ábra) a pillanatnyi értékeket vizsgálva ugyanúgy viselkedik, mint egyenáramon.



13.2.1. ábra Ellenállás váltakozó áramú körben

$$u = iR = I_0 R \sin(\omega t + \varphi_I), \qquad (13.2.1)$$

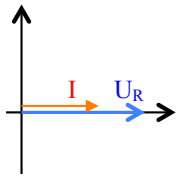
másrészt a feszültség kifejezésére használható formula szerint

$$u = \underbrace{U_0}_{U_0 = I_0 R} \underbrace{\sin(\omega t + \varphi_U)}_{\varphi_I = \varphi_U} \cdot \qquad (13.2.2)$$

Ha a két formula jobb oldala megegyezik, akkor a bal oldalak is, és a szorzótényezők, valamint a szinusz függvény argumentumai is azonosak.
Így az ellenálláson eső feszültség csúcsértéke megegyezik az áram csúcsértékének és az ellenállásnak a szorzatával, s mivel az effektív érték csak egy állandóval különbözik a csúcsértéktől (és az állandó a feszültségre és az áramra azonos), így az effektív értékre (azaz az időbeli átlagra) is érvényes az arányosság:

$$U = I \cdot R\,. \qquad (13.2.3)$$

A 13.2.2 egyenletből következik, hogy az ellenálláson átfolyó váltakozó áram, és a rajta eső váltakozó feszültség fázisban van. Ennek megfelelően a forgó vektorok (fázorok) ábrája (13.2.2. ábra) két párhuzamosan forgó vektort mutat.

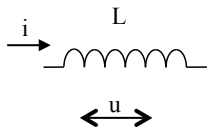


13.2.2. ábra Váltakozó áram esetében az ellenálláson eső feszültség és a rajta folyó áram forgó vektorai párhuzamosan forognak, közöttük fáziseltérés nincs

A komplex áramra és feszültségre is igaz az arányosság:

$$\overline{U} = \overline{I} \cdot R\,. \qquad (13.2.4.)$$

Induktivitás váltakozó áramú körökben:
Ha egy L induktivitást (legegyszerűbb esetben egy szolenoidot) váltakozó áramra kapcsolunk (13.2.3. ábra), és $i = I_0 \sin \omega t$ áram folyik rajta keresztül, akkor a rajta eső feszültséget az önindukciós törvény (5.4.10.) adja



13.2.3. ábra Induktivitás váltakozó áramú körökben

$$U = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (13.2.5.)$$

Az egyenletbe az áram pillanatnyi értékének függvényét behelyettesítve kapjuk a feszültség pillanatnyi értékét:

$$u = I_0 \cdot \omega \cdot L \cdot \cos \omega t.$$

Másrészt a feszültség kifejezése:

$$u = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

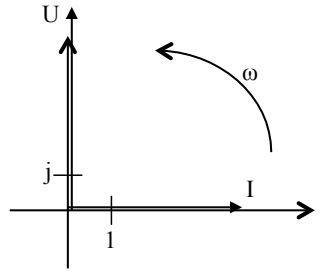
A két függvényt összehasonlítva a feszültség csúcsértékére

$$U_0 = I_0 \cdot \omega \cdot L$$

adódik, azaz az induktivitás úgy viselkedik, mintha ellenállása lenne, amit váltakozó áramon impedanciának, az induktivitás esetében sokszor (speciális kifejezéssel) induktív reaktanciának (X_L) nevezünk:

$$X_L = \omega \cdot L. \qquad (13.2.6.)$$

Az argumentumok és a függvények összehasonlítása azt adja, hogy a feszültség vektor egy negyed periódussal, azaz 90°-kal siet az áramhoz képest, amit a forgó vektorokkal az 13.2.4. ábrán mutatunk be.



13.2.4. ábra Az induktivitáson mérhető feszülség és a rajta folyó áram mint forgó vektorok

Mivel a feszülség a komplex síkon az áramból a képzetes egységgel (j) való szorzással is előállítható, ezért az induktív reaktancia az alábbi komplex formát ölti.

$$\overline{X}_L = j \cdot \omega \cdot L \qquad (13.2.7.)$$

Így az Ohm törvénynek megfelelő egyenlet:

$$\overline{U} = \overline{X}_L \cdot \overline{I}. \qquad (13.2.8.)$$

Más alakban:

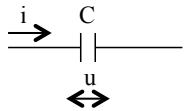
$$\overline{U} = j \cdot \omega \cdot L \cdot I.$$

Az effektív értékekre, azaz az időbeli átlagokra, azaz az egyszerű mérőműszerekkel mérhető értékekre:

$$U = X_L \cdot I$$
$$U = \omega \cdot L \cdot I \quad .$$

Kapacitás váltakozó áramú körökben:

Kapacitás (azaz általában egy kondenzátor) váltakozó áramú körökben (13.2.5. ábra) akkor mutat feszültséget, ha töltés jut a fegyverzeteire.



13.2.5. ábra. Kapacitás váltakozó áramú körökben

A kapacitásra rákerülő töltés, melynek nagysága változik az idővel a következő feszültséget hozza létre azon:

$$u = \frac{1}{C}\int i \cdot dt.$$

Ha az áram pillanatnyi értéke $i = I_0 \sin \omega t$, akkor a fenti művelet:

$$u = \frac{1}{C}\int i \cdot dt = \frac{1}{C}\int I_0 \cdot \sin \omega t \, dt = -\frac{I_0}{\omega \cdot C} \cdot \cos \omega t. \qquad (13.2.9)$$

Másrészről a feszültség kifejezése most is

$$u = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \qquad (13.2.10)$$

így a feszültség csúcsértéke:

$$U_0 = \frac{1}{\omega C} I_0,$$

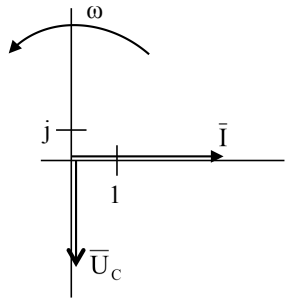
és így az effektív értéke:

$$U = \frac{1}{\omega C} I.$$

A kapacitás is úgy viselkedik, mintha valamiféle ellenállása lenne, a rajta mérhető feszültség arányos az árammal, az arányossági tényező a kapacitív reaktancia (sokszor csak impedancia):

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \qquad (13.2.11)$$

A az 13.2.9. és 13.2.10. feszültség függvényeket összehasonlítva láthatjuk, hogy a kapacitáson mérhető feszültség egy negyed periódussal, azaz 90^o-kal késik az áramhoz képest, amit az 13.2.6. ábrán is láthatunk.



13.2.6. ábra A kondenzátoron mérhető feszültség és a rajta folyó áram mint forgó vektorok

Mivel, az ábra szerint, ha az áramot, megszorozzuk –j-vel, éppen a feszültség irányú komplex számot kapjuk meg, a feszültség abszolút értéke pedig az áramnak a kapacitív reaktanciával való szorzása révén kapható meg, ezért:

$$\overline{X}_C = -j\frac{1}{\omega C}, \qquad (13.2.12)$$

és a komplex feszültség és áram közötti, kapacitásra vonatkozó „Ohm” törvény:

$$\overline{U} = \overline{X}_C \overline{I}$$

$$\overline{U} = -j\frac{1}{\omega C}\overline{I}.$$

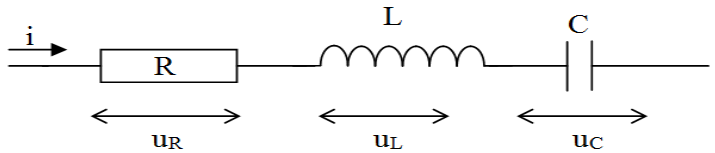
Az abszolút értékekre, vagy időbeli átlagokra, vagy az egyszerű mérőműszerekkel való mérési eredményekre vonatkozó egyenlet:

$$U = \frac{1}{\omega C} I.$$

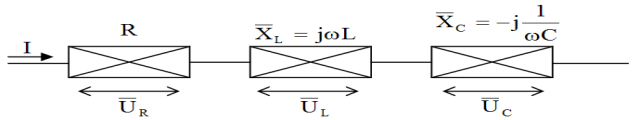
Soros R-L-C kapcsolás

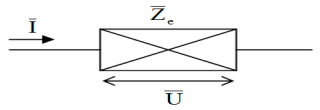
Soros R-L-C kapcsolás

Kapcsoljunk sorba egy ellenállást, egy induktivitást és egy kapacitást

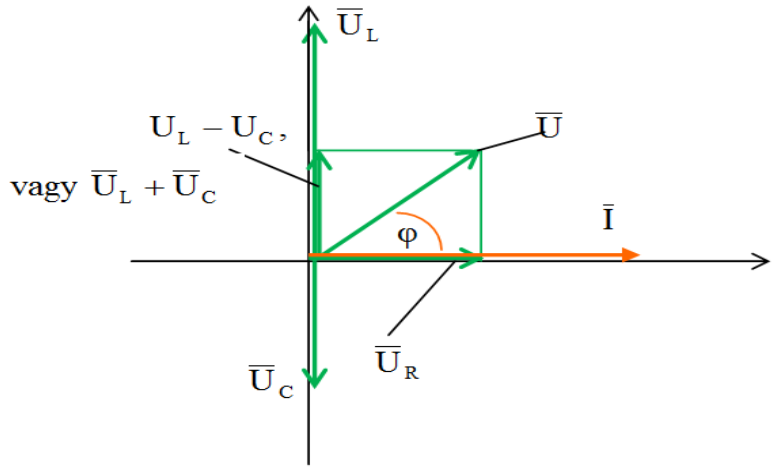


A váltakozó áramú leíráshoz használjuk a komplex értékeket. Váltakozó áramon a komplex „ellenállásokat” az egyenáramon használt ellenállás szimbólum átlós áthúzásával jelöljük a fenti ábra szerint. Amikor komplex, vagy képzetes értékeket használunk akkor azt mondjuk, hogy komplex reprezentációban dolgozunk.





A soros R-L-C kapcsolás forgó vektorait az alábbi ábrán ábrázoltuk.



A soros R-L-C kapcsolás vektor (fázor) ábrája

A három kapcsolási elemen eső komplex feszültség (a komplex feszültségek, áramok, impedanciákat pontosan úgy kell kezelni, mint az egyenáramon valós számokkal megszoktuk):

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C .$$

Vegyük észre, hogy az induktivitáson, és a kapacitáson mérhető feszültségek egy vonalban vannak, de ellentétes irányúak, így az abszolút értékük kivonódik egymásból. A komplex reprezentációban az eredőjük természetesen a két komplex érték komplex összege.
Az abszolút értékek, tehát az egyszerű műszerek által mért értékek a vektori összeadás szabályai szerint adódnak össze.
Így:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} .$$

Az egyes elemek feszültségei:

$$\overline{U}_R = \bar{I} \cdot R \quad \overline{U}_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot \bar{I} \quad \overline{U}_C = -j \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \bar{I} \quad \overline{U} = \overline{Z}_e \cdot \bar{I} .$$

Az eredő komplex impedancia az egyes elemek impedanciájának összege:

$$\bar{Z}\bar{I} = \bar{I}R + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}, \qquad \bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Az abszolút értékes, ábrázolás szerint:

$$U_R = I \cdot R \quad U_L = \omega \cdot L \cdot I \quad U_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I \quad U = Z_e \cdot I .$$

A fenti összefüggések behelyettesítésével:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

A szokásos eljárásnak megfelelően $|\bar{Z}| = Z$ jelölést alkalmaztuk.
Az eredő feszültség és az áram fáziskülönbségét az alábbi kifejezésből fejezhetjük ki:

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} .$$

A váltakozó áram teljesítményei

A váltakozó áram komplex teljesítménye:

$$\overline{S} = \overline{U}\overline{I}^{*},$$

ahol

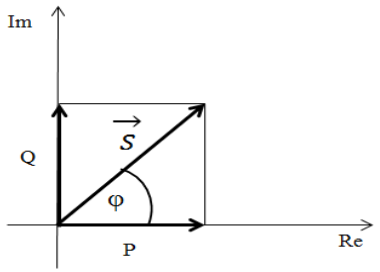
$$\overline{I}^{*} \quad \overline{I} \text{ komplex konjugáltja},$$

azaz

$$\text{ha} \quad \overline{Z} = x + jy \Rightarrow \overline{Z}^{*} = x - jy .$$

Azért használjuk az áram komplex konjugáltját, mert ebben az esetben az ellenállások teljesítménye valós lesz.

A komplex teljesítményt az alábbi alakban szokás írni:



$$\overline{S} = P + jQ\,.$$

A komplex teljesítmény abszolút értéke, vagy **látszólagos teljesítmény** (ezt méri a teljesítmény mérő):

$$|\overline{S}| = P_l = UI\,,$$

mértékegysége: $[VA]$.

A komplex teljesítmény valós része, vagy **hatásos teljesítmény** (aminek csak egy része a hasznos teljesítmény). Ez a teljesítmény az ellenállásokon mérhető teljesítmény. A komplex teljesítménynek csak ez a része végez munkát egy periódus átlagában. Ez a teljesítmény tehát:

$$P = Re\ \vec{S} = S \cdot cos\varphi = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot cos\varphi$$

mértékegysége:

$$[W].$$

A komplex teljesítmény képzetes része:

$$Q = Im\ \vec{S} = S \cdot sin\varphi = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot sin\varphi$$

mértékegysége:

$$[\mathrm{VAr}].$$

Z a teljesítmény az induktivitásokon és a kapacitásokon mérhető teljesítmény eredője, egy periódus alatt a munkavégzése zérus.

Az áramszolgáltató arra biztatja a fogyasztókat, hogy a meddő teljesítményt minél nagyobb mértékben csökkentsék, vagy más szóval a teljesítmény tényezőt a

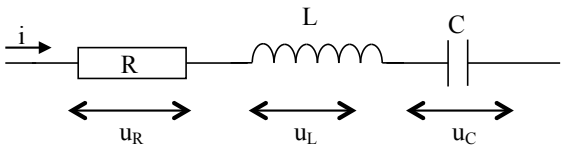
$$\cos\varphi$$

értékét az egyhez minél közelebb vigyék.

Ennek az oka, hogy ugyan a meddő teljesítmény nem végez munkát azonban az ezt létrehozó áram a vezetékeket, a generátorokat igénybe veszi, azokon valóságos teljesítmény veszteséget okoz.

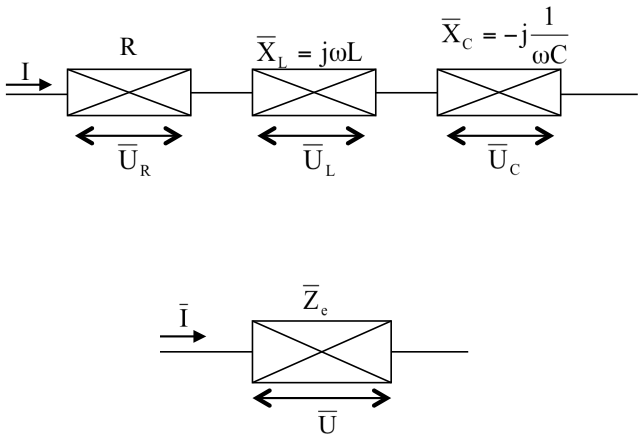
13.3. Soros R-L-C kapcsolás

Kapcsoljunk sorba egy ellenállást, egy induktivitást és egy kapacitást (13.3.1. ábra).



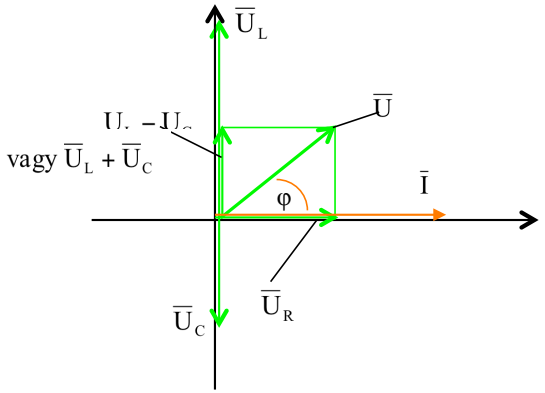
13.3.1. ábra Ellenállás, induktivitás és kapacitás soros kapcsolása váltakozó áramú körben

A váltakozó áramú leíráshoz használjuk a komplex értékeket. Váltakozó áramon a komplex „ellenállásokat” az egyenáramon használt ellenállás szimbólum átlós áthúzásával jelöljük az 13.3.2. ábra szerint. Amikor komplex, vagy képzetes értékeket használunk akkor azt mondjuk, hogy komplex reprezentációban dolgozunk.



13.3.2. ábra Soros R-L-C kapcsolás ábrázolása komplex reprezentációban

A soros R-L-C kapcsolás forgó vektorait az 13.3.3. ábrán ábrázoltuk.



13.3.3. ábra A soros R-L-C kapcsolás vektor (fázor) ábrája

A három kapcsolási elemen eső komplex feszültség (a komplex feszültségek, áramok, impedanciákat pontosan úgy kell kezelni, mint az egyenáramon valós számokkal megszoktuk):

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C. \qquad (13.3.1)$$

Vegyük észre, hogy az induktivitáson, és a kapacitáson mérhető feszültségek egy vonalban vannak, de ellentétes irányúak, így az abszolút értékük kivonódik egymásból. A komplex reprezentációban az eredőjük természetesen a két komplex érték komplex összege.
Az abszolút értékek, tehát az egyszerű műszerek által mért értékek a vektori összeadás szabályai szerint adódnak össze.

Így:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}. \qquad (13.3.2)$$

Az egyes elemek feszültségei:

$$\overline{U}_R = \overline{I} \cdot R \quad \overline{U}_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot \overline{I} \quad \overline{U}_C = -j \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \overline{I} \quad \overline{U} = \overline{Z}_e \cdot \overline{I}.$$

Az eredő komplex impedancia az 13.3.2. egyenletből (és a fenti kifejezésekből) az egyes elemek impedanciájának összege:

$$\overline{Z}\overline{I} = \overline{I}R + j\omega L\overline{I} - j\frac{1}{\omega C}\overline{I},$$

$$\overline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \qquad (13.3.3)$$

Az abszolút értékes, ábrázolás szerint:

$$U_R = I \cdot R \quad U_L = \omega \cdot L \cdot I \quad U_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I \quad U = Z_e \cdot I.$$

Így az 13.3.2 egyenlet alapján, a fenti összefüggések behelyettesítésével:

$$ZI = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (13.3.4.)$$

A szokásos eljárásnak megfelelően $|\bar{Z}| = Z$ jelölést alkalmaztuk.

Az eredő feszültség és az áram fáziskülönbségét az alábbi kifejezésből fejezhetjük ki:

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (13.3.5.)$$

A váltakozó áram teljesítményei

A váltakozó áram komplex teljesítménye:

$$\bar{S} = \bar{U}\bar{I}^*,$$

ahol

$$\bar{I}^* \quad \bar{I} \text{ komplex konjugáltja},$$

azaz

$$\text{ha} \quad \bar{Z} = x + jy \Rightarrow \bar{Z}^* = x - jy.$$

Azért használjuk az áram komplex konjugáltját, mert ebben az esetben az ellenállások teljesítménye valós lesz.

A komplex teljesítményt az alábbi alakban szokás írni:

$$\bar{S} = P + jQ.$$

A komplex teljesítmény abszolút értéke, vagy **látszólagos teljesítmény** (ezt méri a teljesítmény mérő):

$$|\bar{S}| = P_l = UI,$$

mértékegysége: $[VA]$.

A komplex teljesítmény valós része, vagy **hatásos teljesítmény** (aminek csak egy része a hasznos teljesítmény). Ez a teljesítmény az ellenállásokon mérhető teljesítmény. A komplex teljesítménynek csak ez a része végez munkát egy periódus átlagában. Ez a teljesítmény tehát:

$$\mathrm{Re}(\bar{S}) = P_h = UI\cos\varphi,$$

mértékegysége:

$$[W].$$

A komplex teljesítmény képzetes része:

$$Q = \mathrm{Im}(\bar{S}) = P_m = UI\sin\varphi,$$

mértékegysége:

$$[VAr].$$

Z a teljesítmény az induktivitásokon és a kapacitásokon mérhető teljesítmény eredője, egy periódus alatt a munkavégzése zérus.

Az áramszolgáltató arra biztatja a fogyasztókat, hogy a meddő teljesítményt minél nagyobb mértékben csökkentsék, vagy más szóval a teljesítmény tényezőt a

$$\cos\varphi$$

értékét az egyhez minél közelebb vigyék.

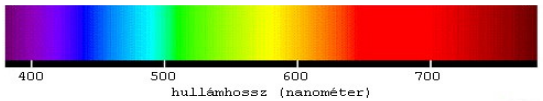
Ennek az oka, hogy ugyan a meddő teljesítmény nem végez munkát azonban az ezt létrehozó áram a vezetékeket, a generátorokat igénybe veszi, azokon valóságos teljesítmény veszteséget okoz.

14. fejezet

A fény mint elektromágneses hullám, geometriai optika

Mi a fény?

A fény az elektromágneses spektrumnak a ~400 és ~800 nm közé eső hullámhosszú része. Az a része, amelyet az emberi szem, mint detektor, érzékelni tud. „Amit látunk.”



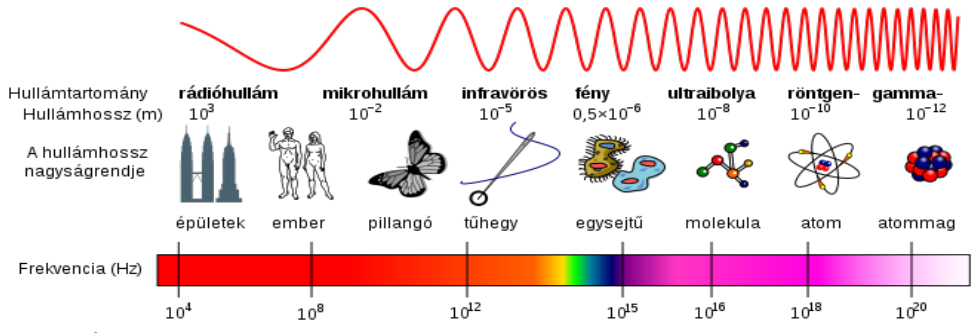
A sebesség (c), a frekvencia (ν) és a hullámhossz (λ) között a

$$c = \lambda \cdot \nu$$

összefüggés áll fenn.

Mivel a fény sebessége vákuumban 299 792 458 m/s, a látható tartomány frekvenciában $7{,}5 \cdot 10^{14}$ és $3{,}8 \times 10^{14}$ Hz közé esik.

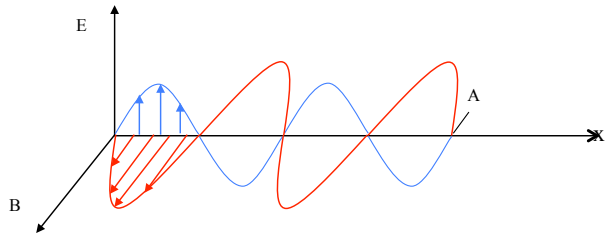
A teljes elektromágneses spektrum



$$c = \lambda \cdot \nu$$

A fény

Elektromágneses rezgés/hullám: az elektromos és a mágneses térerősség (mágneses indukció) vektor periodikus váltakozása.



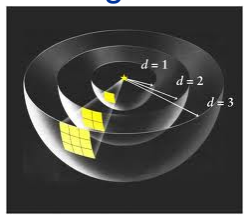
A fény **transzverzális** hullám!

A fény kettős természete

A fény a megfigyeléstől függően mutat hullám-, vagy részecske-tulajdonságokat.

Hullámként: a hullámfront (az azonos fázisú pontok összessége)

gömb ⇒ gömbhullám



sík ⇒ síkhullám



Ilyen hullámokat bocsátanak ki

a pontszerű fényforrások

a lézerek

Geometriai optika

Ha a fényt **részecskék sokaságának** tekintjük, akkor
a részecskék neve foton,
sebességük a fénysebesség,
tömegük zérus,
ugyanakkor van (véges értékű) impulzusuk.

A fény terjedésének irányát, vagyis a fotonok pályáját a **fénysugarak** adják.

Geometriai optika:
azok a jelenségek, amelyek a fénysugár-képpel tárgyalhatók.

Pontok: ahonnan a fénysugár indul és ahová érkezik.
Egyenesek: a fénysugarak.

Geometriai optika

Egy fénysugár mindig olyan pályát követ, amelyre nézve a kezdő és végpontok közötti **terjedési idő** minimális. (Fermat-elv)

Ha a fény egy adott közegben halad, és így a sebessége nem változik, akkor a legrövidebb idő elve nyilván a legrövidebb út elvével azonos: a fénysugarak egy pontból indulnak ki és egyenes vonalban terjednek.

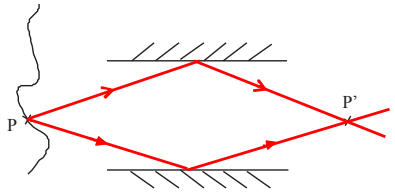
Miért látjuk környezetünk tárgyait?

Minden tárgy minden pontja elemi fénysugarak kiinduló pontjának tekinthető, vagy azért, mert az adott pont maga fényt bocsát ki, vagy azért, mert fény esik rá, ami azután visszaverődik.

Képalkotás

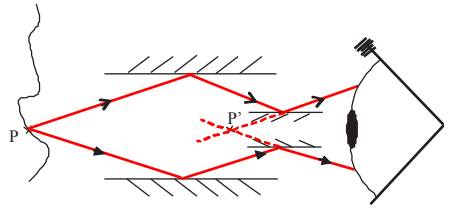
Egy **tárgy** egy pontjából kiinduló fénysugarak kétféleképpen hozhatnak létre **kép**et.

Valódi képről akkor beszélünk, ha a tárgy egyes pontjaiból kiinduló fénysugarak (valamely optikai eszköz hatására) újra egy pontban találkoznak. A valódi kép ernyőn felfogható.



Képalkotás

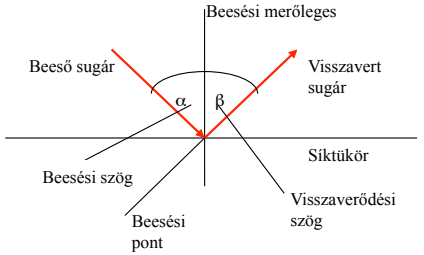
Látszólagos (virtuális) képről akkor van szó, ha a tárgy egyes pontjaiból kiinduló fénysugarak (valamely optikai eszköz hatására) úgy tartanak szét, mintha a tér egy pontjából indultak volna. A látszólagos kép nem fogható fel ernyőn, de a szem képes érzékelni azáltal, hogy a széttartó fénysugarak látszólagos metszéspontjában látja a fénykeltő helyet.



A síktükör

Milyen képet alkot a síktükör?
Egyenes állású, a tárgyéval megegyező méretű,látszólagos kép,
amelyen a jobb és bal oldal fel van cserélve.

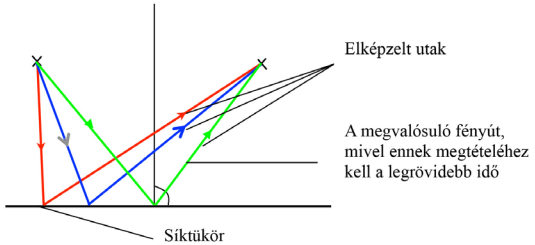




A síktükör

A beeső sugár, a visszavert sugár, valamint a beesési merőleges egy síkban vannak, és a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel.

Miért kell ennek így lennie?
Mit mond a Fermat-elv abban az esetben, ha a fénysugár egy tökéletesen visszaverő felületre érkezik?



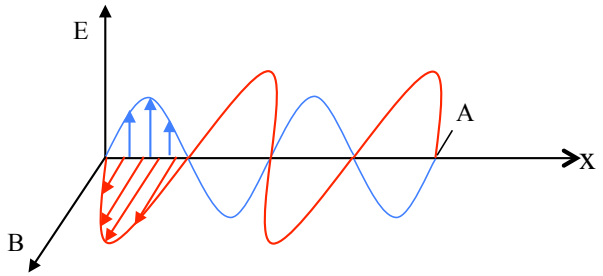
14. Optika

A fény azon elektromágneses hullámok összessége, amelyeket az emberi szem észlelni képes.
A hullámhossz tartomány 380-720 nm.
A fény a megfigyeléstől függően részecskeként, vagy hullámként viselkedik.
A fény egyenes vonalú terjedése és az árnyékjelenségek a részecske természettel, a fény elhajlása és interferenciája a hullámtermészettel magyarázható.

A fény mint elektromágneses hullám

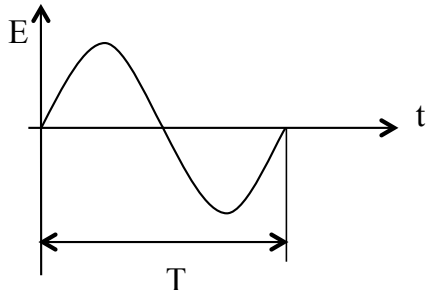
A hullám valamilyen zavar közegben való terjedése.

A fény elektromágneses hullám: az elektromos és a mágneses térerősség egymásra merőleges rezgése. A 14.1.1. ábrán a villamos térerősség és a mágneses indukció vektorok egyik pillanatnyi állapotát mutatjuk meg x irányú terjedés esetében..



14.1.1. ábra A fény, mint a villamos térerősség és mágneses indukció vektorok pillanatképe

Ha a hullám x irányban halad, akkor az A pontban a fenti ábrán megfigyelt állapot (villamos térerősség mérővel mérve) az idő függvényében a 14.2.2. ábrán látható módon változik.



14.1.2. A villamos térerősség abszolút értékének változása az előző ábra A pontjában az idő függvényében

A hullámban a legkisebb ismétlődő szakasz a hullámhossz, jele: λ (lambda).
Egy pontban a villamos térerősség időfüggvényében, illetve a mágneses indukcióéban az időben legközelebb levő két azonos fázisú távolsága az időben a periódusidő: T.

A frekvencia a periódusidő reciproka, jele: ***ν*** (néha f) (nű), mértékegysége: [Hz].

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Mivel az A ponton T idő alatt halad végig a teljes hullámhossz, ezért a terjedési sebesség (c):

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu. \qquad (14.1.1)$$

Az elektromágneses hullám terjedési sebessége vákuumban $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. Más közegben jelentősen különbözhet az értéke.

A hullám terjedés leírására általánosságban alkalmazott paramétert (ami a legjellemzőbb a hullámterjedésre, illetve a hullám tulajdonságaira) Ψ (pszí) –vel jelöljük.

Legyen Ψ – a forrástól x távolságban t idő múlva a hullám állapota, és Ψ_0 a hullám amplitúdója. A részletesebb vizsgálatok azt mutatják, hogy

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right], \qquad (14.1.2.)$$

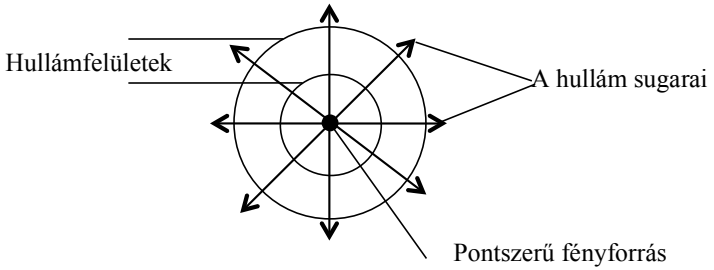
ahol φ_0 az úgynevezett kezdőfázis.

A részletesebb vizsgálatok azt mutatják, hogy a fény tulajdonságait elsősorban a térerősség vektor ($\vec{E}$) határozza meg, ezért a fény hullámokat leíró egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$E = E_0 \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]. \qquad (14.1.3.)$$

A hullámok leírására nagyon jól használható fogalom a hullámfelület és a hullám sugara. Ezek a következők:
Hullámfelület (vagy sokszor: hullámfront): **az azonos fázisú pontok összessége**.
A **hullám sugara**i: a **hullámfelületre merőleges egyenes**ek, a hullám sugárirányban terjed, a hullám energiája a sugarak irányában halad.

Gömbhullámok:
A hullámfelületek gömbök. Ilyen hullámokat bocsátanak ki a pontszerű fényforrások (14.1.3. ábra).



14.1.3. ábra Pontszerű fényforrás hullámfelületei és sugarai

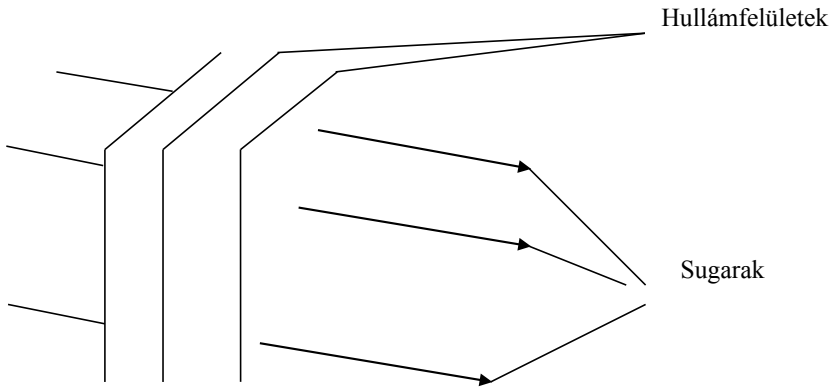
Legyen ε a fényforrás által kibocsátott, egységnyi felületen időegység alatt áthaladó energia, vagy teljesítmény sűrűség.

Pontszerű fényforrás estében ε azaz a teljesítmény sűrűség a hullámforrástól távolodva a távolság (r) négyzetével csökken, mivel ugyanaz az energia egy a sugár növekedésével négyzetesen növekvő gömb felületen oszlik meg.

$$\varepsilon \propto \frac{1}{r^2},$$

ahol $\propto$ az arányosság jele.

Síkhullámok:
A hullámfelületek egymással párhuzamos síkok, azaz a hullám sugarai párhuzamosak (14.1.**4. ábra), azaz ε a távolságtól független, azaz az egységnyi felületre jutó energia állandó. Ez a sugár energiatovábbításra alkalmas. Ilyen hullámforrás pl. a lézer.**



14.1.4. ábra Síkhullám sugarai és hullámfelületei

Ha a fényt részecskének tekintjük, akkor a részecske neve foton, sebessége a fénysebesség, tömege zérus, impulzusa véges érték.

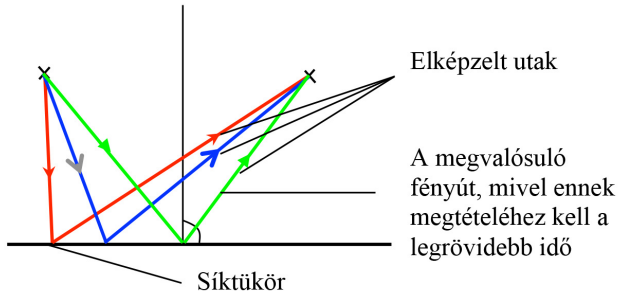
Geometriai optika

Alapfogalmak

A geometria optikát alapvetően a fény egyenes vonalú terjedésével jellemezhetjük az alábbi tulajdonságokkal:

1. A fény terjedésének irányát, vagy a fény részecskéinek, a fotonoknak a pályáját a sugarak adják.

2. Érvényes a Fermat-elv: A fény úgy terjed, hogy két pont közötti távolság megtételéhez szükséges idő az összes lehetséges pályák között minimális (14.1.5. ábra).



14.1.5. ábra A Fermat-elv különböző, elképzelt, útjai síktükör esetében

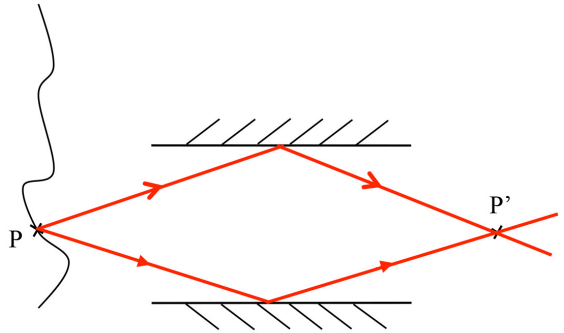
3. Az optikában minden tárgy minden pontja minden irányban haladó elemi fénysugarak kiinduló pontjának tekinthető, vagy azért, mert önmaga is fényt bocsát ki, vagy azért, mert fény esik rá, s azután visszaverődik.

4. Képalkotás, egy pont, vagy tárgy képének megjelenése:

Legyen egy tárgy, és annak egy pontja, amelyből két fénysugár indul ki. Ezek kétféleképpen hozhatnak létre képet.

Valódi kép (14.1.6. ábra):

Ebben az esetben az adott P pontból kiinduló két fénysugár különböző utakon halad, de végül egy pontban találkoznak. Ez a pont a képpont P', az ide helyezett fénymérő mér fényerősséget, a kép ernyőn fényképező lemezen, digitális kamera pixeljén felfogható, rögzíthető. Ezért ez valódi kép.

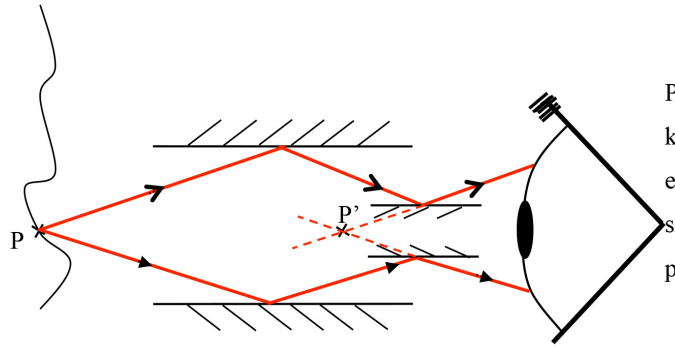


P’ a P valódi képe, mert a fénysugarak metszik egymást, illetve fel lehet fogni a képet egy ernyőn, fénymérővel mérni lehet az intenzitást.

14.1.7. ábra Valódi kép keletkezése

Virtuális, vagy látszólagos kép (6.2.3. ábra):

Ebben az esetben a P pontból kiinduló két fénysugár útja annyira különböző, hogy a vizsgálatot végző szemébe széttartóan érkeznek, a valóságban nem metszik egymást. Az emberi szem nem tudja kivenni a beérkező fény előtörténetét, ezért (az aggyal együtt természetesen) úgy látja, mintha a meghosszabbításuk metszéspontjából (P’) érkeztek volna. Ez egy képpont, de mivel csak az agyban keletkezik, ernyőn nem fogható fel, ezért látszólagos, vagy virtuális képnek nevezzük.

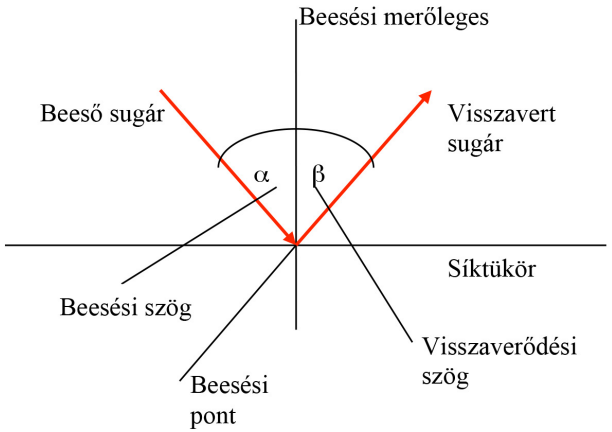


P’ P virtuális, vagy látszólagos képe, mert nem metszik egymást a fénysugarak, csak a szemünk hiszi azt, hogy egy pontból érkeztek, P’-ből

14.1.7. ábra Virtuális kép keletkezése

A síktükör

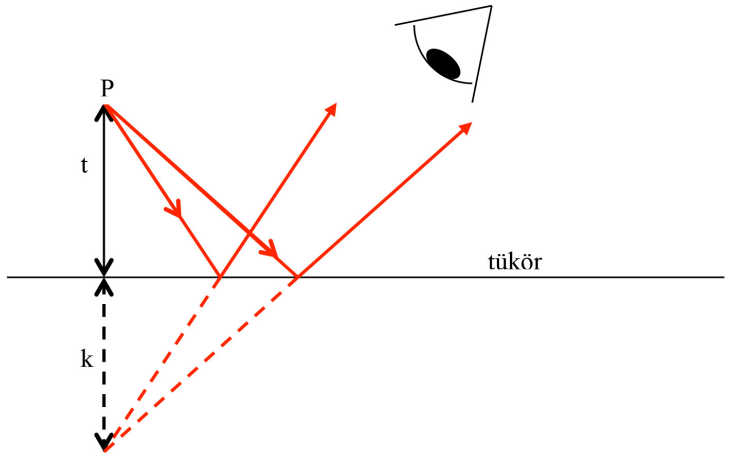
Ha a fény egy azt tökéletesen visszaverő felületre érkezik, (beesik), akkor úgy verődik vissza, hogy a beeső sugár, a visszavert sugár, valamint a beesési merőleges egy síkban vannak, s a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel (14.1.8. ábra).



14.1.8. ábra A síktükörrel kapcsolatos fogalmak

Ha egy síktükör elé, attól t távolságra egy tárgyat helyezünk, akkor a 14.1.9. ábra szerint szerkeszthetjük meg a képet, ami a tükör mögött –k távolságra van. A k a képtávolság, mely mivel a kép virtuális, negatív érték és abszolút értéke megegyezik a tárgytávolsággal.

A síktükör egyenes állású, azonos méretű, látszólagos képet ad a tárgyról a tükör mögött. A kép jobb és baloldala fel van cserélve.

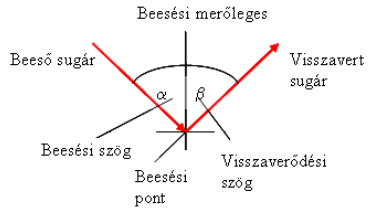


14.1.9. ábra Síktükör képalkotása

A gömbtükrök képalkotása

Fényvisszaverődés görbült felületekről

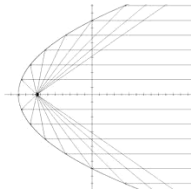
Emlékeztető: A fényvisszaverődés törvénye:
a beeső és a visszavert sugár, valamint a beesési merőleges egy síkban vannak, és a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel.



Képalkotás/képszerkesztés tükrök esetén: ezt az elvet kell alkalmaznunk a visszaverő/tükröző felület minden pontjára!



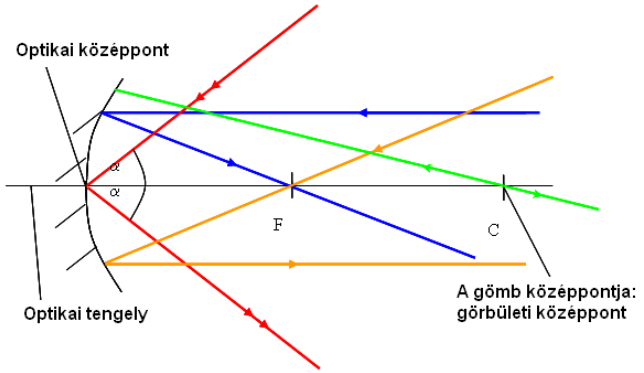
Ha a tükröző felület forgási paraboloid, a fókuszból kiinduló sugarak a felület *minden* pontjából *pontosan* a tengellyel párhuzamosan fognak visszaverődni. Fordítva, ha egy fénynyaláb a tengellyel párhuzamosan érkezik a parabola-tükör felületére, *minden* visszavert sugár *pontosan* a fókuszban találkozik. (Autó reflektor = parabola tükör.)



Optikai minőségű parabola-tükröt bonyolult és drága elkészíteni, gömbfelületet jóval könnyebb, ezért használunk gömbtükröket.

Homorú gömbtükör

A tükröző felület egy gömbsüveg belseje.



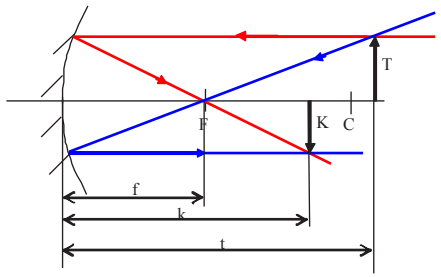
A képszerkesztéshez használt sugármenetek

Homorú gömbtükör

A gömbtükör és az optikai tengely metszéspontjába, azaz a tükör optikai középpontjába tartó sugarak az optikai tengelyre szimmetrikusan verődnek vissza.
A tükör görbületi középpontján átmenő, ezért a gömbtükör felületére merőlegesen beérkező sugarak önmagukba verődnek vissza.
Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező sugarak a fókuszponton mennek át, és a sugármenet megfordításából egyenesen következően, a tükörre a fókuszpont felől érkezők az optikai tengellyel párhuzamosan verődnek vissza.

A homorú gömbtükör képalkotása

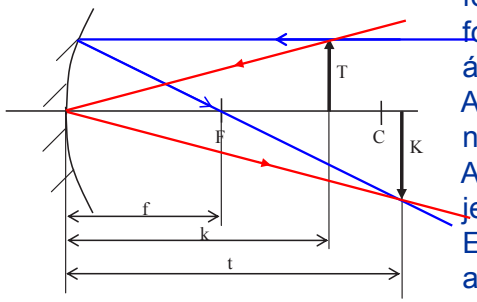
Hol és milyen kép keletkezik a tárgy fókuszponthoz viszonyított különböző helyzeteiben?



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \qquad N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}$$

Ha a tárgy a kétszeres fókusztávolságon, azaz a görbületi középponton (C) kívül helyezkedik el, a kép a fókuszpont (F) és a C közé esik, fordított állású, kicsinyített, valódi.
A végtelen távoli tárgy képe a fókuszpontban jelenik meg.
Ha a tárgyat közelítjük, a kép a fókuszponttól a C felé mozog.
Ha a tárgy pontosan a kétszeres fókuszban (C) van, a kép is oda esik, azonos méretű és fordított állású.

A homorú gömbtükör képalkotása

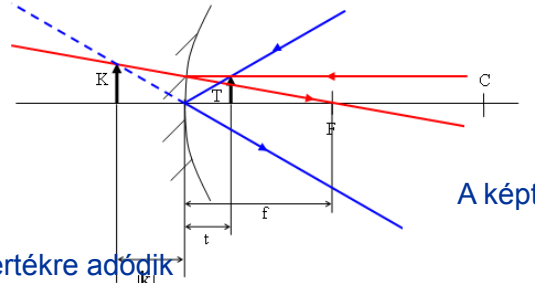


$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \qquad N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}$$

Ha a tárgy az egyszeres (F) és a kétszeres fókusz (C) között van, a kép a kétszeres fókuszon kívülre esik, nagyított, fordított állású, valódi lesz.
Ahogy a tárgy a fókusz felé közeledik, a kép növekszik és távolodik a tükörtől.
A fókuszban lévő tárgy képe a végtelenben jelenik meg.
Ez az eset az előbbi elrendezés fordítottja, ami természetes, hiszen a fénysugarak megfordíthatók. (Ha a tárgyat a kép helyére képzeljük, akkor a kép a tárgy helyén jelenik meg.)
A tüköregyenlet most is érvényes, és a nagyítás definíciója is az előző.

A homorú gömbtükör képalkotása

Ha a tárgy a fókuszon belülre kerül, a kép (látszólag) a tükör mögött keletkezik, egyenes állású, nagyított, és természetesen látszólagos kép lesz. A tárgyat a fókuszpont felé közelítve, a kép távolodik a tükörtől és egyre nagyobb lesz. A fókuszban lévő tárgy képe a végtelenben van.

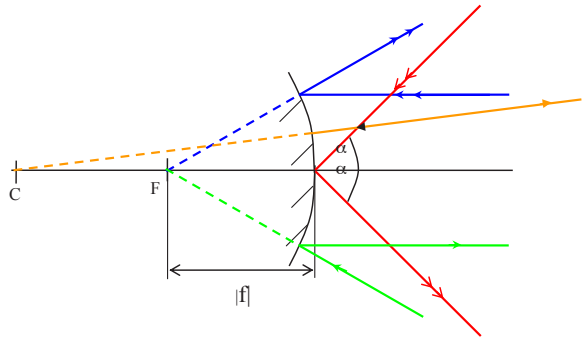


$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \qquad N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}$$

A képtávolság, a nagyítás és a kép nagysága (K) negatív értékre adódik az egyenletből, és negatív értékkel is kell behelyettesíteni

Domború gömbtükör

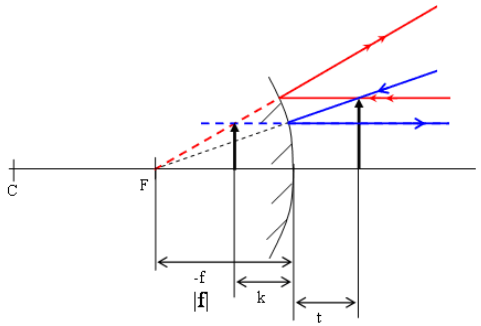
A tükröző felület egy gömbsüveg külseje.



A domború gömbtükör a ráeső párhuzamos fénynyalábot széttartóvá teszi. A széttartás középpontja a virtuális fókuszpont, amelynek távolsága a tükörtől (mint a homorú tükörnél is), a görbületi sugár fele.

A fókusztávolság ebben az esetben negatív.

A domború gömbtükör képalkotása



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \qquad N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}$$

A domború gömbtükör által előállított kép *mindig kicsinyített*, egyenes állású és látszólagos: a tükör mögött keletkezik.

Érvényes a tüköregyenlet, és a nagyítás kifejezése is, azonban K, k, N és f negatív értékek. Így kapjuk meg a tüköregyenlet megoldásaként, és negatív értékkel kell azokat behelyettesíteni is.

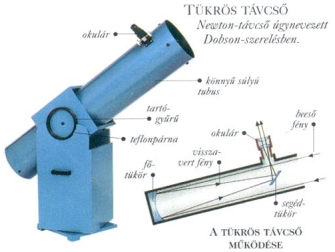
Alkalmazások a mindennapokban











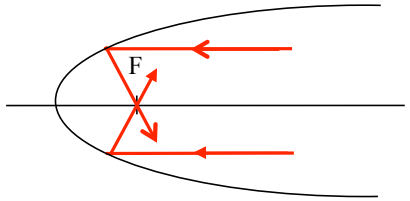
TÜKRÖS TÁVCSŐ
Newton-távcső úgynevezett Dobson-szerelésben.

A TÜKRÖS TÁVCSŐ MŰKÖDÉSE

14.2. Gömbtükrök képalkotása

Homorú tükör

Ha egy forgási paraboloid formájú tükröt készítünk, akkor a paraboloid fókuszpontjába (F) helyezett pontszerű fényforrásból a tükörre eső fény úgy verődik vissza, hogy a sugarak párhuzamosak lesznek (14.2.1. ábra).

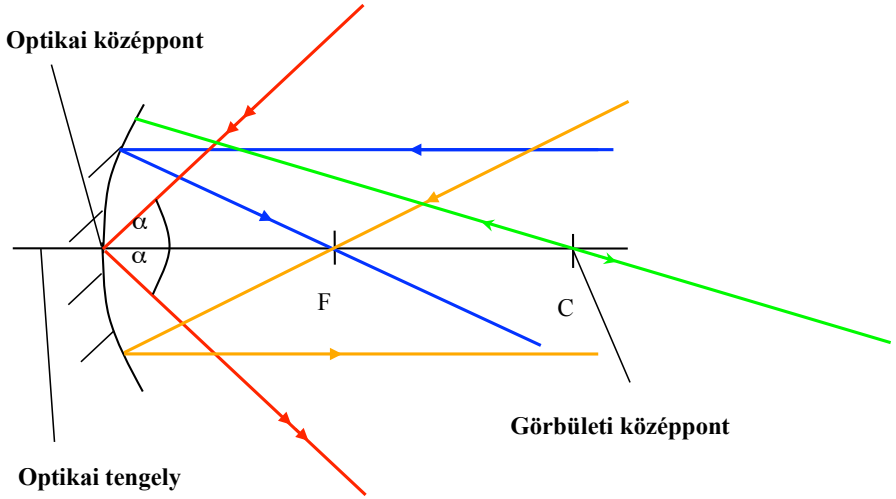


14.2.1. ábra Forgási paraboloid tükör

A valóságban általában jó minőségű forgási paraboloid felületet csak nagyon költséges eljárással lehet készíteni, gömbfelületet pedig olcsóbban, ezért a forgási paraboloid tükörrel megoldható feladatok nagyobb részét öt foknál kisebb nyílásszögű gömbtükörrel szokás megoldani, s a továbbiakban mi is ezt az utat követjük.

Homorú gömbtükör:

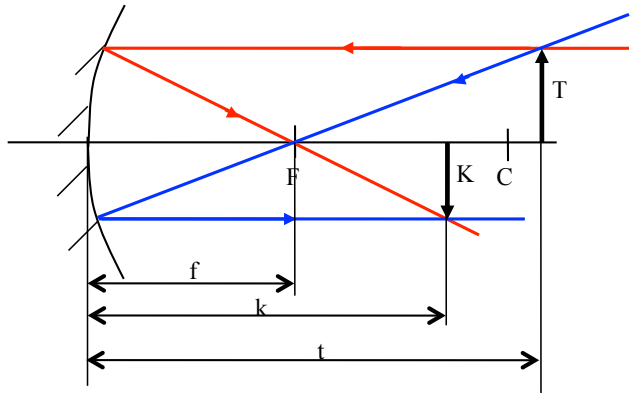
A fizikában, a műszaki, és a hétköznapi életben sokszor használunk homorú gömbtükröket. Ezek képeit néhány, a 14.2.2. ábrán látható szerkesztő sugárral tudjuk megrajzolni. A homorú gömbtükör esetében a felület görbületi sugara (r) a kétszerese a fókusztávolságnak (f). A fókuszpont az a pont, amelyben a tükörre párhuzamosan beeső fénysugarak találkoznak.



14.2.2. ábra Homorú gömbtükör szerkesztő sugarai

Homorú gömbtükör által előállított képek:

Közelítsük a tárgyat a tükör felé a görbületi középponttól kívüli helyzetből, és nézzük meg a különböző helyzetű képeket.



14.2.3. ábra Homorú gömbtükör képe a kétszeres fókusztávolságon kívüli tárgy esetében

Ha a tárgy a görbületi középponton (C) kívül helyezkedik el (14.2.3. ábra), a kép a fókuszpont (F) és C közé esik, fordított állású, kicsinyített valódi kép. Ha a tárgyat távolítjuk a tükörtől, a kép F felé közeledik. A végtelen távoli tárgy képe egy az F-ben levő pont. Ha a tárgyat közelítem, a tükör felé a kép távolodik, és ha a tárgy C-n áll a kép is oda esik, azonos méretű és fordított állású.

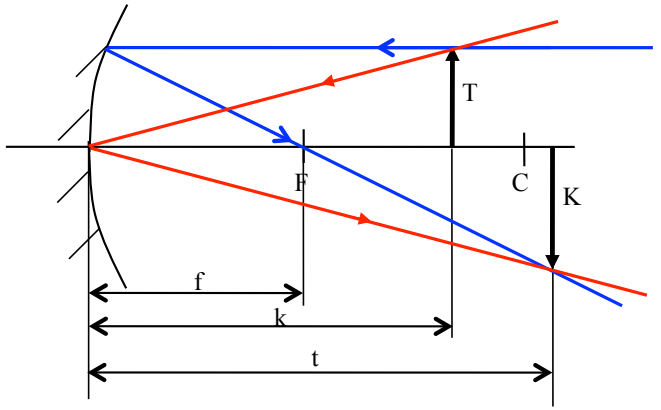
A képtávolságra (k), a tárgytávolságra (t) és a fókusztávolságra (f) érvényes a tüköregyenlet:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}, \qquad (14.2.1.)$$

és ha a kép és a tárgy nagyságának a hányadosát nagyításnak nevezzük (be lehet látni, hogy ez megegyezik a képtávolság és a tárgytávolság hányadosával), akkor:

$$N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}. \qquad (14.2.2.)$$

Ha a tárgy F és C között van (14.2.4. ábra), a kép a C-n kívülre esik, nagyított, fordított állású, valódi lesz. Ha a tárgyat F felé közelítem, a kép növekszik és távolodik a tükörtől. Ez az eset az előbbi elrendezés fordítottja. Érvényes az ún. reciprocitás elve, azaz ha a tárgyat a kép helyére teszzük, akkor a kép a tárgy helyén keletkezik. A tüköregyenlet most is érvényes, és a nagyítást is ugyanúgy kell kiszámítani.



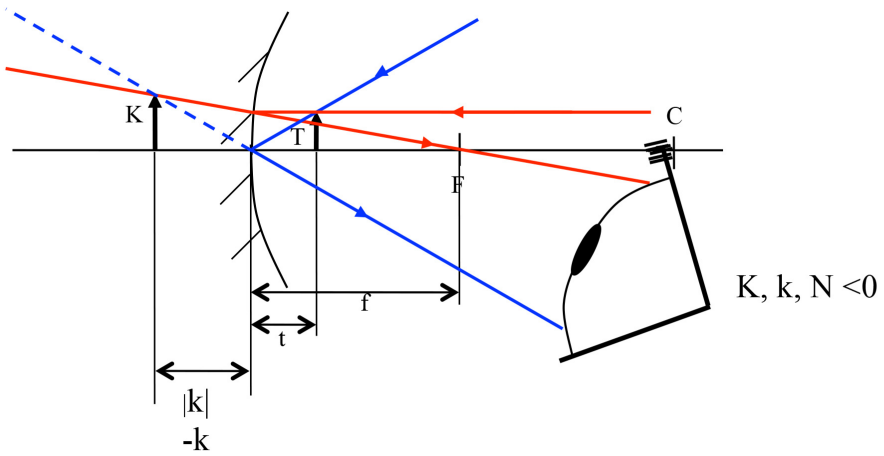
14.2.4. ábra Homorú gömbtükör képe egy a fókuszpont és a görbületi középpont közé eső tárgy esetében

Ha a tárgy F és a tükör között van (14.2.5. ábra), a kép a tükör mögött keletkezik, egyenes állású, nagyított látszólagos kép lesz. Ha a tárgyat F felé közelítem, a kép távolodik a tükörtől és egyre nagyobb lesz. F-ben a kép végtelenben van és végtelen nagy.

A képtávolság, a nagyítás és a kép nagysága (K) negatív értékre adódik az egyenletből, és negatív értékkel is kell behelyettesíteni:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t},$$

$$N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}.$$

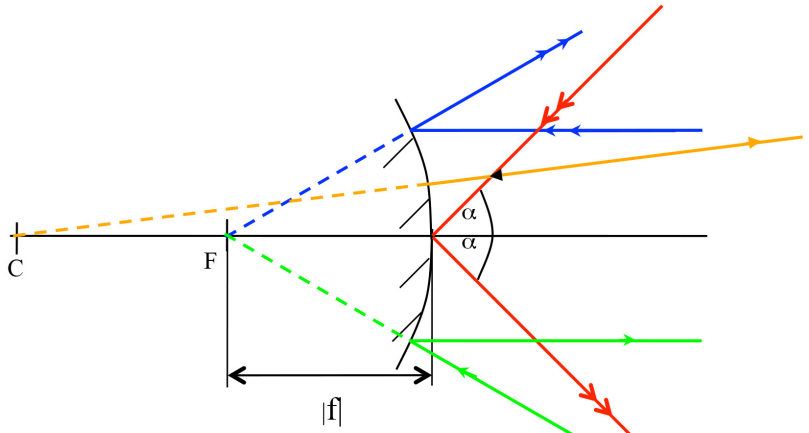


14.2.5. ábra Homorú tükör által a fókusz és a tükör közé helyezett tárgyról létrehozott kép

A homorú gömbtükröket a reflektorként, borotválkozó tükörként, és műszerekben képalkotó eszközként használják leginkább.

Domború gömbtükör

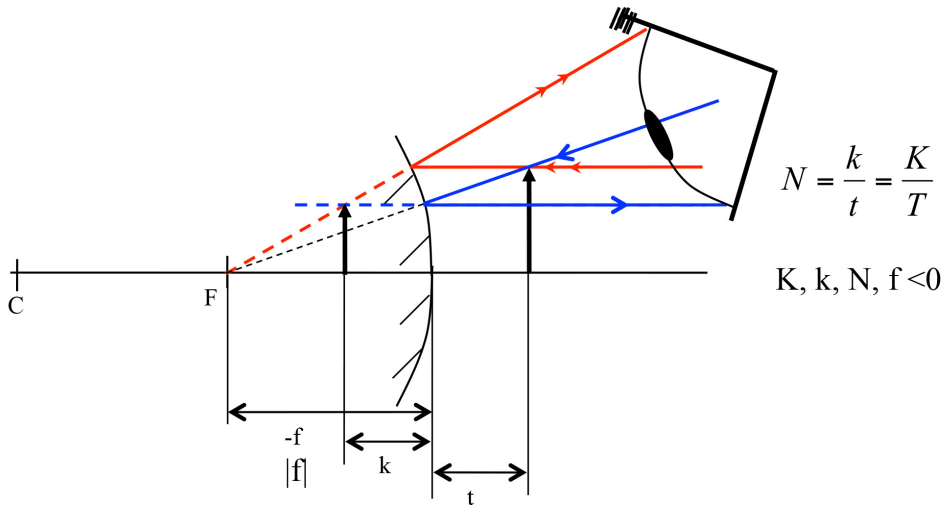
A domború gömbtükör a ráeső párhuzamos fény nyalábot széttartóvá teszi, a szerkesztő sugarak a 14.2.6. ábrán láthatóak. A széttartás középpontját virtuális fókuszpontnak nevezzük és a virtuális fókusz távolsága a tükörtől a görbületi sugár fele (mint a homorú tükörnél), de a fókusztávolság nevű fizikai mennyiség ebben az esetben negatív szám.



14.2.6. ábra Domború gömbtükör szerkesztő sugarai

Domború tükör által alkotott kép:

Domború tükör esetében a keletkezett kép jellege független a tárgy helyétől, és a 14.2.7. ábrán látható módon szerkeszthetjük meg.



14.2.7. ábra Domború tükör képalkotása

Domború gömbtükör által előállított kép, mindig kicsinyített, egyenes állású látszólagos, és a tükör mögött keletkezik. Most is érvényes a tüköregyenlet, és a nagyítás kifejezése, azonban K, k, N és f negatív érték. Így kapjuk meg a tüköregyenlet megoldásaként, és negatív értékkel kell azokat behelyettesíteni is.

A domború tükör legelterjedtebb alkalmazása a visszapillantó tükörként való használat.

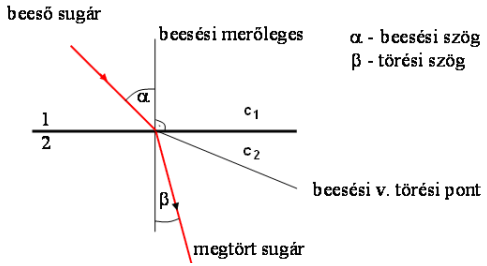
A fény törése, teljes visszaverődés

A fény törése, a Snellius–Descartes törvény

Két, optikai szempontból különböző közeg határfelületére érkezve



a fény egy része visszaverődik, a másik része pedig az új közegben, *megváltozott sebességgel* halad tovább.



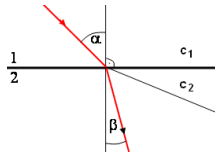
A sebességkülönbség következményeként
a határfelületen megváltozik a fénysugár iránya.

A fény törése, a Snellius–Descartes törvény

Ha **c_1** az „1” jelű és **c_2** a „2” jelű közegben mérhető fénysebesség, **α** a beesési és **β** a törési szög, akkor a beesési szögtől függetlenül érvényes:

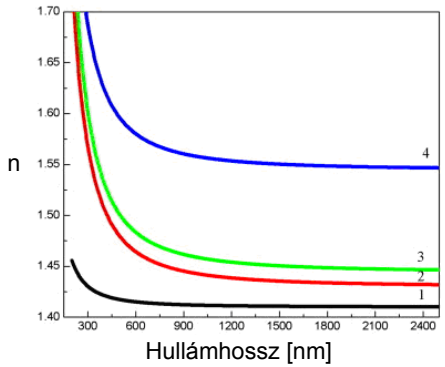
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}$$

ahol n_{21} a második közeg elsőre vonatkoztatott *relatív* törésmutatója.



Ha a fény optikailag ritkább közegből sűrűbbe ($c_1>c_2$) lép, a beesési merőleges*hez*, ha sűrűbb közegből a ritkábba lép, a beesési merőleges*től* törik.

A törésmutató hullámhosszfüggő

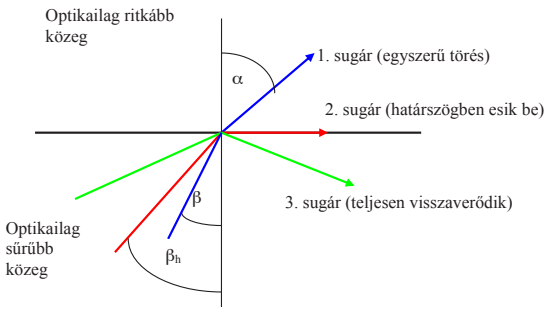


B_2O_3–Li_2O–ZnO üvegek törésmutatójának függése a ZnO tartalomtól.

A törésmutató, *n* függ a hullámhossztól. A legtöbb átlátszó anyagra (üvegek, műanyagok) úgy, hogy az *n* a hullámhossz növekedésével csökken, azaz az anyag a kék színű fényt jobban megtöri, mint a vöröset. (Ez a normális diszperzió).

Teljes visszaverődés

Ha a fény optikailag sűrűbb közegből ritkábba lép, a beesési merőlegestől törik. ⇒



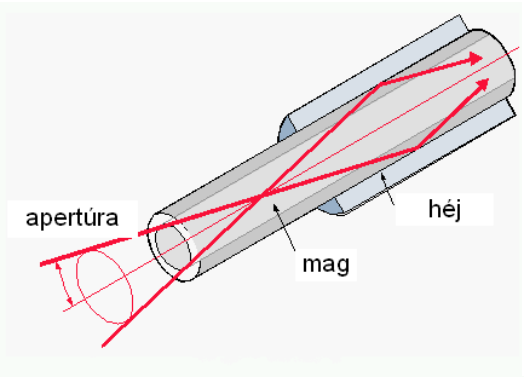
A beesési szöget növelve eljutunk egy olyan szöghöz, amelyhez 90°-os törési szög tartozik. Ez a beesési szög a határszög. Ennél nagyobb beesési szög esetén a fény nem tud kilépni az optikailag ritkább közegbe, hanem a határfelületről teljesen visszaverődik.

Az optikai szál

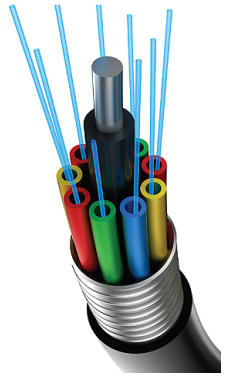
Az elv: teljes visszaverődés üvegszálban



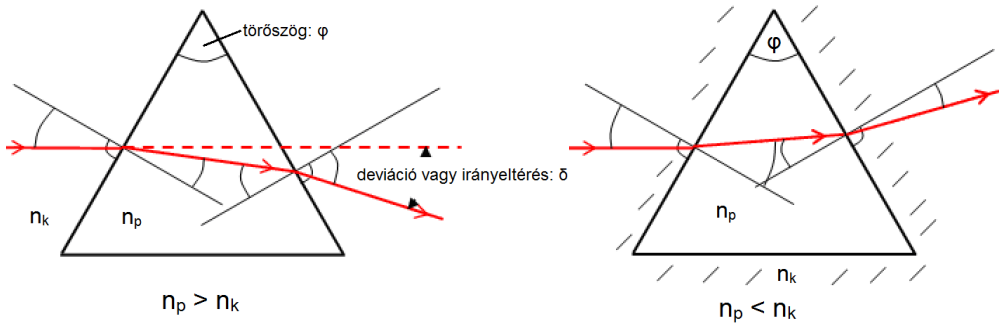
Az elv: teljes visszaverődés optikai szálban



A megvalósítás: optikai kábel

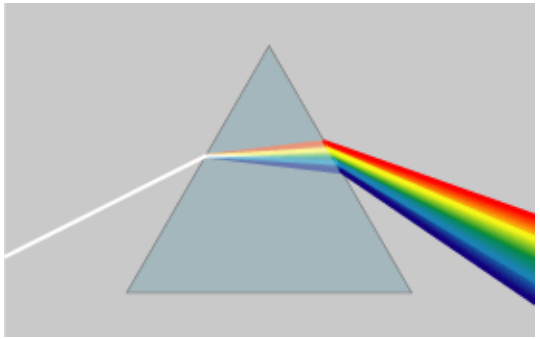


A prizma



A fény útja a környezeténél nagyobb, illetve kisebb törésmutatójú prizmában. A környezeténél nagyobb törésmutatójú prizmában a fény a prizma vastagabb, a kisebb törésmutatójúban a vékonyabb felé törik az áthaladás után.

A prizma



Mivel a törésmutató függ a hullámhossztól (diszperzió), a prizma a fehér fény különböző hullámhosszú komponenseit különböző mértékben töri meg. Legjobban a kéket, legkevésbé a vöröset. Így keletkezik a színkép.

14.3. A fény törése, teljes visszaverődés

Essék egy fénysugár két különböző közeg határfelületére a beesési pontra állított merőlegeshez képest valamilyen szöggel (14.3.1. ábra). Az ábrán látható elnevezések szerint a beeső sugár, a megtört sugár és a beesési merőleges egy síkban van. Ha c_1 az „1” jelű és c_2 a „2” jelű közegben mérhető fénysebesség, valamint a szögek az ábra szerintiek, akkor a beesési szögtől függetlenül érvényes az alábbi, Snellius-Descates, törvény:

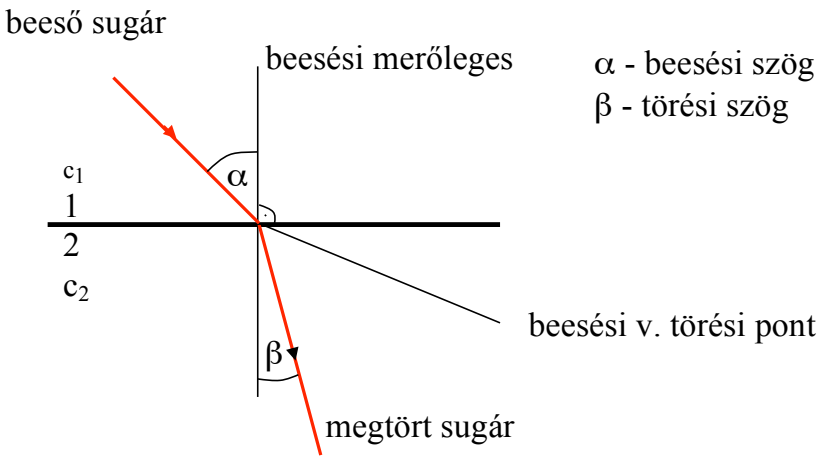
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}, \qquad (14.3.1.)$$

ahol n_{21} a „2” jelű közegnek az „1” jelűre vonatkoztatott relatív törésmutatója.

Ha az „1” jelű közeg vákuum, akkor

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_0}{c_2} = n_2,$$

ahol n_2 a „2” jelű közeg abszolút törésmutatója, és érvényes:

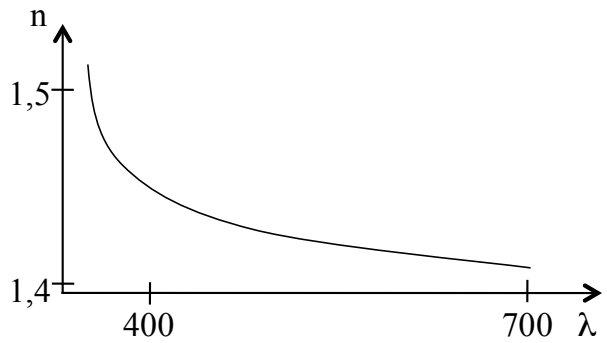


14.3.1. ábra A fény törése

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}\left(= \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right),$$

ahol a λ-ák a megfelelő hullámhosszak.

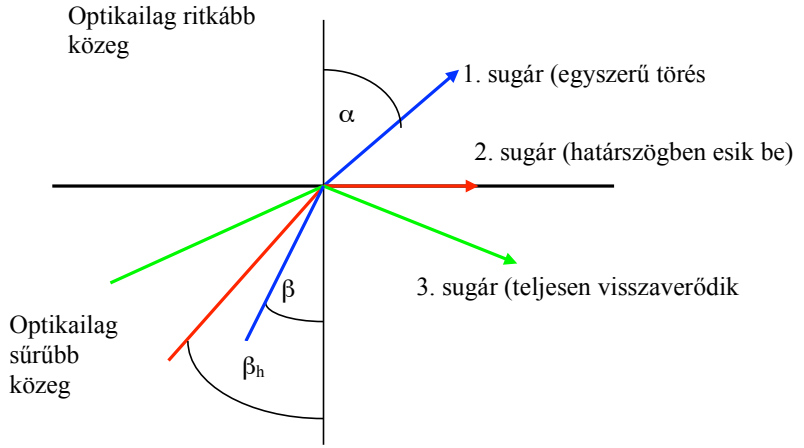
A törésmutató függ a hullámhossztól a látható (400-720 nm) tartományon a legtöbb átlátszó anyagra a14.3.2**. ábrán látható módon, azaz a kék színű fényt az anyag jobban megtöri, mint a vöröset.**



14.3.2. ábra Az átlátszó optikai anyagok törésmutatójának hullámhossztól való függése

A sugármenetről elmondható, hogy ha a fény optikailag ritkább közegből (ahol a fénysebesség nagyobb) sűrűbb közegbe (amelyben a fénysebesség kisebb) lép át, a beesési merőlegeshez törik. Ha sűrűbb közegből a ritkábba lép át, akkor a beesési merőlegestől törik.

Teljes visszaverődés:
Ha a fény optikailag sűrűbb közegből lép az optikailag ritkább közegbe (14.3.3. ábra), akkor a törési szög nagyobb a beesési szögnél. Ha növeljük a beesési szöget, akkor eljutunk egy olyan szöghöz, amelyhez már 90^o-os törési szög tartozik. Ezt a beesési szöget nevezzük határszögnek. Ennél nagyobb beesési szög esetén a fény már nem tud átlépni az optikailag ritkább közegbe, hanem teljes visszaverődést szenved.



14.3.3. ábra A teljes visszaverődés sugármenete

A határszög (β_h) az a beesési szög, amelyhez $\alpha=90^o$-os törési szög tartozik:

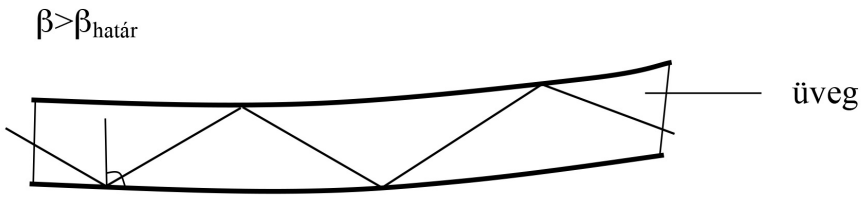
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_h} = n_{21}$$

és így

$$\sin\beta_h = \frac{1}{n_{21}}. \qquad (14.3.2.)$$

A teljes visszaverődés határszöge folyadékokban függ a folyadék összetételétől, mérésével az összetétel meghatározható. Az ilyen eszközöket refraktométereknek nevezzük.

A teljes visszaverődés jelenség felhasználható az informatikában, az adattovábbítási technológiákban, mert segítségével egy göbe átlátszó anyagon a fény végigvezethető, elgörbíthető (14.3.4. ábra).

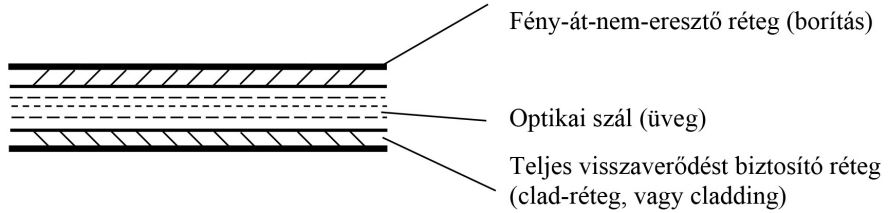


14.3.4. ábra A fény elgörbítése hajlított üvegrúddal, vagy szállal

Ez a jelenség eleinte csak érdekességként volt számon tartva. A 1968-70-es években kezdték el használni, endoszkópiára.

Az informatikai technológiákban először a távközlésben jelent meg.
Szükség volt az anyagok fejlesztésére, mert a csillapítás jelentős tényező volt. Ma már előállítható kvarcból olyan optikai szál, melynek csillapítása 1 km-en fél százalék. Jelenleg körülbelül 3 %/km csillapítású optikai szálakat használnak. Ezért erősítőket, jelismétlőket kell használni. Mivel a fény természetesen gyors (200000 km/s), és magas frekvenciájú (10^{14} Hz) nagy mennyiségű adat átvitelére képes.

Az optikai szál szerkezete:
Az optikai szál szerkezetét a14.3.5. ábrán mutatjuk be.

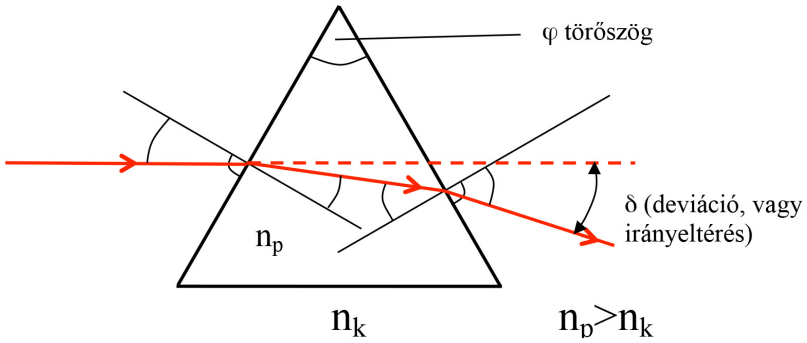


14.3.5. ábra Az optikai szál szerkezete

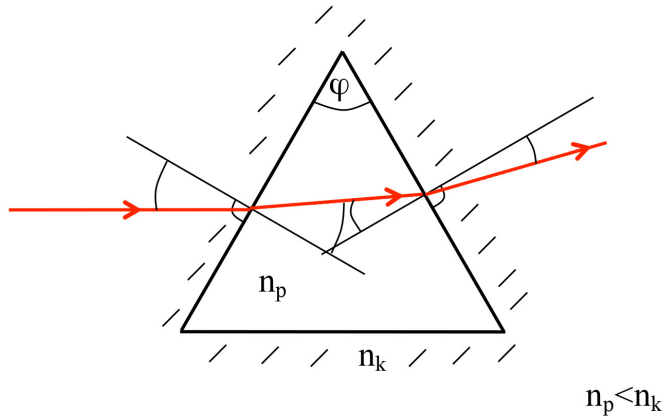
A szálak mérete általában 0,1 mm vagy 25 mikron. Egy kábelben legalább 4-5, de lehet 25 optikai szál is. A közepében egy fémszál van, a borítás szintén fém. Hajlításnál van egy minimális sugár, amivel hajlítható, egyébként törés vagy idő előtti öregedés következhet be. Az összes réteg megléte esetén nem is lehetséges jobban hajlítani. A kialakítása miatt a távközlésben ez a legkevésbé zavarható közeg.

Prizmák és a spektroszkóp

A prizma általában háromszög keresztmetszetű hasáb. A rajtuk keresztül haladó fénysugár útja függ attól, hogy a prizma, vagy a környezetének a törésmutatója a nagyobb. A14.3.6. ábrán egy, a környezetésnél nagyobb, a14.3.7. ábrán a környezeténél kisebb törésmutatójú prizmában haladó fény útját figyelhetjük meg.



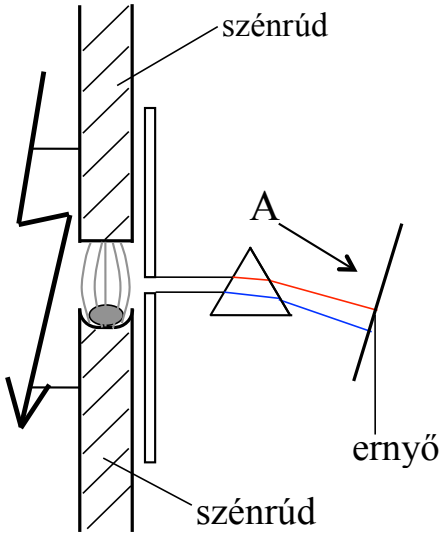
14.3.6. ábra A fény útja környezeténél nagyobb törésmutatójú prizmában (például üvegprizma levegőben)



14.3.7. ábra A fény útja a környezeténél kisebb törésmutatójú prizmában (levegőprizma üvegben)

A két ábrából megállapítható, hogy a környezeténél nagyobb törésmutatójú prizmában a fény a prizma vastagabb, a másik esetben a vékonyabb felé törik a teljes eszközön való áthaladás végére.

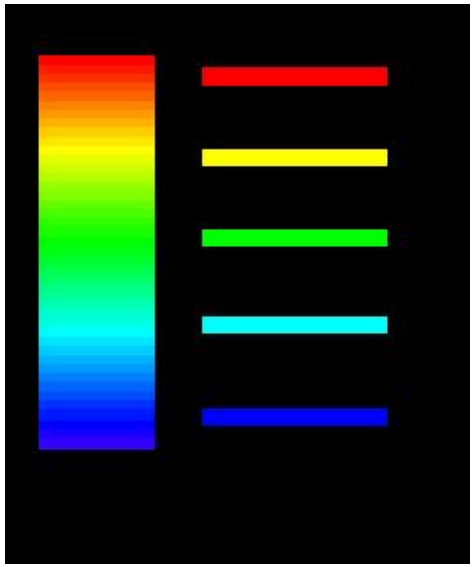
A spektroszkóp működése:
A prizmák egyik legfontosabb alkalmazása a spektroszkóp, melynek a vázlatát a14.3.8. ábrán adjuk meg.



14.3.8. ábra A spektroszkóp vázlatos rajza

A spektroszkóp azt a jelenséget használja ki, hogy ha egy anyagot elég magas hőmérsékletre hevítünk, akkor az látható fényt bocsát ki magából, s ennek a fénynek az összetétele jellemző arra az anyagra, ami azt kibocsátotta. A készülék segítségével a vizsgált anyag összetételére lehet következtetni.
Az eszköz működése a következő: A két szénrúdra nagyfeszültséget kötünk, így ívkisülés keletkezik. Az alsó szénrúdba, vagy arra helyezzük a vizsgálandó anyagot. A keletkező villamos ív magas hőmérsékletre hevíti a vizsgálandó anyagmintát, melynek a fényét egy résen vezetjük keresztül, ami egy párhuzamos fénycsíkot különít el a kibocsátott fényből. A párhuzamos fénycsík egy olyan prizmára esik, amelynek a törésmutatója a 14.3.2. ábrán látható módon függ a fény hullámhosszától. Az ívfény eredetileg fehér fényéből a prizmán való áthaladás után kilépő különböző hullámhosszúságú fények más-más helyen jelennek meg mivel a rájuk vonatkozó törésmutató más és más. Mivel a kék fényre vonatkozó törésmutató a legnagyobb, a prizma vastagabb vége felé lép ki, míg a vörös, melyre a legkisebb ez az érték, kevésbé törik meg. A prizmával szemközti ernyőn a 14.3.9. ábrán láthat színskálát (spektrumot) látunk. A színek sorrendje a prizma vastagabb végétől:
Ibolya, kék, zöldeskék, zöld, sárgászöld, sárga, narancs, vörös. A hullámhossz tartomány a sorrendnek megfelelően 400-720 nm. Minden spektrum, vagy színkép rendelkezik az ábrának megfelelő folytonos, és a mellette bemutatott vonalas spektrummal is. Különösen a vonalak színe és elrendezése lehet jellemző az azt kibocsátó anyag szerkezetére. A résből kilépő fénycsíkba helyezett lencsével élessé tehető a kép.

Az ernyő mellé egy hullámhossz skála helyezésével meghatározhatjuk a csíkokhoz, vgy vonalakhoz tartozó fény hullámhosszát, ezzel szabványos spektrum táblázatok segítségével a vizsgált anyag összetételét. Pontosságát tekintve a módszer igen kifinomult: az anyag 10^{-6} %-os jelenléte is megállapítható. Anyag kimutatása esetén pedig mintegy 10^{-6} gramm a kimutatható minimum.

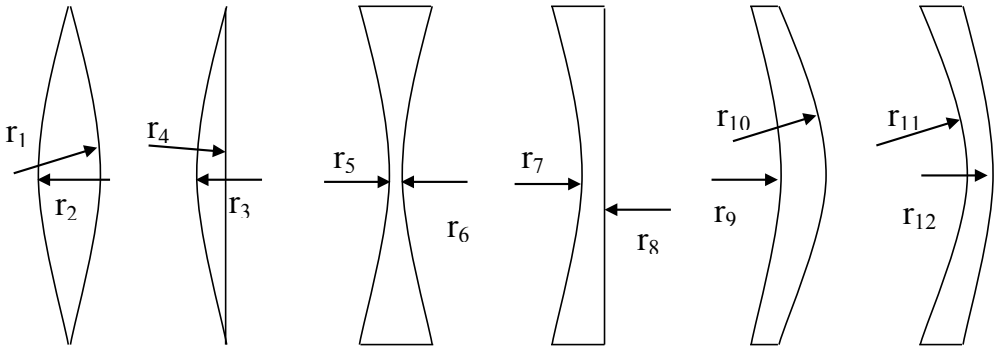


14.3.9. ábra A spektroszkóp ernyőjén az A nézetből látható kép

14.4. Optikai lencsék

A gömbi lencsék olyan átlátszó, többnyire üvegből készült testek, amelyeket két gömb-, illetve egy gömb és egy síkfelület határol.
A domború, vagy konvex lencsék a közepükön a legvastagabbak, szélükön a legvékonyabbak.
A homorú, vagy konkáv lencsék középen a legvékonyabbak, szélükön a legvastagabbak.
A lencsék az optikai eszközök elmaradhatatlan részei, de a látást javító szemüvegeinkben is ilyeneket találhatunk. A továbbiakban az ún. vékony lencsékkel foglalkozunk, amelyeknek a vastagsága elhanyagolható az átmérőjükhöz képest.

Vékony lencsék típusai:
A különböző kialakítású vékony lencséket a 14.4.1. ábrán mutatjuk be.



Bikonvex plánkonvex bikonkáv plánkonkáv konkáv-konvex konvex-konkáv

$r_1, r_2, r_3, r_{10}, r_{12} > 0$
$r_5, r_6, r_7, r_9, r_{11} < 0$
$r_4, r_8 = \infty$

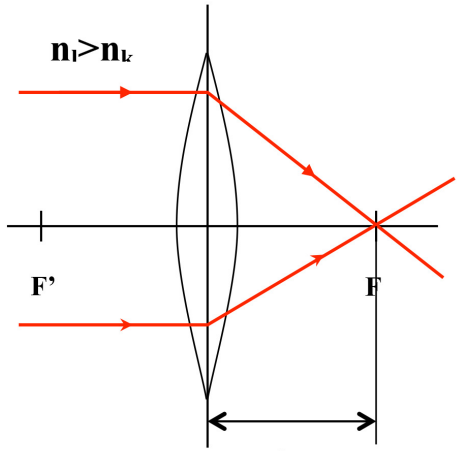
14.4.1. ábra A vékony lencsék típusai és felületikhez tartozó sugarak

A lencsekészítők egyenlete:

A fenti lencsék közül némelyek a párhuzamos fénynyalábot egy pontban gyűjtik össze. Ezt a pontot fókuszpontnak, és a lencsék síkjától (vagy főtérjától, vagy a középsíkjától, ami vékony lencsék esetében elvileg ugyanaz) mért távolságot fókusztávolságnak nevezzük. Más lencsék ugyanakkor a párhuzamos úgy szórják szét, mintha egy pontból, a (virtuális) fókuszpontból indultak volna ki.
A fókusztávolságok meghatározására a lencsekészítők egyenlete szolgál:

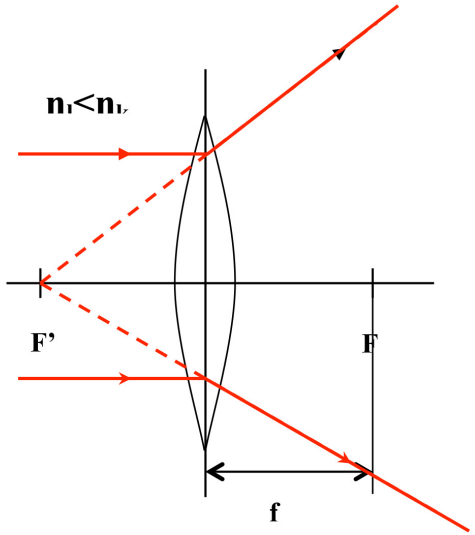
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_k} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \qquad (14.4.1.)$$

Az egyenletben f a fókusztávolság, n_l a lencse, n_k az azt körülvevő közeg törésmutatója, r_1, és r_2 a lencsét határoló felületek sugara. A törésmutatók egymáshoz való viszonyának és a felületek domborulatának függvényében a lencse szóró, illetve gyűjtő jelegét a14.4.2.-5. ábrákon mutatjuk be.



$n_l > n_k$ esetén a lencse gyűjtőlencse

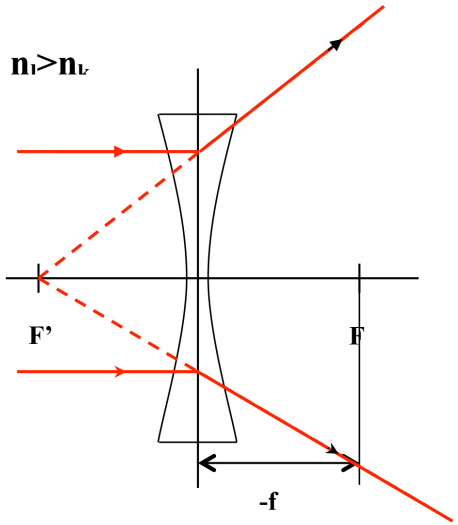
14.4.2. ábra A környezeténél nagyobb törésmutatójú domború lencse (gyűjtőlencse)



$n_l < n_k$
esetén a lencse szórólencse, mert a fókusztávolság negatív

(pl.: műanyag lencse vízben)

14.4.3. ábra A környezeténél kisebb törésmutatójú lencse (szóró lencse)

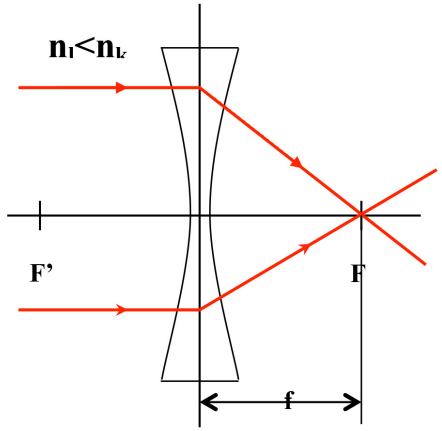


$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_k} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

(r_1, r_2 negatív)

$n_l > n_k$
esetén a lencse szórólencse, mert f negatívra adódik.
Üveglencse levegőben.

14.4.4. ábra A környezeténél nagyobb törésmutatójú homorú lencse (szórólencse)



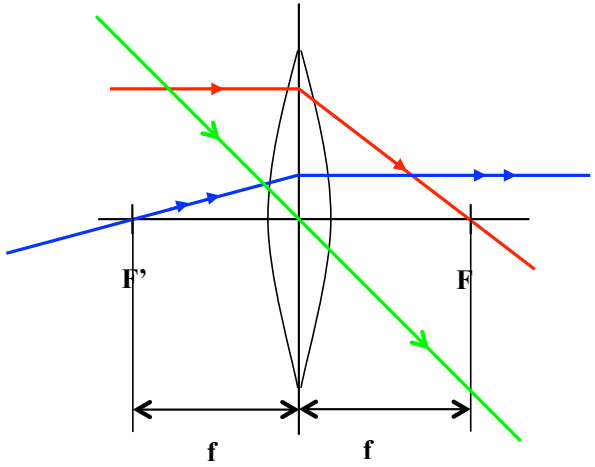
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_k} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

(r_1, r_2 negatív)

$n_l < n_k$
esetén a lencse gyűjtőlencse, mert a fókusztávolság pozitívnak adódik.
Műanyag lencse vízben.

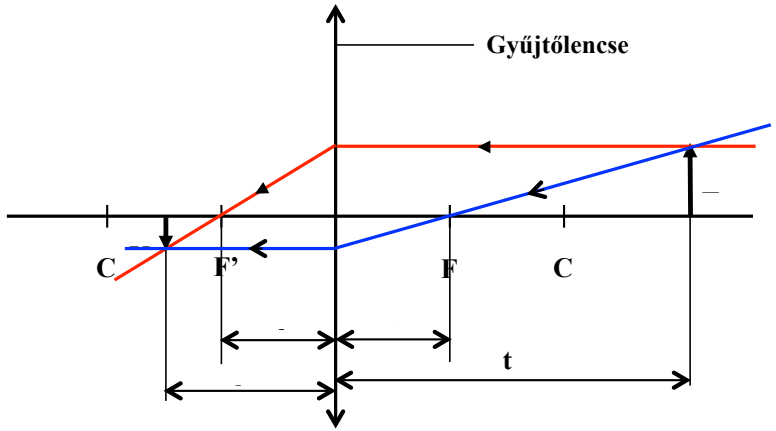
14.4.5. ábra A környezeténél kisebb törésmutatójú homorú lencse (gyűjtőlencse)

A gyűjtőlencse képalkotása:
A gyűjtőlencsék képalkotásának megszerkesztéséhez használható szerkesztő sugarakat a 14.4.6. ábrán mutatjuk be. Amint azt már a fentiekben is láthattuk, a lencséknek szimmetria okokból két fókuszpontjuk van, mindkét oldalon egy-egy. A tükrökhöz hasonlóan szokás alkalmazni a kétszeres fókusztávolság fogalmát (jele C), azonban az itt levő pont nem a görbületi középpont.



14.4.6. ábra Gyűjtőlencsék képszerkesztő sugarai

A szerkesztő sugarak segítségével megrajzolhatjuk a tárgy különböző helyzetéhez tartozó képeket. A továbbiakban a lencséket csak a fősíkjukkal, és annak a végére tett domború, vagy homorú nyíllal ábrázoljuk.
Ha a tárgy a kétszeres fókusztávolságon kívül van (14.4.7. ábra), akkor a kép a lencse másik oldalán, az egyszeres és kétszeres fókusztávolság között keletkezik, kicsinyített valódi és fordított állású. Ha a tárgyat távolítjuk a lencsétől, a kép a fókusz felé közeledik és csökken. Végtelen távoli a tárgy, képe a fókuszba esik és egy pont.



14.4.7. ábra A gyűjtőlencse által a kétszeres fókusztávolságon kívül levő tárgyról alkotott kép

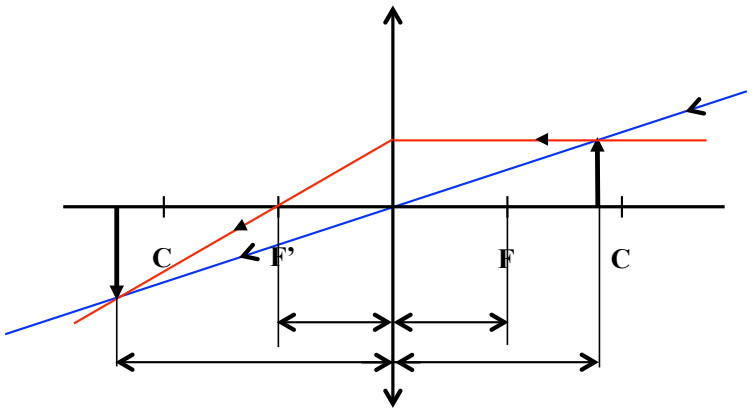
A fókusztávolság, a képtávolság és a tárgytávolság között a lencseegyenlet (6.2.6.) adja meg a kapcsolatot. Az egyenlet megfelel a tükröknél tanultaknak.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \qquad (14.4.2)$$

A tükrökhöz hasonlóan definiálhatjuk a lencsék nagyítását is az alábbi egyenlet alapján:

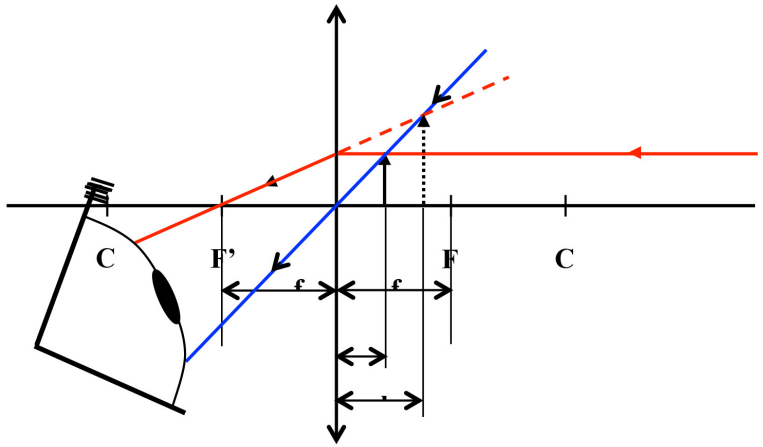
$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}. \qquad (14.4.3)$$

Ha a tárgy az egyszeres és a kétszeres fókusztávolság között van (14.4.8. ábra), akkor a kép a lencse másik oldalán, a kétszeres fókusztávolságon kívül keletkezik, nagyított valódi és fordított állású. Ha a tárgyat a fókusz felé közelítjük, a kép távolodik a lencsétől és nagysága nő, ha távolítjuk a fókusztól, a kép közeledik és csökken. Ha a tárgy a kétszeres fókusztávolságban van a kép is odaesik, nagyítása egységnyi.



14.4.8. ábra Gyűjtőlencse által az egyszeres és a kétszeres fókusztávolság közé helyezett

Ha a tárgy a fókusz és a lencse között helyezkedik el (14.4.9. ábra), a kép a tárgy-oldalra esik, egyenes állású nagyított, látszólagos lesz. Ha tárgy a fókusz felé közeledik, a kép távolodik és nagyobb lesz, a fókuszban végtelen nagyságú. A tüköregyenlet és a nagyítás kifejezése most is érvényes, azonban a képtávolság, a kép nagysága negatív érték.



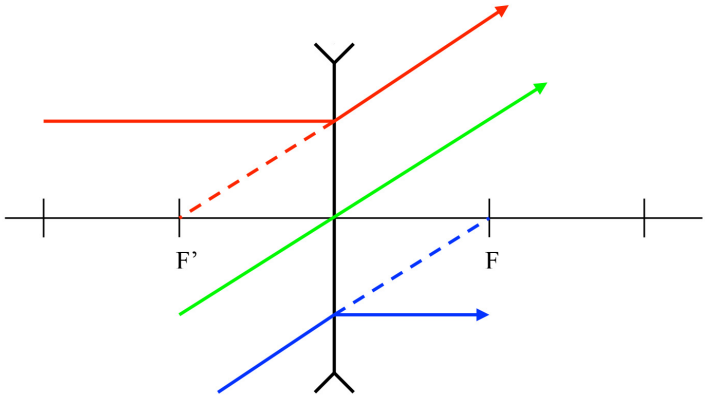
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$$

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}$$

K, k <0

14.4.9. ábra Gyűjtőlencse képalkotása a lencse és a fókuszpont közé helyezett tárgyról

A szórólencse képalkotása:
A szórólencsék képalkotó sugarait a14.4.10. ábrán figyelhetjük meg.

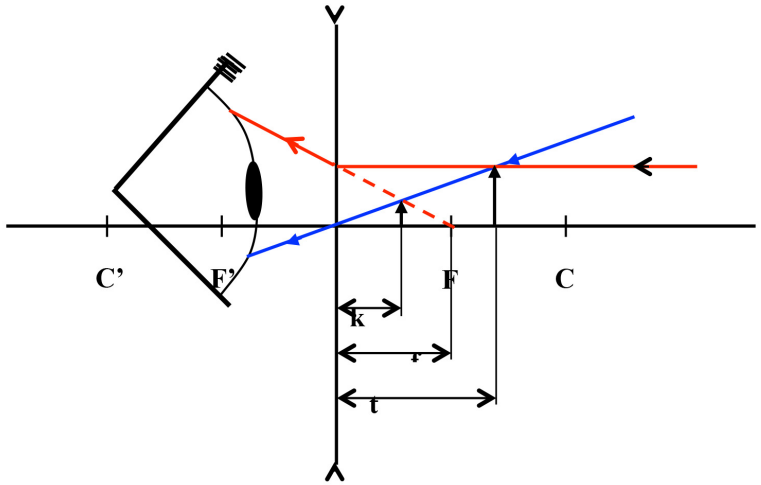


14.4.10. ábra Szórólencse szerkesztő sugarai

A szórólencse képe, mindig egyenes állású kicsinyített és látszólagos (14.4.11. ábra), bárhova is tesszük a tárgyat. Érvénes a lencseegyenlet, és a nagyítás ismert összefüggése, azonban a fókusztávolság, a képtávolság, a kép nagysága és a nagyítás negatív érték.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}.$$

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}$$



14.4.11. ábra Szórólencse képalkotása

Optikai eszközök

Az optikai eszközök használatának egyik célja a nagyítás, vagy egyszerűbben szólva annak a szögnek a felnagyítása, amely alatt az illető tárgy látszik

Egyszerű nagyító:
Egy gyűjtőlencse, melynél a tárgyat a fókuszpont és a lencse közé helyezzük, s ebben az esetben a tárgy képét a tárgyoldalon, egyenes állású nagyított, látszólagos képet kapunk.
Ha a kép a tisztalátás távolságában (s) van: - k = s = 25 cm, akkor a nagyítás:

$$N = \frac{s}{f} + 1, \qquad (14.4.4.)$$

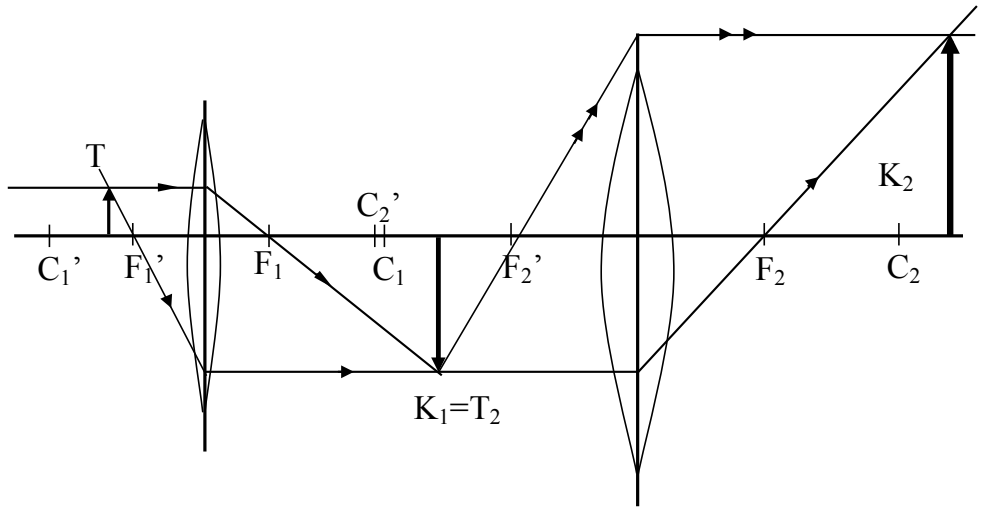
Ahol f a lencse fókusztávolsága.
Ha a tárgyat a gyújtósíkba tesszük, akkor a végtelenben megjelenő képet a szem akkomodáció nélkül szemlélheti, vagyis:

$$N = \frac{s}{f}. \qquad (14.4.5)$$

Az egyszerű nagyító 3 és 6-szoros nagyítás között használható, mert a nagyobb már túlságosan torzít.

Két lencsefunkcióval működő, nagyobb nagyítást biztosító eszközök:
Amennyiben 6-szorosnál nagyobb nagyításra van szükségünk, kézenfekvő gondolat két lencsét használni, amelyek közül a második az első által előállított képet virtuális tárgyként kezeli, és annak méretét nagyítja tovább. Ezt alapvetően két módon lehet egyszerűen megvalósítani. Mindkét esetben a tárgyat az első lencse egyszeres és kétszeres fokusztávolsága közé helyezzük, s így állítunk elő nagyított, valódi képet. Ha az első lencse látszólagos képet állítana elő, akkor a második lencse nem tudná tovább nagyítani, mert az a kép látszólagos.

Mennyiben a második lencsét úgy állítjuk be, hogy az első képe a második lencse egyszeres és kétszeres fókusztávolsága közé essen (14.4.12. ábra), akkor egy valódi, nagyított kép keletkezik, amit ernyőn fel lehet fogni. Az ernyőn látható kép megvilágítása a nagyítás négyzetével csökken (mert ugyanaz a fény a nagyítás négyzetével megnövelt felületen oszlik el), ezért a képet csak teljes sötétségben lehet látni, s ráadásul a berendezés méretei is nagyok lehetnek. Így ez az elrendezés csak valamiféle mikroszkóp kivetítőként működtethető.

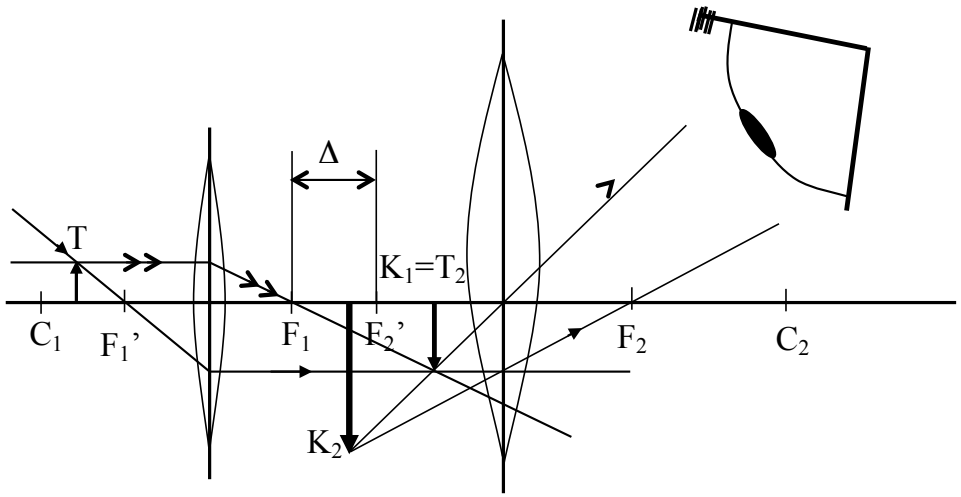


14.4.12. ábra Mikroszkóp kivetítő

A mikroszkóp:
Ha a második lencsét úgy helyezzük el, hogy a az első képe a fókusztávolság és a lencse közé essen, akkor a második lencse nagyított, de látszólagos képet állít elő a két lencse között. Ezt a képet csak a szemünk látja, azonban ez nem baj. Ennek a képnek a megvilágítása is kisebb, mint a tárgyé, azonban a képet a két lencse közötti, a külvilágtól optikailag elszigetelt csőben látjuk. Így a készülék kezelhetően kicsi lesz, és a képet külső fényhatások nem zavarják.
A mikroszkóp teljes nagyítása:

$$N = \frac{\Delta}{f_1} \cdot \frac{s}{f_2}, \qquad (14.4.6.)$$

ahol f_1 az első (ún. objektív vagy tárgylencse), f_2 a második lencse (okulár, vagy szemlencse) fókusztávolsága, s a tisztán látás távolsága (25 cm), Δ az ún. optikai tubushossz (F_1 és F_2' távolsága).

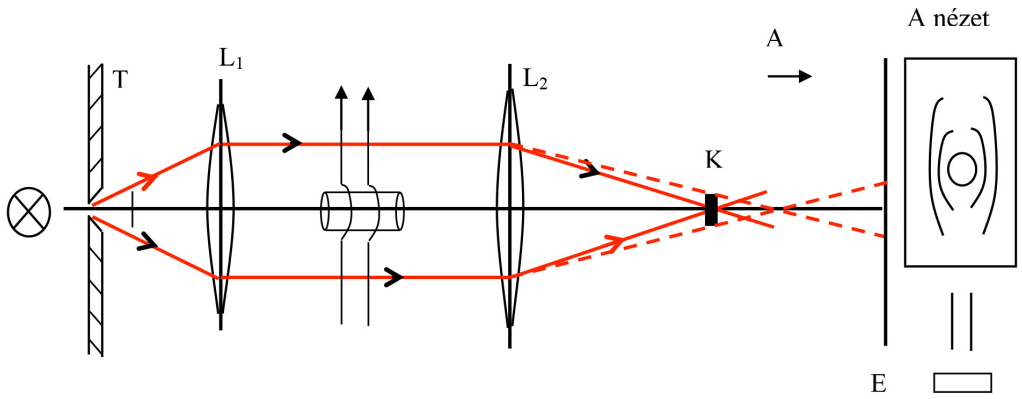


14.4.13. ábra Mikroszkóp elvi rajza

Egy mikroszkópban az objektívlencse több lencséből áll, akár 100-szoros nagyítás is elérhető. A modern mikroszkópok a maximális nagyítás körülbelül 1000-szeres lehet. A mikronnál kisebb tárgyaknak nem lehetséges alakhű képét előállítani, ezért nem igazán alkalmas, például egy baktérium valós alakjának meghatározására. Minél rövidebb a fény hullámhossza, annál jobb a mikroszkóp feloldóképessége (felbontása). Elektronmikroszkóppal akár egymilliószoros nagyítás is előállítható (mivel az elektronnak, mint hullámnak a hullámhossza több nagyságrenddel kisebb, mint a látható fényé).

Schlieren berendezés

A törésmutató nagyon függ az anyag paramétereitől. Gázokban, folyadékokban a nyomáskülönbség, hőmérsékletkülönbség, áramlások hatására változik a törésmutató, amelynek kis változásai is láthatóvá tehetők ezzel a (14.4.14. ábrán bemutatott) berendezéssel. A berendezésben egy fényforrás megvilágít egy nagyon kis nyílással (T tűlyuk) ellátott átlátszatlan (többnyire fém) lapot, amely nyílás a fényforrással átellenes oldalon pontszerű fényforrásként viselkedik. Elhelyezünk egy lencsét (L_1) úgy, hogy fókuszpontja a tűlyukra essen. Ekkor a lencse másik oldalán párhuzamos fénynyalábot kapunk, Majd egy másik lencsével (L_2) párhuzamos fénysugarakat újból egy pontba koncentráljuk, s ebbe a pontba egy átlátszatlan kis korongot (K) helyezünk el, amivel az E ernyőn sötét teret állítunk elő.
Ha a két lencse közé egy tárgyat helyezünk (az ábrán egy hengert ábrázoltunk), és körülötte valamilyen közeget áramoltatunk (vagy fűtjük a hengert, s ettől indul meg az áramlás), akkor az áramlás miatt a törésmutató kicsit megváltozik (általában az áramvonalak mentén), ezért a második lencse leképezése kicsit megváltozik, és a korong nem takar el minden fényt, ami a tárgy körüli térből érkezik a lencsére, így az ernyőn a tárgy körvonalai körül látszanak az áramvonalak.
Ez a berendezés egy rendkívül hatékony eszköz hő és áramlástani jelenségek vizsgálatához.

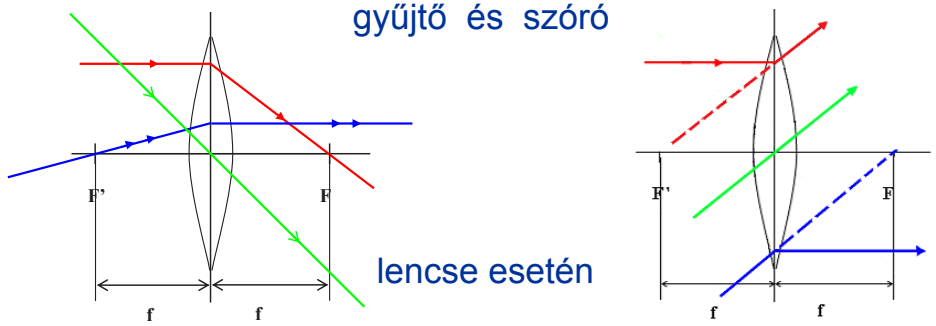


14.4.14. ábra Schlieren berendezés elvi rajza

Az optikai lencsék képalkotása

A tükrök képalkotásában a tükörről *visszaverődő* sugarak vesznek részt ► a sugármeneteket a fény **visszaverődésének szabályai** szerint kell megszerkesztenünk.
Lencsék alkalmazása esetén a képet a rajtuk *átmenő* fénysugarak hozzák létre ► a képet alkotó sugarak irányát a **törési törvény** határozza meg.

A képszerkesztéshez használt sugármenetek
gyűjtő és szóró
lencse esetén



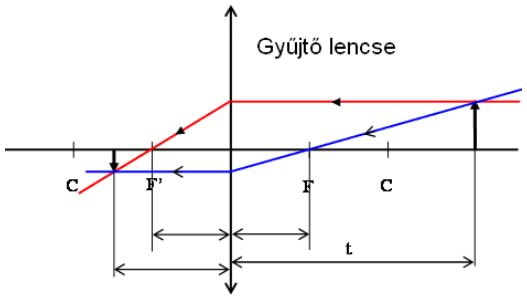
A gyűjtő lencse képalkotása

- A lencse fősíkja és az optikai tengely metszéspontjába, azaz a lencse középpontjába irányuló sugarak irányváltoztatás nélkül mennek át a lencsén.
- Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező sugarak – a lencse másik oldalán – a fókuszponton mennek át. A sugármenet megfordításából következően,
- a lencsére a fókuszpont felől érkező sugarak – a lencse másik oldalán – az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak tovább.

A szóró lencse képalkotása

- A lencse fősíkja és az optikai tengely metszéspontjába, azaz a lencse középpontjába irányuló sugarak irányváltoztatás nélkül mennek át a lencsén.
- Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező sugarak – a lencse másik oldalán – úgy mennek tovább, mintha a fókuszpontból indultak volna.
- A (másik oldali) fókuszpont felé irányuló sugarak pedig az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak tovább, a másik oldalon.

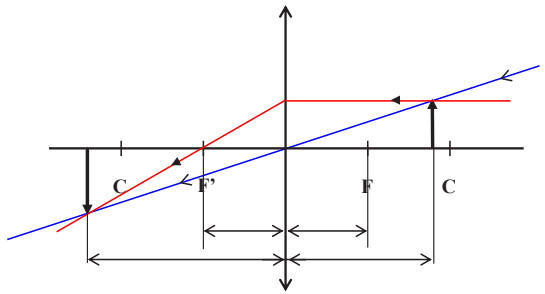
Hol és milyen kép keletkezik a tárgy fókuszponthoz viszonyított különböző helyzeteiben gyűjtő lencse esetén?



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \qquad N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}$$

Ha a tárgy a kétszeres fókusztávolságon kívül van, a kép a lencse másik oldalán, az egyszeres és kétszeres fókusztávolság között keletkezik, *kicsinyített, valódi és fordított állású*.
Ha a tárgyat távolítjuk a lencsétől, a kép a fókusz felé közeledik és egyre kisebb lesz. A végtelen távoli tárgy képe a fókuszpont.

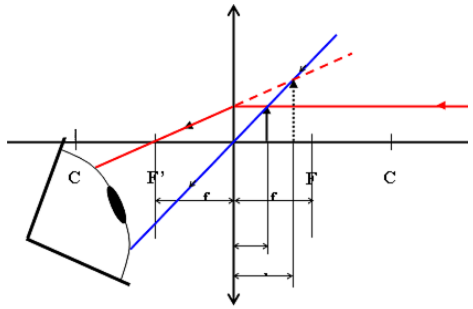
A gyűjtő lencse képalkotása



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \qquad N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}$$

Ha a tárgy az egyszeres és a kétszeres fókusztávolság között van, a kép a lencse másik oldalán, a kétszeres fókusztávolságon kívül keletkezik, *nagyított, valódi és fordított állású*. Ha a tárgyat a fókusz felé közelítjük, a kép távolodik a lencsétől és nő, ha távolítjuk, közeledik és egyre kisebb lesz. Ha a tárgy a kétszeres fókusztávolságban van, a kép is odaesik, és a nagyítás egységnyi.

A gyűjtő lencse képalkotása

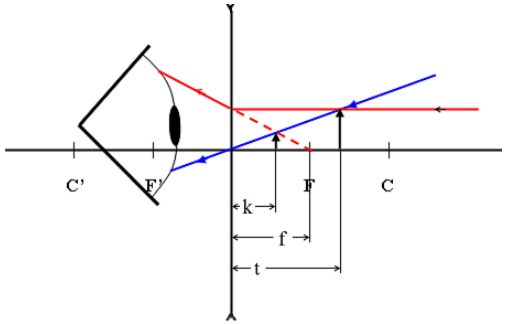


$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \qquad N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}$$

K, k < 0

Ha a tárgy a fókusz és a lencse között helyezkedik el, a kép a tárgy-oldalra esik, *egyenes állású, nagyított, látszólagos* lesz. Ha a tárgy a fókusz felé közeledik, a kép távolodik és egyre nagyobb lesz, a fókuszban végtelen nagyságú. A lencse-egyenlet és a nagyítás kife-jezése most is érvényes, azonban a *képtávolság és a kép nagysága negatív érték.*

A szóró lencse képalkotása



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \qquad N = \frac{k}{t} = \frac{K}{T}$$

f, k, K és N < 0

A szóró lencse képe mindig *egyenes állású kicsinyített és látszólagos*, bárhova is tesszük a tárgyat. Érvényes a lencse-egyenlet, és a nagyítás megismert összefüggése, azonban figyelnünk kell arra, hogy a fókusztávolság, a képtávolság, a kép nagysága és a nagyítás *negatív* érték.

Alkalmazások a mindennapokban

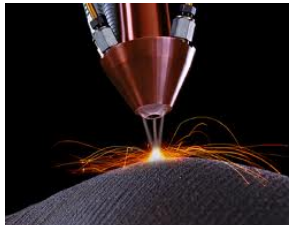








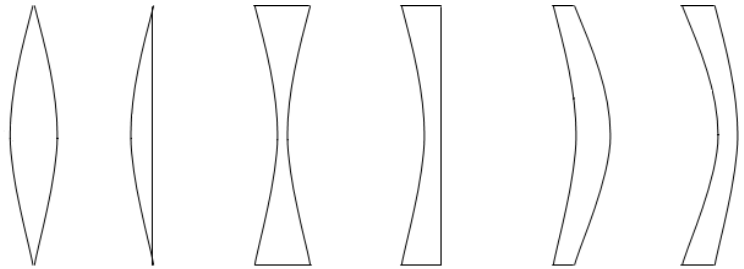




Az optikai lencsék

Az optikai lencse

A lencsék olyan átlátszó, többnyire üvegből készült testek, amelyeket vagy két gömbfelület, vagy egy gömb- és egy síkfelület határol.



A domború (konvex) lencsék a közepükön a legvastagabbak, míg a homorú (konkáv) lencsék középen a legvékonyabbak.

Az optikai lencse

Azt a pontot, amelybe egy lencse egy párhuzamos fénynyalábot összegyűjt, illetve úgy szór szét, mintha ebből a pontból indult volna ki a nyaláb, *fókuszpont*nak, illetve *virtuális fókuszpont*nak, ezeknek a lencsék fősíkjától (középsíkjától) mért távolságát *fókusztávolság*nak nevezzük.

Azt, hogy hogyan függ a fókusztávolság (**f**) a lencsét határoló két felület sugarától ($\mathbf{r_1}$ és $\mathbf{r_2}$), valamint anyagának és környezetének törésmutatójától ($\mathbf{n_l}$ és $\mathbf{n_k}$), *a lencsekészítők egyenlete* mondja meg:

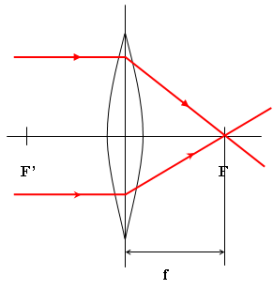
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_k} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Az optikai lencse

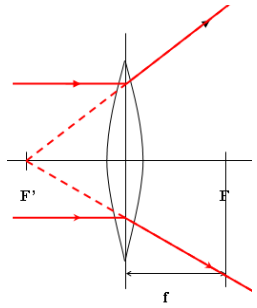
Egy lencse fókusztávolságának abszolút értékét és előjelét – azt tehát, hogy az gyűjtő-, vagy szóró lencseként viselkedik – annak alakja (konvex / konkáv) és a lencse és a környezet törésmutatójának viszonya *együtt* határozza meg.

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_k} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

r_1 és r_2 pozitív!



$n_l > n_k$



$n_l < n_k$

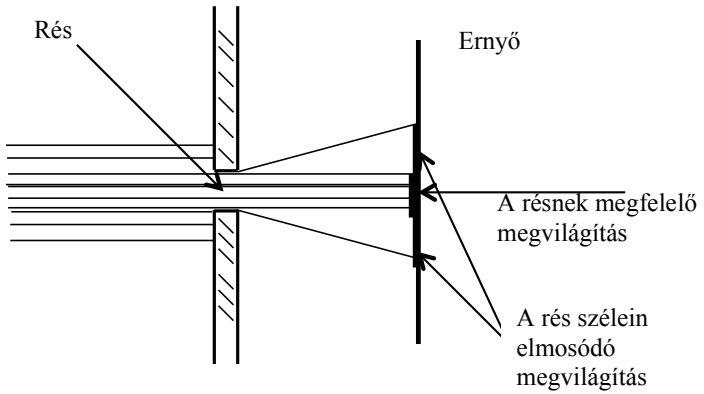
15. fejezet

15. Fizikai optika

15.1.Interferencia, fényelhajlás

Alapfogalmak

A fény hullámtulajdonságainak egyik bizonyítéka, hogy ha egy párhuzamos fénynyaláb esik egy résre (15.1.1. ábra), ami az ábra síkjára merőleges csík, akkor a rés másik oldalán elhelyezett ernyőn nemcsak a résnek megfelelő csíkban látszik fény, hanem széles rés esetében a széleken is, keskeny (a fény hullámhosszával összemérhető szélességű) rés esetében pedig a rés képe kiszélesedik (15.1.1. ábra).

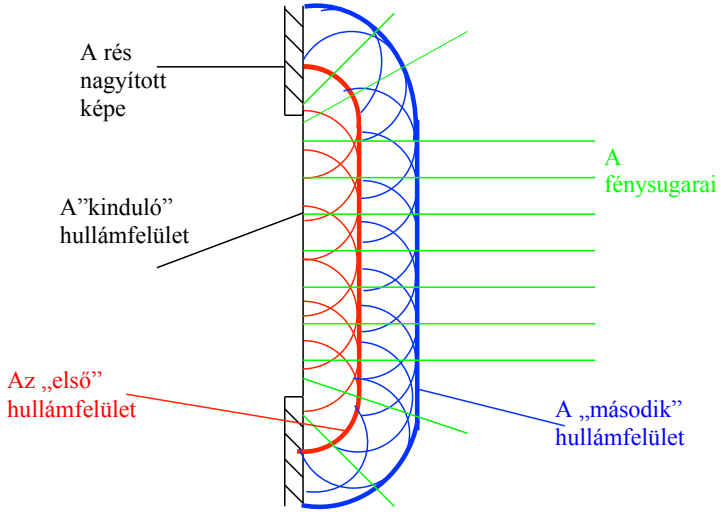


15.1.1. ábra Keskeny résen kilépő fénynyaláb kiszélesedik

A jelenség megmagyarázható a Huygens elvvel.

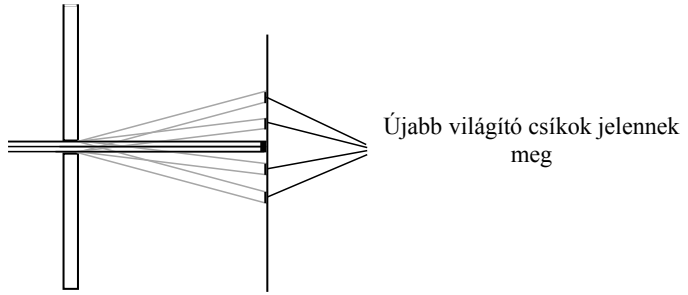
Huygens-féle elv: a hullámfelület bármely pontja elemi gömbhullámok kiindulópontjának tekinthető és egy későbbi hullámfelület ezen elemi gömbhullámok burkolófelületeként állítható elő.

Az elvet a 15.1.2. ábrán szemléltetjük. Kiinduló állapotnak a rés síkjában levő hullámfelületet tekintjük. A rés síkjának minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, s valamennyi idő alatt az ábrán vörös félkörökkel jelzett helyzetig jutnak. A burkolófelületük a vastag vörös vonallal meghúzott görbének megfelelő. A második hullámfelület a vastag kék vonal. A hullám sugarai a hullámfelületre definíció szerint merőlegesek, azaz a rés szélein az ábra szerint sem merőlegesek a rés síkjára, azaz nemcsak arra merőleges a hullámterjedés.



15.1.2. ábra A Huygens elv szemléltetése

Amennyiben a rés szélességét a hullámhossznál kisebbre csökkentjük, a résnek az ernyőn megjelenő képének a határa egyre szélesebb, és egyre nagyobb intenzitású lesz, világos és sötét csíkok tűnnek fel a rés képe mellett (15.1.3. ábra). Ezt a jelenséget a Huygens-Fresnel elvvel tudjuk magyarázni.

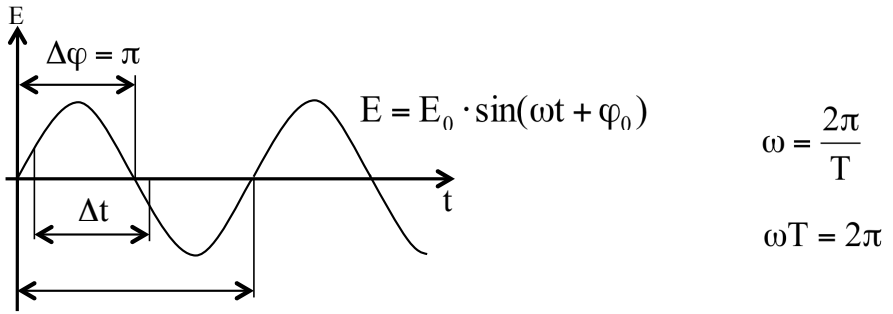


15.1.3. ábra A hullámhossznál kisebb résszélesség esetén az ernyőn a rés képe mellett sötét és világos csíkok jelennek meg

Huygens-Fresnel elv: egy hullámfelület bármely pontja elemi gömb-hullámok kiindulópontjának tekinthető, és a későbbi hullámterjedés ezen elemi gömbhullámok interferenciájával magyarázható. (Interferencia: hullámok egymásra hatása, kioltás-erősítés.)

Interferencia

A fény, mint elektromágneses hullám általában periodikus (15.1.4. ábra). Az ábrán a fényhullám néhány jellemzőjét és a fáziskülönbséget mutatjuk be.



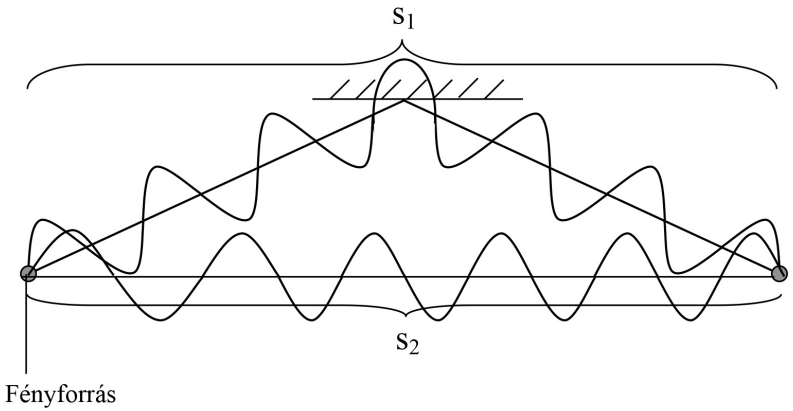
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega T = 2\pi$$

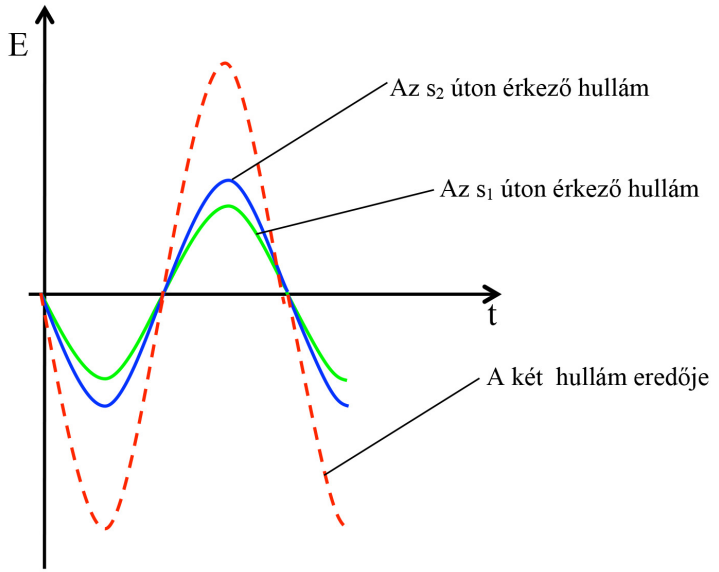
$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$ fáziskülönbség a Δt idővel eltérő pontok között

15.1.4. ábra A fényhullám meghatározó paraméterének, a villamos térerősségnek az időbeli függvénye, és a fáziskülönbség értelmezése

Az interferencia értelmezéséhez tekintsünk egy fényforrást, és vegyünk két fénysugarat, amelyek különböző irányban haladnak, majd útjuk során egy pontban találkoznak. A találkozásig az egyik által megtett út s_1, a másik által megtett pedig s_2. Készítsünk pillanatfelvételt a két fényhullám térerősségének térbeli állapotáról (természetesen csak gondolatban) és ábrázoljuk azt a 15.1.5. ábrán. Jól látszik, hogy a két fényhullám azonos fázisban indult és azonos fázisban találkozik (hullámhegy a hullámheggyel, vagy hullámvölgy a hullámvölggyel). Ekkor a találkozási pontra helyezett térerősség mérő a 15.1.6. ábrán látható időfüggvényt mutatja.



15.1.5. ábra Két, azonos fázisban érkező hullám interferenciája



15.1.6. ábra Két azonos fázisú hullám erősíti egymást

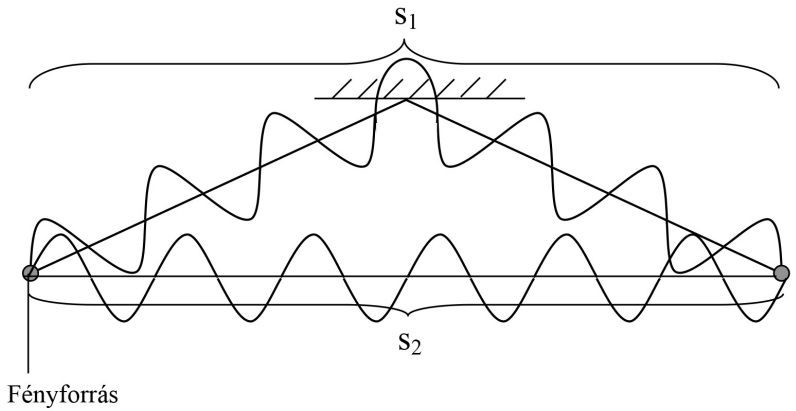
A 15.1.5. ábrából látszik, hogy a két hullám útkülönbsége pontosan a teljes hullámhossz, ekkor tehát erősítik egymást. De belátható, hogy akkor is ez a helyzet, ha az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse.

$$s_1 - s_2 = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2}, \qquad (15.1.1)$$

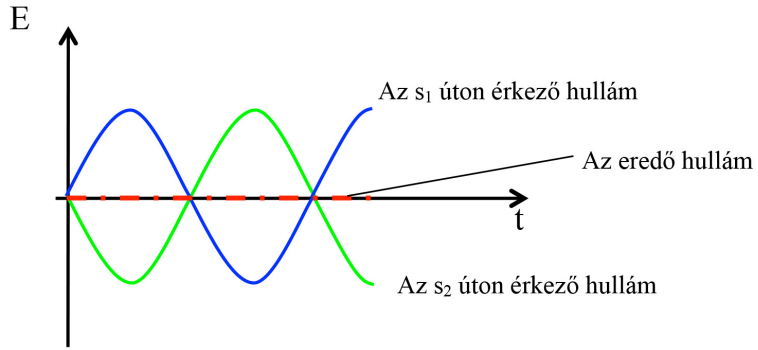
ahol k=0,±1,±2… .

Így kimondható:
Ha két azonos forrásból származó hullám útkülönbsége a hullámhossz egész számú többszöröse, akkor a két hullám erősíti egymást.

Ha a két azonos fényforrásból, azonos fázisban induló hullám ellenkező fázisban (hullámvölgy a hullámheggyel) találkozik egymással (15.1.7. ábra), akkor a találkozási pontban a villamos térerősség (és természetesen a mágneses indukció) vektor abszolút értékét mérő térerősség (vagy mágneses indukció) mérő a 15.1.8. ábrának megfelelő időfüggvényt fogja mérni.



15.1.7. ábra Két, ellenkező fázisban érkező hullám interferenciája



15.1.8. ábra Két ellenkező fázisban találkozó hullám kioltja egymást (vagy gyengíti)

A kioltás, vagy a gyengítés akkor következik be, amikor a két hullám útkülönbsége a fél hullámhossz páratlan számú többszöröse:

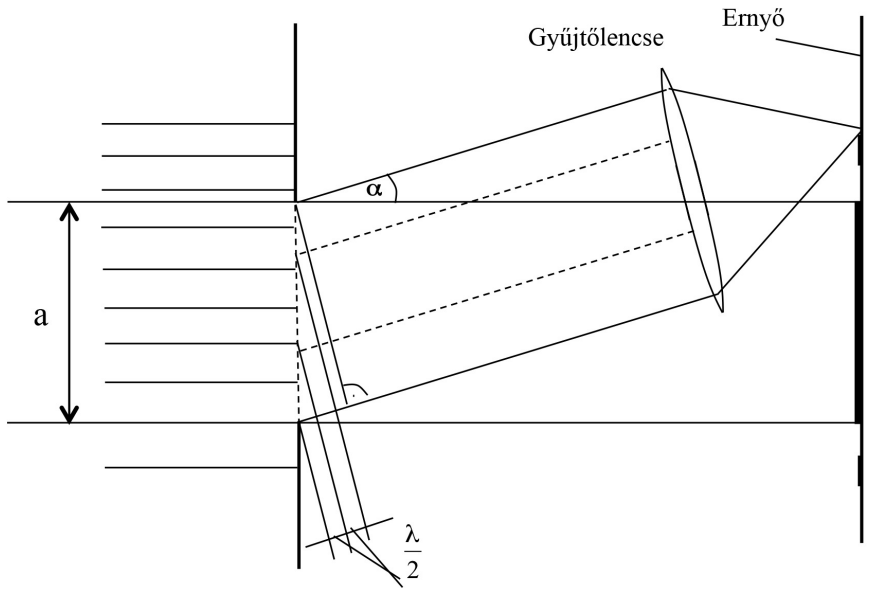
$$s_1 - s_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (15.1.2)$$

ahol k=0,±1,±2….

Ha a két hullám különböző fényforrásokból érkezik, akkor az interferencia nem figyelhető meg, mert a fáziskülönbségük nem állandó. Egy bizonyos fényforrásból érkezve is csak akkor állandó a két hullám közötti fáziskülönbség, ha az útkülönbségük nem túl nagy. Csak akkor tudunk interferenciát megfigyelni, ha a két fénysugár fáziskülönbsége hosszú ideig állandó, azaz koherens.

Optikai rés interferenciája

Tekintsünk egy keskeny rést, melynek szélessége a, és ejtsünk rá párhuzamos fénynyalábot a 15.1.9. ábra szerint. A réssel szemben helyezzünk el egy ernyő, ami merőleges a fénysugarakra. Ekkor az ernyőn a réssel szemben megjelenik egy fénycsík, s mellette világos tartományok és éles megvilágítatlan vonalak tűnnek fel, mindegyik párhuzamos a rés vonalával. Ezeknek a csíkoknak a helyzetét az alábbiak szerint határozhatjuk meg:



15.1.9. ábra Optikai rés interferenciája

Vizsgáljuk meg, hogy a fénysugarak irányához képest α szöggel milyen interferencia állapot jön létre. Ehhez a rés két szélső pontjából húzzunk párhuzamos, a sugarak irányával α szöget bezáró egyenest, majd a rés felső pontjából bocsássunk merőlegest az alsó pontjából kiinduló egyenesre. Ez a merőleges egyenes az alsó egyenesből egy $a \cdot \sin\alpha$ nagyságú szakaszt metsz ki, ami pontosan a rés felső és alsó széléből kiinduló két fénysugár útkülönbsége. Mérjünk fel fél hullámhossznyi távolságokat a rés legalsó pontjától számítva erre a szakaszra, majd az ábrán jelölt szerkesztő vonalakkal osszuk fel sávokra a két szélső fénysugár közötti tartomány. Akkor a két szomszédos tartomány miden megfelelő két részsugara között az útkülönbség a félhullámhossz lesz, azaz az első két sáv kioltja egymást.

Így ha

$$a \cdot \sin\alpha = 2k\frac{\lambda}{2}, \qquad (15.1.3.)$$

Akkor az adott α irányban kioltást, azaz sötét csíkot figyelhetünk meg. Ez a sötét csík nagyon éles, míg az erősítések nagyon elmosódottak, ezért az azokhoz vezető irányok meghatározása nem célszerű és nem pontos. A 15.1.3. egyenletben $k=\pm1,\pm2,\pm3\ldots$.

Az ábrán látható gyűjtőlencsére azért van szükség, hogy a párhuzamos sugarak találkozását ne kelljen a végtelenben keresni, illetve a végtelenre akkomodált szemmel nézni.

Optikai rács interferenciája

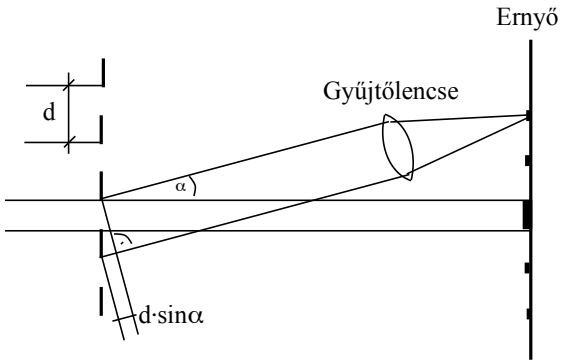
Készítsünk párhuzamos karcokat egy üveglapra. Ezzel rések sorozatát állítottuk elő, s az így előállított eszközt optikai rácsnak nevezzük. A karcok szétszórják a fényt, az nem megy át az üvegen, míg a karc nélküli részeken átlátszó marad.

Ha az optikai rácsra párhuzamos sugárnyaláb esik, akkor a rács síkjával párhuzamosra állított ernyőn a nyaláb képe most is megjelenik, azonban annak jobb és bal oldalán párhuzamos éles világító csíkok jelennek meg.

Határozzuk meg azokat az irányokat, amelyekben a világító csíkok megjelennek.

Két párhuzamos karc távolságát rácsállandónak nevezzük, és általában d-vel jelöljük. A rácsállandó mechanikusan karcolt rács estén általában 10-30 μm, de Rayleigh a XIX. Század végén, a XX. Század elején 1mm-re olyan mechanikus osztógépet szerkesztett, amellyel 2000 karcot ejtett 1mm-en egy üveglemezen. Az utóbbi két évtizedben kifejlesztett holografikus eljárással 3000 karc is készíthető milliméterenként.

Vegyünk egy α irányt, amelyben a vizsgálatot végezzük. Indítsunk két párhuzamos sugarat két szomszédos karc „alsó” felén (15.1.10. ábra). Utána húzzunk merőlegest a felső sugár kezdőpontjából a másodikra. Ez a vonal egy $d \cdot \sin\alpha$ hosszúságú szakaszt vág le a második egyenesből. Ha a két párhuzamos karc közötti átlátszó sáv szélessége elég kicsi, akkor feltételezhetjük, hogy az azon keresztül hatoló fénysugarak útkülönbsége elhanyagolható. Ekkor a fenti $d \cdot \sin\alpha$ távolság a két szomszédos átlátszó tartományon áthaladó két fénynyaláb útkülönbsége.



15.1.10. ábra Optikai rács interferenciája

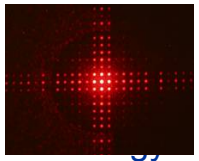
Így azokban az irányokban, amelyekben

$$d \cdot \sin\alpha = k\lambda,$$

a két fénynyaláb erősíti egymást. A k itt is lehet minden egész szám és zérus, azaz k=0;±1;±2; Ezek az erősítések nagyon élesek, közöttük a kioltások (minimumok) nagyon szélesek, meghatározásuk nem célszerű. Mivel sin α arányos λ-val., ezért az optikai rács kiválóan alkalmazható spektroszkópokban.

Fizikai optika

A fény mint hullám







Ha a fény (lézerfény!) útjába keskeny rést, rácsot,(néhány mikrométer vastag) huzalt, vagy akár egyhajszálat teszünk, az ernyőn sötét és világos sávokfigyelhetők meg.
Azzal az eddig használt képpel, mely szerint a fény egyenes vonalban terjed, ezt a jelenséget nem tudjuk leírni, megmagyarázni!
Azt sem, hogy a szappanhártyán, egy olajfolton vagy pl. egy CD lemezen miért láthatók színes csíkok.
Könnyűvé válik viszont a magyarázat, ha a fényt hullámként kezeljük.

A fény mint hullám

Ezek a jelenségek ugyanis a fényelhajlás és az interferencia együttes hatásával magyarázhatók. Interferenciára pedig csak hullámok képesek. Az interferencia fellépte a hullámtermészet meggyőző bizonyítéka.

De ***mi is az az interferencia***?

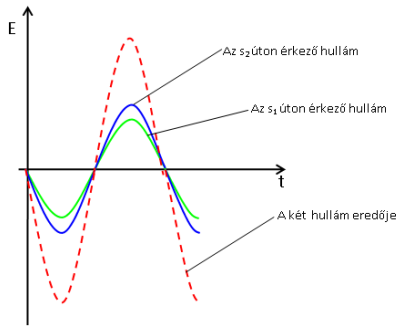
Két hullám találkozásakor fellépő jelenség.

A fény elektromágneses rezgés: $E = E_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

Tekintsünk egy fényforrásból kiinduló két olyan sugarat, amelyek különböző irányban haladnak, majd útjuk során egy pontban találkoznak (tükör). Milyen esetek lehetségesek?.

Az interferencia

Ha a két (azonos fázisban induló) fényhullám azonos fázisban találkozik, azaz hullámhegy a hullámheggyel, hullámvölgy a hullámvölggyel, **erősítik** egymást:



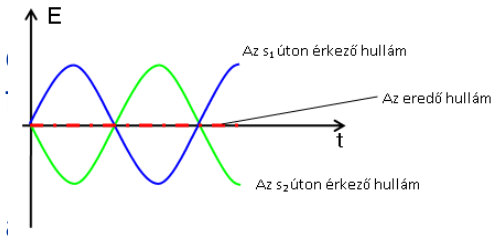
Mi az erősítés feltétele?

Két hullám akkor erősíti egymást, önbség pontosan a teljes tható, hogy akkor is ez a g a hullámhossz **egész** szöröse: s_1-s_2 = kλ =

k = 0,±1,±2,…

Az interferencia

Ha a két (azonos forrásból, azonos fázisban induló) fényhullám ellenkező fázisban találkozik, azaz hullámhegy a hullám-völggyel, **gyengítik vagy kioltják** egymást:



Mi a kioltás feltétele?

Két hullám akkor oltja ki pontosan a **páratlan számú** többszöröse:

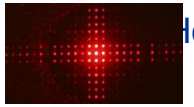
$s_1-s_2 = (2k+1)\cdot\lambda/2$, ahol

$k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ és az

Fizikai optika

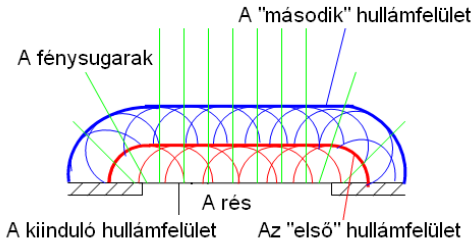
(folytatás)

Fényelhajlás résen és rácson



Hogyan magyarázzuk meg a hullámtulajdonságokkal az *elhajlást és a sötét-világos mintázat keletkezését*?

Elhajlás (a fény hullámhosszával összemérhetően) keskeny résen

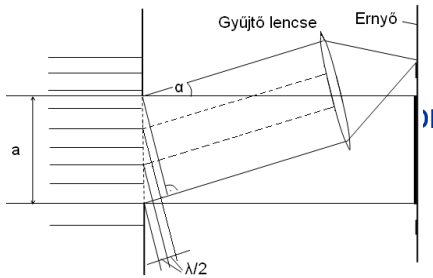


Huygens elv: a hullámfelület bármely pontja elemi gömbhullámok kiindulópontjának tekinthető, és egy későbbi hullámfelület ezen elemi gömbhullámok burkolófelületeként állítható elő.

Fényelhajlás résen és rácson

Interferencia keskeny résen

Huygens-Fresnel elv: egy hullámfelület bármely pontja elemi gömbhullámok kiindulópontjának tekinthető, és a későbbi hullámterjedés ezen elemi gömbhullámok *interferenciájával* magyarázható.



A rés felső és alsó széléből kiinduló két fénysugár útkülönbsége **a·sinα**.

A két szélső fénysugár közötti részt ›mszédos tartomány minden megfelelő két részsugara között az útkülönbség félhullámhossznyi legyen, ezek kioltják egymást.

Interferencia résen

Ha

$a \cdot \sin\alpha = 2k \cdot \lambda/2$,

ahol $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

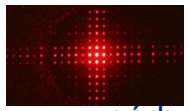
Akkor az adott **α** irányban kioltást, azaz sötét csíkot figyelhetünk meg. A sötét csíkok viszonylag élesek, míg az erősítések elmosódottak, ezért az azokhoz vezető irányok meghatározása nem célszerű és nem pontos.



Ernyőkép

Optikai rács interferenciája

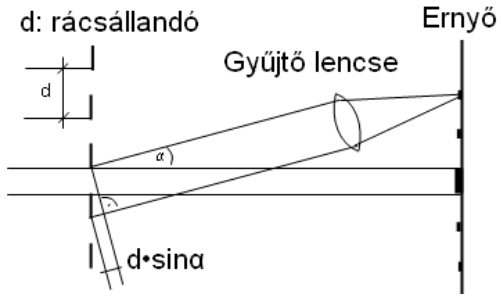
Optikai rács: szabályosan váltakozó átlátszó/reflektáló és nem átlátszó/nem reflektáló területek/csíkok sorozata.



Ha az optikai rácsra párhuzamos sugárnyaláb akkor a rács síkjával párhuzamos ernyőn a nyaláb képe mellett, annak jobb és bal oldalán párhuzamos, éles világító csíkok jelennek meg.

Melyek azok az irányok, amelyekben a világító területek/csíkok megjelennek?

Optikai rács interferenciája



d·sinα a két szomszédos átlátszó tartományon áthaladó két fénynyaláb útkülönbsége. Azokban az irányokban, amelyekben

d·sinα = k·λ,

ahol k = ±1, ±2, ±3, …

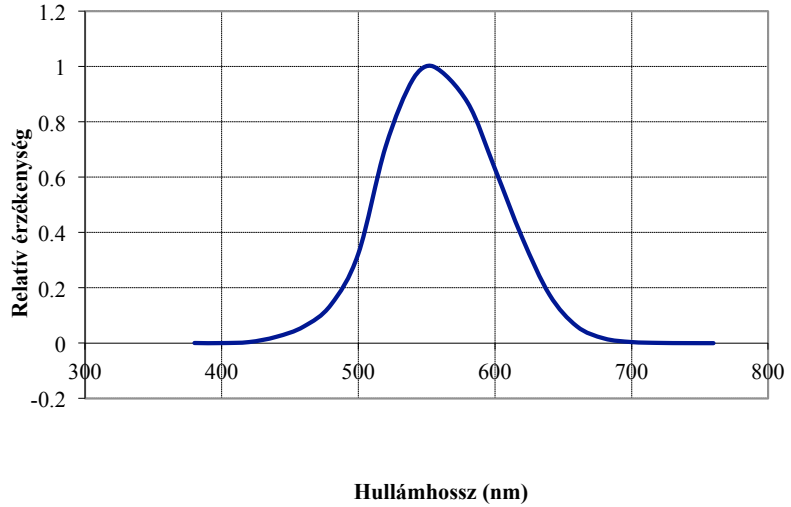
a két fénynyaláb erősíti egymást.

15.2. Szubjektív fotometria

A fény tulajdonságainak mérése történhet úgy, hogy a műszerek érzékenysége minden hullámhossz tartományon azonos, ekkor fizikai fotometriáról beszélünk.

Amikor arról akarunk meggyőződni, hogy agy terem megvilágítása alkalmas-e az emberi munkavégzésre, akkor műszereink az érzékenységének az emberi szemhez hasonló hullámhossz függvénye kell, hogy legyen Ezért ezt a fénymérést szubjektív fotometriának nevezzük.

Az emberi szem relatív érzékenységét (azaz a maximális érzékenységet egységnyinek véve) a 15.2.1. ábrán mutatjuk be.



15.2.1. ábra Az emberi szem érzékenységi görbéje

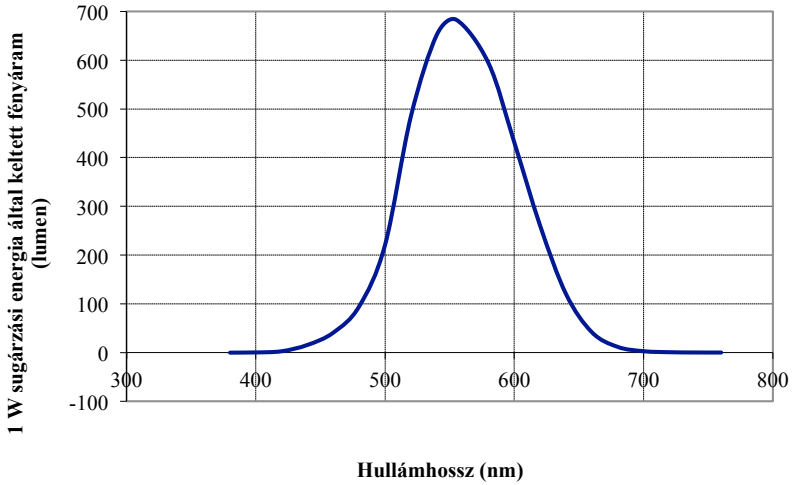
Az emberi szemben a fény érzékelésére pálcikák (amelyek vékonyabbak és hosszabbak), és csapok (rövidebbek) szolgálnak. Az előbbiek a fény intenzitását, az utóbbiak a színérzetet mérik. Háromfajta csap van, egyik a vörös (és kicsit a kék), a másik a zöld és a harmadik fajta csap a kék érzékeléséért felelős.

Az emberi szem érzékenységének a maximuma közel van a Nap által kibocsátott fény spektrum maximumához, a 600 nm-hez. Az emberi szem számára az a megvilágítás jó, amelynek spektrális eloszlása közel van, vagy megegyezik a Napéval.

A fényáram:

A szubjektív fotometriában a fény által szállított teljesítmény helyett a kisugárzott látható fényteljesítményt használjuk. Ennek a mennyiségnek a neve: fényáram (Φ), mértékegysége a lm (lumen).

550 nm hullámhossz esetében a fényáram 680 lm. Más hullámhosszaknál ennél kisebb, hullámhossz függését a 15.2.2. ábrán mutatjuk be.



15.2.2. A különböző színű fényhullámok 1 W teljesítmény esetén kialakuló fényárama a hullámhossz függvényében

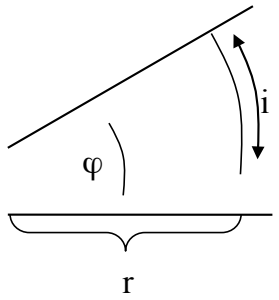
A fényerősség:

A fényerősség az egységnyi térszögbe kibocsátott fényáram.

A definíció értelmezéséhez először definiáljuk a térszöget. Ezt talán a síkszög definíciójához hasonlítva lehet megtenni a legszemléletesebben.

A síkszög a síknak az a része, amit két különböző irányba mutató, egy pontból kiinduló egyenes a találkozási pontjuknál bezár (15.2.3. ábra). A térszög az a térrész, amit három, vagy több egy ponton átmenő sík zár be (15.2.4. ábra).

Síkszög



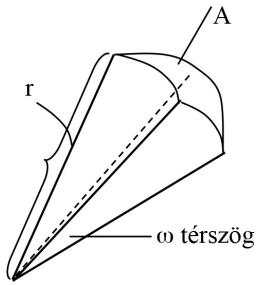
$$\varphi = \frac{i}{r}$$

[φ]=rad

1 rad=57,3°

15.2.3. ábra Síkszög definíciója

Térszög



$$\omega = \frac{A}{r^2}$$

[ω]=sterad (Szteradian)

A teljes tér:

$$\Omega = \frac{4r^2\pi}{r^2} = 4\pi \text{ sterad}$$

15.2.4. ábra A térszög definíciója

Ezek alapján a fényerősség matematikai definíciója:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}(\text{hom ogén fénynél} = \frac{\Phi}{\omega}). \qquad (15.2.1)$$

Mértékegysége:

$$[I] = \frac{[\Phi]}{[\omega]} = \frac{\text{lm}}{\text{sterad}} = \text{cd (candela)}.$$

A kandela meghatározására adott definíció:

1cd fényerősség a platina dermedéspontján izzó abszolút fekete test $\frac{1}{60}$ cm^2felületű darabjának merőlegesen nézve.

A megvilágítás erőssége

Az egységnyi felületre jutó fényáram:

$$E = \frac{d\Phi}{dA}(\text{egyenletes megvilágításnál} = \frac{\Phi}{A}. \qquad (15.2.2)$$

Mértékegysége:

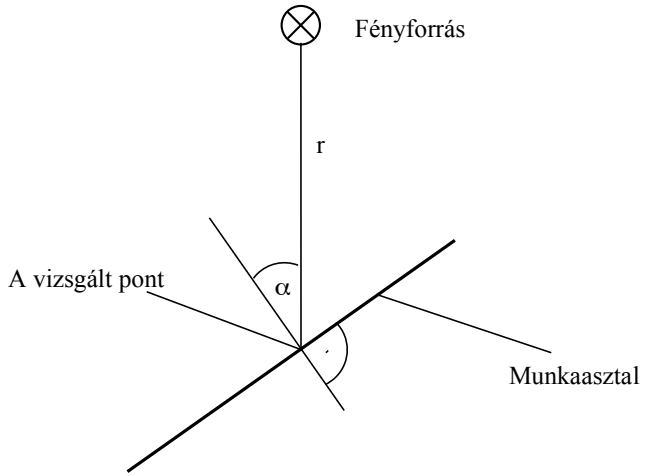
$$[E] = \frac{[\Phi]}{[A]} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = \text{lx (lux)}.$$

Néhány gyakorlati érték megvilágítás erősségére:

Holdfény: 0,1 – 10 lx

Napfény: 10^5 lx
Finom mechanikai munkához legalább
400-500 lx .

Egy I fényerősségű pontszerű fényforrás által egy adott hajlásszögű felület adott (r távolságban levő) pontján (15.2.5. ábra) létrehozott megvilágítás erősségét 15.2.4 számú egyenlet alapján számíthatjuk ki.



15.2.5. ábra Munkaasztal egy pontja megvilágítás erősségének kiszámítását szolgáló ábra

$$E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\alpha . \qquad (15.2.3)$$

A fénysűrűség

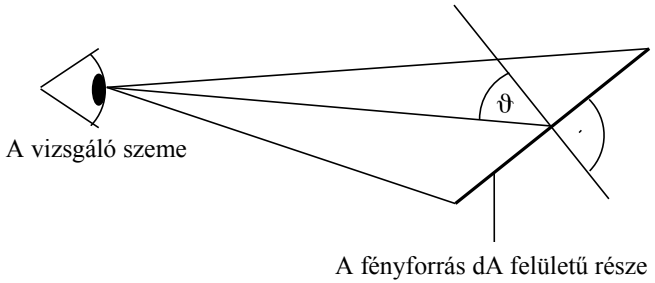
A fényt kibocsátó felületelem fényerősségének és látszólagos nagyságának (15.2.6. ábra) a hányadosa.

$$B = \frac{I}{dA \cdot \cos\vartheta}, \qquad (15.2.4)$$

mértékegysége:

$$[B] = \frac{[I]}{[A]} = \frac{cd}{m^2} = nit .$$

A CGS egysége a sb (stilb), ami egyenlő10 knit-tel.



15.2.6. ábra A fénysűrűség definíciójához szükséges ábra

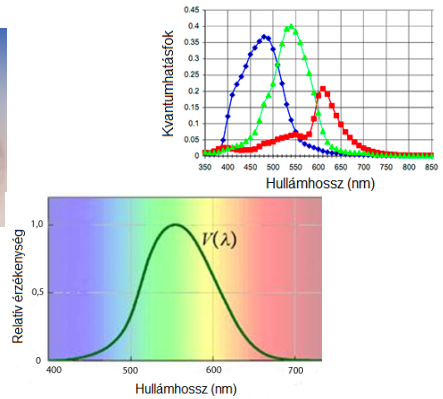
Az 1 cd értékét realizáló abszolút fekete test fénysűrűsége 600 knit (vagy CGS egységekben 60 sb). A Hold fénysűrűsége 3-10 knit, a gáztöltésű izzólámpáké 5-35 Mnit, a Napé mintegy 1 Gnit.

Szubjektív fotometria

Fotometria = a fény (az elektromágneses spektrum ~400 és ~800 nm közötti tartománya) mérésének tudománya.
Objektív fotometria = ahogy a műszereink „látják”, mérik a fényt.
Szubjektív fotometria = ahogy a szemünk érzékeli a fényt.
A különbség a detektorok spektrális érzékenységében van.



A láthatósági függvény



Egy Kodak digitális kamera érzékenységi görbéi



A fotometriai fogalmak

A szem a spektrum különböző hullámhosszú összetevőit nem egyforma erősnek (világosnak) érzékeli. Egy fényforrás különböző hullámhosszakhoz tartozó fényteljesítményét szemünk és agyunk „megszorozza” a láthatósági függvény megfelelő értékeivel.

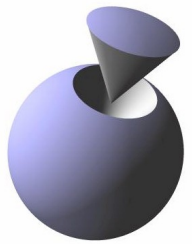
Egy fényforrás minden irányban (a teljes térszögben) kisugárzott fényteljesítménye – ahogy azt a szemünk érzékeli – a **fényáram**.

- *A fényáramot Φ-vel jelöljük és lumen-ben (lm) mérjük*.

A fényáram a fény térbeli terjedését írja le. A **fényerősség**, amely az egységnyi térszögbe kisugárzott fényáram, a forrás jellemzője.

- *A fényerősség jele I (Intensity), mértékegysége a kandela, cd.*

Térszög?



Egy síkszöget forgassunk meg az egyik szára, mint tengely körül ⇒ térszög (kúp).

A térszög nagysága = *egy tetszőlegesen megválasztott gömb tetszőlegesen kijelölt felületrészének (gömbsüveg) és a gömbsugár négyzetének a hányadosa*:

$$\Omega = A / r^2$$

A: (a megvilágított) felület, a gömbsüveg négyzetméterben,
r: a (pontszerű) fényforrás és a felület távolsága (a gömb sugara) méterben. ⇒ Az Ω dimenzió nélküli szám.
Mértékegysége a *szteradián, sr.*

Összefüggés a fényáram és a fényerősség között

A fényerősség – az egységnyi térszögbe kisugárzott fényáram – matematikai definíciója homogén fényre:

$$I = \Phi / \Omega.$$

Általános esetben:

$$I = d\Phi / d\Omega.$$

A definíciónak megfelelően 1 cd = 1 lm / 1 sr.

Miért kandela és mekkora 1 cd ?

Egy viaszgyertya fényerőssége	1 cd
Egy 100 W-os izzóé	120 cd
Mozigép vetítőlámpája	20000 cd

Összefüggés a fényáram és a fényerősség között

$$\Phi = I \cdot \Omega$$

(lm = cd · sr)

1 lumen az 1 kandela fényerősségű, minden irányban egyenletesen sugárzó, pontszerű forrás 1 szteradián térszögbe kisugárzott fényárama, azaz ekkora a fényáram egy 1 m sugarú gömb 1 m^2–es felületén.



És a teljes térszögben, a teljes gömbfelületen?

$\Omega = 4r^2\pi / r^2$ miatt

$\Phi = 4\pi$ lumen.

A *fényerősség* és a *fényáram* fogalmának ismeretében immár számszerűsíteni tudjuk a forrás és a fényterjedés (fotometriai) tulajdonságait.

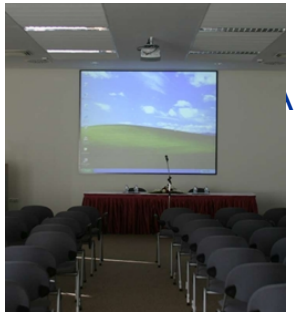
A következő részben azt tekintjük át, hogy
milyen (optikai) hatást kelt a fény(áram) egy felületen,
mivel, hogyan jellemezhető egy felület *megvilágítottság*a.

Szubjektív fotometria

(folytatás)

A megvilágítás erőssége





A *fényerősség* és a *fényáram* a fényforrást, illetve a fény térbeli terjedését jellemzi. Kérdés: milyen hatást kelt egy adott fényáram egy felületen?

Annál jobban megvilágítottnak látunk egy felületet, minél nagyobb fényáram esik minél kisebb felületre.

A *megvilágítás* (merőleges beesés esetén):

$$\mathbf{E = d\Phi / dA}.$$

Homogén (és merőleges) fényáram esetén:

$$\mathbf{E = \Phi / A}.$$

(1 lux = 1 lumen / 1 m^2).

A fotometria távolságtörvénye

Egy **I** fényerősségű, minden irányban egyenletesen sugárzó, pontszerű forrás fényárama egy 1 m sugarú gömb teljes felületén ($\Omega = 4\pi$ miatt): $\mathbf{\Phi = 4\pi I}$. Mivel a gömb felszíne $\mathbf{A = 4r^2\pi}$, a megvilágítás,

$$\mathbf{E = \Phi / A = 4\pi I / 4r^2\pi, \text{ azaz } I / r^2.}$$

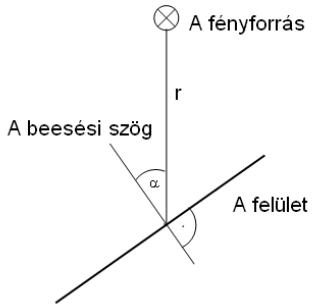
A megvilágítás erőssége a forrás és a felület távolságának növekedésével csökken:

$$\mathbf{E = I / r^2.}$$

E: a *merőlegesen* megvilágított felület megvilágítása [lux],
I: a fényforrás fényereje [kandela],
r: a (pontszerű) fényforrás és a felület távolsága [m].

A fotometria távolságtörvénye

Nem merőleges beesés esetén:



$= (I / r^2) \cdot \cos \alpha$

Jellegzetes megvilágítás erősség értékek:

Telihold: ~ 0,2 lux. Az 1 lux ~ szükségvilágítás. A színérzékelés határa ~ 3 lux. Iroda normál megvilágítása: 500-1000 lux. Átlagos nap télen: 1000-2000 lux, nyáron: 5-10 000 lux.

A fénysűrűség

A *fénysűrűség,* **L** (luminance) az emberi szemben a világító vagy megvilágított felületek által keltett fényérzet mértéke, ⇒ a forrást jellemző mennyiséggel, azaz az **I** fényerősséggel kapcsolatos.

$$L = I / A$$

1 cd/m^2 (= 1 nit) egy 1 kandela fényerősségű,
1 m^2–es felületű forrás fénysűrűsége.

Jellegzetes fénysűrűség értékek:

Hold: 0,25 cd/m^2; gyertyafény: 1 cd/m^2; izzólámpa: 200-3000 cd/m^2; xenon gáztöltésű lámpa: 50000-100000 cd/m^2.
Közepes környezeti megvilágítás mellett a jó minőségű prezentációhoz a vásznon a fénysűrűség 120-130 cd/m^2 kell legyen.

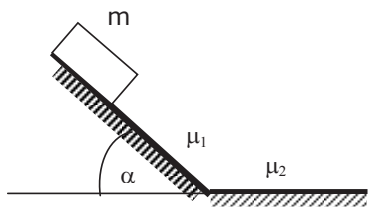
Beadandó feladatok

1. fejezethez

1. Egy építkezésen ábrán látható 5m magas lejtőről egy m = 3 kg tömegű téglát kezdősebesség nélkül csúsztatnak le.

$\alpha = 45^{o}$
$\mu_1 = 0.15$
$\mu_2 = 0.25$

a.) Mekkora a tégla sebessége a lejtő alján?
b.) Mekkora út megtétele után áll meg a tégla?
c.) Mekkora a tégla gyorsulása a lejtőn és a vízszintes talajon?
d.) Rajzolja fel az út-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő grafikonokat a mozgás teljes idejére!



2. fejezethez

Egy köszörűkő átmérője 25 cm. Álló helyzetből egyenletesen gyorsítva forgatjuk 5 másodpercig, ekkor éri el a percenkénti fordulatszáma a 2800 értéket.
a. Mekkora a szöggyorsulás?
b. Mekkora a kerületi pont eredő gyorsulása 1 másodperccel az indítás után?
c. Hányat fordul a kő, amíg beáll a fordulatszáma?

3. fejezethez

Egy sípálya síkja 20°-os szöget zár be a vízszintessel, hossza 1200 m. Legalább mekkora teljesítményű motorral kell felszerelnünk a felvonót, ha azt akarjuk, hogy óránként 600 embert vontasson fel a pálya tetejére? (egy síző tömege felszereléssel együtt átlagosan 85 kg, a sílécek és a hó közötti súrlódási együttható α=0.05)

4. fejezethez

Egy sítalpas eszkimó vadász a 0.012 súrlódási tényezőjű havas talajon áll. Tömege a teljes felszereléssel és a puskával 78kg. A sítalpakkal párhuzamos irányban, vízszintesen egy 50 g tömegű puskagolyót lő ki 450 m/s-os sebességgel.
Mennyit csúszik hátra a vadász a havon? ($g=9,81 m/s^2$)

5. fejezethez

Tekintsünk egy 20 liter űrtartalmú hőszigetelt, henger alakú edényt, melybe ideális gázt zártunk be egy könnyen mozgó, 10 cm^2 alapterületű dugattyúval. A külső légnyomás legyen 101kPa, a dugattyú tömege 1,2 kg. Számoljuk ki a dugattyú elmozdulását, ha a gáz hőmérsékletét a kezdeti 300K-ről 450K-re növeljük! Mekkora a gáz belső energiájának megváltozása? c_v=715J/kgK, r=287 J/kgK.

6. fejezethez

Egy 30 cm vastag jégtábla vízből kiálló részének vastagsága a felére csökken, ha egy 85 kg tömegű ember ráállt a közepére. Mekkora a jégtábla vízszintes felülete? (a jég sűrűsége 920 kg/m^3, a víz sűrűsége 1000 kg/m^3)

7. fejezethez

Egy palackban 150bar nyomású, 27°C hőmérsékletű gáz van. Ha negyedrészét kiengedjük, a gáz hőmérséklete 11°C-ra csökken. Mekkora lesz ekkor a palackban maradt gáz nyomása?
Mekkora lesz a nyomás, ha visszaáll a palack kiindulási hőmérséklete?

8. fejezethez

Egy hőszigetelő falú tartályban 290K hőmérsékletű, 300g tömegű nitrogén gáz van, amelyet 0,8kg tömegű, 10cm^2 felületű dugattyú zár be. A dugattyú súrlódásmentesen, szabadon mozoghat és a külső légnyomás legyen 1bar. Ha a gázzal lassan 8000J hőt közlünk, a dugattyú elmozdul. Mekkora volt a gáz térfogata kiinduláskor és végállapotban és mekkora lett a hőmérséklete?

9. fejezethez

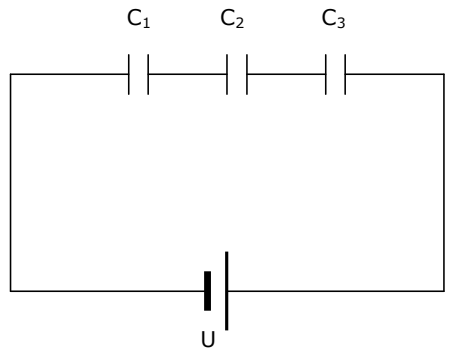
Egy alumíniumból készült 100 m hosszú vezetéket 0°C hőmérsékleten szereltek fel. Mekkora lesz a hossza

a. nyáron, 40°C hőmérsékleten?
b. télen, -30°C hőmérsékleten?

Az alumínium lineáris hőtágulási tényezője $\alpha_{Al}=2.4\cdot10^{-5}$ 1/°C

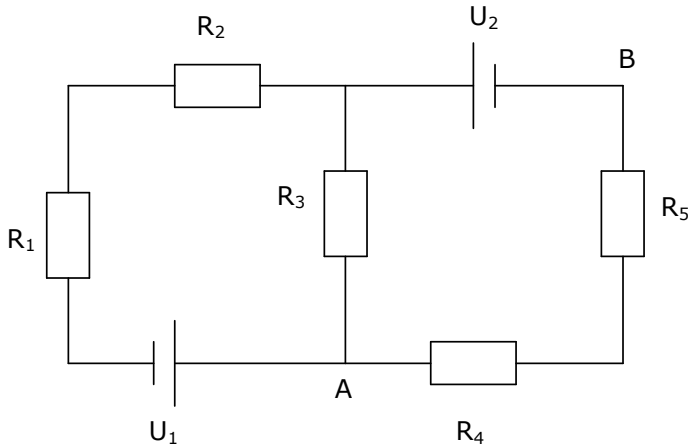
10. fejezethez

Számítsa ki a kondenzátorok töltéseit és feszültségeit az alábbi kapcsolásban!(C_1=5 nF, C_2=11 nF, C_3= 3 nF, U=200 V)



11. fejezethez

Számítsa ki a középső ágban folyó áram erősségét és az AB pontok közötti feszültséget!
U_1=24 V, U_2=30 V, R_1=300 Ω, R_2=280 Ω R_3=250 ΩR_4=180 Ω R_5=220 Ω

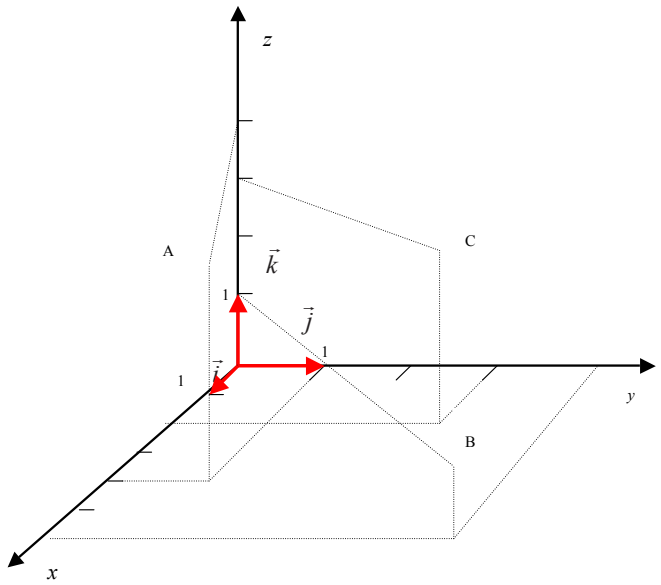


Minta feladatok

1. fejezethez

1. Vektorok

1. Adja meg az ábrán látható pontok helyvektorait!



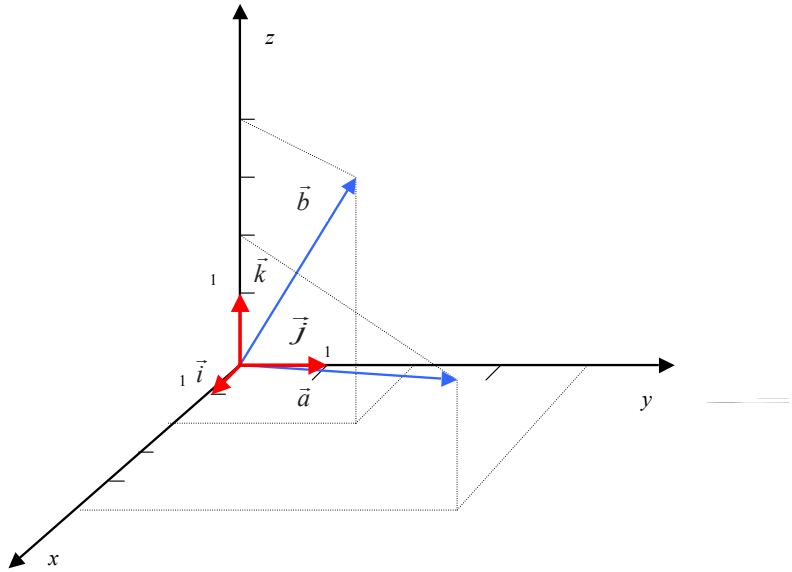
Megoldás:

Az A pont helyvektora: $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$

A B pont helyvektora: $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

A C pont helyvektora: $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

2. Adja meg az alábbi ábrán látható helyvektorok koordinátáit, számolja ki a két vektor összegét, különbségét, skaláris és vektori szorzatát!



Megoldás:

$\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$;

$\vec{a} + \vec{b} = 7\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$; $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 26$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} =$$
$$= 12\vec{i} - 16\vec{j} + 2\vec{k}$$

2. Egyenes vonalú mozgás

1. Egy jármű halad állandó 54km/h sebességgel A-ból B-be. Miután megtett x utat, a=0.05 m/s^2 gyorsulással halad tovább egészen B-ig. Ezt az útszakaszt így 5 perc alatt tette meg. Ha a teljes út 46 km volt,
a)mennyi ideig tartott a teljes út?
b)Mekkora volt az x út?
(48,61perc és 39250 m)

2. Elkerülhető-e az összeütközés, ha a 72 km/h sebességgel haladó jármű előtt 95 m távolságban hirtelen forgalmi akadály bukkan fel és a jármű 2.5 m/sec^2 lassulással fékezhető? Ha nem, mekkora sebességgel ütközik a jármű? (reakció idő 1 sec)

Megoldás:

$$v = 72km/h = 20m/\sec$$

Mivel a vezető az akadály észlelése után csak 1 másodperccel kezd el fékezni, ezalatt 20 m-t megtesz, csak 75 m van a megállásig.
Először számoljuk ki, mennyi idő telik el a teljes megállásig:

$$0 = v_0 - a \cdot t_1$$

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = \frac{20}{2.5} = 8\sec$$

A teljes megálláshoz tehát 8 másodpercre van szükség. Ez alatt az idő alatt megtett út:

$$s = v_0 \cdot t_1 - \frac{a}{2} \cdot t_1^2 = 80m$$

A teljes megálláshoz 80 m fékútra lenne szükség, az akadály azonban 75 m-re van a járműtől, tehát nem kerülhető el az ütközés.

Az ütközési sebességhez először kiszámítjuk, mennyi idő alatt ér az autó az akadályhoz:

$$s_1 = 75m = v_0 \cdot t_2 - \frac{a}{2} \cdot t_2^2$$

innen:

$$t_2 = 6\sec$$

Az ütközés sebessége az a sebesség, amely sebességre lelassul a 6 másodperc alatt az autó:

$$v_{ü} = v_0 - a \cdot t_2 = 5 \ \frac{m}{\sec}$$

A jármű tehát 5 m/sec sebességgel ütközik az akadállyal.

3. Egy ejtőernyős kiugrik a 2000 m magasan repülő gépből. Kiugrás után 12 másodpercig szabadon esik, majd meghúzza az ejtőernyő kioldózsinórját. Miközben az ernyő nyílik, 18 m/sec^2 lassulással esik egészen addig, amíg el nem éri az 5 m/sec sebességet. Innen állandó sebességgel süllyed a földet érésig.
a. Mennyi idő telt el a kiugrás és a földet érés között?
b. Rajzolja fel a mozgás út-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő diagramját!

Megoldás:
A teljes mozgást három szakaszra bonthatjuk fel: a gyorsuló mozgás (első 12 másodperc), a lassuló mozgás (az ejtőernyő kinyílása) és az egyenletes mozgás szakaszára.

a.
1. gyorsuló mozgás:
Ezen a szakaszon a megtett út:

$$s_1 = \frac{g}{2} t_1^{\,2} = 706.32m,$$

ahol $t_1 = 12\sec$

A szakasz végére elért sebesség:

$$v_1 = g \cdot t_1 = 117.72 \ \frac{m}{\sec}$$

A második szakaszon az ejtőernyős v_1 sebességről lassul le v_2= 5m/sec sebességre állandó lassulással:

$$v_2 = v_1 - a \cdot t_2$$

innen $$t_2 = \frac{v_1 - v_2}{a} = 6.262\sec$$

Ez alatt az idő alatt megtett út:

$$s_2 = v_1 \cdot t_2 - \frac{a}{2} \cdot t_2^2 = 384.25m$$

3. A harmadik szakasz hossza:

$$s_3 = s - (s_1 + s_2) = 2000 - 1090.57 = 909.43m$$

Az ejtőernyős ezt a szakaszt állandó 5 m/sec sebességgel teszi meg. Az ehhez szükséges idő:

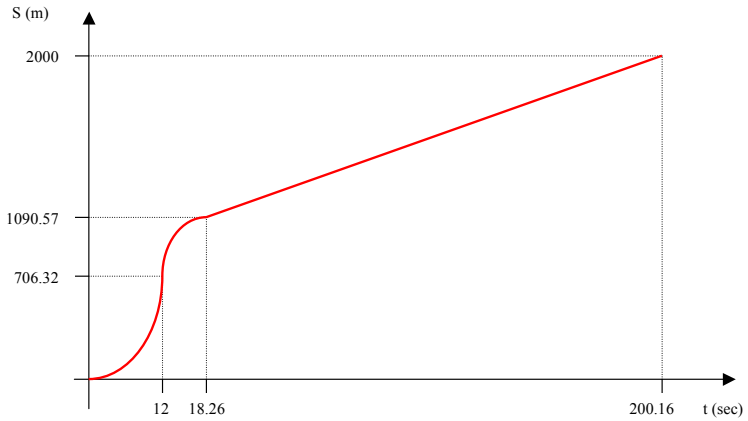
$$t_3 = \frac{s_3}{v_2} = 181.9\,\text{sec}$$

A kiugrás és földet érés között eltelt idő ennek alapján:

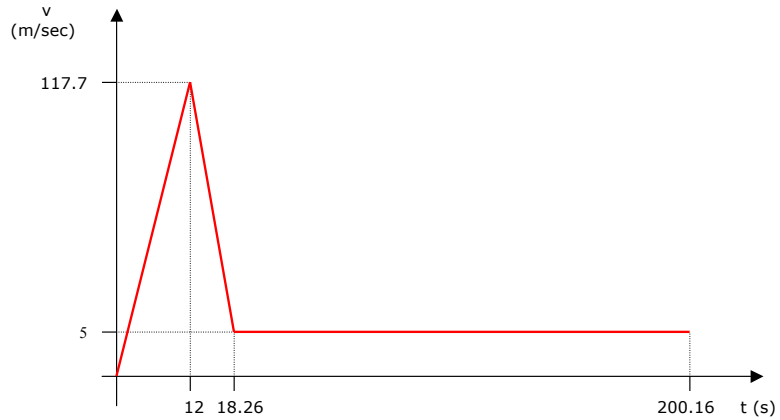
$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 200.16\,\text{sec}$$

b.

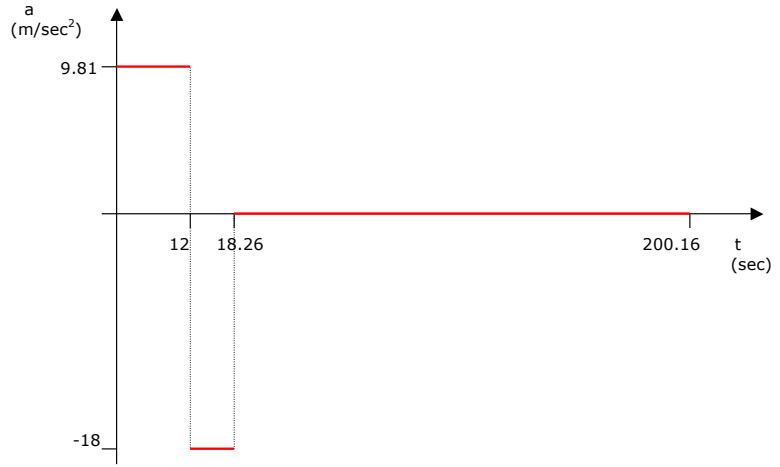
út-idő diagram:



sebesség-idő diagram:



A gyorsulás-idő diagram:



4. Milyen magasról esik az a test, amely esésének utolsó 3 másodpercében a teljes út 52%-át teszi meg?

Megoldás:

Ha a teljes magasság *h,* akkor

$$h = \frac{g}{2} \cdot (t_1 + \Delta t)^2,$$

ahol t_1 az esési idő az utolsó három másodperc előtti része, Δt az utolsó három másodperc.

A test az utolsó három másodpercet a test valamilyen v_1 kezdősebességgel és g gyorsulással teszi meg:

$$0.52h = v_1 \cdot \Delta t + \frac{g}{2} \cdot \Delta t^2$$

a kezdősebesség:

$$v_1 = g \cdot t_1$$

behelyettesítve:

$$0.52h = g \cdot t_1 \cdot \Delta t + \frac{g}{2} \cdot \Delta t^2$$

$$0.52 \cdot \frac{g}{2} \cdot (t_1 + \Delta t)^2 = g \cdot t_1 \cdot \Delta t + \frac{g}{2} \cdot \Delta t^2$$

innen: t_1=6.77 sec, h=468.2 m)

5. Egy 200 m széles folyó egyik partjáról a másikra egy evezős akar átjutni. A víz folyási irányával milyen szöget bezárva kell evezni és hol fog partot érni az evezős ha
a.) a legrövidebb idő alatt
b.) a legrövidebb úton akar átjutni a folyón. Az evezős sebessége állóvízben 2 m/sec, a folyó sodra 1.5 m/sec.
(a. 90°, 150 m lejjebb, b.131.4° a kiindulási ponttal szemben)

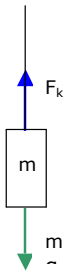
6. Egy 200 m széles folyó egyik partjáról a másikra egy evezős akar átjutni. A víz folyási irányával milyen szöget bezárva kell evezni és hol fog partot érni az evezős ha
a.) a legrövidebb idő alatt
b.) a legrövidebb úton akar átjutni a folyón. Az evezős sebessége állóvízben 2 m/sec, a folyó sodra 1.5 m/sec.
(a. 90°, 150 m lejjebb, b.131.4° a kiindulási ponttal szemben)

Dinamika

1. Mekkora és milyen irányú erővel lehet egyensúlyban tartani egy m= 3 kg tömegű testet?
Mekkora és milyen irányú erővel lehet azt felfelé és lefelé 2 m/sec^2 gyorsulással mozgatni?

Megoldás:

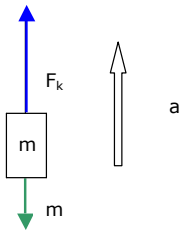
Ha nyugalomban van a test akkor a rá ható erők eredője 0.



Ekkor a dinamika alapegyenlete:

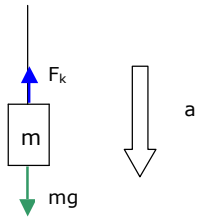
$$F_e = mg - k = 0 \qquad \text{azaz} \qquad k = mg = 29.43 \ N$$

Ha a test felfelé gyorsul *a* gyorsulással:



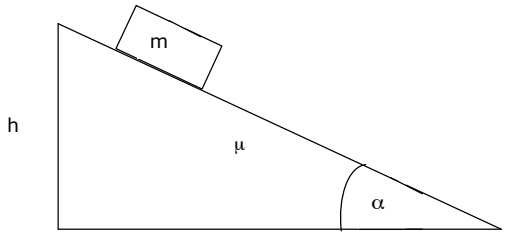
$$F_e = k_1 - mg = ma \ \Rightarrow \ k_1 = m(g+a) = 35.43 \ N$$

Ha a test lefelé gyorsul *a* gyorsulással, akkor az eredő erő lefelé mutat:



$$F_e = mg - k_2 = ma \ \Rightarrow \ k_2 = m(g-a) = 23.43 \ N$$

2. Az ábrán látható 5 m magas 30° hajlásszögű lejtő tetejéről egy 2kg tömegű fa hasáb csúszik le. A hasáb és a lejtő közötti súrlódási együttható μ=0.25. Mekkora a hasáb gyorsulása? Mekkora lesz a hasáb sebessége lejtő alján?



Megoldás:

Először a testre ható erőket kell összegezni majd az eredő erő segítségével kiszámítani a gyorsulást.
Az ábrán berajzoljuk a testre ható nehézségi erőt (mg), majd felbontjuk lejtő irányú és lejtőre merőleges összetevőkre (zöld nyilak). A lejtővel párhuzamos összetevő az ábra alapján:

$$F_p = mg\sin\alpha,$$

A lejtőre merőleges komponens:

$$F_m = mg\cos\alpha$$

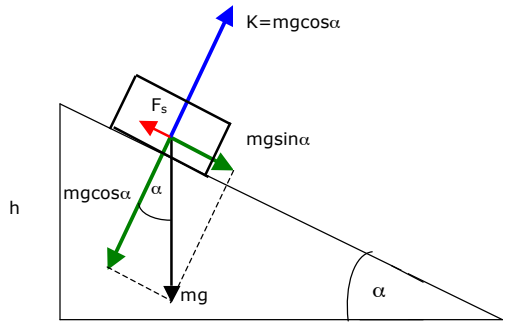
A lejtőre merőleges összetevőt kompenzálja a lejtő által kifejtett kényszererő (kék nyíl):

$$k = mg\cos\alpha,$$

így a lejtőre merőleges irányú erők eredője nulla. (a leírt és az ábrán feltüntetett képletek az erők nagyságát adják meg, az irányok egyértelműen leolvashatók az ábráról)

A lejtővel párhuzamosan, de a mozgással ellenkező irányban hat a súrlódási erő amit a kényszererő és a súrlódási tényező ismeretében tudunk meghatározni:

$$F_s = \mu \cdot mg\cos\alpha$$



Ezek után felírhatjuk a dinamika alapegyenletét:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$$

Innen a hasáb gyorsulása:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 2.781\ \frac{m}{\sec^2}$$

A sebességhez először ki kell számítanunk a lejtő hosszát:

$$\frac{h}{s} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad s = \frac{h}{\sin\alpha}$$

A test tehát egyenletesen gyorsulva s utat tesz meg az ehhez szükséges időt a négyzetes úttörvény segítségével kapjuk meg:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Ha a hasáb t ideig gyorsul a kiszámolt a gyorsulással, akkor az elért sebesség:

$$v = a \cdot t = a \cdot \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2s \cdot a}$$

Behelyettesítve a gyorsulás és a lejtő hosszának kifejezett alakját:

$$v = \sqrt{2s \cdot a} = \sqrt{\frac{2h}{\sin\alpha} g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = \sqrt{2gh(1 - \mu \cdot ctg\alpha)} = 7.458 \frac{m}{\sec}$$

3. Jégkorong mérkőzésen a 10m/s sebességgel elütött korong csúszik a jégen. A súrlódási együttható a jég, és a korong között 0,1.
a)Mennyi idő múlva csökken a sebessége az eredeti érték felére?
b)Mekkora utat tesz meg a korong a teljes megállásig?

Megoldás:

A korong egyenes vonalú egyenletesen lassuló mozgást végez. Lassulását a dinamika alapegyenletének felhasználásával tudjuk kiszámítani.
A meglökött testre csak a súrlódási erő hat, így ez okozza a lassulását:

$$\mu \cdot mg = m \cdot a$$

Innen: $a = \mu \cdot g$

A sebesség időfüggése lassuló mozgás esetén:

$$v = v_0 - a \cdot t$$

innen $\frac{v_0}{2} = v_0 - \mu \cdot g \cdot t$

A sebesség felére csökkenéséhez szükséges idő:

Megoldás:

A korong egyenes vonalú egyenletesen lassuló mozgást végez. Lassulását a dinamika alapegyenletének felhasználásával tudjuk kiszámítani.
A meglökött testre csak a súrlódási erő hat, így ez okozza a lassulását:

$$\mu \cdot mg = m \cdot a$$

Innen: $a = \mu \cdot g$

A sebesség időfüggése lassuló mozgás esetén:

$$v = v_0 - a \cdot t$$

innen $\frac{v_0}{2} = v_0 - \mu \cdot g \cdot t$

A sebesség felére csökkenéséhez szükséges idő:

$$t = \frac{v_0}{2\mu \cdot g} = 5.1 \ \text{sec}$$

A korong addig csúszik, amíg a sebessége nullává nem válik a lassulás következtében:

$$0 = v_0 - a \cdot t_1$$

Innen a teljes megálláshoz szükséges idő:

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\mu \cdot g}$$

A teljes megállási megtette utat a négyzetes úttörvény felhasználásával kapjuk meg:

$$s = v_0 \cdot t_1 - \frac{\mu \cdot g}{2} \cdot t^2 = \frac{v_0^2}{\mu \cdot g} - \frac{\mu \cdot g}{2} \cdot \frac{v_0^2}{\mu^2 \cdot g^2} = \frac{v_0^2}{2\mu \cdot g} = 50.97 \ m$$

4. A mozdony a 500 tonna tömegű szerelvényt sík úton, állandó sebességgel vontatja. A mozdonyt a szerelvénnyel összekötő rugó megnyúlása ekkor 2cm. A szerelvény gyorsítása közben a rugó megnyúlása 5 cm. (A rugó megnyúlása arányos a feszítőerővel, és a rugón 10000 N erő hoz létre 1 cm megnyúlást.)
Mennyivel növekszik a szerelvény sebessége t=2 perc ideig tartó gyorsítás folytán?

Megoldás:

Ha a rugó megnyúlása egyenletes mozgás során 2 cm, akkor a mozgást akadályozó erők eredője (súrlódás, gördülési ellenállás, légellenállás) ennek megfelelően:

$$F_{ell} = D \cdot x_1 = 20000 \ \ N,$$

ahol $D = 10000 \frac{N}{cm}$ a direkciós erő, x_1= 2 cm a rugó megnyúlása egyenletes mozgás esetén.
Az, hogy gyorsítás közben a rugó megnyúlása x_2=5 cm, azt jelenti, hogy tisztán a gyorsításra fordított erő:

$$F_{gy} = D \cdot x_2 - D \cdot x_1 = 30000 \ \ N,$$

A dinamika alapegyenletének felhasználásával megkapjuk a vonat gyorsulását:

Megoldás:

Ha a rugó megnyúlása egyenletes mozgás során 2 cm, akkor a mozgást akadályozó erők eredője (súrlódás, gördülési ellenállás, légellenállás) ennek megfelelően:

$$F_{ell} = D \cdot x_1 = 20000 \ \ N,$$

ahol $D = 10000 \frac{N}{cm}$ a direkciós erő, x_1= 2 cm a rugó megnyúlása egyenletes mozgás esetén.
Az, hogy gyorsítás közben a rugó megnyúlása x_2=5 cm, azt jelenti, hogy tisztán a gyorsításra fordított erő:

$$F_{gy} = D \cdot x_2 - D \cdot x_1 = 30000 \ \ N,$$

A dinamika alapegyenletének felhasználásával megkapjuk a vonat gyorsulását:

$$a = \frac{F_{gy}}{m} = 0.06 \ \ \frac{m}{\sec^2}$$

Két percig tartó gyorsítás alatt a szerelvény sebességének növekedése:

$$\Delta v = a \cdot t = 0.06 \frac{m}{\sec} \cdot 120 \ \ \sec = 7.2 \ \ \frac{m}{\sec}$$

5. Egy teherautó 72km/h egyenletes sebességgel halad egyenes úton. A teherautó platóján egy láda van elhelyezve rögzítés nélkül. A láda és a kocsi platója közötti tapadási súrlódási együttható μ_0=0,4. Mekkora a legrövidebb fékút, amelyen belül a teherautó meg tud állni a rakomány megcsúszása nélkül?

Megoldás:

A láda akkor nem csúszik meg a teherautó platóján, ha a tapadási súrlódási erő képes fedezni a lassuláshoz szükséges erőt, azaz a láda a teherautóval együtt képes lassulni. A tapadási súrlódási erő maximális értéke:

$$F_{s\max} = \mu_0 .k = \mu_0 \cdot mg$$

Innen a teherautó maximális lassulása: $a = \mu_0 \cdot g = 3.924 \ \frac{m}{\sec^2}$

A legrövidebb fékutat a négyzetes úttörvényből kapjuk meg a teljes megálláshoz szükséges idő ismeretében.
A teljes megálláshoz szükséges idő:

$$0 = v_0 - a \cdot t, \quad t = \frac{v_0}{a} = 5.1\sec$$, ahol v_0=20 m/sec

A megállásig megtett út:

$$s_f = v_0 t - \frac{a}{2} t^2 = 51 \ m$$

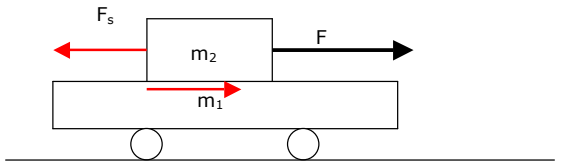
6. Egy 3 kg tömegű kiskocsira egy 1.2 kg tömegű fahasábot helyezünk el, és a hasábot 5 N erővel húzzuk vízszintes talajon. A hasáb és a kocsi közötti csúszási súrlódási együttható 0.25. Feltételezve, hogy a kocsi ellenállás nélkül gördül, a hasáb pedig csúszik a kocsi felületén, mekkora lesz a hasáb és mekkora a kocsi gyorsulása? Mennyi idő alatt csúszik le a hasáb a kocsi 0.8 m hosszú felületéről?

Megoldás

A gyorsulások kiszámításához fel kell írnunk a dinamika alapegyenletét mindkét testre.

Megoldás

A gyorsulások kiszámításához fel kell írnunk a dinamika alapegyenletét mindkét testre.



A hasábra hat a megadott F erő és a hasáb és a kocsi között fellépő súrlódási erő:

$$F - F_s = m_2 \cdot a_2$$

Innen a hasáb gyorsulása:

$$a_2 = \frac{F - F_s}{m_2} = \frac{F - \mu \cdot m_2 g}{m_2} = 1.714 \ \frac{m}{\sec^2}$$

A kocsit csak a súrlódási erő gyorsítja:

$$F_s = m_1 \cdot a_1, \text{ innen } a_1 = \frac{F_s}{m_1} = \frac{\mu \cdot m_2 g}{m_1} = 0.981 \ \frac{m}{\sec^2}$$

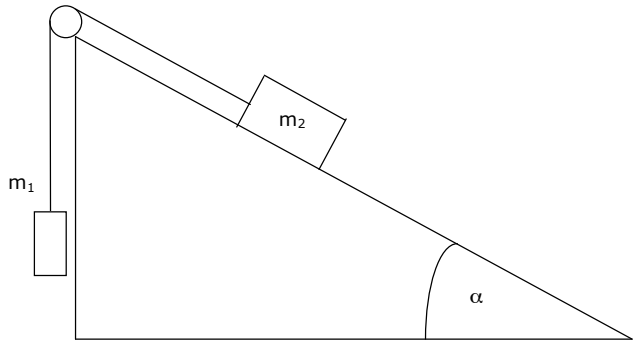
A hasáb abban a pillanatban csúszik le a kocsiról, amikor a kocsi és a hasáb megtett útja közötti különbség eléri a kocsi hosszát.

$$l = s_2 - s_1 = \frac{a_2}{2} \cdot t^2 - \frac{a_1}{2} \cdot t^2 = \frac{a_2 - a_1}{2} \cdot t^2$$

Innen:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{a_2 - a_1}} = 1.477 \ \sec$$

7. Tekintsünk egy 30°-os hajlásszögű, derékszögű háromszög alakú lejtőt. Egy csigán átvetett fonál segítségével két test mozog a lejtőn: m_1 a függőleges fal mellett súrlódás nélkül, míg m_2 a lejtős felületen (μ=0,2). Mekkora és milyen irányú lesz az eredő gyorsulásuk? (m_1=1kg, m_2=5kg)



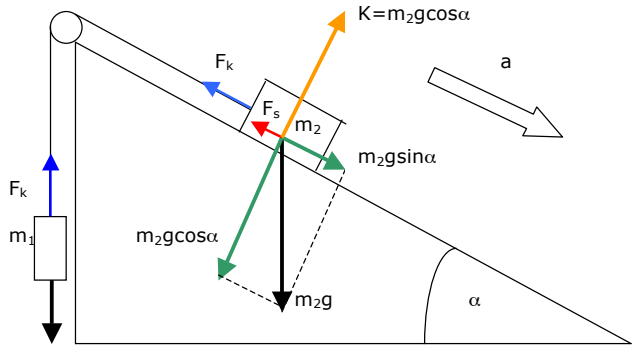
Megoldás:

A gyorsulás kiszámításához a dinamika alapegyenletét kell megoldanunk, így a testekre ható erőket kell először meghatároznunk.
Feltehető, hogy az m_2 tömegű test fog a lejtő irányában gyorsulni. A 3.1 feladat alapján az m_2 tömegű testre ható gravitációs erő lejtő irányú és lejtőre merőleges komponensei:

$$m_2 g \cdot \sin\alpha \text{ , illetve } m_2 g \cdot \cos\alpha \quad \text{(zöld nyilak)}$$

Az m_2 tömegű testre hat még a súrlódási erő (piros nyíl) és a fonál által kifejtett húzóerő (kék nyíl). A gravitációs erő lejtőre merőleges komponensét kompenzálja a lejtő által kifejtett kényszererő (sárga nyíl). (A leírt és az ábrán feltüntetett képletek az erők nagyságát adják meg, az irányok egyértelműen leolvashatók az ábráról).

Az m_2 tömegű testre két erő hat: a nehézségi erő, és a fonál által kifejtett húzó erő. Mivel a csigának elhanyagolható a tömege, az m_1 és az m_2 tömegű testekre ható kötélerők azonos nagyságúak, de ellenkező irányúak.



A két test gyorsulása megegyezik, mivel a testeket összekötő fonál nyújthatatlannak tekinthető.
A feltételezett gyorsulással megegyező irányú erőket pozitív, az ezzel ellentétes irányú erőket negatív előjellel véve felírjuk a mindkét testre a dinamika alapegyenletét:

$$m_2 g \cdot \sin\alpha - F_k - F_s = m_2 a$$
$$F_k - m_1 g = m_1 a$$

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása adja a közös gyorsulást. Összeadva a két egyenletet, a belső erők (F_k) kiesnek.

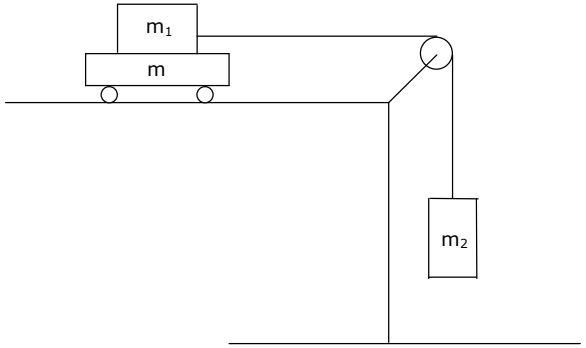
$$m_2 g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m_2 g \cdot \cos\alpha - m_1 g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

ahol $F_s = \mu \cdot m_2 g \cdot \cos\alpha$ az m_2 testre ható súrlódási erő.

Innen a közös gyorsulás:

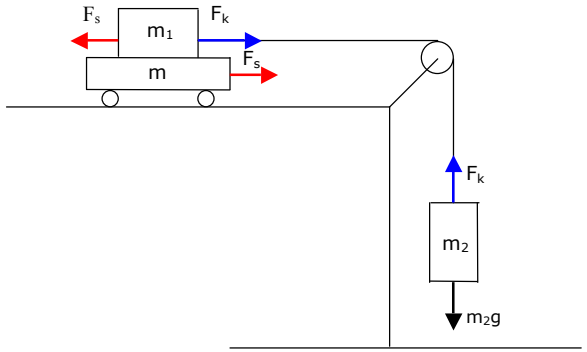
$$a = \frac{m_2 g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m_2 g \cdot \cos\alpha - m_1 g}{m_1 + m_2} = 1.037 \frac{m}{\sec^2}$$

8. Az ábrán látható m tömegű kiskocsira helyezett m_1 tömegű test nyújthatatlan fonállal össze van kötve egy m_2 tömegű testtel, ami az ábra szerint egy csigán átvetett fonálon lóg. Az m_2 tömegű test és a kocsi közötti súrlódási tényező



Megoldás:

A testek gyorsulásainak kiszámításához a dinamika alapegyenletét kell felírnunk mindhárom testre.



Az m_1 tömegű testet a kötél húzóereje gyorsítja, a súrlódási erő lassítja:

$$F_k - F_s = m_1 a_1$$

(Mivel a kötél nyújthatatlan és elhanyagolható tömegű, az m_2 és az m_1 tömegű testekre ható kötélerők egyenlő nagyságúak, de ellentétes irányúak)

A kocsit a testre ható súrlódási erő párja (hatás-ellenhatás!) gyorsítja:

$$F_s = ma\,,$$

ahol

$$F_s = \mu \cdot m_1 g$$

Innen a kocsi gyorsulása:

$$a = \frac{\mu \cdot m_1 g}{m} = 0.654 \ \frac{m}{\sec^2}$$

Az m_1 és m_2 testekből álló pontrendszer gyorsulását megkapjuk, ha összeadjuk a felírt egyenleteket:

$$m_2 g - \mu \cdot m_1 g = (m_1 + m_2) a_1$$

A fonál nyújthatatlansága miatt $a_1 = a_2$, így:

$$a_1 = \frac{m_2 - \mu \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot g = 5.886 \frac{m}{\sec^2}$$

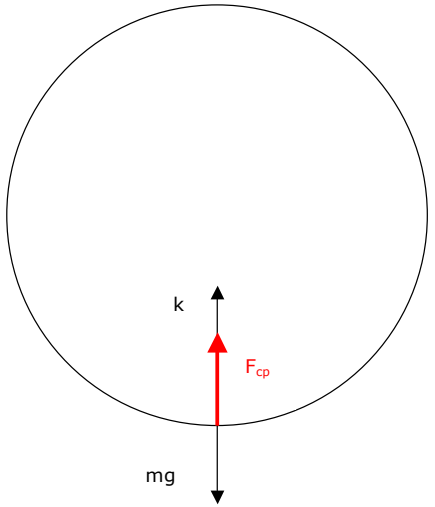
2. fejezethez

5. Körmozgás

Ajánlott feladatok

5.1. Egy repülőgép 1200 m sugarú függőleges körpályán halad 540 km/h sebességgel úgy, hogy mindig a pilótafülke teteje néz a kör középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a 75 kg tömegű pilótát az ülés
a. a körpálya legalsó pontjában
b. a körpálya legfelső pontjában?

Megoldás:



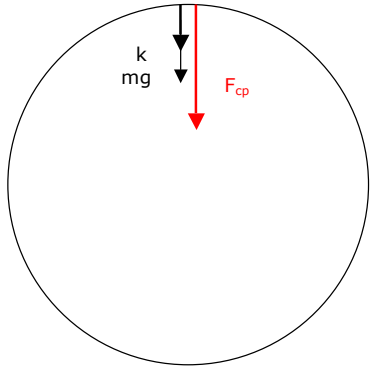
a. A körpálya legalsó pontjában két erő hat a pilótára: a nehézségi erő, és az ülés által kifejtett kényszererő (nyomóerő). Mivel a pilóta a repülőgépével együtt egyenletes körmozgást végez, az erők eredője a centripetális erő lesz:

$$F_{cp} = m\frac{v^2}{r}$$

Mivel az eredő erő a kör középpontjába kell hogy mutasson, az ülés által kifejtett kényszererő lesz nagyobb, mint a nehézségi erő, így:

$$m\frac{v^2}{r} = k - mg$$

b. A körpálya legfelső pontjában is a nehézségi erő és a nyomóerő hatnak a pilótára, de itt a két erő egy irányba mutat.



A centripetális erő az erők eredője, tehát:

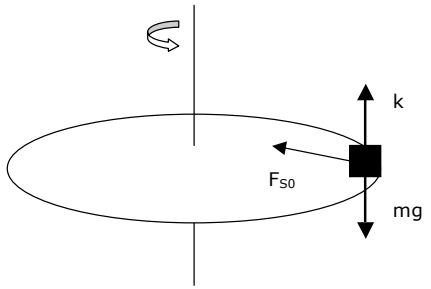
$$m\frac{v^2}{r} = mg + k$$

Az ülés által kifejtett kényszererő:

$$k = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) = 670.5N$$

5.2. Kezdeti szögsebesség nélkül forgásnak induló 0,25m sugarú korong függőleges tengely körül forog, és állandó szöggyorsulással 10 másodperc alatt 30 1/sec szögsebességet ér el. A korong szélén egy kisméretű test van elhelyezve. A forgás megkezdése után mennyi idő múlva csúszik le a test a korongról, ha a tapadási súrlódási együttható μ_o=0,4?

Megoldás:



A test addig marad a vízszintes korongon, (addig gyorsul együtt a koronggal) amíg a dinamika alapegyenletének megfelelően a gyorsulását képes biztosítani az eredő erő.

A testre három erő hat: a nehézségi erő, a korong által kifejtett felületi kényszererő (nyomóerő), és a tapadási súrlódási erő. Az első két erő egyenlő nagyságú, és ellenkező irányú, így az eredőjük zérus.
A tapadási súrlódási erő egy változó nagyságú és irányú erő, mindig akkora és olyan irányú, hogy a test megcsúszását megakadályozza, egészen addig, amíg el nem éri a maximális értékét. A tapadási súrlódási erő maximális értéke:

$$F_{S0\max} = \mu_0 \cdot k = \mu_0 \cdot mg$$

A dinamika alapegyenletét felírva:

A test addig marad a vízszintes korongon, (addig gyorsul együtt a koronggal) amíg a dinamika alapegyenletének megfelelően a gyorsulását képes biztosítani az eredő erő.

A testre három erő hat: a nehézségi erő, a korong által kifejtett felületi kényszererő (nyomóerő), és a tapadási súrlódási erő. Az első két erő egyenlő nagyságú, és ellenkező irányú, így az eredőjük zérus.
A tapadási súrlódási erő egy változó nagyságú és irányú erő, mindig akkora és olyan irányú, hogy a test megcsúszását megakadályozza, egészen addig, amíg el nem éri a maximális értékét. A tapadási súrlódási erő maximális értéke:

$$F_{S0\max} = \mu_0 \cdot k = \mu_0 \cdot mg$$

A dinamika alapegyenletét felírva:

$$F_e = F_{S0\max} = m \cdot a_{\max}$$

Innen a maximális gyorsulás, aminél a test még a korongon marad:

$$a_{\max} = \mu_0 g$$

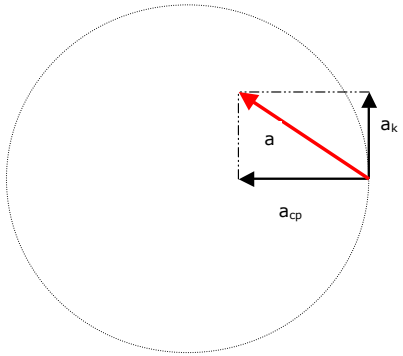
Mivel a gyorsulás folyamatosan növekszik, egy adott pillanatban eléri a $\mu_0 g$ értéket, ekkor fog a test leesni a korongról.

A test gyorsulása két komponensből áll: a kerületi gyorsulásból és a centripetális gyorsulásból. A kerületi gyorsulás állandó:

$$a_k = r \cdot \beta, \qquad \text{ahol} \qquad \beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{30}{10} = 3\frac{1}{\sec}$$

Így:

$$a_k = 0.25 \cdot 3 = 0.75\frac{m}{\sec^2}$$



A centripetális gyorsulás folyamatosan nő a szögsebesség négyzetével:

$$a_{cp} = r \cdot \omega^2$$

Az eredő gyorsulás a két egymással derékszöget bezáró gyorsulásvektor eredője:

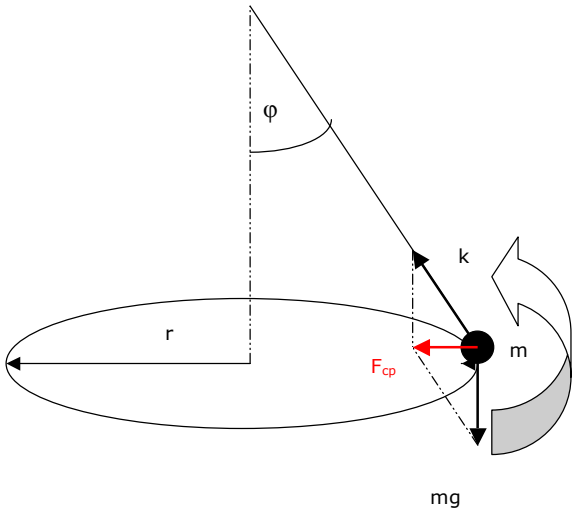
$$a = \sqrt{a_k^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{a_k^2 + r^2 \cdot \varpi^4}$$

Innen $$\omega = \sqrt[4]{\frac{\mu_0^2 g^2 - a_k^2}{r^2}} = 3.925 \frac{1}{\sec}$$

Mivel: $$\omega = \beta \cdot t$$

a test megcsúszása $t = \frac{\omega}{\beta} = 1.308 \sec$ elteltével következik be.

5.3. Egy *l* hosszúságú fonálra függesztett *m* tömegű acélgolyót oldalirányban kitérítve úgy lökünk meg, hogy körpályán mozogjon. (köringa). Mekkora a keringési idő és mekkora a fonalat feszítő erő? (a körpálya sugara r=0.5 m, a golyó tömege m=300 g, a fonál hossza L=1.5 m).



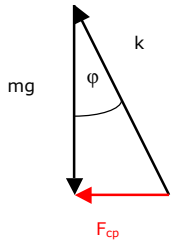
Megoldás:

Abból indulunk ki, hogy az acélgolyó egyenletes körmozgást végez, tehát az eredő erő a kör középpontjába mutató állandó nagyságú erő.
A fonál függőlegessel bezárt szöge:

$$\sin\varphi = \frac{r}{l} = 0.3333, \qquad \text{innen} \qquad \varphi = 19.47^\circ$$

Az acélgolyó, a felfüggesztési pont és a kör középpontja által meghatározott háromszög hasonló a három erő által alkotott háromszöghöz, így a kényszererő:

$$\frac{mg}{k} = \cos\varphi, \qquad k = \frac{mg}{\cos\varphi} = \frac{2.943}{0.9428} = 3.1216N$$



A centripetális erő Pitagorasz tétele alapján:

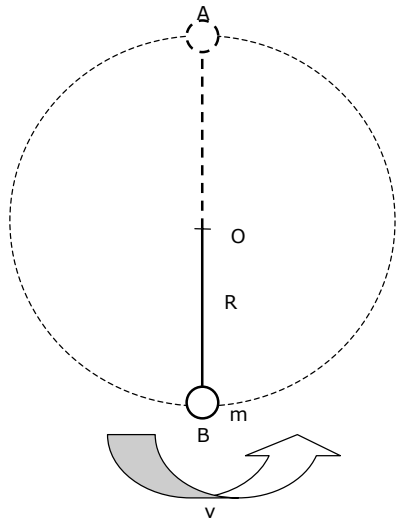
$$F_{cp} = \sqrt{k^2 - (mg)^2} = 1.04N$$

$$F_{cp} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_{cp}\cdot r}{m}} = 1.317\frac{m}{\sec}$$

A kerületi sebességből kifejezzük a keringési időt:

$$v = \frac{2r\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2r\pi}{v} = 2.385\frac{m}{\sec}$$

5.4. Egy m tömegű kisméretű test könnyű fonálra felfüggesztve egyenletes körmozgást végez 3.8 m/sec kerületi sebességgel. A fonál hossza 0.7 m, a test tömege 0.5 kg. Mekkora erő feszíti a fonalat a körpálya legalsó (B) és legfelső (A) pontjában?



Megoldás:

A körpálya legalsó (B) pontjában a testre hat a nehézségi erő és a fonálerő. A nehézségi erő lefelé, a fonálerő fölfelé mutat. A két erő eredője a centripetális erő a fonálerő irányába mutat:

$$F_{cp} = F_B - mg \;\Rightarrow\; F_B = mg + F_{cp} = M(g + \frac{v^2}{r}) = 15.22\ N$$

A körpálya legfelső pontjában szintén a fonálerő és a nehézségi erő hat,de itt a két erő azonos irányba, a kör középpontja felé mutat. Az eredő erő a centripetális erő:

$$F_{cp} = mg + F_A \;\Rightarrow\; F_A = F_{cp} - mg = m(\frac{v^2}{r} - g) = 5.41\ N$$

5.5. Egy személyautó 54km/h sebességről 72 km/h sebességre gyorsít fel 5 sec alatt.
Ha a kerekek sugara 25 cm, számítsuk ki:

a. Mekkora a kerekek szöggyorsulása?
b. Mekkora a kerekek szögelfordulása a gyorsítás ideje alatt?
c. Mekkora utat tesz meg az autó a gyorsítás alatt?
d. Hányat fordulnak a kerekek a gyorsítás alatt?

Megoldás:

A sebességek: $v_1 = 54\frac{km}{h} = 15\frac{m}{\sec}, \qquad v_2 = 72\frac{km}{h} = 20\frac{m}{\sec}$

A szögsebességek: $\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{15}{0.25} = 60\frac{rad}{\sec} \qquad \omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{20}{0.25} = 80\frac{rad}{\sec}$

A szöggyorsulás: $\beta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{20}{5} = 4\frac{rad}{\sec^2}$

A szögelfordulás: $\varphi = \omega_1 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2 = 350 rad$

Mivel a kerekek csúszás nélkül gördülnek, a megtett út a befutott ívhosszal egyenlő:

$$s = r \cdot \varphi = 87.5 m$$

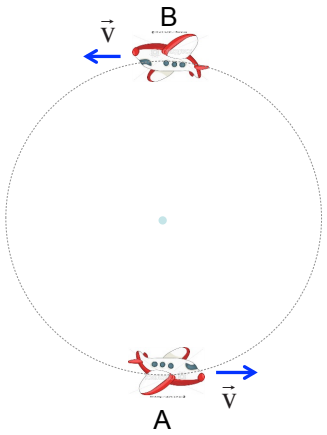
A fordulatok száma: $N = \frac{\varphi}{2\pi} = 55.7$

1.Egy repülőgép 1,2 km sugarú függőleges körpályán halad 540 km/h sebességgel úgy, hogy mindig a pilótafülke teteje néz a kör középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a 75 kg tömegű pilótát az ülés
a. a körpálya legalsó pontjában,
b. a körpálya legfelső pontjában?

adatok:
r=1,2 km
v=540 km/h
m=75 kg

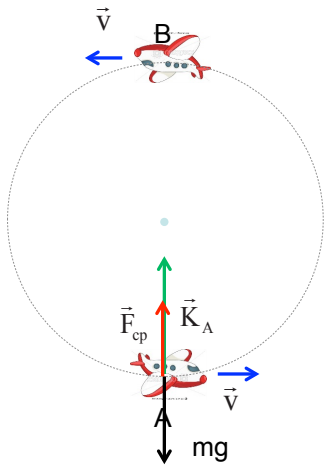
$\vec{K}_A = ?$

$\vec{K}_B = ?$



r=1200 m
v=150 m/sec

Megoldás:



Egyenletes körmozgás: a testre ható erők eredője a középpont felé mutató állandó nagyságú erő:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{cp}$$

Milyen erők hatnak a pilótára az A pontban?

a centripetális erő: $F_{cp} = m\frac{v^2}{r}$

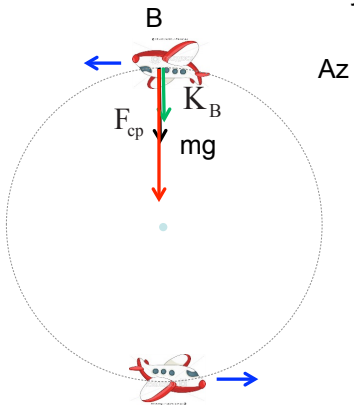
Mivel az eredő erő a kör középpontjába kell hogy mutasson, az ülés által kifejtett kényszererő lesz nagyobb, mint a nehézségi erő, így:

$$m\frac{v^2}{r} = K_A - mg$$

Innen a nyomóerő (kényszererő):

$$K_A = m(\frac{v^2}{r} + g) = 2142N$$

Tekintsük most a körpálya legfelső pontját:



Milyen erők hatnak a pilótára a B pontban?

Az eredő erő itt is a centripetális erő:

A nehézségi erő és a nyomóerő hatnak a pilótára, de itt a két erő egy irányba mutat:

$$m\frac{v^2}{r} = mg + K_B$$

Az ülés által kifejtett kényszererő:

$$K_B = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) = 670.5\text{N}$$

2. Egy személyautó 54km/h sebességről 72 km/h sebességre gyorsít fel 5 sec alatt. Ha a kerekek sugara 25 cm, számítsuk ki:

a. Mekkora a kerekek szöggyorsulása?
b. Mekkora a kerekek szögelfordulása a gyorsítás ideje alatt?
c. Mekkora utat tesz meg az autó a gyorsítás alatt?
d. Hányat fordulnak a kerekek a gyorsítás alatt?

Megoldás:

A sebességek: $v_1 = 54\frac{km}{h} = 15\frac{m}{sec}, \qquad v_2 = 72\frac{km}{h} = 20\frac{m}{sec}$

A szögsebességek: $\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{15}{0.25} = 60\frac{rad}{sec} \qquad \omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{20}{0.25} = 80\frac{rad}{sec}$

A szöggyorsulás: $\beta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{20}{5} = 4\frac{rad}{sec^2}$

A szögelfordulás: $\varphi = \omega_1 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2 = 350 \text{ rad}$

Mivel a kerekek csúszás nélkül gördülnek,
a megtett út a befutott ívhosszal egyenlő:

$$s = r \cdot \varphi = 87{,}5\text{m}$$

A fordulatok száma:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = 55{,}7$$

3. fejezethez

Lendület, munka, energia

Ajánlott feladatok

1. Tekintsünk egy 9 g tömegű lövedéket, amely állandó, v=400 m/s sebességgel csapódik egy d=10cm vastagságú deszkába. A lövedék 6 cm mélyen hatol be a fába, majd megáll. A fa fékező erejét tekintsük állandónak.
a)Mekkora lenne ugyanezen lövedék sebessége egy ugyanilyen anyagú, 4 cm vastagságú deszkán áthaladva?
b)Mekkora munkát végzett a fa ellenálló ereje?

Megoldás:

A feladat megoldásához a munkatételt használjuk.

Az első esetben a fa fékező ereje által végzett munka egyenlő a lövedék mozgási energiájával, mivel a fába hatolva megáll.

$\frac{1}{2}mv^2 = F \cdot d$, ahol d=6 cm , a lövedék fában megtett útja.

Innen a fa által kifejtett ellenálló erő:

$$F = \frac{mv^2}{2d}$$

A második esetben a fa ugyanekkora ellenálló erőt fejt ki, de csak d_1=4 cm úton.

Alkalmazva a munkatételt:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F \cdot d_1 = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{d_1}{d}$$

Innen:

$$mv^2\left(1 - \frac{d_1}{d}\right) = mv_1^2$$

$$v_1 = v \cdot \sqrt{1 - \frac{d_1}{d}} = 230.9 m/\sec$$

A fa fékező ereje által végzett munka egyenlő a lövedék mozgási energiájának csökkenésével:

$$W_f = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_1^2\right) = 480J$$

2. Egy motoros csörlő segítségével húzzunk felfelé állandó v=2,5m/s sebességgel egy m=500kg tömegű ládát a 30°-os lejtőn. A láda és a lejtő között a súrlódási együttható legyen 0,3.
a)Számolja ki, hogy mekkora a csörlő motorjának teljesítménye?
b)Adja meg a csörlő által végzett munkát, ha h=4m magasba emeltük a ládát?

Megoldás:

a. Ha a sebesség állandó, akkor a teljesítmény: $P = F_e \cdot v$, ahol

$$F_e = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 3726.86N$$

a csörlő által kifejtett erő.
Innen a csörlő teljesítménye:

$$P = F_e \cdot v = 9317.14W$$

b. Ha 4 m magasba emeltük a ládát, akkor a teljes út hossza:

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = 8m$$

8 m utat 2.5 m/sec sebességgel $t = \frac{s}{v} = 3.2\sec$ alatt lehet megtenni.

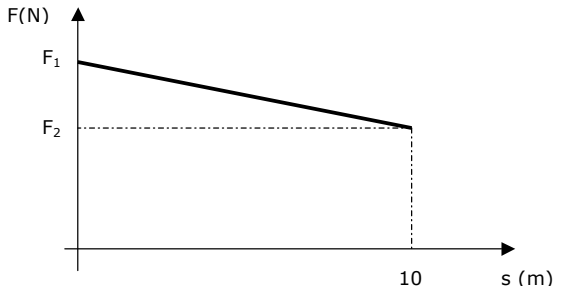
Innen a csörlő motorja által végzett összes munka:

$$W = P \cdot t = 29815J$$

3. Egy kútból láncon vizet húzunk fel. Az üres vödör tömege 5kg, térfogata 10 liter. A lánc méterenként 1kg. Mennyi munkát végzünk, amíg felhúzzuk a vízzel teli vödröt állandó sebességgel a 10 m mély kútból?($\rho_{víz}$=1000kg/m^3)

Megoldás:

A munkavégzés a vízzel teli vödör felemeléséből, és a lánc felhúzásából áll. Mivel a lánc emelésére fordított erő a megtett úttal arányosan csökken, itt változó erő munkáját kell kiszámolnunk. Ezt az erő-elmozdulás grafikon alatti terület kiszámításával tehetjük meg:



A grafikonon jelzett F_1 erő a munkavégzés kezdetekor kifejtett legnagyobb erő:

$$F_1 = m_v g + \rho_v V g + m_l g = 245.25N$$

ahol m_l a lánc teljes tömege, V=10 l a vödör térfogata, m_v=5 kg, az üres vödör tömege.

A legkisebb erőt akkor kell kifejteni, amikor már felhúztuk a vödröt, és a lánc teljes egészében fönt van a felszínen. Ekkor a kifejtett erő:

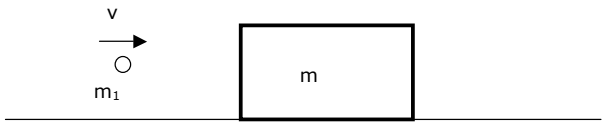
$$F_2 = m_v g + \rho_v V g = 147.15N$$

A vödör felhúzása közben a kifejtette erő a megtette úttal arányosan csökken, mert egyre kevesebb láncot kell emelnünk. Így a végzett munka a grafikon alatti trapéz területének felel meg:

$W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot s = 1962J$, ahol s=10 m, a megtett út.

4. Az alábbi kísérlettel egy pisztolyból kilőtt lövedék sebességét szeretnénk meghatározni:
Vízszintes síkon egy 3kg tömegű fahasáb fekszik. A hasábba vízszintes irányban belelőjük a 25 g tömegű lövedéket, ami a fában lefékeződik és elakad. A hasáb ennek következtében 1.8 m-t csúszik előre a vízszintes padlón. A padló és a fahasáb közötti csúszási súrlódási együttható értéke μ=0.2.

a. Mekkora volta a lövedék sebessége?
b. Mekkora energia fordítódott a lövedék lefékezésére a fahasábban?



Megoldás:

Először azt számítjuk ki, hogy a becsapódott lövedék és a hasáb mekkora közös sebességgel kezdett el csúszni a talajon. A csúszás során a hasáb és a lövedék közös mozgási energiája a megállásig teljes egészében súrlódási munkává alakul:

$$\frac{1}{2}(m+m_1)v^2 = \mu(m+m_1)gs$$, ahol m_1 a lövedék tömege

Innen:

$$v = \sqrt{2\mu gs} = 2.658\frac{m}{\sec}$$

A becsapódás egy rugalmatlan ütközés, így a lendület megmaradás törvényét írjuk fel rá:

$$m_1 v_1 = (m+m_1)v$$

a lövedék sebessége: $v_1 = \frac{m+m_1}{m_1}v = 321.62\frac{m}{\sec}$

A lövedék fékezésére fordított energia a lövedék kezdeti mozgási energiájának, és a becsapódás utáni közös mozgási energiának a különbsége:

$$W_s = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m+m_1)v^2 = 1282.3J$$

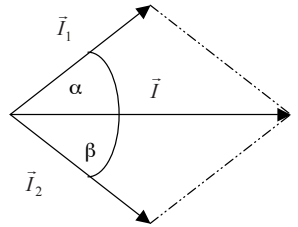
Lendület

Ajánlott feladatok

1. Egy 40 kg tömegű 280 m/sec sebességű rakéta repülés közben két részre robban szét. A 15 kg-os darab az eredeti mozgásiránnyal 35^O- os szöget bezáró irányban 300 m/sec sebességgel repül tovább. Mekkora és milyen irányú sebességet kap a másik darab?
(m_1=15 kg, v_1=300 m/sec, $\alpha=35^O$, v_2=? β=?)

Megoldás:

A robbanás előtti és utáni állapotokra érvényes a lendület megmaradás törvénye, mivel a robbanás által kifejtett reakcióerők belső erők.



A lendületek: $\vec{I} = m\vec{v} = 11200\frac{kgm}{\sec}$,

$$\vec{I}_1 = m_1\vec{v}_1 = 4500\frac{kgm}{\sec}$$

$$\vec{I}_2 = m_2 v_2$$

A lendület megmaradás törvénye:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$$

I_2 nagyságát az ábra alapján a koszinusz tétel segítségével számolhatjuk ki:

$$I_2 = \sqrt{I^2 + I_1^2 - 2I_1 I\cos\alpha} = 7945\frac{kgm}{\sec}$$

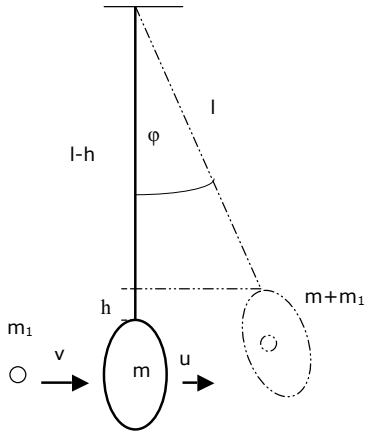
Innen a v_2 sebesség:

$$v_2 = \frac{I}{m_2} = \frac{7945}{25} = 317.8\frac{m}{\sec}$$

A β szöget a szinusz tétel alkalmazásával kapjuk meg:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{7945}{4500} = 1.7655$$ innen $\beta=18.96^O$

2. Egy m=15 kg tömegű homokzsák l=1m hosszú fonálra van felfüggesztve. A homokzsákba vízszintes irányban belelövünk egy m_1=20 g tömegű lövedéket, amely elakad a zsákban. A homokzsák kilendül úgy, hogy szélső helyzetben a felfüggesztő fonál 10^O-os szöget zár be a függőleges iránnyal. Mekkora volt a lövedék sebessége?



Megoldás:

A lövedék becsapódása a homokzsákba egy rugalmatlan ütközés, amelyre érvényes a lendület megmaradás törvénye:

$$m_1 \cdot \vec{v} = (m_1 + m) \cdot \vec{u},$$

ahol $\vec{u}$ az ütközés utáni közös sebesség.

Az ütközés után a zsáknak és a lövedéknek közös mozgási energiája lesz:

$$E_m = \frac{1}{2}(m + m_1) \cdot u^2$$

Ez a mozgási energia a zsák kilendülése folyamán átalakul helyzeti energiává.

$$\frac{1}{2}(m + m_1) \cdot u^2 = (m + m_1)gh$$

Ahol $h = l \cdot (1 - \cos\varphi)$, a zsák emelkedése.

Innen: $\frac{1}{2}u^2 = gl(1 - \cos\varphi) \Rightarrow u = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)}$

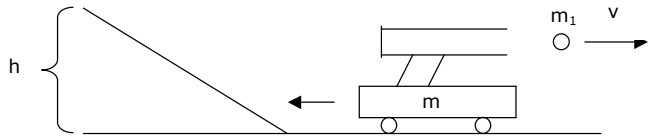
Az *u* kifejezését behelyettesítve az első egyenletbe:

$$m_1 \cdot v = (m_1 + m) \cdot \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)}$$

A lövedék sebessége:

$$v = \frac{m + m_1}{m_1} \cdot \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)} = 413.97 \frac{m}{\sec}_1$$

3. Az ábrán látható m tömegű kocsira rögzített ágyúból egy m_1 tömegű lövedéket lőnek ki vízszintes irányban, aminek következtében a kocsi a lejtőn 4 m magasra gurul fel súrlódás mentesen. Mekkora volt az ágyúlövedék sebessége, ha kezdetben a kocsi állt? (m=2000 kg, m_1=50 kg, h=4 m)



Megoldás:

A lövedékből és az ágyúval együtt a kocsiból álló rendszer impulzusa kezdetben nulla. Mivel a külső erők eredője nulla, az ágyúgolyó kilövése pedig belső erők hatására történik, a kilövés után is nulla lesz a rendszer összes lendülete:

$$\frac{1}{2}mu^2 = mgh$$

Ebből az egyenletből kifejezzük a kocsi sebességét:

$$u = \sqrt{2gh}$$

A kocsi sebessége ismeretében kiszámítjuk a lövedék sebességét, az impulzus megmaradás törvényét felhasználva.
A lendületek nagyságára felírva:

$$m_1 v = mu$$

Innen: $$v = \frac{m}{m_1}\sqrt{2gh} = \ 354.36\frac{m}{\sec}$$

4. Az alábbi kísérlettel egy pisztolyból kilőtt lövedék sebességét szeretnénk meghatározni: Vízszintes síkon egy 2.5 kg tömegű fahasáb fekszik. A hasábba vízszintes irányban belelőjük a 20 g tömegű lövedéket, ami a fában lefékeződik és elakad. A hasáb ennek következtében 1.3 m-t csúszik előre a vízszintes padlón. A padló és a fahasáb közötti csúszási súrlódási együttható értéke μ=0.2. Mekkora volta a lövedék sebessége?

Megoldás:

$m_{1=}$ 20 g=0.02 kg
m=2.5 kg
s=1.3 m

A lövedék fahasábba történő becsapódása rugalmatlan ütközés, azaz a lendület megmaradás törvénye érvényes:

$$m_1 v_1 = (m + m_1)u$$

Ahol v_1 a lövedék sebessége a becsapódás előtt, u a becsapódás utáni közös sebesség.

A becsapódás után a lövedék és a hasáb közös mozgási energiája átalakul súrlódási munkává:

$$\frac{1}{2}(m + m_1)u^2 = \mu \cdot (m + m_1)gs$$

Innen a becsapódás utáni közös sebesség:

$$u = \sqrt{2\mu g s}$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe, megkapjuk a lövedék v_1 sebességét:

$$v_1 = \frac{m + m_1}{m_1} \cdot \sqrt{2\mu g s} = 284.58 \ \frac{m}{\sec}$$

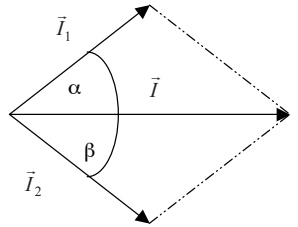
Lendület

Ajánlott feladatok

1. Egy 40 kg tömegű 280 m/sec sebességű rakéta repülés közben két részre robban szét. A 15 kg-os darab az eredeti mozgásiránnyal 35^O- os szöget bezáró irányban 300 m/sec sebességgel repül tovább. Mekkora és milyen irányú sebességet kap a másik darab?
(m_1=15 kg, v_1=300 m/sec, $\alpha=35^O$, v_2=? β=?)

Megoldás:

A robbanás előtti és utáni állapotokra érvényes a lendület megmaradás törvénye, mivel a robbanás által kifejtett reakcióerők belső erők.



A lendületek: $\vec{I} = m\vec{v} = 11200 \frac{kgm}{\sec}$,

$$\vec{I}_1 = m_1\vec{v}_1 = 4500 \frac{kgm}{\sec}$$

$$\vec{I}_2 = m_2 v_2$$

A lendület megmaradás törvénye:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$$

I_2 nagyságát az ábra alapján a koszinusz tétel segítségével számolhatjuk ki:

$$I_2 = \sqrt{I^2 + I_1^2 - 2I_1 I \cos\alpha} = 7945 \frac{kgm}{\sec}$$

Innen a v_2 sebesség:

$$v_2 = \frac{I}{m_2} = \frac{7945}{25} = 317.8 \frac{m}{\sec}$$

A β szöget a szinusz tétel alkalmazásával kapjuk meg:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{7945}{4500} = 1.7655$$ innen $\beta=18.96^O$

Munka, energia

Ajánlott feladatok

1. Tekintsünk egy 9 g tömegű lövedéket, amely állandó, v=400 m/s sebességgel csapódik egy d=10cm vastagságú deszkába. A lövedék 6 cm mélyen hatol be a fába, majd megáll. A fa fékező erejét tekintsük állandónak.
a)Mekkora lenne ugyanezen lövedék sebessége egy ugyanilyen anyagú, 4 cm vastagságú deszkán áthaladva?
b)Mekkora munkát végzett a fa ellenálló ereje?

Megoldás:

A feladat megoldásához a munkatételt használjuk.

Az első esetben a fa fékező ereje által végzett munka egyenlő a lövedék mozgási energiájával, mivel a fába hatolva megáll.

$\frac{1}{2}mv^2 = F \cdot d$, ahol d=6 cm , a lövedék fában megtett útja.

Innen a fa által kifejtett ellenálló erő:

$$F = \frac{mv^2}{2d}$$

A második esetben a fa ugyanekkora ellenálló erőt fejt ki, de csak d_1=4 cm úton.

Alkalmazva a munkatételt:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F \cdot d_1 = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{d_1}{d}$$

Innen:

$$mv^2\left(1 - \frac{d_1}{d}\right) = mv_1^2$$

$$v_1 = v \cdot \sqrt{1 - \frac{d_1}{d}} = 230.9 m/\sec$$

A fa fékező ereje által végzett munka egyenlő a lövedék mozgási energiájának csökkenésével:

$$W_f = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_1^2\right) = 480J$$

2. Egy motoros csörlő segítségével húzzunk felfelé állandó v=2,5m/s sebességgel egy m=500kg tömegű ládát a 30°-os lejtőn. A láda és a lejtő között a súrlódási együttható legyen 0,3.
a)Számolja ki, hogy mekkora a csörlő motorjának teljesítménye?
b)Adja meg a csörlő által végzett munkát, ha h=4m magasba emeltük a ládát?

Megoldás:

a. Ha a sebesség állandó, akkor a teljesítmény: $P = F_e \cdot v$, ahol

$$F_e = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 3726.86N$$

a csörlő által kifejtett erő.
Innen a csörlő teljesítménye:

$$P = F_e \cdot v = 9317.14W$$

b. Ha 4 m magasba emeltük a ládát, akkor a teljes út hossza:

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = 8m$$

8 m utat 2.5 m/sec sebességgel $t = \frac{s}{v} = 3.2\sec$ alatt lehet megtenni.

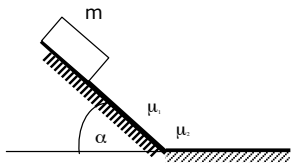
Innen a csörlő motorja által végzett összes munka:

$$W = P \cdot t = 29815J$$

3. Az ábrán látható 5m magas lejtőről egy m = 3 kg tömegű test kezdősebesség nélkül csúszik le.

$\alpha = 45^o$
$\mu_1=0.15$
$\mu_2=0.25$

a.) Mekkora a test sebessége a lejtő alján?
b.) Mekkora út megtétele után áll meg a test?
c.) Mekkora energia fordítódott a súrlódás leküzdésére ?



Megoldás:

a. Először kiszámítjuk, hogy mekkora sebességgel ér a lejtő aljára a test. A test helyzeti energiája mozgási energiává és súrlódási munkává alakul:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \mu_1 mg\cos\alpha \cdot s_1$$

Ahol $$s = \frac{h}{\sin\alpha} = 7.071m$$

Innen a sebesség:

$$v = \sqrt{2gh(1-\mu_1 ctg\alpha)} = 9.13\frac{m}{\sec}$$

b. A vízszintes felületen addig csúszik a test, amíg a mozgási energiáját fel nem emészti a súrlódási munka:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu_2 \cdot mg \cdot s_2$$

ahol s_2 a vízszintes szakaszon megtett út.
Innen:

$$s_2 = \frac{v^2}{2\mu_2 g} = 17m$$

c. A súrlódás leküzdésére fordított munka:

$$W_s = \mu_1 mg\cos\alpha \cdot s_1 + \mu_2 mgs_2 = 147.15J$$

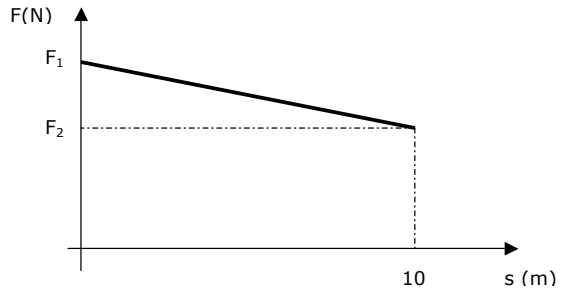
Ez a munka megegyezik a test kezdeti helyzeti energiájával, mivel az a mozgás leállásáig teljes egészében súrlódási munkává alakul:

$$W_s = mgh = 147.15J$$

4. Egy kútból láncon vizet húzunk fel. Az üres vödör tömege 5kg, térfogata 10 liter. A lánc méterenként 1kg. Mennyi munkát végzünk, amíg felhúzzuk a vízzel teli vödröt állandó sebességgel a 10 m mély kútból?($\rho_{víz}$=1000kg/m^3)

Megoldás:

A munkavégzés a vízzel teli vödör felemeléséből, és a lánc felhúzásából áll. Mivel a lánc emelésére fordított erő a megtett úttal arányosan csökken, itt változó erő munkáját kell kiszámolnunk. Ezt az erő-elmozdulás grafikon alatti terület kiszámításával tehetjük meg:



A grafikonon jelzett F_1 erő a munkavégzés kezdetekor kifejtett legnagyobb erő:

$$F_1 = m_v g + \rho_v V g + m_l g = 245.25N$$

ahol m_l a lánc teljes tömege, V=10 l a vödör térfogata, m_v=5 kg, az üres vödör tömege.

A legkisebb erőt akkor kell kifejteni, amikor már felhúztuk a vödröt, és a lánc teljes egészében fönt van a felszínen. Ekkor a kifejtett erő:

$$F_2 = m_v g + \rho_v V g = 147.15N$$

A vödör felhúzása közben a kifejtette erő a megtette úttal arányosan csökken, mert egyre kevesebb láncot kell emelnünk. Így a végzett munka a grafikon alatti trapéz területének felel meg:

$W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot s = 1962J$, ahol s=10 m, a megtett út.

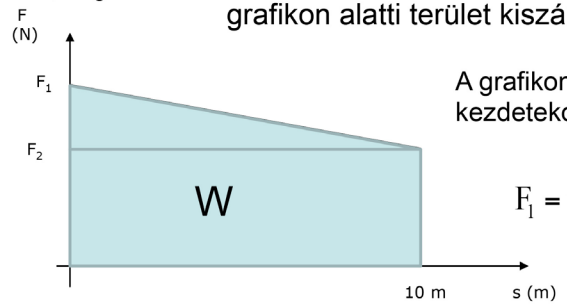
Mintafeladatok

1. Egy kútból láncon vizet húzunk fel. Az üres vödör tömege 2 kg, űrtartalma 8 liter. A lánc méterenként 0,4 kg. Mennyi munkát végzünk, amíg felhúzzuk a vízzel teli vödröt állandó sebességgel a 10 m mély kútból?($\rho_{víz}$=1000kg/m^3)

Megoldás:

m=2 kg
h=10 m
V=8 l
lánc: 0,4 kg/m

A munkavégzés a vízzel teli vödör felemeléséből, és a lánc felhúzásából áll. Mivel a lánc emelésére fordított erő a megtett úttal arányosan csökken, itt változó erő munkáját kell kiszámolnunk. Ezt az erő-elmozdulás grafikon alatti terület kiszámításával tehetjük meg:



A grafikonon jelzett F_1 erő a munkavégzés kezdetekor kifejtett legnagyobb erő:

$$F_1 = m_v g + \rho_{víz} V g + m_l g = 137{,}34 \text{ N}$$

A legkisebb erőt akkor kell kifejteni, amikor már felhúztuk a vödröt, és a lánc teljes egészében fönt van a felszínen. Ekkor a kifejtett erő:

$$F_2 = m_v g + \rho_{víz} V g = 98{,}1 \text{ N}$$

A vödör felhúzása közben a kifejtett erő a megtett úttal arányosan csökken, mert egyre kevesebb láncot kell emelnünk. Így a végzett munka a grafikon alatti trapéz területének felel meg:

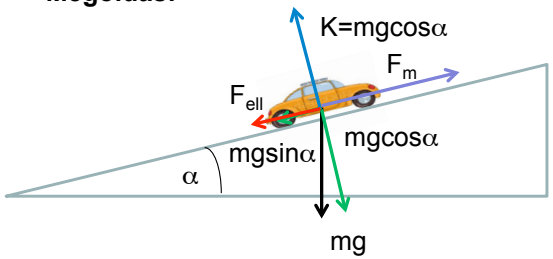
$$W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot s = 1177{,}2 \text{ J}$$

2. Egy $\alpha=5^o$ hajlásszögű emelkedőn halad felfelé állandó 72km/h sebességgel egy m=1000 kg tömegű jármű. Az összes ellenálló erő (súrlódás + légellenállás) eredője állandó 400 N.

Mekkora a motor által leadott teljesítmény és mekkora a gravitációs tér ellenében végzett munka, ha az autó 500 méter magasságú dombra megy fel? Mekkora teljesítmény szükséges ehhez a sebességhez vízszintes úton?

m=1000 kg	
F_{ell}=400 N	P=?
$\alpha=5^o$	W=?
v=72km/h = 20 m/sec	P_1=?
h=500 m	

Megoldás:



A teljesítmény állandó sebesség esetén a motor által kifejtett húzóerő és a sebesség szorzata. Ha az autó állandó sebességgel halad akkor az autóra ható erők eredője 0.

Milyen erők hatnak az autóra?

Mivel a gravitációs erőt felbontottuk komponenseire, ezt már nem kell feltüntetni.

A nehézségi erő lejtőre merőleges komponense ugyanakkora, de ellenkező irányú, mint a felületi kényszererő, ezért az eredőjük 0.

Mivel az autó egyenletesen halad: $F_e=0$

A lejtővel párhuzamos erőket összegezve:

$$F_e = F_m - mg\sin\alpha - F_{ell} = 0$$

innen a motor által kifejtett húzóerő:

$$F_m = mg\sin\alpha + F_{ell} = 855\text{N} + 400\text{N} = 1255\text{N}$$

A motor teljesítménye: $P = F_e \cdot v = 1255 \cdot 20 = 25100\ \text{W}$

A gravitációs mező ellenében végzett munka megegyezik az autó helyzeti energiájának növekedésével:

$$W = mgh = 4905\text{kJ}$$

Vízszintes úton ekkora sebességhez szükséges teljesítmény kiszámításakor csak az ellenálló erőt kell figyelembe vennünk:

$$P_1 = F_{ell} \cdot v = 400 \cdot 20 = 8000 W$$

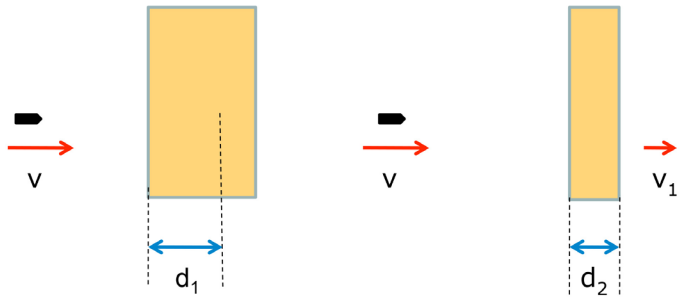
3.Tekintsünk egy 9 g tömegű lövedéket, amely állandó, v=400 m/s sebességgel csapódik egy d=10 cm vastagságú deszkába. A lövedék 6 cm mélyen hatol be a fába, majd megáll. A fa fékező erejét tekintsük állandónak.

a)Mekkora lenne ugyanezen lövedék sebessége egy ugyanilyen anyagú, 4 cm vastagságú deszkán áthaladva?

b)Mekkora munkát végzett a fa ellenálló ereje?

m=9 g
v=400 m/sec
d=10 cm
d_1=6 cm
d_2=4 cm

v_1=?



Megoldás:

A feladat megoldásához a munkatételt használjuk.

Az első esetben a fa fékező ereje által végzett munka egyenlő a lövedék mozgási energiájával, mivel a fába hatolva megáll.

Felírva a munkatételt: $$\frac{1}{2}mv^2 = F \cdot d_1$$

ahol F a fa által kifejtett ellenálló erő

az F erőt kifejezve: $$F = \frac{mv^2}{2d_1}$$

A második esetben a fa ugyanekkora ellenálló erőt fejt ki, de csak d_2=4 cm úton.

Alkalmazva a munkatételt:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F \cdot d_2 = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{d_2}{d_1}$$

Innen: $$mv^2\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) = mv_1^2$$

$$v_1 = v \cdot \sqrt{1 - \frac{d_2}{d_1}} = 230.9 m/sec$$

A fa fékező ereje által végzett munka egyenlő a lövedék mozgási energiájának csökkenésével:

$$W_f = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_1^2\right) = 480J$$

6. fejezethez

Hidrosztatika

1. Mekkora erővel tudjuk felemelni a 15 t súlyú tehervagont, ha hidraulikus sajtónk kör keresztmetszetű dugattyúinak sugarai 40 és 2 cm-esek? Mekkora erőt kell alkalmazni 90 %-os hatásfoknál?

Megoldás:

A nyomástartó edényben a nyomás közel mindenhol azonos:

$$P = \frac{F}{A}.$$

Írjuk fel minkét dugattyú felületére a nyomást:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2},$$

innen a második dugattyúra ható erő:

$$F_2 = \frac{F_1 A_2}{A_1} = \frac{F_1 R^2_2}{R^2_1} = \frac{147150 \cdot 4}{1600} = 367{,}875\,N$$

A hatásfok figyelembevételével adódik a tényleges erőkifejtés:

$$F_V = \frac{F_2}{\eta} = 408{,}75\,N$$

2. Mekkora a nyomás a tenger felszíne alatt 10, 15, 75 m-re? A tengervíz sűrűsége 1050 kg/m^3-nek vegyük!

Megoldás:

$h_1 = 10\,m, h_2 = 15\,m, h_3 = 75\,m$

A súlyos folyadék nyomása:

$$p_1 = \rho g h_1 = 1050 \cdot 10 \cdot 9{,}81 = 103005\,Pa$$
$$p_2 = 154507{,}5\,Pa$$
$$p_3 = 772537{,}5\,Pa$$

3. Egy deszka lap 3 cm mélyen (40 × 50 × 5 cm) süllyed a vízbe. Ha rá helyezünk egy követ, akkor 4,5 cm-re süllyed. Mekkora a fa sűrűsége? Mekkora a kő tömege?

Megoldás:

a.) A fa sűrűségének kiszámítása:
A fára a súlyerő és a felhajtóerő hat.

$\rho_v = 1000 \frac{kg}{m^3}$

súlyerő: $m \cdot g = V \cdot \rho_v \cdot g$

felhajtóerő: $F_f = \frac{3}{5} V \cdot \rho_v \cdot g$

$$V \cdot \rho_t \cdot g = \frac{3}{5} V \cdot \rho_v \cdot g$$

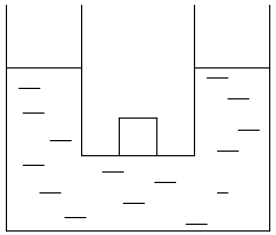
$$\rho_t = \frac{3}{5} \rho_v = 600 \frac{kg}{m^3}$$

b.) A kő tömegének kiszámítása:
Összegezzük a deszkát elsüllyesztő és a deszkát kiemelő erőket!

$$m_k \cdot g + m_d \cdot g = \frac{9}{10} V \cdot \rho_v \cdot g$$

$$m_k = \frac{9}{10} V \cdot \rho_v - V \cdot \rho_t = 9 - 6 = 3 \text{ kg}$$

4. Henger alakú felül nyitott vaslemezből készült konzervdobozba 0.4 kg tömegű testet helyezve a doboz függőleges helyzetben úszik a vízen. Milyen mélyen merül a doboz a vízbe, ha a doboz átmérője 8 cm, magassága 12 cm? A lemez vastagsága 0.5 mm, a vas sűrűsége
7.8 g/cm^3.



Megoldás

Először kiszámítjuk a doboz saját tömegét.

A doboz anyagának térfogata:

$$V = \left[\frac{d^2\pi}{4} + d\pi h\right] d_1 = 17.59 \ \ cm^3,$$

ahol h=12 cm a doboz magassága, d=8 cm a doboz átmérője, d_1=0.5 mm a lemez vastagsága.

Innen a doboz tömege:

$$m_d = \rho_{vas} V = 137.225 g$$

A konzervdoboz és a belé helyezett test együttes súlyát kojmpenzálja a felhajtó erő:

$$(m_d + m) \cdot g = \rho_{víz} \frac{d^2\pi}{4} \cdot x \cdot g$$

Innen a bemerülés mélysége:

$$x = 10.688 \ \ cm$$

5. Egy 40 g tömegű, egyik végén 10 g tömegű ólomdarabbal megterhelt hengeres farúd függőleges helyzetben vízen úszik. A rúd hosszának hányad része áll ki a vízből, ha a fa sűrűsége ρ_{fa}=0.6 g/cm^3, az ólomé: $\rho_{ó}$=11 g/cm^3 ?

Megoldás

Felírjuk Archimedes törvényét az egyensúlyi helyzetre:

$$(m_{fa} + m_{ó}) \cdot g = V_{be}\rho_{víz} g + \frac{m_{ó}}{\rho_{ó}}\rho_{víz} g$$

Innen a rúd térfogatának benerülő része:

$$V_{be} = \frac{(m_{fa} + m_{ó}) \cdot g}{\rho_{víz} g} - \frac{m_{ó}}{\rho_{ó}} = 49.1 \ cm^3$$

A rúd teljes térfogata:

$$V_{fa} = \frac{m_{fa}}{\rho_{fa}} = 66.67 \ cm^3$$

A bemerülő rész és a teljes térfogat aránya:

$$\frac{V_{be}}{V_{fa}} = 0.736$$

A rúd hosszának 1-0.736=0.264 –d része áll ki a vízből.

6. $G_1 = 100\text{N}$ súlyú test vízben $G_2 = 60\text{N}$-t nyom, alkoholban pedig $G_3 = 68\text{N}$. Mekkora test sűrűsége? Mekkora az alkohol sűrűsége? (a levegő felhajtó erejét hagyjuk figyelmen kívül!)

Megoldás

Ha a test súlya levegőben G_1, akkor a tömege:

$$m = \frac{G_1}{g} = 10.19 \ \ kg$$

Ha vízben 60 N a test súlya, akkor F_{fel1}=40 N felhajtó erő hat rá, azaz a test térfogata:

$$V = \frac{F_{fel1}}{\rho_{viz} g} = 4.077 \cdot 10^{-3} \ \ m^3$$

Innen a test sűrűsége:

$$\rho_{test} = \frac{m}{V} = 2500 \ \ \frac{kg}{m^3}.$$

Ha alkoholban a súlya 68 N, akkor alkoholban F_{fel2} =32 N felhajtó erő hat rá.

Innen az alkohol sűrűsége:

$$\rho_{alk} = \frac{F_{fel2}}{Vg} = 800 \ \ \frac{kg}{m^3}$$

7. fejezethez

1. Egy 8 m^3 űrtartalmú, nyomástartó edényt kétatomos molekulákból álló gázzal töltünk meg, amelynek specifikus gázállandója r=287J/kgK. Hány darab molekula van a dobozban, ha a gáz nyomása 100kPa, hőmérséklete pedig 273K? Mennyi a gáz tömege? Mekkora a belső energiája? Számoljuk ki a gáz fajhőit! (a Boltzmann-állandó:k=1,38·10^{-23} J/K)

Megoldás:

a)A gázok állapotegyenletét felírjuk, majd kifejezzük az N-t:

$$pV = NkT$$, ahonnan N=2,12·10^{26}.

b) A gáz tömegének kiszámításához az egyetemes gáztörvényt használjuk fel:

$$m = \frac{pV}{rT} = \frac{100 \cdot 10^3 Pa \cdot 8m^3}{287 J/kgK \cdot 273K} = 10{,}21kg .$$

c) A belső energia

$$U = c_v mT = \frac{f}{2} rmT = \frac{f}{2} pV ,$$

ahol az f a gáz molekuláinak szabadsági foka, kétatomos molekulánál ez 5.

Így U=2MJ.

d)A belső energia kiszámításakor már láttuk, hogy

$c_v = \frac{f}{2} r$ =717,5J/kgK, míg $c_p = \frac{f+2}{2} r$ =1004,5J/kgK.

2. Egy 8m^3 térfogatú tartályt kétatomos molekulákból álló gázzal töltünk meg. A gáz nyomása 100kPa, hőmérséklete pedig 273K. Hány darab molekula távozik a dobozból, ha a bezárt részecskék hőmérsékletét 42°C-kal megemeljük, és a dobozt olyan szeleppel látjuk el, amely 100kPa nyomás felett kinyit? Mekkora a bent maradó gáz belső energiája?

Megoldás:

Először számoljuk ki, hogy hány molekula távozik. Ezt úgy kaphatjuk meg a legkönnyebben, ha képezzük az eredetileg a dobozban lévő és melegítés után a dobozban maradó részecskék számát!

Eredetileg volt:

$$pV = NkT \Rightarrow N_1 = \frac{p_1 V}{kT_1} = 2{,}12 \cdot 10^{26},$$

melegítés után maradt (p=100kPa nyomással):

$$N_2 = \frac{p_2 V}{kT_2} = \frac{p_1 V}{kT_2} = 1{,}84 \cdot 10^{26},$$

azaz a távozó molekulák száma:

$$\Delta N = N_1 - N_2 = 0{,}28 \cdot 10^{26}.$$

Ha a benn maradó gáz belső energiájára vagyunk kíváncsiak, akkor azt így számoljuk ki:

$$U = \frac{f}{2} pV = \frac{f}{2} N_2 kT_2 = \frac{5}{2} 1{,}84 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 315 = 2\text{MJ}.$$

3. Két azonos térfogatú kamrával rendelkező tartályba gázt töltünk: az egyikbe 1bar nyomású, 100g tömegű H_2-t, a másikba 2,5mol N_2-t, ugyanakkora hőmérséklettel (T=300K). Mennyi részecskéből áll a hidrogén illetve a nitrogén gáz? Mekkora a kamrák térfogata? Ha a két teret egybenyitjuk, mekkora lesz a közös nyomás?

Megoldás:

Mivel $\frac{pV}{T} = Nk = \frac{m}{M}R$,

valamint $n = \frac{N}{N_A}$,

ezért a két részecskeszám:

N_{H2}=3,01*10^{25} és N_{N2}=1,51*10^{24}.

Tudjuk továbbá, hogy a hidrogén gázt 1bar=10^5 Pa nyomással, 300K-en töltöttük a tartályba, ezért a hidrogénnel töltött kamra térfogata:

$$V = \frac{mRT}{Mp} = \frac{0{,}1kg \cdot 8{,}31 \,{}^{J}\!/\!_{molK} \cdot 300K}{2 \cdot 10^{-3} \,{}^{kg}\!/\!_{mol} \cdot 10^5 Pa} = 1{,}25\text{m}^3.$$

Ha a két kamrát egybenyitjuk, akkor a *2V* térfogatot együtt tölti be N_{H2} és N_{N2}:

$$p_{közös} = p_{H2} + p_{N2} = \frac{(N_{H2} + N_{N2})kT}{2V} = 52{,}4\text{kPa}.$$

4. Egy 2dm^3 térfogatú tartályban 10^{25} db kétatomos molekula van. A belső energiája 210kJ. Mekkora a hőmérséklete és a nyomása?

Megoldás:

A gáz kétatomos molekulákból áll, így a szabadsági fokai száma: f=5.

A belső energia $U = c_v mT = \frac{f}{2} r \cdot mT$, ahol a gáz tömegének és a specifikus gázállandónak a szorzatát a következőképp kapjuk: $\frac{pV}{T} = mr = Nk$ =138J/K.

Ebből a hőmérséklet: T=608,7K.

A gázt tartalmazó tartály térfogatának ismeretében a hőmérséklet segítségével a nyomás kiszámolható:

p=42MPa.

8. fejezethez

1. Egy állapotváltozás során az 5g tömegű, 287 J/kgK specifikus gázállandójú, 2liter térfogatú, 320K hőmérsékletű gázt belső energia-változás nélkül térfogatának negyedére nyomjuk össze. Mekkora volt a kiindulási és a végső állapot nyomása? Mekkora hőt ad le a rendszer?

Megoldás:

A gáz kiindulási nyomását az egyetemes gáztörvényből kapjuk, a végső állapot nyomását pedig a Boyle-Mariotte egyenletből:

$$(1)\quad p_1 = \frac{mrT_1}{V_1} = 2{,}296 \cdot 10^5\, Pa$$

$$(2)\quad p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{p_1 V_1}{\frac{1}{4} V_1} = 4 p_1 = 9{,}18 \cdot 10^5\, Pa.$$

Ha nincs belső energia változás, akkor izotermikus állapotváltozásról van szó, így a végzett munka hővé alakul (Termodinamika I. főtétele):

$$Q = -W = mrT \ln \frac{V_2}{V_1} = -636{,}6 J$$

2. Egy 15 dm^3 térfogatú palackban p_1=202,65kPa nyomású, 303,16K hőmérsékletű levegő van. Mekkora lesz a levegő hőmérséklete és nyomása 16,748kJ hőmennyiség közlése után? A κ=1,4, $M_{levegő}$=29g/mol és a palack hőtágulását elhanyagoljuk.

Megoldás

A specifikus gázállandó, r=R/M=287 J/kgK. A Robert-Mayer egyenlet és a κ fajhőviszony segítségével az állandó térfogat fajhője is kiszámolható:

$$c_V=r/(\kappa-1)=717,5 \text{ J/kgK}.$$

A gáz tömege a kiindulási paraméterek és az egyetemes gáztörvény segítségével határozható meg:

$$m=\frac{p_1V_1}{rT_1}=\frac{202,65\cdot10^3\cdot15\cdot10^{-3}}{287\cdot303,16}=0,035kg.$$

Az állapotváltozás izochor, ezért

$$Q=\Delta U=c_V m\cdot\Delta T=16,748kJ,$$

ahonnan a T_2=971,28K, és az egyetemes gáztörvény segítségével:

$$p_2=650,44\text{kPa}.$$

3. Egy hőszigetelő falakkal rendelkező tartályban 1kg tömegű, 20dm^2 területű dugattyú zár be 0,02kg tömegű, 300K hőmérsékletű hélium gázt. A külső légnyomás legyen 1bar és a dugattyú súrlódásmentesen, szabadon mozoghat. Ha a gáz hőmérsékletét állandó nyomáson lassan 400K-re emeljük, mennyit mozdul el a dugattyú?

Megoldás

Mivel a dugattyú szabadon elmozdulhat, ezért a két oldalán mindig ugyanakkora lesz a nyomás. Ha p=állandó, akkor

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}=\frac{V_1+\Delta V}{T_2},\ ahonnan\ \Delta V=\left(\frac{T_2}{T_1}-1\right)V_1=\frac{1}{3}V_1.$$

Az egyetemes gáztörvény segítségével:

V_1=0,125m^3 ($M_{hélium}$=4 g/mol),

amelyet felhasználva a dugattyú elmozdulása:

$$\Delta s=\frac{\Delta V}{A}=\frac{\frac{1}{3}V_1}{A}=\frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}125m^3}{20\cdot10^{-2}m^2}=0{,}208m=20{,}8cm.$$

4. Egy gyorsjárású kompresszor 20perc alatt 2,4m^3 térfogatú, 100kPa nyomású, 300K hőmérsékletű levegőt komprimál adiabatikusan 8bar nyomásra. Mekkora teljesítményű motorra van szükség a kompresszor meghajtásához? κ=1,4, r=287J/kgK.

Megoldás

A motor teljesítménye, ha eltekintünk mindennemű veszteségtől, és figyelembe vesszük, hogy adiabatikus az állapotváltozás:

$$P = \frac{W}{\tau} = \frac{\Delta U}{1200\,\mathrm{sec}} = \frac{c_V m \cdot \Delta T}{1200\,\mathrm{sec}}.$$

Tehát a teljesítmény kiszámításához tudnunk kell az állandó térfogatú fajhőt, a gáz tömegét és a hőmérséklet-változást.
A fajhő a Robert-Meyer egyenletből és a fajhőviszonyból számolható:

$$\frac{c_p}{c_V} = \kappa$$

$$c_p - c_V = r$$

Ahonnan: $$c_V = \frac{1}{\kappa - 1} r = 717{,}5 \frac{J}{kgK}.$$

A gáz tömegét a gáz-állapotegyenlet adja:

$$m = \frac{p_1 V_1}{r T_1} = 2{,}787 kg.$$

Az összenyomott állapot hőmérsékletét az adiabatikus állapotváltozás Poisson-egyenlete segítségével számoljuk ki:

$$\frac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^{\kappa}} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^{\kappa}},$$

Ahonnan: T_2=543,43K, azaz a ΔT=243,43K.

Végül a kapott eredményeket behelyettesítve a kompresszor meghajtó motorja P=405,66W teljesítményű lesz.

9. fejezethez

Fázisátalakulások, hőegyensúlyi állapotok

1. Mennyi hőt kell közölnünk egy 20dkg tömegű, -5°C hőmérsékletű jégdarabbal, hogy az teljesen elpárologjon (100°C-ra melegítjük és elforraljuk)? A veszteségektől tekintsünk el! Fajhők:$c_{jég}$=2,1kJ/kgK, $c_{víz}$=4,2kJ/kgK; Olvadáshő:L_o=334kJ/kg; Forráshő:L_f=2260kJ/kg.

Megoldás:

A melegedés és fázisátalakulás során felvett hőket kell összegezni:

$$Q = c_{jég} m \cdot \left(0^o C - \left(-5^o C\right)\right) + L_o m + c_{víz} m \cdot \left(100^o C - 0^o C\right) + L_f m .$$

Innen a keresett hőmennyiség :Q= 0,605MJ.

2. Mekkora lesz a beálló közös hőmérséklet, ha egy hőszigetelt edényben lévő 4°C hőmérsékletű (ρ=1000kg/m^3), 200cm^3 térfogatú vízbe egy 72°C hőmérsékletű, 50g tömegű rézdarabot dobunk ($c_{réz}$=390J/kgK)? Az edény hőkapacitásától tekintsünk el! $c_{víz}$=4187J/kgK.

Megoldás:

A hőegyensúlyi állapot beállásáig az egyik rendszer lead, a másik felvesz hőt. Ha nincs veszteség, ez a kettő egyenlő.

$$Q_{le} = c_{réz} m_{réz} \cdot \left(72 - t_{közös}\right) = Q_{fel} = c_{víz} \left(\rho \cdot V\right) \cdot \left(t_{közös} - 4\right)$$

Az adatok behelyettesítése után $t_{közös}$=5,55°C.

3. Egy 5,44kJ/K hőkapacitású edénybe, melyben 12kg tömegű, 15°C-os víz van, 101kPa nyomáson 0,85kg, 100°C hőmérsékletű vízgőzt vezetünk be, mely a vízben kondenzálódik. Számítsuk ki a víz folyamat végén elért hőmérsékletét! L_f=2,256MJ/kg.

Megoldás:

Mivel $Q_{fel}=Q_{le}$, valamint az edényre $Q_{fel1}=C\Delta t$, a következőt kapjuk:

$$C\left(t_{vég}-15\right)+c_{víz}m_{víz}\left(t_{vég}-15\right)=L_f m_{gőz}+c_{víz}m_{gőz}\left(100-t_{vég}\right).$$

Átrendezve:

$$t_{vég}\left(C+c_{víz}m_{víz}+c_{víz}m_{gőz}\right)=L_f m_{gőz}+c_{víz}m_{gőz}100+15\left(C+c_{víz}m_{víz}\right).$$

Ebből kapjuk, hogy $t_{vég}$=52,48°C.

4. Egy $\alpha=1{,}6\cdot10^{-5}\ °C^{-1}$ lineáris hőtágulási tényezőjű, 0,5 liter űrtartalmú edényt ¾ részéig $\beta=3\cdot10^{-3}\ °C^{-1}$ térfogati hőtágulási tényezőjű folyadékkal töltünk meg. A helyiség, ahol a töltést végeztük, 10°C hőmérsékletű volt. Mekkora hőmérsékletre melegíthető fel az edény, hogy a folyadék még éppen ne folyjon ki? Mekkora volt annak a helyiségnek a hőmérséklete, amelyben a folyadék 1cm^3-nyi része kifolyt az edényből? (A párolgási veszteségektől eltekintünk.)

Megoldás:

a) A folyadék és az edény térfogata éppen egyenlő. Az üreges szilárd test úgy tágul, mintha tömör lenne. Így:

b)

$$V_1=V_0\left(1+3\alpha\cdot\Delta t\right)=V_2=\frac{3}{4}V_0\left(1+\beta\cdot\Delta t\right),$$

ahonnan Δt=113,53°C, azaz 123,53°C-ra melegíthető fel az edény.

b)A térfogatokra most a következőket írhatjuk fel:

$$V_0\left(1+3\alpha\cdot\Delta t\right)+10^{-6}m^3=\frac{3}{4}V_0\left(1+\beta\cdot\Delta t\right),$$

ahonnan az adatok behelyettesítésével adódik, hogy a keresett hőmérséklet: 124,44°C.

5. Egy vasból és egy rézből készült, igen vékony, azonos szélességű lemez hossza közötti különbség bármely hőmérsékleten ugyanakkora (Δl=25cm). Milyen hosszú 20°C-on a rézlemez? ($\alpha_{réz}$=1,8·10^{-5}1/K, α_{vas}=1,2·10^{-5}1/K)

Megoldás:

Legyen t_o=20°C. Ezen a hőmérsékleten is teljesülnie kell a fentebb említett feltételnek, azaz:

$$l_{vas0} = l_{réz0} + \Delta l .$$

(A kisebb hőtágulással bíró lemeznek kell a hosszabbnak lennie kiinduláskor.)

Bármely t-re is igaznak kell lennie az előző egyenletnek ily módon:

$$l_{vas} = l_{vas0}\left(1 + \alpha_{vas} \cdot \Delta t\right) = l_{réz} + \Delta l = l_{réz0}\left(1 + \alpha_{réz} \cdot \Delta t\right) + \Delta l .$$

Az egyenlet átrendezésével - mivel $l_{vas0} - l_{réz0} = \Delta l$, így a Δl kiesik -, és Δt-vel mindkét oldalt végigosztva kapjuk, hogy:

$$l_{vas0}\alpha_{vas} = l_{réz0}\alpha_{réz} .$$

Fejezzük ki a 20°C-os vaslemez hosszát és helyettesítsük be a kiindulási egyenletünkbe:

$$l_{réz0} = \frac{\Delta l}{\left(\frac{\alpha_{réz}}{\alpha_{vas}} - 1\right)} = 50\,cm.$$

Minta feladatok

9. fejezet

1. Minta feladat

Mennyi hőt kell közölnünk egy 20dkg tömegű, -5°C hőmérsékletű jégdarabbal, hogy az teljesen elpárologjon (100°C-ra melegítjük és elforraljuk)?

A veszteségektől tekintsünk el! Fajhők: $c_{jég}$=2,1kJ/kgK, $c_{víz}$=4,2kJ/kgK; Olvadáshő: L_o=334kJ/kg; Forráshő: L_f=2260kJ/kg.

Megoldás:

A melegedés és fázisátalakulás során felvett hőket kell összegezni:

$$Q = c_{jég} m \cdot \left(0^\circ C - \left(-5^\circ C\right)\right) + L_o m + c_{víz} m \cdot \left(100^\circ C - 0^\circ C\right) + L_f m \,.$$

Innen a keresett hőmennyiség :Q= 0,605MJ.

2. Minta feladat

Mekkora lesz a beálló közös hőmérséklet, ha egy hőszigetelt edényben lévő 4°C hőmérsékletű (ρ=1000kg/m^3), 200cm^3 térfogatú vízbe egy 72°C hőmérsékletű, 50g tömegű rézdarabot dobunk ($c_{réz}$=390J/kgK)?
Az edény hőkapacitásától tekintsünk el! $c_{víz}$=4187J/kgK.

Megoldás:

A hőegyensúlyi állapot beállásáig az egyik rendszer lead, a másik felvesz hőt. Ha nincs veszteség, ez a kettő egyenlő.

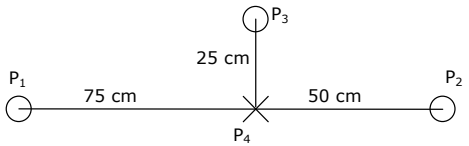
$$Q_{le} = c_{réz} m_{réz} \cdot (72 - t_{közös}) = Q_{fel} = c_{víz} (\rho \cdot V) \cdot (t_{közös} - 4)$$

Az adatok behelyettesítése után $t_{közös}$=5,55°C.

10. fejezethez

Elektrosztatika

1. Három egyenlő nagyságú és előjelű ponttöltést helyezünk el egy síkban, a P_1, a P_2 és a P_3 pontokban, az ábrán látható módon. Mekkora lesz P_4-ben az elektrosztatikus tér erőssége?
(a töltések értéke $q=10\mu C$)



Megoldás:

A térerősség értéke a P_4 pontban a P_1, a P_2 és a P_3 pontokban lévő töltések által keltett mezők hatásának szuperpozíciójaként adódik.
A térerősség a mezőt létrehozó töltéssel egyenesen, ezen töltéstől mért távolság négyzetével fordítottan arányos.
A P_1-beli töltés által létrehozott térerősség vektor nagysága P_4-ben:

$$E_1 = k\cdot\frac{q}{r_1^2} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{10\cdot 10^{-6}}{0,75^2} = 1,6\cdot 10^5\ NC^{-1};$$

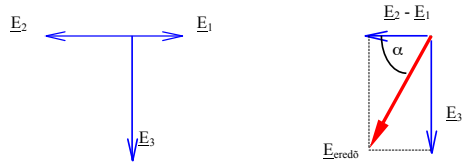
a P_2-beli töltésé:

$$E_2 = 9\cdot 10^9\cdot\frac{10^{-5}}{0,5^2} = 3,6\cdot 10^5\ NC^{-1};$$

a P_3-beli töltésé pedig:

$$E_3 = 9\cdot 10^9\cdot\frac{10^{-5}}{0,25^2} = 1,44\cdot 10^6\ NC^{-1}.$$

Mivel mindegyik töltés ugyanolyan előjelű, ezért a térerősség vektorok így adódnak P_4-ben:



Az eredő térerősséget úgy kapjuk a vektorábra alapján, hogy $\underline{E}_1$-$\underline{E}_2$ különbségvektorhoz hozzáadjuk az $\underline{E}_3$ vektort.
Az eredő térerősség nagysága:

$$E_{eredő} = \sqrt{\left|(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\right|^2 + \left|\mathbf{E}_3\right|^2} = 1{,}454\cdot 10^6\ NC^{-1}.$$

Az eredő térerősség iránya (ha α az $\mathbf{E}_1$-$\mathbf{E}_2$ különbségvektor és az $\mathbf{E}_{eredő}$ vektor által bezárt szög):

$$tg\alpha = \frac{\left|\mathbf{E}_3\right|}{\left|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\right|}$$

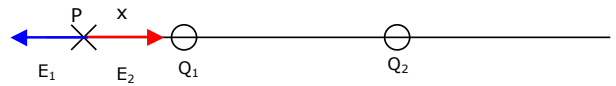
Ahonnan:

$$\alpha = 82{,}1^\circ$$

2. Egy 300 pC és egy -0,5 nC nagyságú töltést rögzítsünk egymástól 2 mm távolságban. Hol lesz az eredő tér erőssége zérus?

Megoldás

Vizsgáljuk meg a két töltést összekötő egyenest és az egyenesen kívül eső teret. A térerősség vektormennyiség. Csak akkor lehet zérus a két töltés térerősség-vektorának összege, ha irányuk ellentétes és nagyságuk megegyezik.
Ezért az első kérdés helyes megoldását a két töltést összekötő egyenesen, a kisebb töltés felőli oldalon kell keresni.



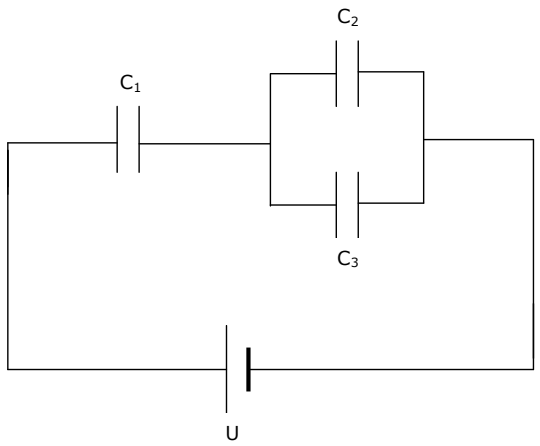
Az ábrán a piros nyíl a negatív Q_2 töltés E_2 elektromos terét, a kék nyíl a pozitív Q_1 töltés E_1 elektromos terét jelzi, x a keresett P pont és a Q_1 töltés távolsága, r pedig a két töltés távolsága.
A térerősségek nagyságára felírva az egyenletet:

$$k\frac{Q_1}{x^2} = k\frac{Q_2}{(r+x)^2}$$

Az egyenletet megoldva, a fizikailag helyes megoldás:

X=6.87 mm

3. Számítsa ki az alábbi kondenzátorok töltéseit és feszültségeit!
(C_1=2μF, C_2=4μF, C_3=6μF, U=120 V)



Megoldás

Először kiszámítjuk az eredő kapacitást:

C_2 és C_3 eredő kapacitása:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 10\,\mu F$$

Az eredő kapacitás: $$C_e = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}}\right)^{-1} = 1.67\,\mu F$$

A kondenzátorokra kerülő összes töltés:

$$Q = C_e \cdot U = 200\,\mu C$$

Ugyanez a töltés megjelenik a sorosan kapcsolt C_1 és C_{23} kondenzátorokon:

$$Q_1 = Q_{23} = Q$$

A C_1 kapacitású kondenzátor feszültsége:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 100\ V$$

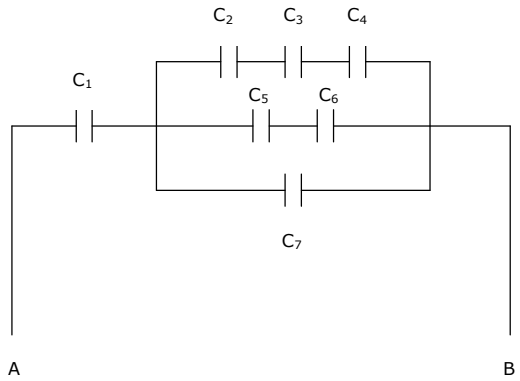
A párhuzamosan kapcsolt C_2 és C_3 kondenzátoron eső feszültség:

$$U_2 = U_3 = U - U_1 = 20\ V$$

A töltések:

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 80\ \mu C \qquad Q_3 = C_3 \cdot U_3 = 120\ \mu C$$

4. Számítsa ki az A,B pontokra vonatkozó eredő kapacitást! Mekkora az egyes kondenzátorok töltése és feszültsége, ha U_{AB}= 200 V?
(C_1=5 nF, C_2=3 nF, C_3=11 nF, C_4=7 nF, C_5=8 nF, C_6=21 nF, C_7=1 nF)



Megoldás

Az ábrán látható kapcsolásban a C_1 kapacitású kondenzátor sorosan van kapcsolva a többi kondenzátort tartalmazó taggal. Először számítsuk ki ennek a párhuzamos tagnak az eredő kapacitását:

Fölső ág:

$$C_{234} = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right)^{-1} = 1.763 \ nF$$

Középső ág:

$$C_{56} = \left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}\right)^{-1} = 5.793 \ nF$$

A párhuzamos tag eredője:

$$C_p = C_{234} + C_{56} + C_7 = 8.556 \ nF$$

Az eredő kapacitás:

$$C_e = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_p}\right)^{-1} = 3.156 \ nF$$

A kondenzátorokra kerülő összes töltés:

$$Q = C_e \cdot U = 631.2 \ nC = 6.3121 \cdot 10^{-7} C$$

Ez a töltés megjelenik a C_1 kondenzátoron és a C_p tagon is, mivel sorosan vannak kapcsolva.

A feszültség a C_1 kapacitású kondenzátoron:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = 126.24 \ V$$

Feszültség a párhuzamos tagon:

$$U_p = \frac{Q}{C_p} = 73.77 \ V$$

A párhuzamos tag fölső ágába kerülő összes töltés:

$$Q_{234} = C_{234} \cdot U_p = 130.06 \ nC$$

Ez a töltés mindhárom kondenzátoron megjelenik, így

$$Q_{234} = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 130.06 \ nC$$

A feszültségek:

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 43.35 \ V \quad U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 11.82 \ V \quad U_4 = \frac{Q_4}{C_4} = 18.58 \ V$$

A középső ágban az összes töltés:

$$Q_{56} = C_{56} \cdot U_p = 427.35 \ nC$$

Ugyanez a töltés lesz a kondenzátorok töltése:

$$Q_{56} = Q_5 = Q_6 = 427.35 \ nC$$

A feszültségek:

$$U_5 = \frac{Q_5}{C_5} = 53.42 \ V \qquad U_6 = \frac{Q_6}{C_6} = 20.35 \ V$$

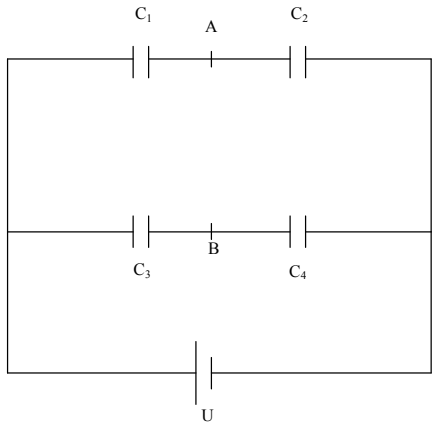
A C_7 kapacitású kondenzátor töltése:

$$Q_7 = C_7 \cdot U_p = 73.77 \ nC$$

Feszültsége megegyezik U_p-vel:

$$U_7 = U_p = 73.77 \ V$$

5. Számítsa ki az A és B pontok közötti feszültséget, valamint a kondenzátorok által tárolt energiát! (C_1=2 μF, C_2=5 μF, C_3=3 μF, C_4=4 μF, U=200 V)



Megoldás

Ahhoz, hogy megkapjuk a keresett feszültséget, ki kell számítani az egyes kondenzátorokra jutó feszültségeket.
A felső ágban C_1 és C_2 sorosan vannak kapcsolva, így az eredő kapacitás:

$$C_{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = 1.429 \ \mu F$$

A felső ágban az összes töltés:

$$Q_{12} = C_{12} \cdot U = 285.8 \ \mu C$$

Ez a töltés mindkét sorosan kapcsolt kondenzátoron megjelenik:

$$Q_{12} = Q_1 = Q_2$$

A kondenzátorok feszültsége:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 142.9 \ V, \qquad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 57.1 \ V$$

Az alsó ágban ugyanígy kiszámítva a feszültségek:

$$U_3 = 114.29 \ V \qquad U_4 = 85.71 \ V$$

Az A, B pontok közötti feszültség:

$$U_{AB} = U_1 - U_3 = 28.61 \ V$$

A C_1 kapacitású kondenzátor energiája:

$$E_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = 20420.41 \ \mu J = 0.02042 \ J$$

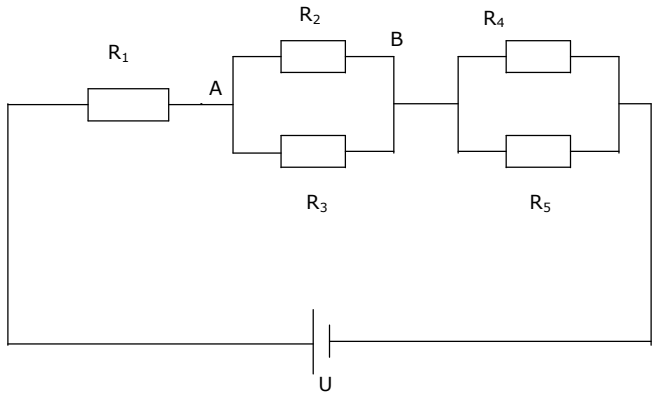
Ugyanígy számolva, a többi kondenzátor energiája:

$$E_2 = 0.00815 \ J, \quad E_3 = 0.0196 \ J, \quad E_4 = 0.0147 \ J$$

11. fejezethez

Ajánlott feladatok

1. Számítsa ki az AB pontok közötti feszültséget és az R_4 ellenálláson folyó áram erősségét! (U=200 V, R_1=400 Ω, R_2=180 Ω, R_3=150 Ω R_4= 0.3 k Ω, R_5= 250 Ω)



Megoldás

Először számítsuk ki a kapcsolás eredő ellenállását:

A kapcsolást úgy tekinthetjük, hogy az R_1 ellenállással sorosan van kapcsolva az R_2 és R_3 párhuzamos eredője, valamint az R_4 és R_5 párhuzamos eredője.
R_2 és R_3 eredője:

$$R_{23} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = 81.82\Omega$$

R_4 és R_5 eredője:

$$R_{45} = \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)^{-1} = 136.36\Omega$$

Az áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = R_1 + R_{23} + R_{45} = 618.18\Omega$$

A főágban folyó áram:

$$I = \frac{U}{R_e} = 0.3235\ \ A$$

Az A és B pontok között eső feszültség megegyezik a középső párhuzamos tagon (R_{23} ellenálláson) eső feszültséggel. Így Ohm törvényét felhasználva:

$$U_{AB} = I \cdot R_{23} = 26.47\ \ V$$

Az R_4 ellenálláson folyó áram erősségét az áramosztás tételével számoljuk ki. Eszerint a párhuzamos ágakban az áram az ellenállásokkal fordított arányban oszlik meg:

$$I_4 = \frac{250}{550} \cdot I = 0.147\ \ A$$

2. Mekkora annak a telepnek a belső ellenállása és üresjárási feszültsége, amely 12 Ω terhelés esetén 9 V, 18 Ω - os terhelés esetén 12 V-os kapocsfeszültséget szolgáltat?

Megoldás

Első esetben: a 12 Ω-os külső ellenálláson eső kapocsfeszültség 9V, így az áramkörben folyó áram:

$$I_1 = \frac{U_{k1}}{R_{k1}} = 0.75A$$

A második esetben a 18 Ω -os külső ellenálláson eső kapocsfeszültség 12V, így az áramkörben:

$$I_2 = \frac{U_{k2}}{R_{k2}} = 0.67A$$

Felhasználva Ohm törvényét teljes áramkörre:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_b + R_{k1}} \text{ , illetve } I_2 = \frac{U_0}{R_b + R_{k2}}.$$

Az egyenleteket átrendezve:

$$U_0 = I_1(R_b + R_{k1}) = I_2(R_b + R_{k2})$$

Ez utóbbi egyenletből:

$R_b = 36\Omega$, ezt visszahelyettesítve $U_0 = 36\ V$

3. Egy 10 V-os elektromotoros erejű 2 Ω belső ellenállású telepre 8 Ω -os fogyasztót kapcsolunk. Mekkora ellenállásúra kell a fogyasztót kicserélni, hogy ugyanakkora teljesítményt vegyen fel, mint a 8 Ω -os fogyasztó? Mekkora feszültség esik ebben az esetben a fogyasztón?

Megoldás

Először számítsuk ki, mekkora teljesítményt vesz fel a 8Ω -os fogyasztó. Felhasználva Ohm törvényét teljes áramkörre, a teljesítmény:

$$P_1 = I_1^2 R_{k1} = \left(\frac{U_0}{R_b + R_{k1}}\right)^2 \cdot R_{k1} = \left(\frac{10}{2+10}\right)^2 \cdot 8 = 8 \ W$$

A feladat szerint a másik fogyasztónak ugyanekkora teljesítményt kell felvennie:

$$P_2 = I_2^2 R_{k2} = \left(\frac{U_0}{R_b + R_{k2}}\right)^2 \cdot R_{k2} = 8 \ W$$

Behelyettesítve az ismert mennyiségeket, egy másodfokú egyenletet kapunk egy ismeretlennel:

$$\left(\frac{10}{2 + R_{k2}}\right)^2 \cdot R_{k2} = 8$$

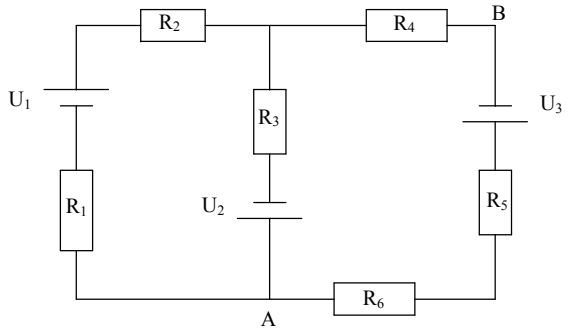
Az egyenlet megoldásai:

$$R_{k2}^{(1)} = 8 \ \Omega, \quad \text{és} \quad R_{k2}^{(2)} = 0.5 \ \Omega$$

Ezek közül a feladat megoldása az R_{k2}=0.5 Ω. Az ellenálláson eső feszültség:

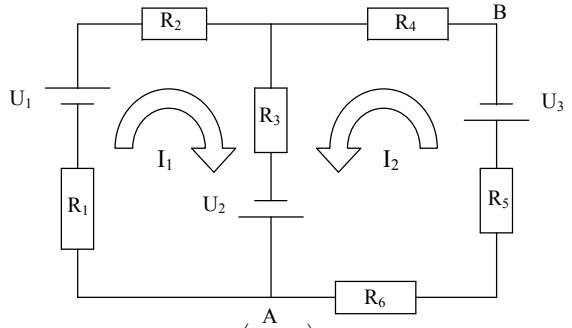
$$U_{k2} = I_2 R_{k2} = \left(\frac{U_0}{R_b + R_{k2}}\right) R_{k2} = \frac{10}{2 + 0.5} \cdot 0.5 = 2 \ V$$

4. Számítsa ki az ábrán látható kapcsolásban az egyes ágakban folyó áramok erősségét, valamint az U_{AB} feszültséget! (R_1=150 Ω, R_2=70 Ω, R_3= 250 Ω R_4= 100 Ω, R_5= 50 Ω, R_6= 300 Ω U_1=24 V, U_2= 40 V, U_3=12 V)



Megoldás

A feladatot a hurokáramok módszerével fogjuk megoldani. A módszer szerint mindkét hurokban felveszünk egy tetszőleges körüljárási irányt, majd az első telepnek tetszőleges előjelet adva, felírjuk a telepfeszültségek és feszültségesések algebrai összegét, aminek Kirchoff II. törvénye alapján 0-nak kell lennie:



$$I_1R_1 - U_1 + I_1R_2 + (I_1 + I_2)R_3 - U_2 = 0$$

$$I_2R_5 + U_3 + I_2R_4 + (I_1 + I_2)R_3 - U_2 + I_2R_6 = 0$$

Behelyettesítve:

$$470I_1 + 250I_2 = 64$$

$$700I_2 + 260I_1 = 28$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$I_1 = 0.1418A, \quad I_2 = -0.0106A$$

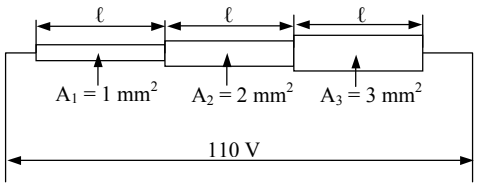
A középső ágban a két hurokáram összege folyik:

$$I_3 = 0.1312A$$

Az *A, B* pontok közötti feszültség:

$$U_{AB} = I_2R_6 + I_2R_5 + U_3 = 8.29V$$

5. Három azonos anyagi minőségű, azonos hosszúságú, de különböző keresztmetszetű huzalt kötünk 110 V egyenfeszültségre sorosan. Mekkora lesz a feszültségesés rajtuk, ha a keresztmetszetük 1, 2, és 3 mm^2?



Megoldás

Az ellenállásokon eső feszültség a feszültségosztás tétele szerint arányos az ellenállások értékével, így először az ellenállások arányát kell meghatároznunk.

A vezető ellenállása:

$$R = \rho \frac{l}{A},$$

Ahol ρ a fajlagos ellenállás, l a vezető hossza, A a keresztmetszete. Jelen esetben a három vezeték hosszában és anyagában azonos, csak a keresztmetszetükben különböznek. Így ellenállásaik aránya:

$$R_1 : R_2 : R_3 = \frac{1}{A_1} : \frac{1}{A_2} : \frac{1}{A_3} = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$$

Közös nevezőre hozva:

$$\frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{6}{6} : \frac{3}{6} : \frac{2}{6}$$

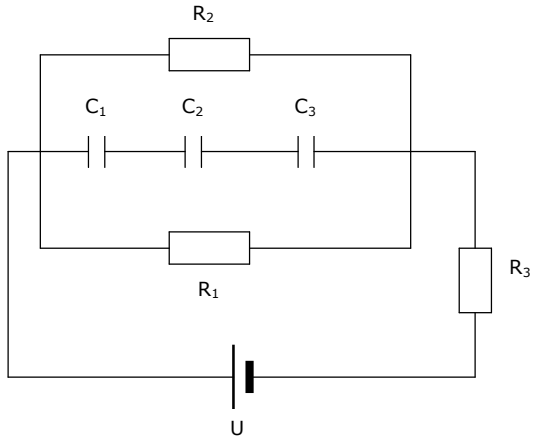
Így az ellenállások aránya:

$$R_1 : R_2 : R_3 = 6 : 3 : 2$$

A 110 V feszültséget 6+3+2 =11 részre osztva egy rész épen 10 V, így a keresett feszültségek:

$$U_1 = 60V, \quad U_2 = 30V, \quad U_3 = 20V$$

6. Számítsa ki a kondenzátorok feszültségét és töltését az ábrán látható kapcsolásban!
(U=200 V, C_1=20 nF, C_2=9 nF, C_3=6 nF, R_1=100 Ω, R_2= 60 Ω R_3=45 Ω)



Megoldás

Először ki kell számítanunk, hogy összesen mekkora feszültség esik a három kondenzátoron. Ez a feszültség megegyezik az R_1 és R_2 ellenállásokon eső feszültséggel (párhuzamos kapcsolás).
Az áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} + R_3 = 82.5\Omega$$

(A kondenzátorok ágában nem folyik áram)

A főágban folyó áram erőssége:

$$I = \frac{U}{R_e} = 2.424A$$

Az R_1 és R_2 ellenállásokon eső feszültség:

$$U_{12} = I \cdot R_{12} = 90.9V,$$

Ahol R_{12} az R_1 és R_2 ellenállások eredője.

A kondenzátorok eredő kapacitása:

$$C_e = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1} = 3.05nF$$

A kondenzátorokon levő összes töltés:

$$Q = C_e \cdot U_{12} = 277.3nC$$

Ez a töltés mindhárom kondenzátoron megjelenik, így:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = 277.3nC$$

A feszültségek pedig:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = 13.86V, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} = 30.8V, \quad U_3 = \frac{Q}{C_3} = 46.2V$$

12. fejezethez

12. Mágnesség, indukció

Ajánlott feladatok

12.1. Egy 20 cm hosszú, 1200 menetes hengeres tekercsre U=20 V feszültséget kapcsolunk. A tekercs közepes menethossza 6 cm, a huzal vastagsága d=0.2 mm, fajlagos ellenállása ρ=0.0175 $\Omega mm^2/m$. Mekkora a mágneses indukció a tekercs belsejében, ha a tekercs vasmag mentes? ($\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Vsec/Am, μ_r=1)

Megoldás:

Egy tekercs belsejében a mágneses indukció:

$$B = \mu_0\mu_r \frac{I \cdot n}{L}.$$

Ahol *I* az áramerősség, *n* a menetszám, *L* a tekercs hossza.
Az áramerősséget kell először meghatároznunk. A feszültség, és a tekercs huzaljának ellenállásából Ohm törvénye segítségével tudjuk kiszámítani a tekercsben folyó áram erősségét:

$$I = \frac{U}{R}$$

A tekercs huzaljának ellenállása:

$$R = \rho \frac{l}{A},$$

Itt A a huzal keresztmetszete, ρ a fajlagos ellenállása, *l* a hossza
A mágneses indukció a tekercs belsejében ezek alapján:

$$B = \mu_0\mu_r \frac{UAn}{L\rho l}$$

Ki kell számolni tehát a huzal hosszát és keresztmetszetét.
A huzal hossza:

$$l = n \cdot \lambda = 7200\ cm = 72\ m,$$

Ahol λ a közepes menethossz. A keresztmetszet:

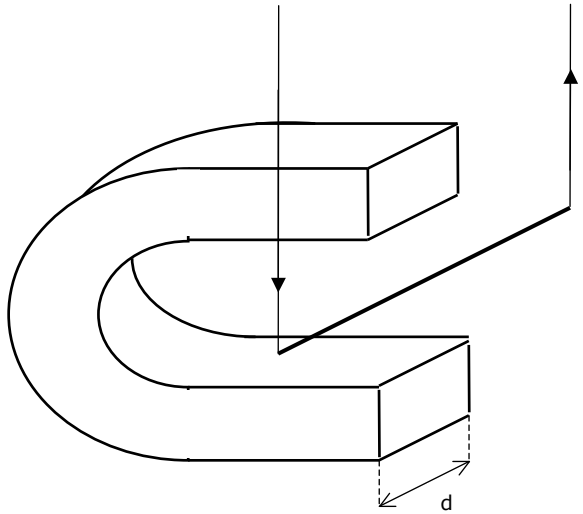
$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 0.0314\ mm^2$$

A mágneses indukció:

$$B = 3.76\cdot10^{-3}\ T = 3.76\ mT$$

12.2 A vízszintes 20 cm hosszú 0.5 cm^2 keresztmetszetű rézrúd hajlékony rézhuzalokkal van felfüggesztve egy patkómágnes sarkai között. A mágnes élei 2 cm szélesek. Ha a rúdban 0.2 A erősségű áram folyik, a felfüggesztő huzalok 2°-os szöget zárnak be a függőlegessel. (a réz sűrűsége: $\rho_{réz}$=8960 kg/m^3)

a. Mekkora a mágneses indukció a mágnes sarkai között?
b. Mekkora gyorsulással lendül ki a rézrúd az áram bekapcsolásának pillanatában?

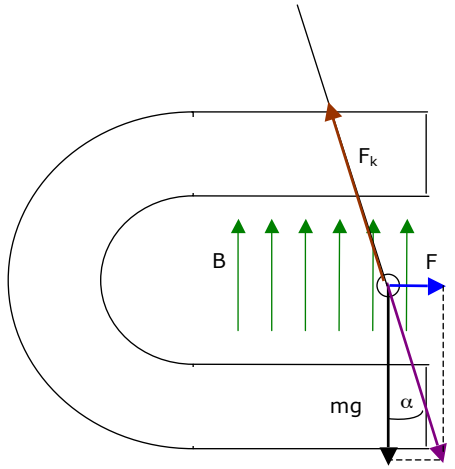


Megoldás

a. Az alábbi ábrán a vezető merőleges a rajz síkjára és az áram a rajz síkjára merőlegesen befelé folyik. Mivel a rézvezető mágneses mezőben van, az alábbi törvény írja le a rá ható erőt:

$$\vec{F} = I \cdot \left(\vec{l} \times \vec{B} \right)$$

Itt $\vec{l}$ a vezető mágneses mezőbe eső szakaszának hossza (esetünkben ez d=2 cm), iránya megegyezik az áram irányával.
A vektori szorzat alapján látható hogy az erő vízszintesen jobbra mutat.



A vezető a gravitáció, a felfüggesztő huzal és a kék nyíllal jelölt F erő hatására kerül egyensúlyba. Ennek alapján:

$$\frac{F}{mg} = tg\alpha$$

Innen:

$$F = mg \cdot tg\alpha$$

$$BId = mg \cdot tg\alpha$$

Az indukció:

$$B = \frac{mg \cdot tg\alpha}{Id} = \frac{\rho Vg \cdot tg\alpha}{ld} = \frac{\rho lAg \cdot tg\alpha}{ld}$$

Behelyettesítés után:

$$B = 7.67 \ T$$

c. A bekapcsolás pillanatában:

$$F = BId = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{BId}{m}$$

Behelyettesítve:

$$a = 0.4324 \ \frac{m}{\sec^2}$$

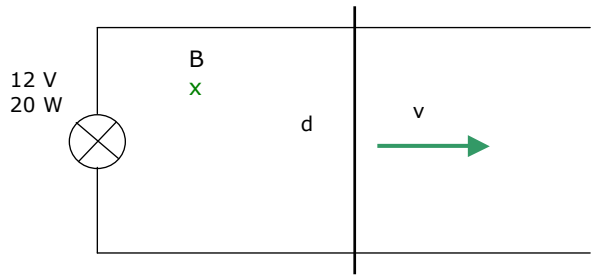
12.3. Az ábrán látható párhuzamos vezető sínpár egy 12 V-os 20 W-os izzóval van összekötve. A sínpárra könnyen csúszó vezető rudat helyezünk úgy, hogy a sínekkel jó elektromos kontaktusban legyen.

a. Mekkora sebességgel kell a vezető rudat a nyíl irányában mozgatni, hogy az izzó teljes fénnyel világítson?

b. Mekkora erő szükséges ehhez?

c. Mekkora munkát végzünk, miközben 3 m úton mozgatjuk a rudat?

(A sínpár a síkjára merőleges B=0.5 T mágneses indukciójú homogénmágneses mezőben van elhelyezve, a sínek ellenállása elhanyagolható, a vezető rúd ellenállása 5 Ω, a sínek távolsága 1m)



Megoldás

a. Először számítsuk ki az izzó üzemi ellenállását:

$$P = U \cdot I \Rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{20}{12} = 1.67 \ \ A$$

$$R_i = \frac{U}{I} = 7.2 \ \ \Omega$$

Ahhoz, hogy az izzó teljes fénnyel világítson, tehát 1.67 A áram kell, hogy folyjon az áramkörben. Az áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = R_i + R_{rúd} = 12.2 \ \ \Omega$$

Az indukált feszültséget az eredő ellenállásból és a kiszámított áramerősségből Ohm törvénye alapján számoljuk ki:

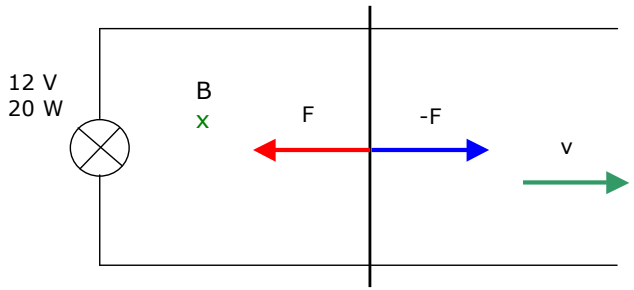
$$U_i = I \cdot R_e = 20.33 \ \ V$$

Felhasználva a mozgási indukció képletét, az ehhez szükséges sebesség:

$$U_i = B \cdot l \cdot v \Rightarrow v = \frac{U_i}{B \cdot l} = \frac{U_i}{B \cdot d} = 40.67 \ \ \frac{m}{\sec},$$

ahol *d*=1 m a vezető sínek távolsága.

b. Mivel áramjárata vezetőre mágneses mezőben erő hat, a csúszó vezető rúdra is erő fog hatni. Az erő iránya Lenz törvénye alapján a sebességgel ellentétes irányú (piros nyíl):



Az erő nagysága:

$$F = B \cdot I \cdot d = 0.833 \ \ N$$

Ahhoz, hogy a rúd állandó sebességgel mozogjon ugyanekkora, de ellenkező irányú erőt kell kifejtenünk (kék nyíl).

d. Ha erőt fejtünk ki egy adott úton, akkor munkát végzünk. Ebben az esetben a
munka:

$$W = F \cdot s = 2.5 \ \ J$$

Mechanikai munkavégzéssel tehát elektromos energiát állítottunk elő és egy izzólámpát működtettünk.

12.4. Homogén mágneses mezőbe az indukció vonalakra merőlegesen egy elektront lövünk be 50 km/sec sebességgel. A mágneses indukció B=1mT, az elektron töltése $Q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, tömege $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg. Számítsuk ki az elektron pályájának sugarát és a keringési időt.

Megoldás

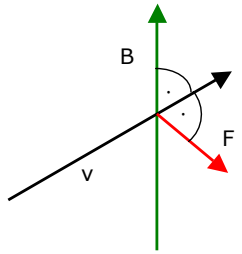
Ha homogén mágneses mezőbe töltött részecske érkezik v sebességgel, akkor hat rá a Lorenz-erő:

Megoldás

Ha homogén mágneses mezőbe töltött részecske érkezik v sebességgel, akkor hat rá a Lorenz-erő:

$$\vec{F} = Q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Esetünkben a vektori szorzat elhagyható, mivel a sebesség merőleges az indukcióra, a létrejövő erő pedig merőleges az indukció és a sebesség síkjára a vektori szorzat szabályai szerint:



Mivel az elektronra más erő nem hat (a nehézségi erő itt nem jöhet számításba, több nagyságrenddel kisebb a Lorenz erőnél), úgy tekinthetjük, hogy a Lorenz erő az erők eredője, azaz az eredő erő a sebeségre merőleges, állandó nagyságú erő. Ekkor viszont egyenletes körmozgás jön létre és a Lorenz erő lesz a centripetáli erő:

$$Q_e v B = m_e \frac{v^2}{r}$$

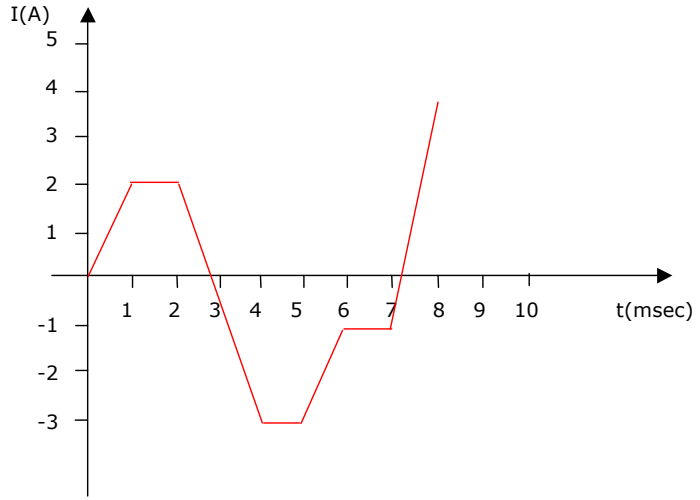
Innen a körpálya sugara:

$$r = \frac{m_e v}{Q_e B} = 2.84 \cdot 10^{-4} m = 0.284 \ mm$$

A keringési idő:

$$T \frac{2r\pi}{v} = 3.57 \cdot 10^{-8} \sec = 35.7 \ n\sec$$

12.5. Adott két szorosan egymásra csévélt tekercs. A belső tekercs hossza l=30 cm, átmérője d=2 cm, menetszáma n_1=500. A külső tekercs meneteinek száma n_2=200, átmérője közelítőleg megegyezik a belső tekercsével. A belső tekercsben az ábra szerint változik az áramerősség:



Számítsuk ki a külső tekercsben indukálódott feszültség időfüggését!
($\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$Vsec/Am, $\mu_r=1$)

Megoldás

A kölcsönös indukciót leíró törvény:

$$U_i = -\mu_0\mu_r \frac{n_1 n_2}{l} A \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

ahol A a tekercs keresztmetszete:

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 3.1416\cdot10^{-4}\ m^2$$

Az áramerősség szakaszonként lineárisan változik, azaz a $\Delta I/\Delta t$ hányados szakaszonként állandó. Az indukált feszültségeket is ezekre a szakaszokra lehet kiszámítani.
A kölcsönös induktivitás:

$$M = \mu_0\mu_r \frac{n_1 n_2}{l} A = 1.316\cdot10^{-4}\ H$$

Ezek után a feszültségek:

$$U_{i1} = -M\cdot\frac{2A}{0.001\text{sec}} = -M\cdot2000\frac{A}{\text{sec}} = -0.2632\ V$$

$$U_{i2} = -M\cdot0 = 0\ V$$

$$U_{i3} = -M\cdot\frac{-5A}{0.002\text{sec}} = -M\cdot\left(-2500\frac{A}{\text{sec}}\right) = 0.329\ V$$

$$U_{i4} = -M\cdot0 = 0\ V$$

$$U_{i5} - M\cdot\frac{2A}{0.001\text{sec}} = -M\cdot2000\frac{A}{\text{sec}} = -0.2632\ V$$

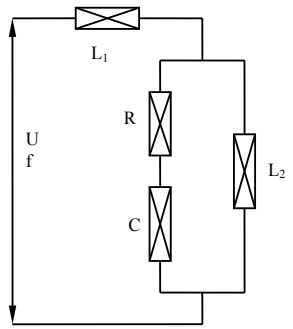
$$U_{i6} = -M\cdot0 = 0\ V$$

$$U_{i7} = -M\cdot\frac{5A}{0.001\text{sec}} = -M\cdot5000\frac{A}{\text{sec}} = -0.658\ V$$

13. fejezethez

Váltakozó áram

1. Számítsuk ki az alábbi kapcsolás RC tagján a komplex teljesítményt és a fáziskülönbséget az áram és feszültség között.



Adatok: U=300V, R=1000Ω, L_1=15,92μH, L_2=31,84μH, C=63,66pF, f=5MHz

Megoldás:

A körfrekvencia:

$$\omega = 2\pi f = 31415926{,}5 \text{ 1/sec}$$

a reaktanciák:

$$\vec{X}_{L1} = jL_1\omega = 500j\Omega$$

$$\vec{X}_{L2} = jL_2\omega = 1000j\Omega$$

$$\vec{X}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{\omega \cdot 63{,}66 \cdot 10^{-12}} = -500j\Omega$$

Az L_2RC elemeket tartalmazó párhuzamos tag eredő impedanciája:

$$\vec{Z}_{RL_2C} = \frac{\vec{Z}_{RC} \cdot \vec{X}_{L_2}}{\vec{Z}_{RC} + \vec{X}_{L_2}} = \frac{(1000 - 500j)\cdot 1000j}{1000 - 500j + 1000j} = \frac{(1000 - 500j)\cdot 1000j}{1000 + 500j} =$$

$$= \frac{10j(1000 - 500j)}{10 + 5j} \cdot \frac{10 - 5j}{10 - 5j} = \frac{(10000j + 5000)}{(10 + 5j)\cdot(10 - 5j)} \cdot (10 - 5j) = \frac{(10000j + 5000)(10 - 5j)}{10^2 - (5j^2)} =$$

$$= \frac{100.000j + 50.000 + 50.000 - 25.000j}{125} = \frac{100.000 + 75.000j}{125} = (800 + 600j)\Omega$$

Az egész áramkör eredő impedanciája:

$$\vec{Z}_e = \vec{Z}_{RL_2C} + \vec{X}_{L_1} = 800 + 600j + 500j =$$

$$\vec{Z}_e = (800 + 1100j)\Omega$$

A főágban folyó áram erőssége:

$$\vec{I} = \frac{\vec{U}}{\vec{Z}_e} = \frac{300}{800+1100j} \cdot \frac{800-1100j}{800-1100j} = \frac{3}{8+11j} \cdot \frac{8-11j}{8-11j} = \frac{24-33j}{8^2-(11j)^2} =$$

$$= \frac{24-33j}{64+121} = \frac{24-33j}{185} = (0{,}13-0{,}178j)\text{A}$$

Az RL_2C tagon eső feszültség:

$$\vec{U}_{RL_2C} = \vec{I}\vec{Z}_{RL_2C} = (0{,}13-0{,}178j)\cdot(800+600j) =$$
$$(210{,}6-64{,}56j)\text{V} = \vec{U}_{RC}$$

Az RC ágban folyó áram:

$$\vec{I}_{RC} = \frac{\vec{U}_{RC}}{\vec{Z}_{RC}} = \frac{210{,}6-64{,}56j}{1000-500j} \cdot \frac{1000+500j}{1000+500j} =$$

$$= \frac{210600+105300j-64560j+32280}{1250000} = \frac{242880+40740j}{1250000}$$

$$\vec{I}_{RC} = (0{,}1943+0{,}0326j)\text{A}$$

Az RC ágon létrejövő teljesítmény:

$$\vec{S}_{RC} = \vec{U}_{RC} \cdot \vec{I}^*_{RC}$$

ahol $\vec{I}^*_{RC}$ az $\vec{I}_{RC}$ komplex konjugáltja

$$\vec{S}_{RC} = \vec{U}_{RC} \cdot \vec{I}^*_{RC} = (210{,}6-64{,}56j)\cdot(0{,}1943-0{,}0326j) =$$
$$= (38{,}82-19{,}41j)\text{VA}$$

A látszólagos teljesítmény:

$$\vec{S}_{RC} = \sqrt{38.82^2 + (-19.41)^2} = 43.4 \ VAr$$

A hatásos teljesítmény a komplex teljesítmény valós része:

P_h=38,82 W

A meddő teljesítmény a képzetes rész:

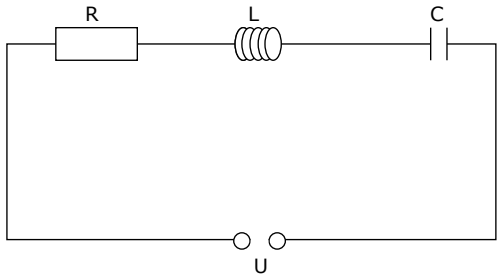
P_m= 19,41 VAr

Az áram és feszültség vektorok által bezárt szög:

$$\cos\varphi = \frac{R}{\left|\vec{Z}_{RC}\right|} = \frac{1000}{\sqrt{1000^2 + 500^2}} = \frac{1000}{1118.03} = 0.89443$$

$\varphi_{U,I}$=26,565°

2. Számítsuk ki a komplex teljesítményt a veszteséges tekercsen (Z_{RL} impedancián), és a feszültség és áram közötti fáziskülönbséget!



U=100 V
f=50 Hz
R=10 Ω
C=318,3 μF
L=15.9155 mH

Megoldás

Először számítsuk ki a reaktanciákat:

$$\omega = 2\pi f = 314.159 \ \frac{1}{\sec}$$

$$\vec{X}_L = jL\omega = 5j \ \Omega$$

$$\vec{X}_C = -j\frac{1}{C\omega} = -10j \ \Omega$$

Az eredő impedancia:

$$\vec{Z}_e = (10 - 5j)\Omega$$

Az áramerősség:

$$\vec{I} = \frac{\vec{U}}{\vec{Z}_e} = \frac{100}{10-5j} \cdot \frac{10+5j}{10+5j} = (8+4j)A$$

Az *RL* tagon eső feszültség:

$$\vec{U}_{RL} = \vec{I} \cdot \vec{Z}_{RL} = (8+4j)\cdot(10+5j) = (60+80j) \ V$$

A komplex teljesítmény az RL tagon:

$$\vec{S}_{RL} = \vec{U}_{RL} \cdot \vec{I}^*_{RL} = (60+80j)\cdot(8-4j) = (800+400j) \ VA$$

A hatásos teljesítmény a komplex teljesítmény való része:

$$P_h = 800 \ W$$

A meddő teljesítmény a képzetes rész:

$$P_m = 400 \ VAr$$

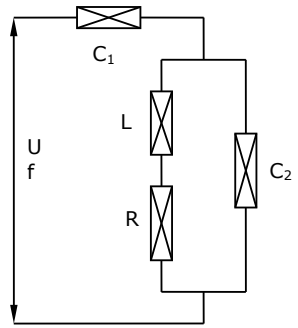
Az áram és feszültség közötti fáziskülönbség:

$$\cos\varphi = \left|\frac{R}{\vec{Z}_{RL}}\right| = \frac{10}{\sqrt{125}}$$

$$\varphi = 26.56^o$$

3. Számítsa ki az RL tagon létrejövő komplex teljesítményt és a főág árama és feszültsége között fáziskülönbséget.

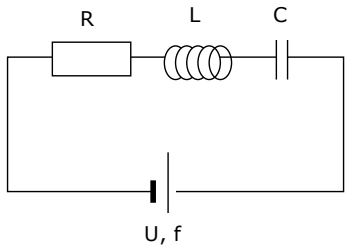
U=200 V
f=50 Hz
R=20 Ω
C_1=318.3 μF
C_2=159.15 μF
L=15.9155 mH



(S_{RL}= (882.54+220.64j)VA, $\varphi = 57.88^o$)

4. Határozza meg az alábbi kapcsolásban az eredő impedanciát és a feszültség és áram közötti fáziskülönbséget!

U=200 V
f=100 Hz
C=7.958 μF
L=318.3 mH
R=200 Ω

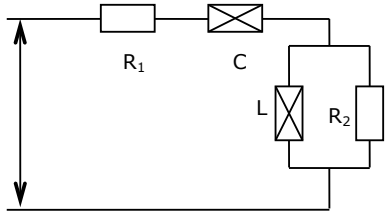


(Z_e=200 Ω, $\varphi = 0^o$)

5. Adott az ábrán látható kapcsolás.

C=3,183 μF
R_1=5 Ω
R_2=2 Ω
L=63,66 μH

U=117 V
f= 5 kHz



Számolja ki a főágban folyó áramot, a $\cos\phi_{U,I}$ értékét és a párhuzamos LR_2 tag által felvett teljesítményt komplex alakban!
(6+9j, 0,5547, 0,5547)